UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Sebastian Toth

Lösungsvorschlag
Übungen zur Vorlesung
Analysis III
Wintersemester 2019/2020

Blatt 14 Abgabetermin: /

Aufgabe 57

Wir zeigen $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ist $I \in \mathcal{F}$, so existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $I = (x, x+1]$. Nach Bemerkung 1.2 (a) der Vorlesung ist

$$I = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} (x, x+1+\tfrac{1}{k}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

und damit $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Nach Satz 1.6 (c) der Vorlesung ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{(a,b];\ a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } a < b\})$. Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, so ist

$$(a,b] = \Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a+n, a+n+1]\Big) \cap \Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (b-n-1, b-n]\Big) \in \sigma(\mathcal{F}).$$

Es folgt $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathcal{F})$.

Aufgabe 58

Nach Aufgabe 8 ist eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ genau dann messbar, wenn $\{x \in X;\ f(x) \geq a\} \in \mathfrak{M}$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt. Da bekanntlich $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist, genügt es, die Rückrichtung zu zeigen. Für alle $q \in \mathbb{Q}$ gelte $\{x \in X;\ f(x) \geq q\} \in \mathfrak{M}$. Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann existiert eine Folge $(q_k)_k$ rationaler Zahlen in $(-\infty, a]$ mit $\lim_{k\to\infty} q_k = a$. Es folgt

$$\{x \in X;\ f(x) \geq a\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{x \in X;\ f(x) \geq q_k\} \in \mathfrak{M}.$$

Aufgabe 59

Die Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x}{1+x^4}$ ist stetig, und es ist $f \geq 0$. Wir wollen Aufgabe 19 anwenden und prüfen, ob das uneigentliche Riemann-Integral $\int_0^\infty f(x)\,dx$ existiert. Sei dazu $R > 0$ beliebig. Wir berechnen

$$\int_0^R \frac{x}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^R \frac{2x}{1+(x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\arctan(R^2).$$

Es folgt

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}\arctan(R^2) = \frac{\pi}{4} < \infty,$$

und mit Aufgabe 19 erhalten wir die Lebesgue-Integrierbarkeit von f mit

$$\int_{[0,\infty)} f\,d\lambda = \frac{\pi}{4}.$$

Aufgabe 60

(a) Sei $n \in \mathbb{N}^*$ beliebig. Die Funktionen $g_n : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{n}$ und

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{, falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{, falls } x = 0 \end{cases}$$

sind stetig, denn es ist $\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \sin'(0) = \cos(0) = 1$. Folglich ist auch $\varphi \circ g_n : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ stetig, also Riemann- und damit Lebesgue-integrierbar auf $[0,\pi]$. Da f_n λ-fast überall mit $\varphi \circ g_n$ übereinstimmt, folgt mit Bemerkung 3.14 (c) die Behauptung.

(b) Aufgrund der Stetigkeit von φ in 0 konvergiert die Funktionenfolge $(\varphi \circ g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ auf $[0,\pi]$ punktweise gegen 1. Ferner ist $\varphi \circ g_n \in \mathscr{L}^1([0,\pi])$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$, und wegen $\frac{\sin x}{x} \leq 1$ für alle $x > 0$ gilt für alle $x \in [0,\pi]$ und alle $n \in \mathbb{N}^*$ die Abschätzung

$$|\varphi(g_n(x))| \leq 1.$$

Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt

$$a_n = \int_{[0,\pi]} f_n \, d\lambda = \int_{[0,\pi]} \varphi \circ g_n \, d\lambda \longrightarrow \int_{[0,\pi]} 1 \, d\lambda = \pi \qquad (n \to \infty).$$

Aufgabe 61

Wir zeigen, dass die Menge K kompakt ist. Die Funktionen $\varphi_f, \varphi_g : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\varphi_f(x,y,z) = \sqrt{y^2+z^2} - f(x) \quad \text{und} \quad \varphi_g(x,y,z) = g(x) - \sqrt{y^2+z^2},$$

sind stetig, also ist $K = \varphi_f^{-1}([0,\infty)) \cap \varphi_g^{-1}([0,\infty))$ abgeschlossen. Für $(x,y,z) \in K$ gilt ferner

$$\|(x,y,z)\|^2 \leq x^2 + g(x)^2 \leq \max\{a^2,b^2\} + \|g\|_{[a,b]}^2.$$

Folglich ist K auch beschränkt und damit nach dem Satz von Heine-Borel kompakt. Als abgeschlossene Menge liegt K insbesondere in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$. Um das Volumen $\lambda(K)$ von K zu berechnen, verwenden wir das Cavalierische Prinzip. Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$K_x = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2;\ (x,y,z) \in K\} = \begin{cases} \{(y,z) \in \mathbb{R}^2;\ f(x) \leq \sqrt{y^2+z^2} \leq g(x)\} & \text{, falls } x \in [a,b] \\ \emptyset & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Mit der Bezeichnung $K(r) = \{x \in \mathbb{R}^2;\ \|x\| \leq r\}$ für $r > 0$ erhalten wir $K_x = K(g(x)) \setminus \operatorname{Int}(K(f(x)))$ für $x \in [a,b]$. Da die Menge $\partial K(f(x))$ nach Aufgabe 28 (b) Teil (i) eine λ-Nullmenge ist, folgt

$$\lambda(K_x) = \lambda(K(g(x))) - \lambda(K(f(x))) = \pi(g(x)^2 - f(x)^2).$$

für $x \in [a,b]$. Insgesamt berechnen wir mit dem Cavalierischen Prinzip (Beispiel 6.9 (b)) und Satz 5.12:

$$\lambda(K) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(K_x) \, d\lambda(x) = \pi \int_a^b (g(x)^2 - f(x)^2)$$

Aufgabe 62

Da $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge ist, existieren endlich viele Parametrisierungen $g_j : \Omega_j \to V_j \subset M$ $(j \in \{1, \ldots, r\})$ mit $M \subset \bigcup_{j=1}^r V_j$. Für $j \in \{1, \ldots, r\}$ ist $\Omega_j \subset \mathbb{R}^p$ offen, und die Abbildung $g_j : \Omega_j \to \mathbb{R}^n$ ist stetig differenzierbar. Wegen $p < n$ folgt mit Aufgabe 28 (a), dass $V_j = g_j(\Omega_j) \subset \mathbb{R}^n$ eine λ-Nullmenge ist für $j \in \{1, \ldots, r\}$. Unmittelbar erhalten wir

$$\lambda(M) \leq \sum_{j=1}^{r} \lambda(V_j) = 0.$$

Aufgabe 63

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} ra_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & ra_n \end{pmatrix}$$

ist invertierbar, also ist die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$ linear und bijektiv und damit C^1-invertierbar mit

$$\det(J_f(x)) = \det(A) = r^n \prod_{j=1}^{n} a_j > 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Man rechnet leicht nach, dass $E = f(K_n)$ gilt. Folglich ist $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ als kompakte Menge. Mit der Transformationsformel erhalten wir

$$\begin{aligned} \lambda(E) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{f(K_n)} \, d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{K_n} |\det(J_f(x))| \, d\lambda(x) \\ &= r^n \prod_{j=1}^{n} a_j \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{K_n} \, d\lambda \\ &= \tau_n r^n \prod_{j=1}^{n} a_j \end{aligned}$$

Aufgabe 64

Für $R > 0$ ist die Menge $K(R) := \{x \in \mathbb{R}^2;\ \|x\| \leq R\} \subset \mathbb{R}^2$ kompakt. Folglich liegen nach Korollar 4.7 der Vorlesung alle Funktionen $f\chi_{K(R)}$ in $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^2)$. Für $r \in [0, \infty)$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$ ist $(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in K(R)$ genau dann, wenn $r \in [0, R]$ gilt. Mit Beispiel 7.12 (a) erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f\chi_{K(R)} \, d\lambda &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} (f\chi_{K(R)})(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r \, dr \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{R} e^{-r^2} r \, dr \, d\varphi \\ &= 2\pi(-\frac{1}{2}e^{-R^2} + \frac{1}{2}) \\ &= \pi(1 - e^{-R^2}) \\ &\to \pi \qquad (R \to \infty). \end{aligned}$$

Die Folge $(f\chi_{K(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ ist wegen $f > 0$ und $K(n) \subset K(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ eine punktweise monoton wachsende Folge in $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^2)$, die für $n \to \infty$ punktweise gegen f konvergiert. Ferner ist nach obiger Rechnung

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{R}^2} f\chi_{K(n)}\, d\lambda < \infty.$$

Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt die Lebesgue-Integrierbarkeit der Funktion f mit

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} f\chi_{K(n)}\, d\lambda = \pi.$$

Mit dem Satz von Fubini liefert dies

$$\pi = \int_{\mathbb{R}^2} f\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{-y^2}\, d\lambda(y)\, d\lambda(x) = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, d\lambda \right)^2,$$

und mit Aufgabe 19 angewendet mit $I = [0, \infty)$ und der entsprechenden Version für $I = (-\infty, 0]$ folgt die Behauptung, denn $e^{-x^2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 65

Es ist $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und die Funktion $r : I \to (0, \infty)$, $z \mapsto \cos(z)$ ist stetig differenzierbar. Mit Beispiel 9.12 (b) der Vorlesung folgt, dass

$$\tilde{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times I;\ x^2 + y^2 = r(z)^2\} \subset \mathbb{R}^3$$

eine 2-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit ist. Die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (z, y, x)$ ist linear mit $\|\Phi(x, y, z)\| = \|(x, y, z)\|$. Mit Satz 9.13 folgt also, dass $M = \Phi(\tilde{M}) \subset \mathbb{R}^3$ eine 2-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit ist mit $\mathrm{Vol}_2(M) = \mathrm{Vol}_2(\tilde{M})$. Die Funktion $g : I \to (0, \infty)$,

$$t \mapsto r(t)\sqrt{1 + r'(t)^2} = \cos(t)\sqrt{1 + (\sin t)^2}$$

ist stetig fortsetzbar auf $\overline{I}$, also Lebesgue-integrierbar über I. Mittels Substitution berechnen wir (beachte, dass $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\sqrt{1 + (\sin t)^2}\, dt &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + u^2}\, du \\
&= 2 \cdot \int_0^1 \sqrt{1 + u^2}\, du \\
&= 2 \cdot \int_0^{\log(1+\sqrt{2})} \cosh(t)\sqrt{1 + (\sinh t)^2}\, dt \\
&= 2 \cdot \int_0^{\log(1+\sqrt{2})} (\cosh t)^2\, dt.
\end{aligned}$$

Mit partieller Integration folgt

$$\int (\cosh t)^2\, dt = \cosh(t)\sinh(t) - \int (\sinh t)^2\, dt = \cosh(t)\sinh(t) + t - \int (\cosh t)^2\, dt,$$

also erhalten wir

$$\begin{aligned}
2 \cdot \int_0^{\log(1+\sqrt{2})} (\cosh t)^2\, dt &= \cosh(\log(1 + \sqrt{2}))\sinh(\log(1 + \sqrt{2})) + \log(1 + \sqrt{2}) \\
&= \frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{2} + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}\right)\left(1 + \sqrt{2} - \frac{1}{1 + \sqrt{2}}\right) + \log(1 + \sqrt{2}) \\
&= \sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}).
\end{aligned}$$

Mit Beispiel 9.12 (b) liefert dies

$$\mathrm{Vol}_2(M) = 2\pi \int_I r(t)\sqrt{1 + r'(t)^2}\, d\lambda(t) = 2\pi\Big(\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2})\Big).$$