UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Toth

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2019/2020

Blatt 2 Abgabetermin: Mittwoch, 30.10.2019, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 5 (2+1+1=4 Punkte)

Sei $\mathfrak{M}$ eine σ-Algebra auf einer Menge X und sei $\mu : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ eine Funktion mit $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für alle $A, B \in \mathfrak{M}$ mit $A \cap B = \emptyset$. Zeigen Sie für $A, B \in \mathfrak{M}$:

(a) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$,

(b) Ist $A \subset B$, so gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$,

(c) Ist $A \subset B$ und $\mu(A) < \infty$, so gilt $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Insbesondere besitzt jedes Maß μ auf $\mathfrak{M}$ die Eigenschaften (a), (b) und (c).

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Seien X, $\mathfrak{M}$ und μ wie in Aufgabe 5. Wir betrachten die folgenden Aussagen:

(i) μ ist ein Maß.

(ii) Für jede Folge $(A_n)_n$ in $\mathfrak{M}$ mit $A_n \uparrow A$, $A \in \mathfrak{M}$, ist $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

(iii) Für jede Folge $(A_n)_n$ in $\mathfrak{M}$ mit $\mu(A_0) < \infty$ und $A_n \downarrow A$, $A \in \mathfrak{M}$, ist $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

(iv) Für jede Folge $(A_n)_n$ in $\mathfrak{M}$ mit $\mu(A_0) < \infty$ und $A_n \downarrow \emptyset$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

Zeigen Sie, dass die Implikationen

$$\text{(i)} \Leftrightarrow \text{(ii)} \Rightarrow \text{(iii)} \Leftrightarrow \text{(iv)}$$

immer erfüllt sind, und dass (ii) $\Leftarrow$ (iii) ebenfalls gilt, falls $\mu(X) < \infty$ ist.

(bitte wenden)

Aufgabe 7 **(4 Punkte)**

Sei $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ ein Maß mit $\mu(\mathbb{R}) = 1$.
Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \mu(]-\infty, x])$ monoton wächst und dass gilt:

(i)
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \lim_{x\to\infty} f(x) = 1,$$

(ii)
$$\lim_{x\downarrow a} f(x) = f(a) \text{ für alle } a \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 8 **(5×1=5 Punkte)**

Sei $(X, \mathfrak{M})$ ein messbarer Raum und sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist messbar.

(ii) Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $\{x \in X \mid f(x) \geq a\} \in \mathfrak{M}$.

(iii) Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $\{x \in X \mid f(x) > a\} \in \mathfrak{M}$.

(iv) Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $\{x \in X \mid f(x) \leq a\} \in \mathfrak{M}$.

(v) Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $\{x \in X \mid f(x) < a\} \in \mathfrak{M}$.

Aufgabe 9* **(4* Punkte)**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass die Ableitung

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$$

Borel-messbar ist, das heißt messbar als Funktion auf dem messbaren Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Sie können die Übungen in Gruppen von bis zu 3 Personen bearbeiten. Diese Gruppen müssen aus Teilnehmern einer Übungsgruppe bestehen und dürfen sich nicht ständig ändern. Die Abgabe der Übungsblätter erfolgt in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Gebäude E 2.5.

Bremser	Briefkasten
Sascha Blug	05
Marcel Scherer	09

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre