UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Toth

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2019/2020

Blatt 3 Abgabetermin: Mittwoch, 06.11.2019, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 10 (2+2+2=6 Punkte)

Sei $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum, $f : X \to Y$ eine messbare Abbildung in einen metrischen Raum (Y, d) und E ein Banachraum. Zeigen Sie:

(a) $\mu^f : \mathcal{B}(Y) \to [0, \infty],\ B \mapsto \mu(f^{-1}(B))$ definiert ein Maß auf $\mathcal{B}(Y)$.

(b) Ist $g \in \mathrm{St}(\mu^f, E)$ eine Treppenfunktion, so ist auch $g \circ f \in \mathrm{St}(\mu, E)$ eine Treppenfunktion und

$$\int_Y g\, d\mu^f = \int_X g \circ f\, d\mu.$$

(c) Ist $g \in \mathscr{L}^1(\mu^f, E)$ integrabel bezüglich μ^f, so ist $g \circ f \in \mathscr{L}^1(\mu, E)$ integrabel bezüglich μ und es ist

$$\int_Y g\, d\mu^f = \int_X g \circ f\, d\mu.$$

Aufgabe 11 (2+2=4 Punkte)

Sei $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to [0, \infty)$ messbar derart, dass eine σ-endliche Menge $A \in \mathfrak{M}$ existiert mit $f|_{A^c} \equiv 0$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine Folge $(g_k)_k$ in $\mathrm{St}(\mu, \mathbb{R})$ mit $0 \leq g_k \leq g_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x) \quad (x \in X).$$

(*Hinweis: Wählen Sie Mengen endlichen Maß es $A_k \in \mathfrak{M}$ mit $A_k \uparrow A$ und benutzen Sie Bemerkung 1.15 (b) aus der Vorlesung.*)

(b) Es ist $f \in \mathscr{L}^1(\mu, \mathbb{R})$ genau dann, wenn

$$s := \sup \left\{ \int_X g\, d\mu \mid g \in \mathrm{St}(\mu, \mathbb{R}) \text{ mit } 0 \leq g \leq f \right\} < \infty$$

gilt. In diesem Fall ist $\int_X f\, d\mu = s$.

(bitte wenden)

Aufgabe 12 **(2+2+2=6 Punkte)**

Sei $X = \mathbb{N}$, $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und μ das Zählmaß auf $\mathfrak{M}$ (Beispiel 2.3 (a)). Zeigen Sie:

(a) Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist eine Treppenfunktion genau dann, wenn ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $f(n) = 0$ für alle $n > n_0$. In diesem Fall ist

$$\int_{\mathbb{N}} f\, d\mu = \sum_{n=0}^{n_0} f(n).$$

(b) Ist $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\sum_{n=0}^{\infty} |f(n)| < \infty$, so ist $f \in \mathscr{L}^1(\mu, \mathbb{R})$ und es gilt

$$\int_{\mathbb{N}} f\, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} f(n).$$

(c) $\mathscr{L}^1(\mu, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} |f(n)| < \infty\}$.

Aufgabe 13 **(3 Punkte)**

Sei X eine Menge, $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(X)$, $x \in X$ und $\delta_x : \mathfrak{M} \to [0, 1]$ das Dirac-Maß zu x. Sei ferner E ein Banachraum. Bestimmen Sie $\mathscr{L}^1(\delta_x, E)$ und berechnen Sie $\int_X f\, d\delta_x$ für $f \in \mathscr{L}^1(\delta_x, E)$.

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre