UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Toth

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2019/2020

Blatt 4 Abgabetermin: Mittwoch, 13.11.2019, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 14 (3 Punkte)

Sei $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathscr{L}^1(\mu, \mathbb{C})$. Zeigen Sie: Ist $g : X \to \mathbb{C}$ messbar und existiert eine Nullmenge $N \in \mathfrak{M}$ so, dass $g|_{N^c}$ beschränkt ist, so ist $fg \in \mathscr{L}^1(\mu, \mathbb{C})$ und

$$\|fg\|_1 \leq \inf \{\|g\|_{N^c} \mid N \in \mathfrak{M} \text{ Nullmenge}\} \cdot \|f\|_1.$$

Aufgabe 15 (3+2=5 Punkte)

Sei $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum, sei $A \in \mathfrak{M}$ eine messbare Menge und seien $f \in \mathscr{L}^1(\mu, E)$ und $g : A \to E$ zwei Funktionen in einen Banachraum E. Zeigen Sie:

(a) Ist $\mathfrak{M}|A$ wie in Aufgabe 4 die von $\mathfrak{M}$ induzierte σ-Algebra auf A und ist $\nu := \mu|_{(\mathfrak{M}|A)}$ die Einschränkung des Maßes μ auf $\mathfrak{M}|A$, so ist $f|_A \in \mathscr{L}^1(\nu, E)$ und es gilt

$$\int_A f|_A \, d\nu = \int_X f\chi_A \, d\mu.$$

(b) Sei $\tilde{g} : X \to E$,

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{, falls } x \in A \\ 0 & \text{, falls } x \notin A \end{cases}$$

die triviale Fortsetzung von g auf X. Dann ist $g \in \mathscr{L}^1(\nu, E)$ genau dann, wenn $\tilde{g} \in \mathscr{L}^1(\mu, E)$ gilt. In diesem Fall ist

$$\int_A g \, d\nu = \int_X \tilde{g} \, d\mu.$$

(bitte wenden)

Aufgabe 16 **(3 Punkte)**

Sei $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie: Ist $(g_k)_k$ eine Folge in $\mathscr{L}^1(\mu, \mathbb{R})$ mit $g_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_X g_k \, d\mu < \infty,$$

so existiert eine μ-integrable Funktion $g \in \mathscr{L}^1(\mu, \mathbb{R})$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) = g(x)$ für μ-fast alle $x \in X$ und

$$\int_X g \, d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \int_X g_k \, d\mu.$$

Aufgabe 17 **(2+1+2=5 Punkte)**

Sei $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum und sei $f \in \mathscr{L}^1(\mu, \mathbb{C})$. Wir definieren $\nu_f : \mathfrak{M} \to \mathbb{C}$ durch

$$\nu_f(A) := \int_A f \, d\mu \quad \left(:= \int_X f \chi_A \, d\mu \right).$$

Zeigen Sie:

(a) ν_f ist ein komplexes Maß, d.h. es gilt $\nu_f(\emptyset) = 0$ und $\nu_f\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu_f(A_k)$ für jede Folge $(A_k)_k$ paarweise disjunkter Mengen in $\mathfrak{M}$. Dabei wird die Konvergenz dieser Reihe mit behauptet; sie konvergiert sogar absolut.

(b) Jede μ-Nullmenge in $\mathfrak{M}$ ist auch eine ν_f-Nullmenge.

(c) Für jede disjunkte Zerlegung $X = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ mit messbaren Mengen $A_k \in \mathfrak{M}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\nu_f(A_k)| \leq \|f\|_1.$$

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre