UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Toth

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2019/2020

Blatt 5 Abgabetermin: Mittwoch, 20.11.2019, vor der Vorlesung

Aufgabe 18 (4 Punkte)

Sei $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum, (Y, d) ein metrischer Raum und $f : X \times Y \to E$ eine Funktion in einen Banachraum E mit

(i) Für jedes $x \in X$ ist die Funktion $Y \to E, y \mapsto f(x, y)$ stetig,

(ii) für jedes $y \in Y$ ist die Funktion $X \to E, x \mapsto f(x, y)$ μ-integrabel,

(iii) für jedes $y_0 \in Y$ gibt es eine Umgebung $U \subseteq Y$ von y_0 und eine Funktion $g \in \mathscr{L}^1(\mu, \mathbb{R})$ mit $\|f(x, y)\| \leq g(x)$ für alle $(x, y) \in X \times U$.

Zeigen Sie, dass die Abbildung $F : Y \to E, F(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$ stetig ist.

Aufgabe 19 (4 Punkte)

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $a < b$, $I = [a, b)$ ein halboffenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie: Es ist genau dann $f \in \mathscr{L}^1(\lambda|_I, \mathbb{R})$, wenn das uneigentliche Riemann-Integral $\int_a^b |f(x)|\, dx$ existiert. In diesem Fall existiert auch das uneigentliche Riemann-Integral von f über $[a, b)$ und es gilt

$$\int_I f\, d\lambda = \int_a^b f(x)\, dx.$$

(Hinweis : Sie dürfen benutzen, dass für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$ und jede steige Funktion $h : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ gilt, dass $\int_{[\alpha,\beta]} h(x) d\lambda(x) = \int_\alpha^\beta h(x) dx$ ist. Dabei bezeichnet die linke Seite das Lebesgue- und die rechte Seite das Riemann-Integral von h auf dem kompakten Intervall $[\alpha, \beta]$.)

Aufgabe 20 (4 Punkte)

Sei $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ ein positives Maß derart, dass $\mu(Q) = \lambda(Q)$ für jeden offenen Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ gilt. Zeigen Sie, dass schon $\mu = \lambda$ ist.

(Hinweis : Benutzen Sie die Definition des Lebesgue-Maßes λ, um zunächst $\mu(A) \leq \lambda(A)$ für jede Borelmenge $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ zu zeigen.)

(bitte wenden)

Aufgabe 21 **(3 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\arctan(x)}{1 + x^2}$$

Lebesgue-integrierbar ist und berechnen Sie

$$\int_{[0,\infty)} f \, d\lambda.$$

Aufgabe 22* **(1*+2*+2*=5* Punkte)**

Wir betrachten die Funktion

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{, falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{, falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) Die Funktion f ist stetig.

(b) Das uneigentliche Riemann-Integral $\int_0^\infty f(x)\,dx$ existiert.
(*Hinweis : Integrieren Sie partiell und benutzen Sie das Cauchy-Kriterium für Folgen, um die Konvergenz von* $(\int_0^{t_n} f(x)\,dx)_n$ *für jede reelle Folge* $(t_n)_n$ *mit* $t_n \to \infty$ *für* $n \to \infty$ *zu zeigen.*)

(c) Die Funktion f ist nicht Lebesgue-integrierbar.

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre