UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Toth

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2019/2020

Blatt 6 Abgabetermin: Mittwoch, 27.11.2019, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 23 (6x1=6 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{[0,2]\times[3,4]} (2x+3y)\,d\lambda(x,y)$,

(b) $\displaystyle\int_{[0,1]\times[0,1]} (xy+y^2)\,d\lambda(x,y)$,

(c) $\displaystyle\int_{[1,2]\times[1,2]} e^{x+y}\,d\lambda(x,y)$,

(d) $\displaystyle\int_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \sin(x+y)\,d\lambda(x,y)$,

(e) $\displaystyle\int_{[1,2]\times[2,3]\times[0,2]} \frac{2z}{(x+y)^2}\,d\lambda(x,y,z)$,

(f) $\displaystyle\int_{[0,1]\times[0,1]\times[0,1]} \frac{x^2z^3}{1+y^2}\,d\lambda(x,y,z)$.

Aufgabe 24 (4 Punkte)

Sei $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(0,0) = 0$ und $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ für $(x,y) \neq (0,0)$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} f(x,y)\,d\lambda(y) \right) d\lambda(x) \neq \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} f(x,y)\,d\lambda(x) \right) d\lambda(y),$$

obwohl beide Doppelintegrale existieren.

(*Hinweis : Bilden Sie partielle Ableitungen von* $\arctan(\frac{x}{y})$.)

Aufgabe 25 (2+2=4 Punkte)

Seien μ, ν und λ die Lebesgue-Maße auf $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^{n-k}$ und $\mathbb{R}^n$. Seien außerdem $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-k})$ Borelmengen. Zeigen Sie:

(a) Haben A und B endliches Lebesgue-Maß, so ist $\lambda(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$.
(*Hinweis : Zeigen Sie zunächst mit Hilfe geeigneter Quaderüberdeckungen von A und B, dass $A \times B$ eine Menge endlichen Lebesgue-Maßes ist.*)

(b) Ist $\mu(A) = 0$, so ist auch $\lambda(A \times B) = 0$.

(bitte wenden)

Sei im Folgenden τ_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel $K_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$. Sie dürfen benutzen, dass $\lambda(\{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq r\}) = r^n \tau_n$ für alle $r \in [0, \infty[$ gilt.

Aufgabe 26 (1+2+2=5 Punkte)

Seien $r, R \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq r < R$ und sei $f : [r, R] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Wir definieren ferner $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid r < \|x\| \leq R\}$, und für festes $N \in \mathbb{N}^*$ bezeichne $T = T(N) = (t_k)_{k=0}^N$ die durch

$$t_k = r + \frac{k}{N}(R - r)$$

für $k \in \{0, \ldots, N\}$ definierte Teilung des Intervalls $[r, R]$. Zeigen Sie nacheinander:

(a) Zu jedem $k \in \{1, \ldots, N\}$ existiert ein Punkt $\xi_k \in (t_{k-1}, t_k)$ mit

$$t_k^n - t_{k-1}^n = n\xi_k^{n-1}(t_k - t_{k-1}).$$

(b) Sei $f_N = \sum_{k=1}^N f(\xi_k)\chi_{A_k}$ mit $A_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid t_{k-1} < \|x\| \leq t_k\}$ für $k \in \{1, \ldots, N\}$. Dann ist

$$\lim_{N \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_N \, d\lambda = n\tau_n \int_r^R f(t)t^{n-1} \, dt.$$

(c) Es gilt

$$\int_K f(\|x\|) \, d\lambda = n\tau_n \int_r^R f(t)t^{n-1} \, dt.$$

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre