UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Toth

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2019/2020

Blatt 7 Abgabetermin: Mittwoch, 04.12.2019, vor der Vorlesung

Aufgabe 27 (3+2=5 Punkte)

(a) Beweisen Sie das folgende Resultat, das schon Archimedes gefunden hat: Das Volumen des Segments eines Paraboloids

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [0, h] \text{ und } y^2 + z^2 \leq \frac{r^2 x}{h} \right\} \quad (r, h > 0)$$

ist halb so groß wie das Volumen eines Zylinders mit dem Radius r und der Höhe h. Wie verhält sich das Volumen eines Kegels mit Grundflächenradius r und Höhe h zu dem Volumen des Zylinders?

(b) Seien $r, R \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < R$ und sei $T \subset \mathbb{R}^3$ der Torus, der durch Rotation der Kreisscheibe

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \text{ und } (x - R)^2 + z^2 \leq r^2\}$$

um die z-Achse entsteht. Berechnen Sie $\lambda(T)$.

Aufgabe 28 (2+3+1=6 Punkte)

(a) Seien $n, m \in \mathbb{N}^*$ mit $m > n$, sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass $f(U) \subset \mathbb{R}^m$ eine Lebesgue-Nullmenge ist. (*Hinweis : Aufgabe 25 (b).*)

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen Lebesgue-Nullmengen sind:

(i) $\partial K_n(r) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| = r\} \subset \mathbb{R}^n$, wobei $r > 0$,

(ii) $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x + y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ und $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$,

(iii) $V + b = \{x + b;\ x \in V\} \subset \mathbb{R}^n$, falls $b \in \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ ein Teilraum von $\mathbb{R}^n$ der Dimension $k < n$ ist.

(c) Sei $m < n$. Geben Sie ein Beispiel für eine Lebesgue-Nullmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ und eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ an derart, dass $f(A) \subset \mathbb{R}^m$ keine Lebesgue-Nullmenge ist.

(bitte wenden)

Aufgabe 29 **(2+2=4 Punkte)**

(a) Für $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ sei

$$P(v_1, \dots, v_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i v_i;\ 0 \leq t_i \leq 1 \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

das von $v_1, \dots, v_n$ aufgespannte Parallelotop. Zeigen Sie:

$$\lambda(P(v_1, \dots, v_n)) = |\det(v_1, \dots, v_n)|.$$

Hierbei sei $(v_1, \dots, v_n) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ die Matrix mit den Spalten $v_1, \dots, v_n$.

(b) Zeigen Sie für alle $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und alle $b \in \mathbb{R}$:

$$\lambda\left(\left\{ x \in \mathbb{R}^n;\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b \right\} \right) = 0.$$

(*Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall* $b = 0$.)

Aufgabe 30 **(4 Punkte)**

Es bezeichne $K_n = K_n(1)$ die abgeschlossene Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$F_\alpha : K_n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\|x\|^\alpha} & \text{, falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{, falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass genau dann $F_\alpha \in \mathscr{L}^1(\lambda|_{K_n})$ gilt, wenn $\alpha < n$ ist. Berechnen Sie in diesem Fall das Integral $\int_{K_n} F_\alpha \, d\lambda$. (*Hinweis : Aufgabe 26.*)

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre