UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Toth

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2019/2020

Blatt 8 Abgabetermin: Mittwoch, 11.12.2019, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 31 (4 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, seien $f, g \in \mathscr{L}^1([a, b])$ und $F, G : [a, b] \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$F(x) = \int_{[a,x]} f d\lambda, G(x) = \int_{[a,x]} g d\lambda.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Fubini, dass

$$\int_{[a,b]} F(x)g(x)d\lambda = F(b)G(b) - \int_{[a,b]} f(x)G(x)d\lambda.$$

(*Hinweis : Sie dürfen benutzen dass die Funktion $h : [a, b]^2 \to \mathbb{C}, (x, y) \mapsto f(x)g(y)$ Lebesque-integrierbar ist. Berechnen Sie das Integral $\int_\triangle h d\lambda$ für ein geeigntes Dreieck $\triangle \subseteq [a, b]^2$ auf zwei verschiedene Arten.*)

Aufgabe 32 (4 Punkte)

Sei $\varrho : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\varrho(r, \varphi, h) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), h)$ und sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann in $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^3)$ liegt, wenn die Funktion

$$[0, \infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad (r, \varphi, h) \mapsto rf(\varrho(r, \varphi, h))$$

in $\mathscr{L}^1([0, \infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R})$ liegt. In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} f\, d\lambda &= \int_{[0,\infty)\times[0,2\pi]\times\mathbb{R}} rf(\varrho(r, \varphi, h))\, d\lambda(r, \varphi, h) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{[0,2\pi]} \left(\int_{[0,\infty)} rf(\varrho(r, \varphi, h))\, d\lambda(r) \right) d\lambda(\varphi) \right) d\lambda(h). \end{aligned}$$

Aufgabe 33 (3x2=6 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_M xy^2\, d\lambda(x, y)$, wobei $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } x \geq 0\}$,

(b) $\displaystyle\int_M \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, d\lambda(x, y, z)$, wobei $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ und $R > 0$,

(c) $\displaystyle\int_M ye^{x+z}\, d\lambda(x, y, z)$, wobei $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } |z| \leq 2\}$.

(bitte wenden)

Aufgabe 34 **(4 Punkte)**

Für $t > 2$ sei $K_t \subset \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$K_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 \le x^2 + y^2 \le t^2 \text{ und } 0 \le y \le x\}.$$

Skizzieren Sie K_t und berechnen Sie

$$\lim_{t\to\infty} \int_{K_t} \frac{x-y}{(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)(\log(x^2+y^2))^2} \, d\lambda(x,y).$$

Aufgabe 35* **(4*+2*=6* Punkte)**

Sei $n \ge 2$ und $B = \{x \in \mathbb{R}^{n-1};\ \|x\| < 1\}$ die offene Einheitskugel im $\mathbb{R}^{n-1}$. Die Abbildung $\Phi : B \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\infty)$ sei gegeben durch

$$\Phi(x,r) = (rx, r\sqrt{1-\|x\|^2}).$$

(a) Zeigen Sie, dass Φ C^∞-invertierbar ist, und dass für alle $(x,r) \in B \times (0,\infty)$ gilt:

$$\det(D\Phi(x,r)) = \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-\|x\|^2}}.$$

(b) Sei $f : \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\infty) \to \mathbb{C}$ eine integrierbare Funktion. Zeigen Sie:

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\infty)} f \, d\lambda = \int_{(0,\infty)} \left(\int_B \frac{f(rx, r\sqrt{1-\|x\|^2})}{\sqrt{1-\|x\|^2}} \, d\lambda(x) \right) r^{n-1} \, d\lambda(r).$$

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre