UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M. Sc. Sebastian Toth

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2019/2020

Blatt 9 Abgabetermin: Mittwoch, 18.12.2019, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 36 (4 Punkte)

Die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f(x,y,z) = x^2 + xy - y - z \quad \text{und} \quad g(x,y,z) = 2x^2 + 3xy - 2y - 3z.$$

Zeigen Sie, dass die Menge

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = g(x,y,z) = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^∞ ist, und dass die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (t, t^2, t^3)$$

eine globale Parametrisierung von M ist.

Aufgabe 37 (4 Punkte)

Die Funktionen $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_1x_3 - x_2^2, \\ f_2(x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_2x_4 - x_3^2, \\ f_3(x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_1x_4 - x_2x_3. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\};\ f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^4$$

eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^∞ ist.

(bitte wenden)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^k-Untermannigfaltigkeit der Dimension $p \geq 1$. Man nennt eine Menge $A \in \mathcal{B}(M)$ Nullmenge, falls $\lambda(g^{-1}(A)) = 0$ für jede Parametrisierung $g : \Omega \to V \subset M$ ist.

Aufgabe 38 (1+3=4 Punkte)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^k-Untermannigfaltigkeit der Dimension $p \geq 1$. Zeigen Sie:

(a) Ist $(A_k)_k$ eine Folge von Nullmengen $A_k \subset M$, so ist auch $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \subset M$ eine Nullmenge.

(b) Ist M kompakt, so ist eine Menge $A \in \mathcal{B}(M)$ genau dann eine Nullmenge, wenn endlich viele Parametrisierungen $g_i : \Omega_i \to V_i \subset M$ existieren ($i \in \{1, \ldots, r\}$) mit

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{r} V_i \quad \text{und} \quad \lambda(g_i^{-1}(A)) = 0 \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, r\}.$$

(*Hinweis : Wenden Sie Satz 7.4 auf geeignete Kartenwechsel an.*)

Aufgabe 39 (1+2+2=5 Punkte)

Für $r > 0$ definieren wir $S_{n-1}(r) := \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| = r\}$. Zeigen Sie:

(a) $S_{n-1}(r) \subset \mathbb{R}^n$ ist eine kompakte C^∞-Untermannigfaltigkeit der Dimension $n - 1$.

(b) Es gibt $2n$ Karten von $S_{n-1}(r)$, die $S_{n-1}(r)$ überdecken. (*Hinweis : Sie dürfen das Ergebnis von Aufgabe 35 (a) benutzen.*)

(c) Für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist die Menge

$$N_i := \{x \in S_{n-1}(r);\ x_i = 0\} \subset S_{n-1}(r)$$

eine Nullmenge. (*Hinweis : Benutzen Sie Aufgabe 38.*)

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

http://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre