UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Manuel Kany

Übungen zur Vorlesung Topologie

Wintersemester 2019/2020

Blatt 1 Abgabetermin: 22.10.2019

Bemerkung: Die Abgabe der Blätter erfolgt immer Dienstags vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 (1+2+2=5 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $p \in X$. Für $x, y \in X$ definieren wir

$$\tilde{d}(x,y) = \begin{cases} d(x,p) + d(p,y), & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\tilde{d}$ eine weitere Metrik auf X definiert.

(b) Berechnen Sie für $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ die (offene) ε-Kugel um x bezüglich $\tilde{d}$. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $\varepsilon \leq d(x,p)$ und $\varepsilon > d(x,p)$.

(c) Charakterisieren Sie die offenen Mengen bezüglich $\tilde{d}$.

Für einen metrischen Raum (X, d) und eine nichtleere Teilmenge $A \subset X$ bezeichne

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y);\ y \in A\}$$

den **Abstand** *eines Elementes $x \in X$ zur Menge A.*

Aufgabe 2 (2+1+1+2=6 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\emptyset \neq A \subset X$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

für alle $x, y \in X$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$d_A : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto d(x, A)$$

stetig ist.

(c) Zeigen Sie, dass $d(x, A) = 0$ genau dann, wenn $x \in \overline{A}$ gilt.

(d) Seien jetzt $A_1, A_2 \subset X$ abgeschlossen und disjunkt. Zeigen Sie, dass eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ existiert mit $f|_{A_1} \equiv 0$ und $f|_{A_2} \equiv 1$. (*Hinweis : Benutzen Sie (b) und (c).*)

(bitte wenden)

Ein metrischer Raum (X, d) heißt **vollständig**, *falls jede Cauchy-Folge in X konvergiert.*

Aufgabe 3 (1+2+2=5 Punkte)

Betrachten Sie folgende Metriken auf der reellen Achse:

$$d(x, y) = |x - y| \quad \text{und} \quad \tilde{d}(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|.$$

(a) Überprüfen Sie, dass $\tilde{d}$ tatsächlich eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert.

(b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, d)$ und $(\mathbb{R}, \tilde{d})$ dieselben offenen Mengen besitzen.

(c) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, \tilde{d})$ nicht vollständig ist.

Aufgabe 4 (2+2*=4 Punkte)

Sei $((X_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge metrischer Räume und sei $X = \prod_{n=0}^{\infty} X_n$ das kartesische Produkt der Mengen X_n.

(a) Begründen Sie, dass durch

$$d : X \times X \to [0, \infty), \quad ((x_n)_n, (y_n)_n) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}$$

eine Metrik auf X definiert wird.

(b*) Zeigen Sie, dass der metrische Raum (X, d) vollständig ist genau dann, wenn alle (X_n, d_n) vollständig sind.

Die Übungsblätter finden Sie auch auf unserer Homepage:

https://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/WS1920/top/index.html