Universität des Saarlandes
Fakultät 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Manuel Kany

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II (Hardyräume)

Wintersemester 2020/2021

Blatt 1 Abgabedatum: Mittwoch 11.11.2020

Sie können die Übungen in Gruppen von bis zu 3 Personen bearbeiten. Zur Zulassung für die Abschlussprüfung müssen mindestens 50 Prozent der Übungspunkte erreicht werden.

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ heißt harmonisch, *falls $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0$ auf Ω gilt. In der Funktionentheorie I zeigt man, dass eine Funktion $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ genau dann harmonisch ist, wenn sie lokal Realteil einer holomorphen Funktion ist.*

Aufgabe 1 (4x1=4 Points)

Seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch und $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$. Zeigen Sie:

(a) $f := u_x - i\, u_y$ ist holomorph.

(b) u_x und u_y sind harmonisch.

(c) Entweder ist u konstant, oder die Menge $\{z \in \Omega;\ \operatorname{grad} u(z) = 0\}$ hat keinen Häufungspunkt in Ω.

(d) u_x ist konstant genau dann, wenn u_y konstant ist.

Sei $M \subset \mathbb{C}$. Eine Funktion $u \colon M \to [-\infty, \infty)$ heißt nach oben halbstetig, *falls für alle $t \in \mathbb{R}$ die Menge $\{z \in M;\ u(z) < t\}$ offen in M (d.h. offen bezüglich der Relativtopologie von $\mathbb{C}$) ist.*

Aufgabe 2 (4 Points)

Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und sei $u \colon K \to [-\infty, \infty)$ nach oben halbstetig. Zeigen Sie, dass u nach oben beschränkt ist und sein Supremum auf K annimmt.

Aufgabe 3 (2+2+1=5 Points)

Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $u \colon K \to [-\infty, \infty)$ nach oben halbstetig mit $u \neq -\infty$. Zeigen Sie:

(a) Für $k \geq 1$ definiert

$$u_k(x) = \sup_{z \in K} \{u(z) - k|x - z|\}$$

eine stetige Funktion $u_k \colon K \to \mathbb{R}$ mit $|u_k(x) - u_k(y)| \leq k|x - y|$ für alle $x, y \in K$.

(b) Sei $x \in K$ mit $u(x) > -\infty$. Zeigen Sie, dass $\lim_{k\to\infty} u_k(x) = u(x)$ gilt. *(Hinweis : Wählen Sie eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in K mit $u_k(x) = u(x_k) - k|x - x_k|$ für alle $k \in \mathbb{N}$.)*

(c) Sei $x \in K$ mit $u(x) = -\infty$. Zeigen Sie, dass $\lim_{k\to\infty} u_k(x) = u(x)$ gilt. *(Hinweis : Wenden Sie Teil (b) auf die Funktionen $g_n = max(u, -n)$ an.)*

(Bitte wenden)

Sie können die Übungsblätter auch auf unserer Homepage finden:

https://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/WS2021/ft2/