



Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II (Hardyräume)
Wintersemester 2020/2021

Blatt 2

Abgabedatum: Mittwoch 18.11.2020

Sie können die Übungen in Gruppen von bis zu 3 Personen bearbeiten. Zur Zulassung für die Abschlussprüfung müssen mindestens 50 Prozent der Übungspunkte erreicht werden.

Aufgabe 4 (1+2+1+2*=5+2* Points)

- (a) Sei $f: \mathbb{D} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, beschränkt und harmonisch auf $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ und sei $g = H(f|_{\mathbb{T}})$. Für $\varepsilon > 0$ seien

$$h_\varepsilon(z) = g(z) - f(z) + \varepsilon \cdot \log|z|, \quad \tilde{h}_\varepsilon(z) = f(z) - g(z) + \varepsilon \cdot \log|z|.$$

Zeigen Sie:

- (i) $\lim_{z \rightarrow 0} h_\varepsilon(z) = -\infty = \lim_{z \rightarrow 0} \tilde{h}_\varepsilon(z)$.
- (ii) $h_\varepsilon \leq 0$ und $\tilde{h}_\varepsilon \leq 0$ auf $\mathbb{D} \setminus \{0\}$.
- (iii) $f = g$ auf $\mathbb{D} \setminus \{0\}$.

(Hinweis : Benutzen Sie, dass $\log|z|$ harmonisch auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist und denken Sie an das Maximumsprinzip.)

- (b)* Beweisen Sie eine Version des Riemannschen Hebbarkeitssatzes für harmonische Funktionen.

Aufgabe 5 (4 Points)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge harmonischer Funktionen $u_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, die kompaktgleichmäßig auf Ω gegen eine Funktion $u: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert. Zeigen Sie: u ist harmonisch.

Aufgabe 6 (2+2=4 Points)

- (a) Seien $u, v: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ harmonische Funktionen auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ so, dass die Menge $\{z \in \Omega; u(z) = v(z)\}$ nicht-leeres Inneres hat. Zeigen Sie: $u = v$. (Hinweis : Aufgabe 1)
- (b) Sei $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Nullstellenmenge $Z(u) = \{a \in \Omega; u(a) = 0\}$ keine isolierten Punkte besitzen kann.
(Hinweis : Für $a \in Z(u)$ und $D_r(a) \subset \Omega$ ist $u \left(\overset{\circ}{D}_r(a) \right) \subset \mathbb{R}$ wegzusammenhängend, also ein Intervall.)

Sie können die Übungsblätter auch auf unserer Homepage finden:

<https://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/WS2021/ft2/>