



Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II (Hardyräume)
Wintersemester 2020/2021

Blatt 3

Abgabedatum: Mittwoch 25.11.2020

Aufgabe 7

(4 Points)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $u: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Zeigen Sie, dass u harmonisch ist genau dann, wenn für alle $a \in \Omega$ und $R > 0$ mit $\overline{D}_R(a) \subset \Omega$ gilt:

$$u(a) = \frac{1}{\pi R^2} \int_{\overline{D}_R(a)} u(x + iy) \, dx \, dy$$

(Hinweis : Benutzen Sie für „ $\Rightarrow$ “ Polarkoordinaten, argumentieren Sie für „ $\Leftarrow$ “ wie im Beweis von Korollar 2.10.)

Aufgabe 8

(1+2+1=4 Points)

Sei $u: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ harmonisch und beschränkt. Seien $a \in \mathbb{C}$ und $r > |a|$. Zeigen Sie:

(a) $(D_r(a) \cup D_r(0)) \setminus (D_r(a) \cap D_r(0)) \subset D_{r+|a|}(0) \setminus D_{r-|a|}(0)$.

(b) $|u(a) - u(0)| \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{(D_r(a) \cup D_r(0)) \setminus (D_r(a) \cap D_r(0))} |u(x + iy)| \, dx \, dy$.

(Hinweis : Benutzen Sie Aufgabe 7.)

(c) u ist konstant.

Aufgabe 9

(3x2=6 Points)

Zeigen Sie:

(a) Für $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ sind äquivalent:

(i) f ist holomorph mit $\operatorname{Re}(f) \geq 0$.

(ii) Es gibt ein Maß $\mu \in M^+(\mathbb{T})$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$f(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \, d\mu(\zeta) + i\alpha \quad (z \in \mathbb{D}).$$

(b) Für $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch sind äquivalent:

(i) $(\|f_r\|_1)_{0 \leq r < 1}$ ist beschränkt.

(ii) Es existieren $g, h: \mathbb{D} \rightarrow [0, \infty)$ harmonisch mit $f = g - h$.

(Bitte wenden)

(c) Für $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ harmonisch sind äquivalent:

- (i) $(\|f_r\|_1)_{0 \leq r < 1}$ ist beschränkt.
- (ii) Es existiert $u: \mathbb{D} \rightarrow [0, \infty)$ harmonisch mit $|f| \leq u$.

(Hinweis zu (b) und (c): Benutzen Sie die Jordan-Zerlegung von komplexen Maßen.)

Sie können die Übungsblätter auch auf unserer Homepage finden:

<https://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/WS2021/ft2/>