Universität des Saarlandes
Fakultät 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Manuel Kany

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II (Hardyräume)

Wintersemester 2020/2021

Blatt 4 Abgabedatum: Mittwoch 02.12.2020

Für eine Funktion $u \in L^1(\mathbb{T})$ sind die Fourierkoeffizienten von u definiert durch

$$\hat{u}(n) = \int_{\mathbb{T}} u(\xi)\overline{\xi}^n \, d\lambda(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} u(e^{it})e^{-int} \, dm(t) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Aufgabe 10 (2+2=4 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) Für $z \in \mathbb{D}$ und $\xi \in \mathbb{T}$ gilt

$$P(z,\xi) = 2\mathrm{Re}\left(\frac{z\overline{\xi}}{1 - z\overline{\xi}}\right) + 1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{(n)}\overline{\xi}^n.$$

Hierbei sei $z^{(n)} = z^n$ für $n \geq 0$ und $z^{(n)} = \overline{z}^{|n|}$ für $n \leq 0$.

(b) Für $u \in L^1(\mathbb{T})$ mit $\hat{u}(n) = 0$ für alle $n < 0$ ist $P[u]\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analytisch.

Für $1 \leq p \leq \infty$ sei $H^p = \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{D});\ \sup_{0 \leq r < 1} \|f_r\|_p < \infty\}$.

Aufgabe 11 (4 Punkte)

Benutzen Sie Aufgabe 10, um zu zeigen, dass für $1 < p \leq \infty$ gilt

$$H^p = \{P[u];\ u \in L^p(\mathbb{T}) \text{ mit } \hat{u}(n) = 0 \text{ für alle } n < 0\}.$$

Aufgabe 12 (4 Punkte)

Sei m das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^k$. Für $f \in \mathfrak{L}^1(\mathbb{R}^k)$ sei das Maß $m_f \in M(\mathbb{R}^k)$ definiert durch $m_f(A) = \int_A f \, dm$. Zeigen Sie: Ist f stetig in $x_0 \in \mathbb{R}^k$, so ist

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \frac{m_f(B_\delta(x_0))}{m(B_\delta(x_0))} = f(x_0).$$

Sie können die Übungsblätter auch auf unserer Homepage finden:

https://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/WS2021/ft2/