



Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II (Hardyräume)
Wintersemester 2020/2021

Blatt 5

Abgabedatum: Mittwoch 09.12.2020

Sei m das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$. Für ein reguläres komplexes Borelmaß $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$ sei die Maximalfunktion von μ definiert durch

$$M\mu: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty], \quad M\mu(x) = \sup_{\delta > 0} \frac{|\mu|(B_\delta(x))}{m(B_\delta(x))}.$$

Aufgabe 13

(1+3=4 Punkte)

Sei $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$ ein reguläres komplexes Borelmaß auf $\mathbb{R}^n$ und m das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

(a) $\frac{m(B_{3\delta}(x))}{m(B_\delta(x))} = 3^n$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$.

(b) Für alle $t > 0$ ist

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n; M\mu(x) > t\}) \leq 3^n \|\mu\|/t.$$

Hinweis zu (b): Argumentieren Sie wie im Beweis von Satz 4.7. Sie dürfen dabei ohne Beweis benutzen, dass $M\mu$ nach unten halbstetig ist und dass eine sinnvoll modifizierte Version des Covering Lemmas 4.6 gilt.

Aufgabe 14

(3x2=6 Punkte)

Für $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ sei $T_f: \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty]$ definiert durch

$$T_f(x) = \lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{0 < \eta < \delta} \frac{1}{\lambda(K_\eta(z))} \int_{K_\eta(z)} |f(\xi) - f(z)| d\lambda(\xi).$$

Zeigen Sie, dass für $f, f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ und $h \in C(\mathbb{T})$ gilt:

(i) $T_{f_1+f_2} \leq T_{f_1} + T_{f_2}$,

(ii) $T_f(z) \leq |f(z)| + M(\lambda|_f)(z)$ für alle $z \in \mathbb{T}$,

(iii) $T_h \equiv 0$.

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $u: \Omega \rightarrow [-\infty, \infty)$ heißt subharmonisch, falls u nach oben halbstetig ist und

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + re^{it}) dt$$

für jedes $z_0 \in \Omega$ mit $u(z_0) > -\infty$ und jede reelle Zahl $r > 0$ mit $\overline{D_r}(z_0) \subset \Omega$ gilt. (Die Existenz des Lebesgue-Integrals wird mit verlangt).

(Bitte wenden)

Aufgabe 15

(4 Punkte)

Sei $u: G \rightarrow [-\infty, \infty)$ eine subharmonische Funktion auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$.

Zeigen Sie: Gibt es ein $a \in G$ mit $u(z) \leq u(a)$ für alle $z \in G$, so ist $u \equiv u(a)$.

(Hinweis : Betrachten Sie die Menge $\{z \in G; u(z) = u(a)\}$.)

Sie können die Übungsblätter auch auf unserer Homepage finden:

<https://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/WS2021/ft2/>