Universität des Saarlandes
Fakultät 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Manuel Kany

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II (Hardyräume)

Wintersemester 2020/2021

Blatt 6 Abgabedatum: Mittwoch 16.12.2020

Aufgabe 16 (4 Punkte)

Sei m das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass für $f \in \mathfrak{L}^1(\mathbb{R}^n)$ eine Borelmenge $N \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ existiert mit $m(N) = 0$ und

$$f(x) = \lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{m(B_r(x))} \int\limits_{B_r(x)} f \, dm \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n \backslash N.$$

(Hinweis : Argumentieren Sie wie im Beweis von Satz 5.1. Sie dürfen benutzen, dass $C(\mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{L}^1(\mathbb{R}^n)$ dicht ist und dass das Analogon der Aussage von Aufgabe 14 richtig ist.)

Aufgabe 17 (3+1=4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ beliebig. Seien $u, v \colon \Omega \to [-\infty, \infty)$ und $u_i \colon \Omega \to [-\infty, \infty)$ $(i \in I)$ nach oben halbstetige Funktionen. Zeigen Sie:

(a) $u + v$, αu $(\alpha > 0)$, $\max(u, v)$, $\min(u, v)$ sind nach oben halbstetig.

(b) $\Omega \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \inf_{i \in I} u_i(z)$ ist nach oben halbstetig.

Aufgabe 18 (4 Punkte)

Sei $u_1 \geq u_2 \geq \ldots$ eine monoton fallende Folge subharmonischer Funktionen auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass der punktweise Limes $u = \lim_{k \to \infty} u_k$ subharmonisch ist.
(Hinweis : Beweis von Lemma 6.5.)

Sie können die Übungsblätter auch auf unserer Homepage finden:

https://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/WS2021/ft2/