Universität des Saarlandes
Fakultät 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Manuel Kany

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II (Hardyräume)

Wintersemester 2020/2021

Blatt 7 Abgabedatum: Mittwoch 06.01.2021

Aufgabe 19 (4 Punkte)

Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge subharmonischer Funktionen $u_n\colon \Omega \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Konvergiert $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakt gleichmäßig auf Ω gegen eine Funktion $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$, so ist u subharmonisch.

(Hinweis : Punktweise Konvergenz einer L^1-Cauchy-Folge impliziert L^1-Konvergenz (AIII.4.2).)

Aufgabe 20 (4 Punkte)

Sei $u\colon \Omega \to [-\infty, \infty)$ subharmonisch auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ und seien $z_0 \in \Omega$, $R > 0$ mit $\overline{D}_R(z_0) \subset \Omega$. Zeigen Sie: Ist $u(z_0) > -\infty$, so ist $u|_{\overline{D}_R(z_0)}$ Lebesgue-integrabel mit

$$u(z_0) \leq \frac{1}{\pi R^2} \int\limits_{\overline{D}_R(z_0)} u(z)\, dz.$$

(Hinweis : Benutzen Sie Aufgabe 3 mit $K = \overline{D}_R(z_0)$, Polarkoordinaten und den Satz von der monotonen Konvergenz wie im Beweis von Lemma 6.5.)

Aufgabe 21 (3+1=4 Punkte)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $u\colon G \to [-\infty, \infty)$ subharmonisch mit $u \not\equiv -\infty$. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $z_0 \in G$ existiert ein $r > 0$ so, dass $u|_{D_r(z_0)}$ Lebesgue-integrabel ist.
(Hinweis : Betrachten Sie die Menge

$$M = \{z_0 \in G;\ \nexists r > 0 : u|_{D_r(z_0)} \in \mathfrak{L}^1(D_r(z_0))\}$$

und benutzen Sie Aufgabe 20.)

(b) Für jede kompakte Menge $K \subset G$ ist $u|_K$ Lebesgue-integrabel.

Wir wünschen Ihnen ein frohes Weihnachtsfest, einen guten Rutsch ins neue Jahr und viel Erfolg für 2021!

(Bitte wenden)

Sie können die Übungsblätter auch auf unserer Homepage finden:

https://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/WS2021/ft2/