



Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II (Hardyräume)
Wintersemester 2020/2021

Blatt 8

Abgabedatum: Mittwoch 13.01.2021

Aufgabe 22

(2+2=4 Punkte)

Sei $\varphi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ holomorph mit $\varphi(0) = 0$. Zeigen Sie:

(a) Ist $u: \mathbb{D} \rightarrow [-\infty, \infty)$ subharmonisch, so gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(\varphi(re^{it})) dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} u(re^{it}) dt \quad (0 \leq r < 1).$$

(Hinweis : Lemma von Schwarz aus der Funktionentheorie und Beweis von Satz 6.14.)

(b) Ist $f \in H^p$ ($1 \leq p \leq \infty$), so ist auch $f \circ \varphi \in H^p$ und

$$\|f \circ \varphi\|_p \leq \|f\|_p$$

Aufgabe 23

(2+2+1+1+1=7 Punkte)

Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ nullstellenfrei mit $s := \sup_{0 \leq r < 1} \int_{\mathbb{T}} \log^+ |f_r| d\xi < \infty$.

Zeigen Sie nacheinander:

(a) $\sup_{0 \leq r < 1} \int_{\mathbb{T}} \log^- |f_r| d\xi < \infty$. Benutzen Sie dabei die Mittelwerteigenschaft der Funktion $\log |f|$.

(b) Es gibt ein reelles Maß $\mu \in M(\mathbb{T})$ mit $\log |f| = P[\mu]$.

(c) Die Funktionen $h_{\pm}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, $h_{\pm}(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\xi+z}{\xi-z} d\mu^{\pm}(\xi)$ sind holomorph mit $\operatorname{Re} h_{\pm} \geq 0$ auf $\mathbb{D}$.
($\mu^{\pm}$ seien wie in Satz 1.4 definiert.)

(d) $G = e^{-h_-}$, $H = e^{-h_+}$ sind Funktionen in H^{∞} mit $|G/H| = |f|$.

(e) Es gibt Funktionen $g, h \in H^{\infty}$ mit $f = g/h$.

Aufgabe 24

(3 Punkte)

Sei $f \in H^p$ ($1 \leq p \leq \infty$). Zeigen Sie:

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_{\mathbb{T}} \log^+ |f_r| d\xi < \infty.$$

Sie können die Übungsblätter auch auf unserer Homepage finden:

<https://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/WS2021/ft2/>