Universität des Saarlandes
Fakultät 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
M.Sc. Manuel Kany

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie II (Hardyräume)

Wintersemester 2020/2021

Blatt 9 Abgabedatum: Mittwoch 20.01.2021

Aufgabe 25 (4 Punkte)

Sei $f(z) = \exp(z + 1/z - 1)$ für $z \in \mathbb{D}$. Zeigen Sie:

(i) $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ ist holomorph,

(ii) $|f^*(z)| = 1$ für λ-fast alle $z \in \mathbb{T}$,

(iii) $\lim\limits_{r\uparrow 1} \int\limits_{\mathbb{T}} \log|f_r|\, d\lambda < \int\limits_{\mathbb{T}} \log|f^*|\, d\lambda$.

Aufgabe 26 (6 Punkte)

Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{r\uparrow 1} \int\limits_{\mathbb{T}} |\log|f_r||\, d\lambda = 0$$

ist genau dann, wenn ein Blaschke-Produkt B und ein $\Theta \in \mathbb{R}$ existiert mit $f = e^{i\theta}B$. Zeigen Sie für den Beweis von “$\Rightarrow$“ nacheinander

(i) $f \in N$,

(ii) für das zur Nullstellenfolge von f gebildete Blaschke-Produkt B und $g = f/B$ gilt

$$\lim_{r\uparrow 1} \int\limits_{\mathbb{T}} |\log|g_r||\, d\lambda = 0,$$

(iii) $f = e^{i\Theta}B$ für ein $\Theta \in \mathbb{R}$.

(Hinweis : $\log^+|g|$ und $\log^-|g|$ sind beide subharmonisch.)

Sei $l^2 = \{(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}};\ \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}$ der Vektorraum der quadratsummierbaren komplexen Zahlenfolgen versehen mit der Norm

$$\|(a_n)_{n\geq 0}\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2}.$$

Aufgabe 27 (2+2+2=6 Punkte)

Sei $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$. Zeigen Sie:

(Bitte wenden)

(a) $\|f_r\|_2^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$ für $0 \leq r < 1$.

(b) $f \in H^2 \iff (a_n)_{n\geq 0} \in l^2$.

(c) Die Abbildung $\Phi\colon H^2 \to l^2,\ f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \mapsto (c_n)_{n\geq 0}$ ist ein isometrischer Isomorphismus.

Sie können die Übungsblätter auch auf unserer Homepage finden:

https://www.math.uni-sb.de/ag/eschmeier/lehre/WS2021/ft2/