Momentenprobleme und subnormale Operatoren

Bachelorarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science
im Studiengang Mathematik
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät I
- Mathematik und Informatik -
der Universität des Saarlandes

von
Johannes Alt

betreut durch
Professor Dr. J. Eschmeier

Saarbrücken, 2012

Ich versichere hiermit,
dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst
und keine anderen als die angegebenen Quellen
und Hilfsmittel benutzt habe.

Saarbrücken, den 17.09.2012

Johannes Alt

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Für eine abgeschlossene Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ besteht das K-Momentenproblem darin, die Familien reeller Zahlen $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ zu charakterisieren, für die ein darstellendes Maß auf K existiert, das heißt ein positives Borelmaß $\mu \in M^+(K)$, sodass $x^\alpha \in L^1(K, \mathfrak{B}(K), \mu)$ und

$$\gamma_\alpha = \int_K x^\alpha \,\mathrm{d}\mu \tag{0.1}$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ gilt. (Mit $M^+(X)$ sei die Menge der positiven Borelmaße auf dem topologischen Raum X und mit $\mathfrak{B}(X)$ die Borel-σ-Algebra von X bezeichnet.)

Indem man zu einer Familie reeller Zahlen $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ die Linearform $L\colon \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n] \to \mathbb{R}$ betrachtet, die durch $L(x^\alpha) = \gamma_\alpha$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ und lineare Fortsetzung definiert wird, erhält man eine äquivalente Definition des darstellenden Maßes. Man sagt, dass zu der Linearform L ein darstellendes Maß auf der abgeschlossenen Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ existiert, wenn es ein positives Borelmaß $\mu \in M^+(K)$ gibt, sodass $p|_K \in L^1(K, \mathfrak{B}(K), \mu)$ und

$$L(p) = \int_K p|_K \,\mathrm{d}\mu$$

für alle $p \in \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ gilt. Hierbei sind Elemente von $\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ formale Polynome, die eindeutig in Form einer endlichen Linearkombination $p = \sum\limits_{\alpha\in\mathbb{N}^n} c_\alpha x^\alpha$ mit reellen Koeffizienten $c_\alpha \in \mathbb{R}$ geschrieben werden können. Ein Polynom $p \in \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ kann eindeutig mit der Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto p(x)$ identifiziert werden (Durch Auswertung geeigneter Vielfachen der partiellen Ableitungen im Nullpunkt kann man die Koeffizienten zurückgewinnen, siehe etwa Lemma 1.2 in [10]). Die Einschränkung dieser Polynomfunktion auf die Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $p|_K$. Im Folgenden werden wir für das K-Momentenproblem stets die zweite Betrachtungsweise wählen.

In dieser allgemeinen Situation wird die Frage nach der Existenz eines darstellenden Maßes durch den Satz von Haviland beantwortet. Ist $L\colon \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n] \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung, so besagt der Satz von Haviland, dass die offensichtlich notwendige Bedingung $L(p) \geq 0$ für alle $p \in \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ mit $p \geq 0$ auf K auch hinreichend für die Existenz eines darstellenden Maßes auf K ist.

Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte, semi-algebraische Menge, so kann die Menge der Polynome, auf der die Nichtnegativität der Linearform für die Existenz eines darstellenden Maßes überprüft werden muss, verkleinert werden. Für die Definition von semi-algebraischen Mengen benötigen wir die folgende Notation.

Für eine Teilmenge $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ von Polynomen definieren wir den Positivitätsbereich von $\mathcal{P}$ als die Menge

$$K_\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n; p(x) \geq 0 \text{ für alle } p \in \mathcal{P}\} = \bigcap \left(\overset{-1}{p}([0,\infty)); p \in \mathcal{P} \right) \subset \mathbb{R}^n. \tag{0.2}$$

Der Positivitätsbereich $K_\mathcal{P}$ ist, wie das zweite Gleichheitszeichen aufgrund der Stetigkeit der Polynomfunktionen zeigt, eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

Eine abgeschlossene Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ nennen wir semi-algebraisch, wenn eine endliche Menge $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ existiert, für die $K = K_{\mathcal{P}}$ gilt.

Es sei nun $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ eine endliche Teilmenge, sodass $K_{\mathcal{P}} \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ist. Ist $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_s\}$, so betrachtet Schmüdgen in [15] die Menge $\mathcal{S} = \{q^2 p^\alpha; q \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n], \alpha \in \mathbb{N}^s\}$, wobei $p = (p_1, \dots, p_s)$ und $p^\alpha = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{N}^s$ ist. Er zeigt, dass die Nichtnegativität einer Linearform $L\colon \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \to \mathbb{R}$ auf $\mathcal{S}$ äquivalent zur Existenz eines darstellenden Maßes auf $K_{\mathcal{P}}$ ist. Dieses Kriterium wird Schmüdgens Theorem genannt. In [17] assoziiert Vasilescu zu der Menge $\mathcal{P}$ eine andere kanonisch gebildete Testmenge $\tilde{\Delta}_{\mathcal{P}}$, auf der die Nichtnegativität einer Linearform $L\colon \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \to \mathbb{R}$ äquivalent zur Existenz eines darstellenden Maßes auf $K_{\mathcal{P}}$ ist.

Diese beiden Fälle haben die Gemeinsamkeit, dass der von $\mathcal{S}$ beziehungsweise $\tilde{\Delta}_{\mathcal{P}}$ erzeugte konvexe Kegel im Polynomring archimedisch ist, das heißt, dass für jedes Polynom $r \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $N - r$ in diesem Kegel enthalten ist. Weiterhin ist die Nichtnegativität einer linearen Abbildung auf einer dieser Mengen äquivalent zur Nichtnegativität auf dem entsprechenden konvexen Kegel. Aufgrund dieser Beobachtung werden wir in dieser Arbeit ein Resultat beweisen, das die Nichtnegativität auf einem archimedischen, konvexen Kegel $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, der das Einselement in $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ enthält und multiplikativ abgeschlossen ist, verlangt und die Existenz eines darstellenden Maßes auf $K_{\mathcal{C}}$ liefert. Diese Menge ist automatisch kompakt und stimmt in den angesprochenen Situationen mit $K_{\mathcal{P}}$ überein. Beim Beweis werden wir uns an der Argumentationslinie von Vasilescu in [17] orientieren.

In [15] beweist Schmüdgen darüberhinaus, dass ein Polynom $r \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, dass auf der Menge $K_{\mathcal{P}}$ strikt positiv ist, schon im von $\mathcal{S}$ erzeugten konvexen Kegel enthalten ist. Dieses Ergebnis ist als Schmüdgens Positivstellensatz bekannt. Ein solches Polynom lässt sich also in der Form $r = \sum_{i=0}^{m} q_i^2 p^{\alpha_i}$ mit einer natürlichen Zahl $m \in \mathbb{N}$, Polynomen $q_0, \dots, q_m \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ und Multiindizes $\alpha_0, \dots, \alpha_m \in \mathbb{N}^s$ schreiben. Wir zeigen, dass das entsprechende Resultat richtig bleibt, wenn man den von $\mathcal{S}$ erzeugten konvexen Kegel durch einen archimedischen, konvexen Kegel $\mathcal{C}$ wie oben und $K_{\mathcal{P}}$ durch $K_{\mathcal{C}}$ ersetzt.

Die Kriterien für die Existenz eines darstellendes Maßes einer Linearform auf $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ können zum Beweis von Subnormalitätskriterien verwendet werden. Ein Tupel von Operatoren $T = (T_1, \dots, T_n) \in \mathscr{L}(\mathcal{H})^n$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ heißt vertauschend, wenn $T_i T_j = T_j T_i$ für $i, j = 1, \dots, n$ gilt. Ein solches Tupel nennt man subnormal, wenn ein Hilbertraum $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ und ein vertauschendes Tupel normaler Operatoren $N = (N_1, \dots, N_n) \in \mathscr{L}(\mathcal{K})^n$ existieren, sodass $\mathcal{H}$ ein invarianter Teilraum von $N_1, \dots, N_n$ ist und $T_i = N_i|_{\mathcal{H}}$ für $i = 1, \dots, n$ gilt. Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und gilt für das Spektrum der normalen Erweiterung $\sigma(N) \subset \{z \in \mathbb{C}^n; (|z_1|^2, \dots, |z_n|^2) \in K\}$, so existiert ein positives, operatorwertiges Maß $E\colon \mathfrak{B}(K) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$, das

$$T^{*\alpha} T^\alpha = \int_K t^\alpha \, \mathrm{d}E$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ erfüllt. Ist $T \in \mathscr{L}(\mathcal{H})^n$ vertauschend und existiert für jeden Vektor $x \in \mathcal{H}$ ein Maß $\mu_x \in M^+(K)$ mit

$$\langle T^{*\alpha} T^\alpha x, x \rangle = \int_K t^\alpha \, \mathrm{d}\mu_x$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$, so ist T subnormal. Durch $L_x(t^\alpha) = \langle T^{*\alpha} T^\alpha x, x \rangle$ und lineare Fortsetzung wird für jeden Vektor $x \in \mathcal{H}$ eine Linearform $L_x\colon \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \to \mathbb{R}$ definiert. Aus Kriterien für die Existenz der Maße μ_x erhält man auf diese Weise Kriterien für die Subnormalität eines vertauschenden Operatorentupels. Damit zeigen wir, dass sphärische Isometrien und Tupel vertauschender Isometrien subnormale Operatoren sind.

Die vorliegende Arbeit beginnt im nächsten Kapitel mit dem Beweis des angesprochenen Resultats, dass die Nichtnegativität einer Linearform auf einem archimedischen, konvexen Kegel $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ wie oben äquivalent zur Existenz eines darstellenden Maßes auf $K_{\mathcal{C}}$ ist. Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels werden dann Vasilescus Ergebnisse abgeleitet. Am Ende des Kapitels wird gezeigt, dass ein Polynom, das strikt positiv auf $K_{\mathcal{C}}$ ist, bereits in $\mathcal{C}$ liegt. Das zweite Kapitel führt Schmüdgens Theorem und Schmüdgens Positivstellensatz auf das Existenzkriterium beziehungsweise den Positivstellensatz im ersten Kapitel zurück. Dazu werden einige Ergebnisse der kommutativen Algebra benutzt, da insbesondere Krivines Positivstellensatz benötigt wird. Im dritten Kapitel werden subnormale Operatoren behandelt. Nach einer Zusammenstellung einiger grundlegender Fakten über subnormale Operatoren werden die Ergebnisse angewendet, um Subnormalitätskriterien und die Subnormalität unter anderem der genannten Beispiele zu beweisen. Das letzte Kapitel beinhaltet eine Zusammenstellung der Beispiele von archimedischen, konvexen Kegeln, die in dieser Arbeit betrachtet werden.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich einigen Personen, die mich beim Erstellen dieser Arbeit unterstützt haben, Danke sagen.

Besonders möchte ich Herrn Prof. Dr. Jörg Eschmeier danken, der mir dieses interessante Thema vorgeschlagen und mich bei dessen Bearbeitung intensiv betreut hat.

Außerdem haben meine Eltern und meine Familie ein großes Dankeschön verdient für die Unterstützung, die ich von ihnen während meines gesamten bisherigen Studiums und besonders in der Zeit der Bachelorarbeit erfahren durfte.

1 Momentenprobleme

Im folgenden Kapitel werden wir zunächst ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Existenz eines darstellenden Maßes für eine Linearform auf dem Polynomring beweisen.

Die Ergebnisse des ersten Abschnitts sind eine Verallgemeinerung der Resultate aus Abschnitt I.2 in [17]. Aus diesem Grund orientieren sich die Beweise an den entsprechenden Stellen in [17]. Im zweiten Abschnitt werden die Resultate in [17] aus ihrer Verallgemeinerung gefolgert. Das Hauptresultat des dritten Abschnitts ist ein Positivstellensatz, dessen Beweis einen algebraischen Trennungssatz verwendet, der auf den Trennungssatz aus der Theorie der lokalkonvexen Vektorräume zurückgeführt wird. Aus diesem Positivstellensatz wird im nächsten Kapitel Schmüdgens Positivstellensatz folgen.

1.1 Darstellbarkeitskriterium

Für eine Linearform $L\colon \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}$ und eine abgeschlossene Teilmenge $F \subset \mathbb{R}^n$ verstehen wir unter einem *darstellenden Maß* auf F ein positives Borelmaß $\mu \in M^+(F)$, sodass $p \in L^1(F, \mathfrak{B}(F), \mu)$ und

$$L(p) = \int_K p|_F \, \mathrm{d}\mu$$

für alle $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ gilt. Ist $F \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so ist die erste Bedingung automatisch erfüllt.

Eine konvexe Teilmenge $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ nennt man einen *konvexen Kegel*, wenn mit $\alpha \geq 0$ und $p \in \mathcal{C}$ auch $\alpha p \in \mathcal{C}$ liegt. Damit ist ein konvexer Kegel abgeschlossen gegenüber Linearkombinationen mit nichtnegativen Koeffizienten.

Ein konvexer Kegel $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ heißt *archimedisch*, wenn für jedes $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $N - p \in \mathcal{C}$ ist.

Das Hauptresultat dieses Abschnitts ist das folgende Theorem:

Theorem 1.1. *Sei $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ ein archimedischer, konvexer Kegel mit $1 \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C} \cdot \mathcal{C} \subset \mathcal{C}$ und $K_\mathcal{C} \neq \varnothing$.*

Dann existiert für eine Linearform $L\colon \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}$ genau dann ein darstellendes Maß μ auf $K_\mathcal{C}$, wenn $L \geq 0$ auf $\mathcal{C}$ ist.

In diesem Fall ist das darstellende Maß eindeutig bestimmt.

Bevor wir mit dem Beweis beginnen, möchten wir noch zwei Resultate aus der Maßtheorie zitieren, die wir im Verlauf dieses Abschnitts benötigen werden.

Bemerkung 1.2. *Es sei X ein kompakter Hausdorffraum. Der Rieszsche Darstellungssatz besagt, dass die Abbildung*

$$M_r(X, \mathbb{R}) \to C(X, \mathbb{R})', \quad \mu \mapsto L_\mu \text{ mit } L_\mu\colon C(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_X f \, \mathrm{d}\mu$$

ein wohldefinierter, isometrischer Isomorphismus zwischen dem Banachraum der regulären, signierten Borelmaße $M_r(X, \mathbb{R})$ auf X mit der Variationsnorm und dem topologischen Dualraum der stetigen, reellwertigen Funktionen auf X mit der Supremumsnorm ist (Theorem 7.3.5 in [4]).

Auf lokalkompakten Hausdorffräumen mit abzählbarer Basis ist jedes positive Borelmaß, das auf kompakten Mengen endlich ist, regulär (Proposition 7.2.3 in [4]).

Der Beweis von Theorem 1.1 gliedert sich in mehrere vorbereitende Resultate. Für den Rest dieses Abschnitts sei $\mathcal{C}$ ein konvexer Kegel, der die Voraussetzungen von Theorem 1.1 erfüllt.

Lemma 1.3. *Die Teilmenge $K_{\mathcal{C}} \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt.*

Beweis. Der Beweis folgt [12].

Sei $p = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. Dann existiert aufgrund der Archimedizität von $\mathcal{C}$ eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$, sodass $N - p \in \mathcal{C}$ ist. Dann gilt $(N - p)(x) = N - \|x\|^2 \geq 0$ für alle $x \in K_{\mathcal{C}}$ und damit $\|x\|^2 \leq N$, sodass $K_{\mathcal{C}}$ beschränkt ist. Außerdem ist $K_{\mathcal{C}}$ abgeschlossen als Schnitt von Urbildern einer abgeschlossenen Menge unter stetigen Funktionen, sodass der Satz von Heine-Borel die Kompaktheit von $K_{\mathcal{C}}$ liefert. □

Einen konvexen Kegel $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ nennt man *erzeugender Kegel* von $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, wenn

$$\mathcal{D} - \mathcal{D} = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

gilt.

Lemma 1.4. *Der konvexe Kegel $\mathcal{C}$ ist ein erzeugender Kegel von $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$.*

Beweis. Sei $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$. Die Archimedizität von $\mathcal{C}$ liefert die Existenz einer natürlichen Zahl $N \in \mathbb{N}$, sodass $N - p \in \mathcal{C}$ ist. Damit gilt: $p = N - (N - p) \in \mathcal{C} - \mathcal{C}$. □

Definition 1.5. *Es sei $\pi(\mathcal{C})$ die Menge aller linearen Abbildungen $L \colon \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}$ mit $L(1) = 1$ sowie $L(p) \geq 0$ für alle $p \in \mathcal{C}$.*

Die so definierte Teilmenge $\pi(\mathcal{C}) \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]^*$ des algebraischen Dualraums ist konvex.

Lemma 1.6. *Für jedes $r \in \mathcal{C}$ existiert ein $n_r \in \mathbb{N}$, sodass $0 \leq L(r) \leq n_r$ für alle $L \in \pi(\mathcal{C})$ gilt.*

Beweis. Sei $r \in \mathcal{C}$ fixiert. Dann folgt $0 \leq L(r)$ direkt aus der Definition von $\pi(\mathcal{C})$. Da $\mathcal{C}$ archimedisch ist, existiert ein natürliche Zahl $n_r \in \mathbb{N}$, sodass $n_r - r \in \mathcal{C}$ gilt. Somit ist $0 \leq L(n_r - r) = n_r - L(r)$, da $L(1) = 1$ für alle $L \in \pi(\mathcal{C})$ und damit $L(r) \leq n_r$. □

Im Folgenden betrachten wir den algebraischen Dualraum $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]^*$ mit der schwachen Topologie, die von allen Punktauswertungen erzeugt wird. Auf diese Weise erhalten wir einen Hausdorffschen lokalkonvexen topologischen Vektorraum. Sei τ die Relativtopologie auf $\pi(\mathcal{C})$. Nach Lemma 1.4 entspricht Konvergenz in $(\pi(\mathcal{C}), \tau)$ der Konvergenz bezüglich aller Abbildungen $\pi(\mathcal{C}) \to \mathbb{R}$, $L \mapsto L(r)$ für $r \in \mathcal{C}$.

Lemma 1.7. *Der topologische Raum $(\pi(\mathcal{C}), \tau)$ ist kompakt.*

Beweis. Wir identifizieren $(\pi(\mathcal{C}),\tau)$ mit einer abgeschlossenen Teilmenge von $X = \prod_{r\in\mathcal{C}}[0,n_r]$ versehen mit der Produkttopologie t, wobei die natürlichen Zahlen $n_r \in \mathbb{N}$ wie in Lemma 1.6 gewählt seien. Nach dem Satz von Tychonoff ist (X,t) kompakt. Wir definieren die Abbildung

$$\varphi\colon (\pi(\mathcal{C}),\tau) \to (X,t),\ L \mapsto (L(r))_{r\in\mathcal{C}}.$$

Dann ist φ injektiv, da $\mathcal{C}-\mathcal{C} = \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ nach Lemma 1.4 gilt.

Sei $l = (l_r)_{r\in\mathcal{C}} \in X$ der Grenzwert eines Netzes $(\varphi(L_\alpha))_{\alpha\in A}$ in (X,t). Wir setzen

$$L\colon \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n] \to \mathbb{R},\quad r \mapsto L(r) = \lim_\alpha L_\alpha(r).$$

Für $r \in \mathcal{C}$ existiert der Grenzwert nach Wahl der $L_\alpha \in \pi(\mathcal{C})$ für $\alpha \in A$. Wegen $\mathcal{C}-\mathcal{C} = \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$, der Linearität der L_α für $\alpha \in A$ und der Grenzwertsätze für Netze existiert der Grenzwert für alle $r \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$. Damit ist die Abbildung L wohldefiniert. Die Linearität der L_α und die Grenzwertsätze haben auch unmittelbar die Linearität von L zur Folge. Insbesondere gilt $L(1) = \lim_\alpha L_\alpha(1) = 1$ sowie $L(r) = \lim_\alpha L_\alpha(r) \geq 0$ für alle $r \in \mathcal{C}$, sodass $L \in \pi(\mathcal{C})$. Aus $L(r) = \lim_\alpha L_\alpha(r) = l_r$ für $r \in \mathcal{C}$ folgt $\varphi(L) = l$, sodass $\mathrm{im}\varphi \subset X$ abgeschlossen und damit als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge kompakt ist.

Da Konvergenz in der Produkttopologie komponentenweiser Konvergenz entspricht und τ die schwache Topologie der Punktauswertungen auf $\mathcal{C}$ ist, folgt, dass

$$\tilde{\varphi}\colon (\pi(\mathcal{C}),\tau) \to (\mathrm{im}\varphi, t|_{\mathrm{im}\varphi}),\ L \mapsto \varphi(L)$$

ein Homöomorphismus ist. Somit ist $(\pi(\mathcal{C}),\tau)$ kompakt, weil die Kompaktheit von $\mathrm{im}\varphi$ in der Relativtopologie erhalten bleibt. □

Bemerkung 1.8. *Es sei $L\colon \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n] \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung.*

(i) *Die Menge $\{L(p); p \in \mathcal{C}\}$ ist genau dann nach oben beschränkt, wenn $L(p) \leq 0$ für alle $p \in \mathcal{C}$ gilt.*

(ii) *Die Menge $\{L(p); p \in \mathcal{C}\}$ ist genau dann nach unten beschränkt, wenn $L(p) \geq 0$ für alle $p \in \mathcal{C}$ gilt.*

(iii) *Ist $L(1) = 0$ und die Menge $\{L(p); p \in \mathcal{C}\}$ nach oben oder nach unten beschränkt, so gilt $L = 0$.*

Beweis. Zum Beweis von (i) sei $A \in \mathbb{R}$, sodass $L(p) \leq A$ für alle $p \in \mathcal{C}$. Wir nehmen an, dass ein $r \in \mathcal{C}$ existiert, sodass $L(r) > 0$ ist. Dann ist die Menge $\{L(tr); t \geq 0\}$ nicht nach oben beschränkt, was der Voraussetzung widerspricht, da $tr \in \mathcal{C}$ für alle $t \geq 0$. Die umgekehrte Richtung ist klar.

Die Aussage in (ii) folgt unmittelbar aus dem ersten Teil, wenn man diesen auf die Linearform $-L$ anwendet.

Zum Beweis des dritten Teils genügt es die Behauptung in dem Fall zu zeigen, dass $\{L(p); p \in \mathcal{C}\}$ nach unten beschränkt ist. Der andere Fall kann durch Betrachtung der Linearform $-L$ darauf zurückgeführt werden.

Sei also $\{L(p); p \in \mathcal{C}\}$ nach unten beschränkt, also $L(p) \geq 0$ für alle $p \in \mathcal{C}$ aufgrund des zweiten Teils. Fixiere $p \in \mathcal{C}$ und wähle eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$, sodass $N - p \in \mathcal{C}$ ist. Dann gilt $0 \leq L(N-p) = -L(p) \leq 0$, da $p \in \mathcal{C}$ und somit $0 \leq L(p) \leq 0$.

Dies ergibt $L(p) = 0$ für alle $p \in \mathcal{C}$ und damit $L = 0$, da $\mathcal{C}$ nach Lemma 1.4 ein erzeugender Kegel ist. □

Wir werden später den Satz von Krein-Milman anwenden und zeigen nun, dass die Extremalpunkte von $\pi(\mathcal{C})$ nicht nur Linearformen sind.

Lemma 1.9. *Sei $L \in \pi(\mathcal{C})$ ein Extremalpunkt. Dann ist L multiplikativ.*

Beweis. Aufgrund von Lemma 1.4 reicht es $L(pq) = L(p)L(q)$ für $p, q \in \mathcal{C}$ zu zeigen. Wir fixieren $p \in \mathcal{C}$ und wählen $n_p \in \mathbb{N}$ wie in Lemma 1.6. Nach eventuellem Vergrößern von n_p können wir $n_p \in \mathbb{N}^*$ und $0 \leq L(p) < n_p$ annehmen.

Wir unterscheiden die beiden möglichen Fälle $L(p) = 0$ und $L(p) > 0$.

Ist $L(p) = 0$, dann definiere $L_1 \colon \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}$ durch $L_1(r) = L(pr)$ für alle $r \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$. Dann ist L_1 eine lineare Abbildung mit $L_1(1) = L(p) = 0$ und $L_1(r) \geq 0$ für $r \in \mathcal{C}$, da $pr \in \mathcal{C}$ ist. Aus Bemerkung 1.8 folgt dann $L_1 = 0$, sodass insgesamt $L(pq) = L_1(q) = 0 = L(p)L(q)$ gilt.

Sei nun $L(p) > 0$. Für $\alpha = L(p)/n_p$ gilt $0 < \alpha < 1$. Definiere $L_1 \colon \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}$ durch $L_1(r) = \alpha^{-1}L(pr/n_p)$ und $L_2 \colon \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}$ durch $L_2(r) = (1-\alpha)^{-1}L((1 - p/n_p)r)$ für $r \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$. Für die Linearformen L_1, L_2 gilt $L_1(1) = 1$ und $L_1(r) \geq 0$ für alle $r \in \mathcal{C}$, da $pr/n_p \in \mathcal{C}$, sowie $L_2(1) = 1$ und $L_2(r) \geq 0$ für $r \in \mathcal{C}$, da $(1 - p/n_p) \in \mathcal{C}$ nach Wahl von n_p (Das Vergrößern ändert daran aufgrund der Konvexität des Kegels $\mathcal{C}$ nichts.) und somit $(1 - p/n_p)r \in \mathcal{C}$ für alle $r \in \mathcal{C}$. Insgesamt gilt also $L_1, L_2 \in \pi(\mathcal{C})$.

Aus $L = \alpha L_1 + (1-\alpha)L_2$ folgt damit insbesondere $L = L_1$, da L ein Extremalpunkt von $\pi(\mathcal{C})$ ist. Damit erhält man: $L(q) = L_1(q) = \alpha^{-1}L(pq/n_p)$ und schließlich $L(pq) = n_p\alpha L(q) = L(p)L(q)$. □

Der nächste Satz zeigt, dass jedes Element von $\pi(\mathcal{C})$ ein darstellendes Maß besitzt.

Satz 1.10. *Für jedes $L \in \pi(\mathcal{C})$ existiert ein eindeutig bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $K_\mathcal{C}$, das $L(p) = \int_{K_\mathcal{C}} p|_{K_\mathcal{C}} \,\mathrm{d}\mu$ für alle $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ erfüllt.*

Beweis. Ist $L_0 \in \pi(\mathcal{C})$ ein Extremalpunkt, so ist L_0 nach Lemma 1.9 multiplikativ. Wir definieren $c_i = L_0(x_i)$ und $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, sodass $L_0(p) = p(c)$ für alle $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ gilt. Die Ungleichung $0 \leq L_0(p) = p(c)$ für alle $p \in \mathcal{C}$, die aus der Definition von $\pi(\mathcal{C})$ in Definition 1.5 folgt, liefert $c \in K_\mathcal{C}$ und damit

$$|L_0(p)| = |p(c)| \leq \|p\|_{K_\mathcal{C}}$$

für alle $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$. Die Supremumsnorm ist endlich, da $K_\mathcal{C}$ nach Lemma 1.3 kompakt ist und Polynomfunktionen bezüglich der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}^n$ stetig sind.

Ist $L \in \pi(\mathcal{C})$ von der Form $L = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j L_j$, wobei $N \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \geq 0$, $\sum_{j=1}^{N} \lambda_j = 1$ und $L_1, \ldots, L_N$ Extremalpunkte von $\pi(\mathcal{C})$ sind, dann gilt

$$|L(p)| \leq \sum_{j=1}^{N} \lambda_j |L_j(p)| \leq \|p\|_{K_\mathcal{C}} \sum_{j=1}^{N} \lambda_j = \|p\|_{K_\mathcal{C}}$$

für alle $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ wegen des ersten Teils.

Die Menge $\pi(\mathcal{C})$ ist konvex und nach Lemma 1.7 auch kompakt, deshalb folgt aus dem Satz von Krein-Milman, dass $\pi(\mathcal{C})$ gleich dem Abschluss der konvexen Hülle seiner Extremalpunkte ist. Aus diesem Grund liefern die ersten beiden Teile

$$|L(p)| \leq \|p\|_{K_\mathcal{C}} \text{ für alle } L \in \pi(\mathcal{C}), p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n].$$

Aus $|L(p)| \leq \|p\|_{K_\mathcal{C}}$ folgt aufgrund der Linearität von L, dass $L(p) = L(r)$ für $p, r \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ mit $r|_{K_\mathcal{C}} = p|_{K_\mathcal{C}}$ gilt. Damit ergibt sich, dass L ein wohldefiniertes, stetiges, $\mathbb{R}$-lineares Funktional auf den Polynomfunktionen auf $K_\mathcal{C}$ definiert:

$$\tilde{L}\colon (\{p|_{K_\mathcal{C}}; p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]\}, \|\cdot\|_{K_\mathcal{C}}) \to \mathbb{R}, \tilde{L}(p|_{K_\mathcal{C}}) = L(p)$$

Dieses Funktional kann eindeutig zu einem stetigen, linearen Funktional L' auf $C(K_\mathcal{C}, \mathbb{R})$ fortgesetzt werden, da die Polynomfunktionen nach dem Satz von Stone-Weierstraß in den reellwertigen, stetigen Funktionen auf $K_\mathcal{C}$ bezüglich der Supremumsnorm dicht liegen.

Der Rieszsche Darstellungssatz liefert nun die Existenz eines eindeutig bestimmten, regulären Borelmaßes $\mu \in M(K_\mathcal{C}, \mathbb{R})$ mit $\|\mu\| = \|L'\| = 1$, sodass

$$L'(f) = \int_{K_\mathcal{C}} f \, \mathrm{d}\mu$$

für alle $f \in C(K_\mathcal{C}, \mathbb{R})$ ist. Insbesondere gilt für alle $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$:

$$L(p) = \int_{K_\mathcal{C}} p|_{K_\mathcal{C}} \, \mathrm{d}\mu.$$

Nach der Hahn-Jordan-Zerlegung für signierte Maße existieren positive Borelmaße $\mu^+, \mu^- \in M^+(K_\mathcal{C})$, sodass $\mu = \mu^+ - \mu^-$ gilt. Für die Variationsnorm von μ erhält man $\|\mu\| = \mu^+(K_\mathcal{C}) + \mu^-(K_\mathcal{C})$. Aus $\mu(K_\mathcal{C}) = \int_{K_\mathcal{C}} 1 \, \mathrm{d}\mu = L(1) = 1$ folgt

$$\mu^+(K_\mathcal{C}) - \mu^-(K_\mathcal{C}) = \mu(K_\mathcal{C}) = 1 = \|\mu\| = \mu^+(K_\mathcal{C}) + \mu^-(K_\mathcal{C}),$$

und damit $0 = \mu^-(K_\mathcal{C}) \geq \mu^-(A) \geq 0$ für alle Borelmengen $A \subset K_\mathcal{C}$, da μ^- ein positives Maß ist.

Somit erhält man $\mu^- = 0$ und $\mu = \mu^+$ ist folglich ein positives Maß mit $\mu(K_\mathcal{C}) = 1$, also ein Wahrscheinlichkeitsmaß. $\square$

Nun haben wir alle Hilfsaussagen bereitgestellt, um Theorem 1.1 beweisen zu können.

Beweis von Theorem 1.1. Sei $L\colon \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung und $L \geq 0$ auf $\mathcal{C}$. Ist $L(1) = 0$, dann folgt aus Bemerkung 1.8 $L = 0$ und wir können $\mu = 0$ wählen. Sei also $L(1) > 0$. In diesem Fall gilt $L' = L/L(1) \in \pi(\mathcal{C})$, sodass nach Satz 1.10 ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\nu \in M^+(K_\mathcal{C})$ existiert, dass $L'(p) = \int_{K_\mathcal{C}} p|_{K_\mathcal{C}} \, \mathrm{d}\nu$ für alle $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ erfüllt. Dann gilt: $L(p) = \int_{K_\mathcal{C}} p|_{K_\mathcal{C}} L(1) \, \mathrm{d}\nu = \int_{K_\mathcal{C}} p|_{K_\mathcal{C}} \, \mathrm{d}\mu$, wobei $\mu = L(1)\nu$ gesetzt wurde.

Für die umgekehrte Richtung sei die Linearform $L\colon \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}$ durch ein positives Borelmaß μ auf $K_\mathcal{C}$ darstellbar und $p \in \mathcal{C}$, dann gilt $p \geq 0$ auf $K_\mathcal{C}$ und damit $L(p) = \int_{K_\mathcal{C}} p|_{K_\mathcal{C}} \, \mathrm{d}\mu \geq 0$.

Zum Beweis der Eindeutigkeit beachten wir, dass jedes darstellende Maß nach Bemerkung 1.2 regulär ist, weil $K_\mathcal{C}$ Hausdorffsch und nach Lemma 1.3 kompakt ist sowie eine abzählbare Basis der Topologie auf $K_\mathcal{C}$ existiert. Wenn die Linearform $L\colon \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}$ zwei darstellende Maße besitzt, so stimmen die durch Integration bezüglich dieser Maße gegebenen Funktionale nach dem Satz von Stone-Weierstraß bereits auf den stetigen, reellwertigen Funktionen überein. Damit müssen die Maße nach dem Rieszschen Darstellungssatz schon identisch sein, weil sie regulär sind. $\square$

In der nächsten Bemerkung werden wir ein erstes Beispiel für einen konvexen Kegel geben, der den Voraussetzungen von Theorem 1.1 genügt, und in einem Spezialfall den Satz von Haviland aus diesem Resultat folgern können.

Bemerkung 1.11. (a) *Im ersten Schritt des Beweises von Satz 1.10 wurde mitgezeigt, dass den multiplikativen Linearformen in $\pi(\mathcal{C})$, insbesondere den Extremalpunkten von $\pi(\mathcal{C})$, genau die Diracmaße bezüglich Punkten in $K_{\mathcal{C}}$ entsprechen. Da für eine multiplikative Linearform $L\colon \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n] \to \mathbb{R}$ stets $L(1) = 1$ gilt, sind die darstellenden Maße der multiplikativen, auf $\mathcal{C}$ nichtnegativen Linearformen genau solche Diracmaße.*

(b) *Für eine nichtleere, kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist*

$$\mathcal{C} = \mathrm{Pos}(K) = \{p \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]; p \geq 0 \text{ auf } K\} \subset \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$$

ein archimedischer, konvexer Kegel mit $1 \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}\mathcal{C} \subset \mathcal{C}$ und $K = K_{\mathcal{C}}$.

(c) *Der Satz von Haviland besagt, dass für eine abgeschlossene Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ und eine lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n] \to \mathbb{R}$ die Existenz eines darstellenden Maßes auf K äquivalent zu $L(f) \geq 0$ für alle $f \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ mit $f \geq 0$ auf K ist. Ist K kompakt und nichtleer, so folgt die Aussage direkt aus Theorem 1.1. Der allgemeine Fall wird in Abschnitt 3.2 von [12] bewiesen.*

Beweis. (b) Es ist offensichtlich $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ ein konvexer Kegel mit $1 \in \mathcal{C}$ und $\mathcal{C}\mathcal{C} \subset \mathcal{C}$. Zum Beweis der Archimedizität von $\mathcal{C}$ sei $p \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$. Dann existiert eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$, sodass $N \geq \sup_{x\in K} p(x)$ ist, da das Supremum aufgrund der Kompaktheit von K endlich ist. Damit gilt $N - p(x) \geq 0$ für alle $x \in K$ und somit $N - p \in \mathcal{C}$. Aus $p \geq 0$ auf K für jedes $p \in \mathcal{C}$ folgt $K \subset K_{\mathcal{C}}$. Nehmen wir an, es existiere ein $x \in K_{\mathcal{C}} \setminus K$. Dann ist $d\colon K_{\mathcal{C}} \to \mathbb{R},\quad y \mapsto \mathrm{dist}(y, K)$ eine stetige Funktion auf $K_{\mathcal{C}}$ mit $\delta = d(x) > 0$. Weil $K_{\mathcal{C}}$ kompakt ist, existiert nach dem Satz von Stone-Weierstraß ein $q \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$, sodass $\|q|_{K_{\mathcal{C}}} - (-d)\|_{K_{\mathcal{C}}} < \delta/4$ gilt. Aus $d = 0$ auf K folgt $p = q + \delta/2 \geq 0$ auf K, also $p \in \mathcal{C}$. Da nach Annahme $x \in K_{\mathcal{C}}$ liegt, folgt $p(x) \geq 0$. Dies liefert den Widerspruch

$$\delta \leq q(x) + \frac{\delta}{2} + d(x) \leq \frac{\delta}{2} + |q(x) + d(x)| \leq \frac{\delta}{2} + \|q|_{K_{\mathcal{C}}} + d\|_{K_{\mathcal{C}}} < \frac{3}{4}\delta.$$

Damit gilt $K_{\mathcal{C}} = K$.

(c) Es sei $\mathcal{C} = \mathrm{Pos}(K)$. Dann erfüllt $\mathcal{C}$ nach (b) die Voraussetzungen von Theorem 1.1 und es gilt $K = K_{\mathcal{C}}$. Damit folgt der Satz von Haviland aus Theorem 1.1. □

Unter geeigneten Voraussetzungen lässt sich für das darstellende Maß die Lage der kleinsten abgeschlossenen Menge, deren Komplement eine Nullmenge ist, eingrenzen. Zunächst zeigen wir, dass eine solche Menge stets existiert.

Sei X ein separabler metrischer Raum, $\mu \in M^+(X)$ ein positives Borelmaß und

$$\mathfrak{U} = \{U; U \subset X \text{ offen}, \mu(U) = 0\}.$$

Dann existiert nach dem Satz von Lindelöf eine Folge $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{U}$, sodass

$$\bigcup(U; U \in \mathfrak{U}) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$$

ist. Daher folgt für $V = \bigcup(U; U \in \mathfrak{U})$ aus der Sub-σ-Additivität des Maßes μ, dass

$$0 \leq \mu(V) = \mu\left(\bigcup(U; U \in \mathfrak{U})\right) = \mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i\right) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu(U_i) = 0$$

gilt. Somit ist V die größte offene Teilmenge von X, die eine μ-Nullmenge ist. Man nennt die Menge $\operatorname{supp}(\mu) = X \backslash V$ den *Träger* von μ, dies ist also die kleinste abgeschlossene Menge, deren Komplement eine μ-Nullmenge ist.

Nun können wir das versprochene Kriterium für die Lage des Trägers des darstellenden Maßes formulieren.

Satz 1.12. *Seien $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ ein archimedischer, konvexer Kegel mit $1 \in \mathcal{C}$, $\mathcal{CC} \subset \mathcal{C}$ und $K = K_{\mathcal{C}} \neq \varnothing$, $L\colon \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung mit $L \geq 0$ auf $\mathcal{C}$, μ das darstellende Maß auf K und $r \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$.*

(i) *Falls $L(rp) \geq 0$ für alle $p \in \mathcal{C}$, dann gilt* $\operatorname{supp}(\mu) \subset \{a \in K; r(a) \geq 0\}$.

(ii) *Falls $L(r) = 0$ und die Menge $\{L(rp); p \in \mathcal{C}\}$ nach oben oder unten beschränkt ist, dann gilt* $\operatorname{supp}(\mu) \subset \{a \in K; r(a) = 0\}$.

Beweis. Definiere $L'\colon \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}$ durch $L'(p) = L(rp)$ für alle $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$. Dann ist L' linear.

Es sei $L'(p) \geq 0$ für alle $p \in \mathcal{C}$. Nach Theorem 1.1 existiert dann ein positives Borelmaß μ' auf K mit

$$\int_K p|_K \,\mathrm{d}\mu' = L'(p) = L(rp) = \int_K pr|_K \,\mathrm{d}\mu$$

für alle $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$. Aus dem Satz von Stone-Weierstraß folgt damit

$$\int_K f \,\mathrm{d}\mu' = \int_K fr|_K \,\mathrm{d}\mu$$

für alle $f \in C(K, \mathbb{R})$. Die durch die Integration bezüglich der Maße $r|_K\mu, \mu' \in M(K, \mathbb{R})$ gegebenen stetigen Funktionale auf $C(K, \mathbb{R})$ stimmen somit überein, sodass nach dem Rieszschen Darstellungssatz $\mu' = r|_K\mu$ gelten muss. Es sei $B = \{s \in K; r(s) < 0\} \subset K$. Die Positivität der Maße μ' und μ hat zur Folge

$$0 \leq \mu'(B) = \int_B r|_K \,\mathrm{d}\mu \leq 0,$$

da $r < 0$ auf B ist. Somit gilt $\mu(B) = 0$. Weil $r|_K\colon K \to \mathbb{R}$ stetig ist, ist $B \subset K$ offen. Damit kann der Träger von μ höchstens kleiner als das Komplement von B sein:

$$\operatorname{supp}(\mu) \subset K \backslash B = \{s \in K; r(s) \geq 0\}.$$

Dies zeigt den ersten Teil.

Es sei nun $L'(1) = 0$ und die Menge $\{L'(p); p \in \mathcal{C}\}$ nach oben oder unten beschränkt. Dann folgt aus Bemerkung 1.8, dass $L' = 0$ ist und damit aus dem Satz von Stone-Weierstraß

$$0 = \int_K fr|_K \,\mathrm{d}\mu$$

für alle $f \in C(K, \mathbb{R})$ gilt. Dann liefert der Rieszsche Darstellungssatz $r|_K\mu = 0$. Betrachtet man die offenen Teilmengen $B^+ = \{s \in K; r(s) > 0\} \subset K$ und $B^- = \{s \in K; r(s) <$

$0\} \subset K$, so liefert ein Argument wie in (i) $\mu(B^+) = \mu(B^-) = 0$ und schließlich wie oben $\operatorname{supp}(\mu) \subset K \backslash B^+$ sowie $\operatorname{supp}(\mu) \subset K \backslash B^-$. Daraus folgt

$$\operatorname{supp}(\mu) \subset K \backslash (B^+ \cup B^-) = \{s \in K; r(s) = 0\}.$$

$\square$

Nach Bemerkung 1.8(ii) ist die Vorausetzung von Teil (i) des vorherigen Satzes äquivalent dazu, dass die Menge $\{L(rp); p \in \mathcal{C}\}$ nach unten beschränkt ist.

1.2 Vasilescus Resultate

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass die beiden in [17] betrachteten Aussagen über die Existenz eines darstellenden Maßes in Theorem 1.1 enthalten sind.

Zunächst definieren wir für eine endliche Menge von Polynomen mit kompaktem Positivitätsbereich eine Menge von Polynomen, auf der die Nichtnegativität der Linearform notwendig und hinreichend für die Existenz eines darstellenden Maßes ist, wenn man zusätzlich fordert, dass die von der endlichen Teilmenge und dem Einselement erzeugte Algebra der Polynomring ist.

Bemerkung 1.13. *Es sei $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_m\} \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ mit $K_{\mathcal{P}} \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Wegen der Kompaktheit von $K_{\mathcal{P}}$ ist $m_j = \|p_j\|_{K_{\mathcal{P}}} < \infty$. Setze $\hat{p}_j = m_j^{-1} p_j$, falls $m_j > 0$, und $\hat{p}_j = p_j$ für $m_j = 0$ für $j = 1, \ldots, m$. Wir definieren $\hat{\mathcal{P}} = \{0, 1, \hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_m\}$ und*

$$\Delta_{\mathcal{P}} = \left\{ r_1 \cdots r_k; k \in \mathbb{N}, r_j \in \hat{\mathcal{P}} \cup (1 - \hat{\mathcal{P}}) \right\}.$$

Wir wollen mit $\operatorname{Alg}(q_1, \ldots, q_s)$ die von $q_1, \ldots, q_s \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ erzeugte Teilalgebra von $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ bezeichnen, das heißt

$$\operatorname{Alg}(q_1, \ldots, q_s) = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^s, 1 \leq |\alpha| \leq r} a_\alpha q^\alpha; r \in \mathbb{N}, a_\alpha \in \mathbb{R} \right\}, \tag{1.1}$$

wobei $q = (q_1, \ldots, q_s) \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]^s$ gesetzt wurde und damit $q^\alpha = q_1^{\alpha_1} \cdots q_s^{\alpha_s}$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^s$ gilt.

Satz 1.14. *Sei $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_m\} \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ eine endliche Teilmenge, sodass $K_{\mathcal{P}} \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, kompakte Teilmenge und $\operatorname{Alg}(1, p_1, \ldots, p_m) = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ sind.*

Eine Linearform $L\colon \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}$ besitzt genau dann ein darstellendes Maß μ auf $K_{\mathcal{P}}$, wenn $L \geq 0$ auf $\Delta_{\mathcal{P}}$ ist. In diesem Fall ist das darstellende Maß eindeutig bestimmt.

Beweis. Es sei $\mathcal{C}$ der von $\Delta_{\mathcal{P}}$ erzeugte konvexe Kegel, also

$$\mathcal{C} = \left\{ \sum_{i=0}^k \alpha_i r_i; k \in \mathbb{N}, \alpha_0, \ldots, \alpha_k \geq 0, r_0, \ldots, r_k \in \Delta_{\mathcal{P}} \right\} \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n].$$

Wir zeigen, dass $\mathcal{C}$ die Voraussetzungen von Theorem 1.1 erfüllt.

Aus $\hat{\mathcal{P}} \subset \Delta_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{C}$ folgt $1 \in \mathcal{C}$.

Sei $p = \sum_{i=0}^k \alpha_i r_i, q = \sum_{j=0}^l \beta_j s_j \in \mathcal{C}$ mit $r_0, \ldots, r_k, s_0, \ldots, s_l \in \Delta_{\mathcal{P}}$ und $\alpha_0, \ldots, \alpha_k, \beta_0, \ldots, \beta_l \geq 0$. Dann liefert

$$pq = \left(\sum_{i=0}^k \alpha_i r_i \right) \left(\sum_{j=0}^l \beta_j s_j \right) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \alpha_i \beta_j r_i s_j \in \mathcal{C}$$

die Inklusion $\mathcal{C}\mathcal{C} \subset \mathcal{C}$.

Sei $A = \{r_0 \cdots r_k; k \in \mathbb{N}, r_0, \ldots, r_k \in \hat{\mathcal{P}}\}$. Dann gilt für

$$p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] = \mathrm{Alg}(1, p_1, \ldots, p_m) = \mathrm{Alg}(1, \hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_m),$$

dass $p \in \mathrm{LH}(A)$, sei etwa

$$-p = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_k f_k - \beta_1 g_1 - \ldots - \beta_l g_l,$$

wobei $f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_l \in A$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l < 0$.

Falls $g_i = r_0 \cdots r_k$ mit $r_0, \ldots, r_k \in \hat{\mathcal{P}}$ für ein $i \in \{1, \ldots, l\}$ ist, so gilt:

$$1 - g_i = 1 - r_0 \cdots r_k = (1 - r_0) + r_0(1 - r_1) + \ldots + r_0 \cdots r_{k-1}(1 - r_k) \in \mathcal{C}.$$

Wähle eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$, sodass $N > \beta_1 + \ldots + \beta_l$. Für diese natürliche Zahl N gilt:

$$N - p = (\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_k f_k) + (\beta_1(1 - g_1) + \ldots + \beta_l(1 - g_l)) + (N - (\beta_1 + \ldots + \beta_l)) \in \mathcal{C}.$$

Somit ist $\mathcal{C}$ archimedisch.

Aus $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}$ folgt unmittelbar $K_\mathcal{C} \subset K_\mathcal{P}$. Für die umgekehrte Inklusion sei $a \in K_\mathcal{P}$, das heißt $p(a) \geq 0$ für alle $p \in \mathcal{P}$. Es genügt zu zeigen, dass $p(a) \geq 0$ für ein beliebiges $p \in \Delta_\mathcal{P}$ gilt. Für $r \in \hat{\mathcal{P}}$ gilt $0 \leq r(t) \leq 1$ für $t \in K_\mathcal{P}$.Aus diesem Grund gilt insbesondere $1 - r(a) \geq 0$. Da die Positivität für die restlichen Elemente von $\Delta_\mathcal{P}$ damit sofort folgt, gilt $p(a) \geq 0$ und somit $K_\mathcal{P} \subset K_\mathcal{C}$.

Damit sind die Voraussetzungen von Theorem 1.1 erfüllt. Da die Nichtnegativität von L auf $\Delta_\mathcal{P}$ äquivalent zur Nichtnegativität von L auf $\mathcal{C}$ ist, folgt die Behauptung aus Theorem 1.1. □

Ein zweites Resultat soll die Situation beschreiben, in der die zweite Voraussetzung $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] = \mathrm{Alg}(1, p_1, \ldots, p_m)$ nicht gegeben ist. Für die Formulierung dieses Satzes ist die folgende Notation notwendig.

Bemerkung 1.15. *Es sei $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_m\} \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ eine endliche Teilmenge mit $K_\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $\hat{\mathcal{P}}$ sei definiert wie in Bemerkung 1.13.*

Definiere $a_k = \inf\{x_k; (x_1, \ldots, x_n) \in K_\mathcal{P}\}$ sowie $b_k = \sup\{x_k; (x_1, \ldots, x_n) \in K_\mathcal{P}\}$ für $k = 1, \ldots, n$. Weiterhin setze für $k = 1, \ldots, n$ $\hat{p}_{m+k}(x) = (x_k - a_k)/(b_k - a_k)$ falls $a_k < b_k$ sowie $\hat{p}^{\pm}_{m+k}(x) = \pm(x_k - a_k)$ falls $b_k = a_k$.

Schließlich sei $\tilde{\mathcal{P}} = \hat{\mathcal{P}} \cup \{\hat{p}_{m+k}; k = 1, \ldots, n, \text{ falls } a_k < b_k\}$, $\tilde{\mathcal{P}}_0 = \{1, \hat{p}^{\pm}_{m+k}; k = 1, \ldots, n, \text{ falls } a_k = b_k\}$ sowie

$$\tilde{\Delta}_\mathcal{P} = \left\{q_1 \cdots q_k(1 - r_1) \cdots (1 - r_l) h_1 \cdots h_u; k, l, u \in \mathbb{N}^*, q_i, r_i \in \tilde{\mathcal{P}}, h_i \in \tilde{\mathcal{P}}_0\right\}.$$

Im Beweis des nächsten Satzes wird $K_\mathcal{P} = K_{\tilde{\mathcal{P}}}$ mitbewiesen.

Das folgende Resultat ist in dieser Situation das Analogon zu Satz 1.14. Die Positivität der Linearform muss nun statt auf $\Delta_\mathcal{P}$ auf der "größeren" Menge $\tilde{\Delta}_\mathcal{P}$ vorausgesetzt werden.

Satz 1.16. *Sei $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_m\} \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ mit $K_\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und nichtleer.*

Die Linearform $L\colon \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}$ besitzt genau dann ein darstellendes Maß μ auf $K_\mathcal{P}$, wenn $L \geq 0$ auf $\tilde{\Delta}_\mathcal{P}$ ist. In diesem Fall ist das darstellende Maß eindeutig bestimmt.

Wie im Beweis von Satz 1.14 wird die Behauptung auf Theorem 1.1 zurückgeführt.

Beweis. Es sei $\mathcal{C}$ der von $\tilde{\Delta}_{\mathcal{P}}$ erzeugte konvexe Kegel. Dann gilt

$$\mathcal{C} = \left\{ \sum_{i=0}^{k} \alpha_i r_i; k \in \mathbb{N}, \alpha_0, \ldots, \alpha_k \geq 0, r_0, \ldots, r_k \in \tilde{\Delta}_{\mathcal{P}} \right\} \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n].$$

Wir überprüfen die Voraussetzungen von Theorem 1.1.

Es gilt $1 \in \tilde{\Delta}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{C}$. Außerdem ist $\mathcal{CC} \subset \mathcal{C}$, da $\tilde{\Delta}_{\mathcal{P}}$ unter Multiplikation abgeschlossen ist.

Um die Archimedizität von $\mathcal{C}$ zu beweisen, beobachten wir zunächst, dass die Menge $A = \left\{ q_1 \cdots q_k h_1 \cdots h_u; k, u \in \mathbb{N}^*, q_1, \ldots, q_k \in \tilde{\mathcal{P}}, h_1, \ldots, h_u \in \tilde{\mathcal{P}}_0 \right\}$ unter Multiplikation abgeschlossen ist, sodass $\mathrm{LH}(A) \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ eine Unteralgebra ist. Da die Unteralgebra $\mathrm{LH}(A)$ die Monome $x_1, \ldots, x_n$ und 1 enthält, gilt $\mathrm{LH}(A) = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$. Es sei $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ ein beliebiges Polynom. Aufgrund der vorherigen Beobachtung existieren $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s > 0$ und $f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s \in A$, sodass

$$-p = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_r f_r - \beta_1 g_1 - \ldots - \beta_s g_s$$

gilt. Weil für $h \in \tilde{\mathcal{P}}_0 \backslash \{1\}$ auch $-h \in \tilde{\mathcal{P}}_0 \backslash \{1\}$ ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Polynome $g_1, \ldots, g_s$ nur Produkte von Elementen in $\tilde{\mathcal{P}}$ sind. Für ein $i \in \{1, \ldots, s\}$ sei $g_i = r_0 \cdots r_k$ mit $r_0, \ldots, r_k \in \tilde{\mathcal{P}}$. Dann gilt

$$1 - g_i = 1 - r_0 \cdots r_k = (1 - r_0) + r_0(1 - r_1) + \ldots r_0 \cdots r_{k-1}(1 - r_k) \in \mathcal{C}.$$

Fixiere ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \beta_1 + \ldots + \beta_s$. Dann folgt aus

$$N - p = (\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_r f_r) + (\beta_1(1 - g_1) + \ldots + \beta_s(1 - g_s)) + (N - (\beta_1 + \ldots + \beta_s)) \in \mathcal{C}$$

die Archimedizität von $\mathcal{C}$.

Es bleibt noch $K_{\mathcal{P}} = K_{\mathcal{C}}$ zu zeigen. Die Inklusion $K_{\mathcal{C}} \subset K_{\mathcal{P}}$ folgt aus $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}$. Zum Beweis der zweiten Inklusion sei $c \in K_{\mathcal{P}}$, also $p(c) \geq 0$ für alle $p \in \mathcal{P}$. Für $h \in \tilde{\mathcal{P}}_0$ gilt $h = 1$ oder $h(c) = 0$ und für $q \in \tilde{\mathcal{P}}$ gilt $0 \leq q \leq 1$ auf $K_{\mathcal{P}}$. Dies liefert $p(c) \geq 0$ für alle $p \in \tilde{\Delta}_{\mathcal{P}}$ und somit auch für alle $p \in \mathcal{C}$.

Die Nichtnegativität von L auf $\tilde{\Delta}_{\mathcal{P}}$ ist äquivalent zur Nichtnegativität von L auf $\mathcal{C}$, sodass die Behauptung aus Theorem 1.1 folgt. □

1.3 Positivstellensatz

Als Korollar zu Theorem 1.1 ergibt sich folgender Positivstellensatz:

Korollar 1.17. *Ist $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}[x_1, .., x_n]$ ein archimedischer, konvexer Kegel, sodass $1 \in \mathcal{C}$, $\mathcal{CC} \subset \mathcal{C}$ und $K_{\mathcal{C}} \neq \varnothing$ sind, dann gilt für $p \in \mathbb{R}[x_1, .., x_n]$:*

Ist $p > 0$ auf $K_{\mathcal{C}}$, dann ist $p \in \mathcal{C}$.

Für den Beweis werden wir einen algebraischen Trennungssatz verwenden, der nach einer Definition formuliert werden kann:

Definition 1.18. *Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $M \subset X$ eine nichtleere, konvexe Teilmenge. Ein Punkt $m \in M$ heißt* algebraisch innerer Punkt *von M, falls für alle $x \in X$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass*

$$m + \varepsilon x \in M.$$

Die Menge M^i aller algebraisch inneren Punkte von M heißt algebraisches Inneres *von M.*

Analog zu einem Argument aus [10] zeigen wir, dass ein konvexer Kegel $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ mit $1 \in \mathcal{C}$ genau dann archimedisch ist, wenn 1 im algebraischen Inneren liegt.

Sei $\mathcal{C}$ archimedisch und $q \in \mathbb{R}[x_1, .., x_n]$. Dann existiert eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}^*$, sodass $N + q = N - (-q) \in \mathcal{C}$ und damit auch $1 + \frac{1}{N} q = \frac{1}{N}(N + q) \in \mathcal{C}$, da $\mathcal{C}$ abgeschlossen bezüglich der Multiplikation mit positiven reellen Zahlen ist.

Für die andere Richtung sei $q \in \mathbb{R}[x_1, .., x_n]$. Wir wählen ein $\varepsilon > 0$, sodass $1 + \varepsilon(-q) \in \mathcal{C}$. Die archimedische Eigenschaft der natürlichen Zahlen liefert die Existenz eines $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Dann ist $N - q = (N - \frac{1}{\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon}(1 - \varepsilon q) \in \mathcal{C}$.

Satz 1.19. *Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und seien K_1, $K_2 \subset X$ zwei konvexe Mengen mit $K_1^i \neq \varnothing$, $K_2 \neq \varnothing$ und $K_1^i \cap K_2 = \varnothing$. Dann existieren eine Linearform $L\colon X \to \mathbb{R}$ und eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass*

$$L(y) \leq \lambda \leq L(x)$$

für alle $x \in K_1$, $y \in K_2$ und $L(x) > \lambda$ für alle $x \in K_1^i$ gilt.

Wir werden diesen algebraischen Trennungssatz auf einen Trennungssatz aus der Theorie der lokalkonvexen topologischen Vektorräume zurückführen. Der erste Teil des folgenden Beweises ist eine Abwandlung eines Beweises aus [17].

Beweis. Wir betrachten auf X die lokalkonvexe Topologie τ, deren Nullumgebungsbasis aus allen absorbierenden, absolut konvexen, nichtleeren Teilmengen von X besteht.

Zuerst zeigen wir, dass für eine nichtleere, konvexe Teilmenge $A \subset X$ die Identität $A^i = \mathrm{Int}(A)$ gilt, wobei $\mathrm{Int}(A)$ das Innere von A bezüglich der Topologie τ bezeichnet.

Sei $a \in A^i$. Definiere $U = (A - a) \cap (a - A)$. Dann gilt $0 \in U$ und U ist als Schnitt zweier konvexer Mengen konvex. Da auch $U = -U$ gilt, ist U absolut konvex. Ist $x \in X$ beliebig, so existieren $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, sodass $a - \varepsilon_1 x \in A$ und $a + \varepsilon_2 x \in A$ liegen. Aufgrund der Konvexität von A sind dann $x_1 = a - \varepsilon x \in A$ und $x_2 = a + \varepsilon x \in A$ mit $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$. Damit erhält man $x = (a - x_1)/\varepsilon \in (a - A)/\varepsilon$ und $x = (x_2 - a)/\varepsilon \in (A - a)/\varepsilon$, folglich gilt $x \in U/\varepsilon$, also ist U absorbierend. Somit ist U eine Nullumgebung und $a + U \subset A$, also $a \in \mathrm{Int}(A)$.

Ist $a \in \mathrm{Int}(A)$ und $x \in X$ beliebig, dann existiert eine absorbierende, absolut konvexe, nichtleere Teilmenge $U \subset X$ mit $a + U \subset A$ sowie ein $\varrho > 0$, sodass $x \in \varrho U$ ist, etwa $x = \varrho y$ für $y \in U$. Dann gilt $a + x/\varrho = a + y \in a + U \subset A$ und damit $a \in A^i$.

Nun beweisen wir die Existenz einer Linearform $L\colon X \to \mathbb{R}$ und einer reellen Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ mit den gewünschten Eigenschaften.

Es seien $K_1^i = \mathrm{Int}(K_1)$ und K_2 wie in der Voraussetzung. Dann sind K_1^i, K_2 konvexe, disjunkte Teilmengen von X und K_1^i ist offen bezüglich der Topologie τ. Die Trennungssätze für lokalkonvexe topologische Vektorräume liefern die Existenz einer stetigen Linearform $L\colon X \to \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass $L(x) \leq \lambda < L(y)$ für $x \in K_2$ und $y \in K_1^i$.

Wir nehmen an, dass ein $a \in K_1$ mit $L(a) < \lambda$ existiert. Wähle $b \in K_1^i$. Dann existiert ein $t_0 \in (0, 1)$ mit $L(t_0 a + (1 - t_0) b) = \lambda$. Setze $a' = t_0 a + (1 - t_0) b$. Für $x \in X$ existiert $\varepsilon_x > 0$ mit $b + \varepsilon_x x \in K_1$. Dann gilt $a' + \varepsilon_x (1 - t_0) x = t_0 a + (1 - t_0)(b + \varepsilon_x x) \in K_1$, weil K_1 konvex ist. Damit folgt $a' \in K_1^i$ im Widerspruch zu $L(a') = \lambda$. □

Ein alternativer Beweis wird in § 17.1(3) in [11] gegeben. Mit Hilfe des algebraischen Trennungssatzes können wir nun den Beweis von Korollar 1.17 führen.

Beweis von Korollar 1.17. Ist $p \notin \mathcal{C}$, so liefert Satz 1.19 die Existenz einer Linearform $L\colon \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}$ und einer reellen Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $L(p) \leq \lambda \leq L(x)$ für alle $x \in \mathcal{C}$

und $\lambda < L(1)$, da der Kegel $\mathcal{C}$ konvex ist und als archimedischer Kegel den algebraisch inneren Punkt $1 \in \mathcal{C}$ besitzt.

Existiert ein $r \in \mathcal{C}$ mit $L(r) < 0$, so folgt der Widerspruch

$$L(p) \leq L(tr) = tL(r) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Damit gilt $L \geq 0$ auf $\mathcal{C}$ sowie $L \neq 0$, da $L(p) < L(1)$ ist, sodass Theorem 1.1 die Existenz eines darstellenden Maßes $\mu \neq 0$ auf $K_{\mathcal{C}}$ für die Linearform L liefert.

Da μ ein positives Maß und $p > 0$ auf $K_{\mathcal{C}}$ ist, gilt

$$0 \leq \int_{K_{\mathcal{C}}} p|_{K_{\mathcal{C}}} \, \mathrm{d}\mu = L(p) \leq \lambda \leq L(0) = 0,$$

weil $0 \in \mathcal{C}$ ist.

Aufgrund der Positivität von p auf $K_{\mathcal{C}}$ folgt daraus $p = 0$ μ-fast überall auf $K_{\mathcal{C}}$, was ein Widerspruch zu $p > 0$ auf $K_{\mathcal{C}}$ und $\mu \neq 0$ ist. $\square$

Wie wir im Beweis von Satz 1.14 gesehen haben, erfüllt der von $\Delta_{\mathcal{P}}$ erzeugte konvexe Kegel die Voraussetzungen von Theorem 1.1, wenn $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_s\} \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ eine endliche Teilmenge ist, sodass $K_{\mathcal{P}} \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer, kompakt und die von $1, p_1, \ldots, p_s$ erzeugte Algebra gleich dem Polynomring $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ ist. Damit ist Theorem I.3.1 in [17] ein Spezialfall von Korollar 1.17, wenn $\mathcal{C}$ der von $\Delta_{\mathcal{P}}$ erzeugte konvexe Kegel ist. In dieser Situation kann mit Korollar 1.17 die Struktur der auf $K_{\mathcal{C}}$ strikt positiven Polynome beschrieben werden.

Als weiteres Resultat werden wir in Korollar 2.12 Schmüdgens Positivstellensatz folgern.

2 Schmüdgens Theorem

In diesem Kapitel zeigen wir, dass Schmüdgens Theorem ein weiterer Spezialfall von Theorem 1.1 ist. Dazu sind einige Vorbereitungen notwendig, da der Beweis insbesondere Krivines Nullstellensatz benötigt. Dieses Resultat wird im ersten Abschnitt bewiesen.

Darüberhinaus beweisen wir Schmüdgens Positivstellensatz als Folgerung aus dem Positivstellensatz des letzten Abschnitts.

2.1 Krivines Positivstellensatz

Der Beweis des Positivstellensatzes von Krivine benötigt Tarskis Transferprinzip, das wir allerdings nur zitieren möchten.

Satz 2.1 (Tarskis Transferprinzip). *Sei $(F, \leq)$ eine angeordnete Körpererweiterung von $(\mathbb{R}, \leq)$ und es existiere ein Punkt $a = (a_1, \ldots, a_n) \in F^n$, der ein endliches System von polynomiellen Gleichungen und Ungleichungen mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ erfüllt. Dann existiert ein Punkt $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, der die selben Gleichungen und Ungleichungen erfüllt.*

Ein Beweis dieser Aussage findet sich in Theorem 11.2.4 in [12].

Bevor wir den Positivstellensatz beweisen werden, sind einige Hilfsaussagen bereitzustellen. Die Aussagen und Beweise im folgenden Abschnitt orientieren sich, wenn nicht anders vermerkt, an [12].

Im Folgenden sei F ein Körper mit $char(F) \neq 2$ und A ein kommutativer Ring mit 1.

Eine *Präordnung* von A ist eine Teilmenge $T \subset A$ mit $T + T \subset T$, $TT \subset T$ und $a^2 \in T$ für alle $a \in A$.

Eine Teilmenge $P \subset A$ heißt *Ordnung* von A, falls $P + P \subset P$, $PP \subset P$ sowie $P \cup -P = A$, $P \cap -P = \{0\}$.

Jede Ordnung ist eine Präordnung, denn ist $a \in A$, dann gilt $a \in P$ oder $-a \in P$ und somit $a^2 = aa \in P$ oder $a^2 = (-a)(-a) \in P$.

Lemma 2.2. *Sei $T \subset F$ eine Präordnung und $f \in F \backslash T$.*

Dann existiert eine bezüglich Inklusion maximale Präordnung $P \subset F$, sodass $f \notin P$ und $T \subset P$. Die Präordung P ist eine Ordnung.

Beweis. Sei $\Gamma = \{P \subset F; P \text{ Präordnung}, f \notin P, T \subset P\}$. Dann ist Γ bezüglich der Mengeninklusion partiell geordnet und nicht leer, da $T \in \Gamma$.

Ist $(P_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Kette in Γ, dann besitzt $P' = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda$ die Eigenschaften $f \notin P'$, $T \subset P'$ und $a^2 \in P'$ für alle $a \in F$. Sind $f, g \in P'$, so existiert ein $\lambda_0 \in \Lambda$ mit $f, g \in P_{\lambda_0}$. Weil P_{λ_0} ein Präordnung ist, gilt $f + g, fg \in P_{\lambda_0} \subset P'$. Somit gilt $P' \in \Gamma$ und das Zornsche Lemma liefert die Existenz einer maximalen Präordnung $P \in \Gamma$.

Weil P eine Präordnung ist, genügt es $P \cup -P = F$ und $P \cap -P = \{0\}$ zu zeigen.

Wegen $f \notin P$ zeigt die Darstellung $f = \left(\frac{f+1}{2}\right)^2 + (-1)\left(\frac{f-1}{2}\right)^2$, dass auch -1 nicht in P liegt.

Die Formeln

$$\begin{aligned}(a_1 - fb_1) + (a_2 - fb_2) &= (a_1 + a_2) - f(b_1 + b_2),\\ (a_1 - fb_1)(a_2 - fb_2) &= (a_1a_2 + b_1b_2f^2) - f(a_1b_2 + a_2b_1)\end{aligned}$$

für $a_1, a_2, b_1, b_2 \in P$ zeigen, dass $P - fP$ eine Präordnung ist. Aus

$$a = a - f(0^2) \in P - fP$$

für alle $a \in P$ und

$$-f = 0^2 - f(1^2)$$

folgt zusammen mit der Maximalität von P bezüglich der Mengeninklusion, dass $-f \in P$ ist. Denn sonst würde folgen, dass $f \in P - fP$ ist, etwa $f = a - fb$ für $a, b \in P$. Daraus folgt $f(1 + b) = a$ und wegen $-1 \notin P$ also $1 + b \neq 0$ ergibt sich der Widerspruch

$$f = \frac{a}{1+b} = a(1+b)\left(\frac{1}{1+b}\right)^2 \in P.$$

Sei $g \in F$ und $g \notin P$. Analog zum obigen Argument sieht man, dass $P + gP$ eine Präordung ist und $P \subsetneq P + gP$ gilt. Die Maximalität von P impliziert $f \in P + gP$, etwa $f = a + gb$ mit $a, b \in P$, sodass $-bg = a + (-f) \in P$ gilt, weil $-f \in P$. Wegen $f \notin P$ gilt $a - f \neq 0$ und somit $b \neq 0$. Damit folgt

$$-g = \frac{a-f}{b} = (a-f)b\left(\frac{1}{b}\right)^2 \in P.$$

Damit haben wir gezeigt, dass $P \cup -P = F$ ist.

Sei $g \in P \cap -P$. Die Annahme $g \neq 0$ liefert den Widerspruch

$$-1 = g(-g)\left(\frac{1}{g}\right)^2 \in P.$$

Also ist auch $P \cap -P = \{0\}$. □

Ist $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und $A/\mathfrak{a}$ der Quotientenring, dann ist die Quotientenabbildung $\psi\colon A \to A/\mathfrak{a}$ ein surjektiver Ringhomomorphismus.

Eine Teilmenge $S \subset A$ heißt *multiplikativ*, falls $1 \in S$ und mit $f, g \in S$ auch $fg \in S$ gilt. Dann definiert

$$(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2) :\Leftrightarrow \exists u \in S \text{ mit } u(r_1s_2 - r_2s_1) = 0$$

eine Äquivalenzrelation auf $A \times S$. Die Restklasse $[(r_1, s_1)]$ wird mit $\frac{r_1}{s_1}$ bezeichnet. Die Menge der Restklassen $S^{-1}A = A \times S/\sim$ wird vermöge der wohldefinierten Verknüpfungen

$$\begin{aligned}\frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} &= \frac{r_1s_2 + r_2s_1}{s_1s_2}\\ \frac{r_1}{s_1}\frac{r_2}{s_2} &= \frac{r_1r_2}{s_1s_2}\end{aligned}$$

zu einem kommutativen Ring mit 1.

Ist A ein Integritätsring, dann ist $S = A \setminus \{0\}$ multiplikativ und $S^{-1}A$ stimmt mit dem Quotientenkörper $Q(A)$ überein.

Für ein Primideal $\mathfrak{p}$ ist $S = A \backslash \mathfrak{p}$ multiplikativ. In diesem Fall schreiben wir $A_\mathfrak{p}$ für $S^{-1}A$. Der Übergang von A zu $A_\mathfrak{p}$ heißt die *Lokalisierung* von A in $\mathfrak{p}$.

Proposition 2.3. (a) *Es gibt eine bezüglich der Mengeninklusion ordnungserhaltende Bijektion zwischen der Menge der Ideale $\mathfrak{b} \subset A$, die $\mathfrak{a}$ enthalten, und den Idealen $\bar{\mathfrak{b}} \subset A/\mathfrak{a}$. Dieselbe Aussage gilt für die Primideale von A, die $\mathfrak{a}$ enthalten, und die Primideale von $A/\mathfrak{a}$.*

(b) *Für ein Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ stehen die Primideale von $A_\mathfrak{p}$ in Bijektion zu den Primidealen von A, die in $\mathfrak{p}$ enthalten sind.*

Beweis. (a) Man kann zeigen, dass $\tilde{\psi}\colon \{\bar{\mathfrak{b}}; \bar{\mathfrak{b}} \subset A/\mathfrak{a} \text{ Ideal}\} \to \{\mathfrak{b}; \mathfrak{b} \subset A \text{ Ideal mit } \mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}\}, \bar{\mathfrak{b}} \mapsto \overset{-1}{\psi}(\bar{\mathfrak{b}})$ eine bijektive Abbildung ist und dass das Bild der Einschränkung von $\tilde{\psi}$ auf die Primideale in $A/\mathfrak{a}$ genau die Primideale in A sind, die $\mathfrak{a}$ enthalten.
(b) siehe Corollary 3.13 in [3]. □

Für ein Ideal $I \subset A$ nennt man

$$\sqrt{I} = \{a \in A;\ \text{es gibt ein } m \in \mathbb{N} \text{ mit } a^m \in I\}$$

das *Radikal* von I. Dann ist $\sqrt{I} \subset A$ ein Ideal, denn ist $a^m \in I$ und $f \in A$, so gilt $(fa)^m = f^m a^m \in I$ und für $a^m, b^n \in I$ ist auch $(a+b)^{m+n} = \sum_{i=0}^{m+n} \binom{n}{i} a^i b^{m+n-i} \in I$, da $i \geq m$ oder $m+n-i \geq n$ (Der binomische Lehrsatz gilt in beliebigen kommutativen Ringen mit 1).

Das Nullradikal $\mathfrak{R}$ ist definiert als die Menge aller nilpotenten Elemente von A, daher gilt $\mathfrak{R} = \sqrt{\{0\}}$.

Die Beweise der Aussagen (a) und (b) der folgenden Proposition sind [3] entnommen, die Beweise der übrigen Teile [12].

Proposition 2.4. *Sei $I \subset A$ ein Ideal.*

(a) *Das Nullradikal ist der Durchschnitt aller Primideale von A.*

(b) *$\sqrt{I}$ ist der Durchschnitt aller Primideale, die über I liegen.*

(c) *Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$, das über I liegt, existiert ein minimales über I liegendes Primideal $\mathfrak{p}'$ mit $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$.*

(d) *Wenn $\mathfrak{p}$ ein minimales über I liegendes Primideal und $a \in \mathfrak{p}$ ist, dann existiert ein $b \in A \backslash \mathfrak{p}$ und ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $a^n b \in I$ ist.*

Beweis. (a) Es bezeichne $\mathfrak{R}'$ den Durchschnitt aller Primideale von A. Ist $f \in A$ nilpotent, etwa $f^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A. Dann gilt $f^m = 0 \in \mathfrak{p}$, also $f \in \mathfrak{p}$, weil $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist. Folglich gilt $f \in \mathfrak{R}'$.

Für die umgekehrte Richtung nehmen wir an, dass f nicht nilpotent sei und bezeichnen mit Γ die Menge aller Ideale $\mathfrak{a}$ mit $f^m \notin \mathfrak{a}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Diese ist durch die Mengeninklusion partiell geordnet und nicht leer, da $\{0\} \in \Gamma$. Für eine Kette $(\mathfrak{p}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ in Γ ist die Vereingung $\mathfrak{q} = \cup_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{p}_\lambda$ erneut ein Ideal, denn $0 \in \mathfrak{q}$ und sind $a, b \in \mathfrak{q}$, $c \in A$, dann existiert ein $\lambda_0 \in \Lambda$ mit $a, b \in \mathfrak{p}_{\lambda_0}$ und damit $a + b, ac \in \mathfrak{p}_{\lambda_0} \subset \mathfrak{q}$. Wegen $f^m \notin \mathfrak{q}$ für $m \in \mathbb{N}$ ist $\mathfrak{q} \in \Gamma$ und damit existiert nach dem Zornschen Lemma ein maximales Element $\mathfrak{p} \in \Gamma$. Wir zeigen nun, dass $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist. Sind $a, b \notin \mathfrak{p}$, so ist $\mathfrak{p}$ strikt in $\mathfrak{p} + (a)$ und in $\mathfrak{p} + (b)$ enthalten, diese Ideale gehören also nicht zu Γ. Deshalb existieren $k, l \in \mathbb{N}$, sodass $f^k \in \mathfrak{p} + (a)$ und $f^l \in \mathfrak{p} + (b)$, etwa $f^k = p_1 + a_1$ und $f^l = p_2 + b_1$ mit $p_1, p_2 \in \mathfrak{p}$ und $a_1 \in (a)$, $b_1 \in (b)$. Dann gilt $f^{k+l} = (p_1 p_2 + p_1 b_1 + p_2 a_1) + a_1 b_1 \in \mathfrak{p} + (ab)$. Somit ist $\mathfrak{p} + (ab) \notin \Gamma$ und daraus folgt $ab \notin \mathfrak{p}$. Somit ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal mit $f \notin \mathfrak{p}$.

(b) Beachte Proposition 2.3 (a) und wende Teil (a) auf A/I an.

(c) Es sei $\Gamma = \{\mathfrak{q} \subset A; \mathfrak{q} \text{ Primideal}, I \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}\}$. Dann gilt $\mathfrak{p} \in \Gamma$. Wir betrachten auf Γ die partielle Ordnung, die durch die umgekehrte Mengeninklusion gegeben ist. Für eine beliebige Familie von Idealen ist der Durchschnitt ein Ideal. Somit ist für eine Kette $(\mathfrak{p}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von Primidealen der Schnitt $\mathfrak{q} = \cap_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{p}_\lambda$ erneut ein Ideal und sind $f, g \in A$ mit $fg \in \mathfrak{q}$, dann ist $f \in \mathfrak{p}_\lambda$ oder $g \in \mathfrak{p}_\lambda$ für jedes $\lambda \in \Lambda$. Angenommen $g \notin \mathfrak{q}$, dann existiert $\lambda_0 \in \Lambda$ mit $g \notin \mathfrak{p}_{\lambda_0}$. Es folgt $g \notin \mathfrak{p}_\lambda$ für alle $\mathfrak{p}_\lambda \subset \mathfrak{p}_{\lambda_0}$, folglich $f \in \mathfrak{p}_\lambda$ für alle $\mathfrak{p}_\lambda \subset \mathfrak{p}_{\lambda_0}$. Für die restlichen $\mathfrak{p}_\lambda$ gilt dies aufgrund von $\mathfrak{p}_\lambda \supset \mathfrak{p}_{\lambda_0}$ auch. Damit gilt $f \in \mathfrak{q}$. Das Bilden des Durchschnitts erhält die Inklusionsbeziehungen, sodass $\mathfrak{q} \in \Gamma$ und deshalb ein Maximum der Kette $(\mathfrak{p}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ bezüglich der umgekehrten Mengeninklusion ist. Aus dem Zornschen Lemma folgt die Existenz eines minimalen Primideals $\mathfrak{p}'$ mit den gewünschten Eigenschaften.

(d) Es bezeichne $\psi\colon A \to A/I$ die Quotientenabbildung und $\mathfrak{p}_1 = \psi(\mathfrak{p})$ das Bild des minimalen Primideals $\mathfrak{p}$. Dann ist $\mathfrak{p}_1$ ein Primideal. Die Minimalität von $\mathfrak{p}$ besagt, dass es kein von $\mathfrak{p}$ verschiedenes Primideal in A gibt, das zwischen I und $\mathfrak{p}$ liegt. Damit folgt aus Proposition 2.3 (a), dass kein Primideal in A/I existiert, das strikt in $\mathfrak{p}_1$ enthalten ist. Wir lokalisieren nun A/I in $\mathfrak{p}_1$. Dann ist $\mathfrak{p}_2 = \{\frac{p}{s}; p \in \mathfrak{p}_1, s \in (A/I)\backslash\mathfrak{p}_1\} \subset (A/I)_{\mathfrak{p}_1}$ ein Primideal. Proposition 2.3 (b) liefert, dass $\mathfrak{p}_2$ das einzige Primideal in $(A/I)_{\mathfrak{p}_1}$ ist. Mit Teil (a) erhält man $\sqrt{\{0\}} = \mathfrak{p}_2$. Es gilt $\tilde{a} = \psi(a) \in \mathfrak{p}_1$ und $\frac{\tilde{a}}{1} \in \mathfrak{p}_2$. Aus diesem Grund existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $\left(\frac{\tilde{a}}{1}\right)^m = 0$. Es folgt $\left(\frac{\tilde{a}}{1}\right)^m \sim \frac{0}{1}$, sodass $\tilde{b} \in (A/I)\backslash\mathfrak{p}_1$ mit $\tilde{b}\tilde{a}^m = 0$ existiert. Deshalb gibt es $b \in A\backslash\mathfrak{p}$ mit $\tilde{b} = \psi(b)$. Aus $\tilde{b}\tilde{a}^m = 0$ erhält man $ba^m \in I$. □

Ist B ein weiterer kommutativer Ring mit 1, $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus mit $\varphi(1) = 1$ und $S \subset B$ eine Präordnung, dann ist $\overset{-1}{\varphi}(S)$ eine Präordnung in A. Für eine Präordnung $T \subset A$ nennt man die kleinste Präordnung in B, die $\varphi(T)$ enthält, die *Fortsetzung* E von T nach B bezüglich φ.

Ist $M \subset A$ multiplikativ abgeschlossen und $1 \in M$, so ist

$$P(M) = \left\{\sum_{i=0}^{k} b_i^2 s_i; k \in \mathbb{N}, b_0, \ldots, b_k \in B, s_0, \ldots, s_k \in M\right\} \tag{2.1}$$

die kleinste Präordnung in A, die M enthält.

Weil $\varphi(T)$ multiplikativ abgeschlossen und $1 \in \varphi(T)$ ist, gilt:

$$E = P(\varphi(T)) = \left\{\sum_{i=0}^{k} b_i^2 \varphi(s_i); k \in \mathbb{N}, b_0, \ldots, b_k \in B, s_0, \ldots, s_k \in T\right\}.$$

Proposition 2.5. *Ist A ein Integritätsring und $F = Q(A)$ sein Quotientenkörper sowie $T \subset A$ eine Präordnung mit $T \cap -T = \{0\}$ und $\psi\colon A \hookrightarrow F$ die kanonische Inklusion, dann ist die Fortsetzung E von T nach F bezüglich ψ eine echte Teilmenge von F.*

Beweis. Ein allgemeines Element $r \in E$ hat nach Gleichung (2.1) die Gestalt $r = \sum_i \left(\frac{a_i}{b_i}\right)^2 s_i$ für $a_i, b_i \in A$, $b_i \neq 0$ und $s_i \in T$. Definiert man $b = \Pi_i b_i$, dann gilt $b \neq 0$, weil A ein Integritätsring ist. Für $s = \sum_i \left(a_i \Pi_{j\neq i} b_j\right)^2 s_i$, gilt $r = \frac{s}{b^2}$, also kann ein beliebiges Element von E in der Form s/b^2 mit $s \in T$ und $b \in A\backslash\{0\}$ geschrieben werden.

Wir zeigen nun $E \subsetneq F$, indem wir die Annahme $-1 \in E$ zum Widerspruch führen. Seien $s \in T$ und $b \in A\backslash\{0\}$ mit $-1 = s/b^2$. Dann folgt $-b^2 = s \in T$ und damit $b^2 \in T \cap -T = \{0\}$, da alle Quadrate Elemente von T sind. Die Tatsache, dass A ein Integritätsring ist, liefert den Widerspruch $b = 0$. □

Es sei $T \subset A$ eine Präordnung und 2 eine Einheit in A, also $\frac{1}{2} \in A$. Ein Ideal $I \subset A$ heißt T-*konvex*, falls mit $s_1, s_2 \in T$ und $s_1 + s_2 \in I$ auch $s_1, s_2 \in I$ gilt.

Proposition 2.6. *Es sei $T \subset A$ eine Präordnung, $I = T \cap -T$. Dann gilt:*

(a) *I ist ein Ideal und T-konvex.*

(b) *$T = A$ ist äquivalent zu $-1 \in T$.*

(c) *Ist $\mathfrak{p} \subset A$ ein minimales über I liegendes Primideal, dann ist $\mathfrak{p}$ T-konvex.*

Beweis. (a) Es gilt $0 \in T \cap -T$ und sind $f, g \in T \cap -T$, dann ist $f + g \in T$ und $-(f+g) = (-f) + (-g) \in T$. Für $f \in A$ und $g \in T \cap -T$ folgt: $fg = \left(\frac{f+1}{2}\right)^2 g + \left(\frac{f-1}{2}\right)^2 (-g) \in T$ sowie $-fg = \left(\frac{f+1}{2}\right)^2 (-g) + \left(\frac{f-1}{2}\right)^2 g \in T$.

Es seien $f, g \in T$ und $f + g \in T \cap -T$, dann ist $-(f + g) \in T$ und damit $-f = g + (-(f+g)) \in T$, sodass $f \in T \cap -T$ und $g = (f+g) + (-f) \in T \cap -T$ folgt.

(b) Es ist nur eine Richtung zu beweisen: Sei $-1 \in T$. Dann ist $1 \in I$ und damit $I = A$, weil I nach Teil (a) ein Ideal ist. Aus $I = T \cap -T$ folgt $T = A$.

(c) Seien $s_1, s_2 \in T$ und $s_1 + s_2 \in \mathfrak{p}$. Nach Proposition 2.4 (d) existieren ein $m \in \mathbb{N}$ und ein $u \notin \mathfrak{p}$, sodass $u(s_1 + s_2)^m \in I$ und damit $u^2(s_1 + s_2)^m \in I$ ist. Der binomische Lehrsatz liefert

$$u^2(s_1 + s_2)^m = \sum_{i=0}^{m} u^2 \binom{m}{i} s_1^i s_2^{m-i}.$$

Jeder der Summanden auf der rechten Seite liegt in T, da $\binom{m}{i} \in \mathbb{N}$ ist. Weil I nach Teil (a) T-konvex ist, gilt $u^2\binom{m}{i} s_1^i s_2^{m-i} \in I$ für $i = 0, \ldots, m$. Für $i = m$ erhält man $u^2 s_1^m \in I \subset \mathfrak{p}$ und damit $s_1 \in \mathfrak{p}$, denn $\mathfrak{p}$ ist ein Primideal und $u \notin \mathfrak{p}$. Der Fall $i = 0$ liefert analog $s_2 \in \mathfrak{p}$. □

Für $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_s\} \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ bezeichne $T_{\mathcal{P}}$ die von $\mathcal{P}$ erzeugte Präordnung, das heißt

$$T_{\mathcal{P}} = \left\{ \sum_{i=0}^{k} q_i^2 r_i ; k \in \mathbb{N}, q_0, \ldots, q_k \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n], r_0, \ldots, r_k \in M \right\}, \tag{2.2}$$

wobei $M = \{p^\alpha ; \alpha \in \mathbb{N}^s\}$ mit $p = (p_1, \ldots, p_s) \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]^s$ ist. Nun haben wir alle Hilfsmittel an der Hand, um Krivines Positivstellensatz zu beweisen.

Satz 2.7 (Positivstellensatz). *Es sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ eine endliche Teilmenge, $K = K_{\mathcal{P}} \subset \mathbb{R}^n$ sowie $T = T_{\mathcal{P}} \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ wie oben definiert und $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$. Dann gilt*

(i) *$f > 0$ auf K genau dann, wenn Polynome $p, q \in T$ existieren, sodass $pf = 1 + q$,*

(ii) *$f \geq 0$ auf K genau dann, wenn eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ und Polynome $p, q \in T$ existieren, sodass $pf = f^{2m} + q$,*

(iii) *$f = 0$ auf K genau dann, wenn eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $-f^{2m} \in T$,*

(iv) *$K = \varnothing$ genau dann, wenn $-1 \in T$.*

Die vier Teile des Positivstellensatzes sind äquivalent. Im Folgenden werden wir nur Teil (i) des Positivstellensatzes benötigen. Deshalb zeigen wir die Äquivalenz von (i) und (iv) sowie die Gültigkeit von (iv). Ein Beweis der Äquivalenz der restlichen Aussagen findet sich in [12].

Beweis. (iv)⇒(i): Sei $pf = 1 + q$ mit $p, q \in T$. Dann gilt $pf > 0$ auf K, da $q \geq 0$ auf K ist. Daraus folgt $f > 0$ auf K, weil $p \geq 0$ auf dieser Menge ist.

Sei umgekehrt $f > 0$ auf K. Betrachte $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \{-f\}$. Dann gilt $K_{\mathcal{P}'} = \varnothing$, da $f > 0$ auf K und $K_{\mathcal{P}'} \subset K$, somit $-1 \in T_{\mathcal{P}'}$. Wegen $T_{\mathcal{P}'} = T_{\mathcal{P}} - fT_{\mathcal{P}}$ existieren $p, q \in T_{\mathcal{P}}$ mit $-1 = q - fp$ also $pf = 1 + q$.

(i)⇒(iv): Wegen $K = K_T$ liefert $-1 \in T$ unmittelbar $K = \varnothing$. Um die umgekehrte Richtung zu beweisen, sei $K = \varnothing$, sodass $-1 > 0$ auf K ist. Damit existieren $p, q \in T$ mit $p(-1) = 1 + q$, somit $-1 = p + q \in T$.

Wir zeigen jetzt die Gültigkeit der Äquivalenz in (iv). Wie oben gesehen, folgt aus $-1 \in T$ direkt $K = \varnothing$. Sei zum Beweis der umgekehrten Implikation $K = \varnothing$. Wir nehmen an, dass $-1 \notin T$. Damit ist $T \cap -T \subsetneq \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ und $T \cap -T$ ist nach Proposition 2.6 (a) ein Ideal. Weil jedes Ideal in einem kommutativen Ring mit Eins in einem maximalen Ideal enthalten ist, existiert nach Proposition 2.4 ein minimales Primideal $\mathfrak{p} \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, dass über $T \cap -T$ liegt. Da $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist, ist $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{p}$ ein Integritätsring, sodass wir den Quotientenkörper $F = Q(\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{p})$ betrachten können. Wir betrachten die Abbildungen

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R} & \overset{\varphi_1}{\hookrightarrow} & \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] & \overset{\varphi_2}{\to} & \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{p} & \overset{\varphi_3}{\hookrightarrow} & F = Q\left(\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{p}\right) \\ r \mapsto r & & & q \mapsto q + \mathfrak{p} = \bar{q} & & \bar{q} \mapsto \dfrac{\bar{q}}{\bar{1}}. & \end{array}$$

Da $\mathfrak{p}$ ein echtes Ideal ist, ist $\varphi_2 \circ \varphi_1$ injektiv und somit auch $\varphi = \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$. Folglich ist $\mathbb{R} \hookrightarrow F$ eine Körpererweiterung.

Weil $\mathfrak{p}$ nach Proposition 2.6 (c) T-konvex ist, besitzt die Fortsetzung $T_0 = \varphi_2(T)$ von T nach $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{p}$ die Eigenschaft $T_0 \cap -T_0 = \{0\}$. Damit sind die Voraussetzungen von Proposition 2.5 erfüllt und aus dieser folgt, dass die Fortsetzung T_1 von T_0 nach F eine echte Präordnung ist. Proposition 2.6 (b) besagt $-1 \notin T_1$, sodass Lemma 2.2, angewendet auf T_1 und $f = -1$, die Existenz einer Ordnung $P_1 \subset F$ mit $T_1 \subset P_1$ impliziert.

Für $a, b \in F$ schreiben wir $a \leq b$ genau dann, wenn $b - a \in P_1$. Auf diese Weise wird F zu einem angeordneten Körper.

Da $\overset{-1}{\varphi}(P_1) \subset \mathbb{R}$ eine Ordnung ist, die eindeutige Ordnung auf $\mathbb{R}$, ist $(F, \leq)$ eine angeordnete Körpererweiterung von $(\mathbb{R}, \leq)$.

Wir zeigen, dass ein Element $a = (a_1, \ldots, a_n) \in F^n$ existiert, sodass $p_i(a) \geq 0$ für $i = 1, \ldots, s$.

Setze $a_i = \bar{x}_i = x_i + \mathfrak{p} \in F$ für $i = 1, \ldots, n$. Für ein beliebiges $g \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, etwa $g = \sum_{\alpha \in J} c_\alpha x^\alpha$ mit einer endlichen Teilmenge $J \subset \mathbb{N}^n$ und $c_\alpha \in \mathbb{R}$ für alle $\alpha \in J$, bezeichne $\bar{g} = \varphi_3 \circ \varphi_2(g)$ das Bild von g in F, dann gilt:

$$\bar{g} = \sum_{\alpha \in J} \bar{c_\alpha} \bar{x}^\alpha = \sum_{\alpha \in J} c_\alpha \bar{x}_1^{\alpha_1} \cdots \bar{x}_n^{\alpha_n} = g(a)$$

Aus diesem Grund genügt es zu zeigen, dass $\bar{p}_i \geq 0$ für $i = 1, \ldots, s$. Aus $p_i \in T$ folgt $\bar{p}_i = \varphi_3 \circ \varphi_2(p_i) \in \varphi_3 \circ \varphi_2(T) \subset T_1 \subset P_1$ und damit $\bar{p}_i \geq 0$ für $i = 1, \ldots, s$. Damit gelten für $a = (a_1, \ldots, a_n) \in F^n$ die Ungleichungen $p_i(a) \geq 0$ für $i = 1, \ldots, s$.

Weil $(F, \leq)$ eine angeordnete Körpererweiterung von $(\mathbb{R}, \leq)$ ist, können wir Tarskis Transferprinzip in Satz 2.1 anwenden. Dieses liefert die Existenz eines $b \in \mathbb{R}^n$ mit $p_i(b) \geq 0$ für $i = 1, \ldots, s$. Somit gilt $b \in K$ im Widerspruch zu $K \neq \varnothing$. □

2.2 Schmüdgens Theorem

Eine Präordnung $T \subset A$ in einem kommutativen Ring mit Eins heißt *archimedisch*, falls für jedes $a \in A$ eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $N - a \in T$.

Wir wollen nun ein Resultat von Wörmann zeigen, das im Beweis von Schmüdgens Theorem garantieren wird, dass die Voraussetzungen von Theorem 1.1 erfüllt sind.

Satz 2.8. *Für eine endliche Teilmenge $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_s\} \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ sind äquivalent:*

(i) *$T_\mathcal{P}$ ist archimedisch.*

(ii) *$K_\mathcal{P}$ ist kompakt.*

Hierbei seien die Bezeichnungen wie in Satz 2.7 gewählt.

Für den Beweis benötigen wir noch ein Kriterium, um zu entscheiden, wann eine Präordnung in $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ archimedisch ist.

Lemma 2.9. *Sei $T \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ eine Präordnung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *T ist archimedisch.*

(ii) *Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $N - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \in T$.*

Beweis. Der Beweis folgt [12].

Da nur die Richtung (ii) ⇒ (i) zu zeigen ist, gelte (ii). Wir dürfen natürlich annehmen, dass $N \geq 1$ ist. Nutzt man die Eigenschaften einer Präordnung, so ergibt sich:

$$N - x_i^2 = \left(N - \sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_j^2 \in T.$$

Darüberhinaus liefern die Eigenschaften einer Präordung:

$$\begin{aligned} N - x_i &= \frac{1}{2}\left((N-1) + \left(N - x_i^2\right) + (x_i - 1)^2\right) \in T \\ N + x_i &= \frac{1}{2}\left((N-1) + \left(N - x_i^2\right) + (x_i + 1)^2\right) \in T. \end{aligned}$$

Als nächstes zeigen wir, dass die Menge

$$A = \{p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]; \exists N \in \mathbb{N} : N - p \in T, N + p \in T\} \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

ein Unterring ist.

Es gilt offensichtlich $0, 1 \in T$. Sind $p, q \in A$, etwa $n_p, n_q \in \mathbb{N}$, sodass $n_p \pm p \in T$ und $n_q \pm q \in T$ sind, dann gilt:

$$\begin{aligned} (n_p + n_q) - (p - q) &= (n_p - p) + (n_q + q) \in T \\ (n_p + n_q) + (p - q) &= (n_p + p) + (n_q - q) \in T, \end{aligned}$$

folglich $p - q \in A$. Damit ist A eine additive Untergruppe.

Es bleibt die Abgeschlossenheit von A unter der Multiplikation zu zeigen. Es seien $a, b \in A$. Aufgrund der Identität $ab = \frac{1}{4}\left((a+b)^2 - (a-b)^2\right)$ genügt es die Abgeschlossenheit gegenüber Quadrieren zu beweisen. Sei $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $N+a \in T$ und $N-a \in T$. Dann gilt $N^2 + a^2 \in T$ und $N^2 - a^2 = (N+a)(N-a) \in T$.

Wir beenden den Beweis, indem wir zeigen, dass $A = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ ist.

Weil sich jede nichtnegative reelle Zahl als Quadrat einer reellen Zahl schreiben lässt, gilt $\mathbb{R}_0^+ \subset T$ und damit $\mathbb{R} \subset A$. Da außerdem $x_1, \ldots, x_n \in A$ ist und $A \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ ein Unterring ist, folgt $A = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$. □

Beweis von Satz 2.8. Der Beweis folgt [12].

Wir setzen $T = T_{\mathcal{P}}$ und $K = K_{\mathcal{P}}$.

Sei T archimedisch. Die Menge K ist als Schnitt über Urbilder abgeschlossener Mengen unter stetigen Funktionen abgeschlossen. Es gilt $K = K_T$ und es existiert eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ mit $N - \sum_{i=1}^n x_i^2 \in T$. Aus $N - \|x\|^2 \geq 0$ auf K folgt $\|x\|^2 \leq N$ für alle $x \in K$. Damit ist K auch beschränkt und nach Heine-Borel kompakt.

Sei für die umgekehrte Richtung $K = K_{\mathcal{P}}$ kompakt. Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $k - \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$ auf K ist. Aus dem Positivstellensatz 2.7 folgt die Existenz von $p, q \in T$ mit $p\left(k - \sum_{i=1}^n x_i^2\right) = 1 + q$. Damit gilt:

$$(1+q)\left(k - \sum_{i=1}^n x_i^2\right) = p\left(k - \sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2 \in T. \tag{2.3}$$

Es sei T' die Präordnung in $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, die von $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \{k - \sum_{i=1}^n x_i^2\}$ erzeugt wird. Es gilt: $T' = T + (k - \sum_{i=1}^n x_i^2)T$. Wegen $k - \sum_{i=1}^n x_i^2 \in T'$ folgt aus Lemma 2.9, dass T' archimedisch ist. Insbesondere existiert eine positive, natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}^*$, sodass $m - q \in T'$ ist. Dieses m können wir gerade wählen. Dann gibt es $t_1, t_2 \in T$ mit $m - q = t_1 + (k - \sum_{i=1}^n x_i^2)t_2$. Aus Gleichung (2.3) folgt $(m-q)(1+q) = t_1(1+q) + p(k - \sum_{i=1}^n x_i^2)^2 t_2 \in T$. Somit folgt $(m-q)(1+q) \in T$ und daraus erhält man

$$m + \frac{m^2}{4} - q = (m-q)(1+q) + \left(\frac{m}{2} - q\right)^2 \in T.$$

Gleichung (2.3) liefert:

$$\begin{aligned} T \ni k\left(m + \frac{m^2}{4} - q\right) + (1+q)\left(k - \sum_{i=1}^n x_i^2\right) + q\sum_{i=1}^n x_i^2 &= k\left(m + \frac{m^2}{4}\right) + k - \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ = k\left(\frac{m^2}{4} + m + 1\right) - \sum_{i=1}^n x_i^2 = k\left(\frac{m}{2} + 1\right)^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2 &= N - \sum_{i=1}^n x_i^2, \end{aligned}$$

wobei $N = k\left(\frac{m}{2} + 1\right)^2 \in \mathbb{N}$ gesetzt wurde.

Damit ist $N - \sum_{i=1}^n x_i^2 \in T$ und nach Lemma 2.9 ist T archimedisch. □

Nun können wir Schmüdgens Theorem als Korollar zu Theorem 1.1 beweisen:

Korollar 2.10 (Schmüdgen)**.** *Sei $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_s\} \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, sodass $K_{\mathcal{P}} \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer und kompakt ist. Sei $T = T_{\mathcal{P}}$ definiert wie in Gleichung* (2.2)*. Dann sind für eine lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}$ äquivalent:*

(i) $L \geq 0$ *auf* T.

(ii) *L besitzt ein darstellendes Maß μ auf $K_{\mathcal{P}}$.*

Beweis. Es genügt, die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i) zu zeigen. Sei also $L \geq 0$ auf T. Da T eine Präordnung ist, gilt $1 \in T$, $T + T \subset T$ und $TT \subset T$. Außerdem zeigt Gleichung (2.2) die Abgeschlossenheit gegenüber der Multiplikation mit nichtnegativen reellen Zahlen. Satz 2.8 liefert die Archimedizität von T, sodass T die Voraussetzungen von Theorem 1.1 erfüllt. Damit folgt die Behauptung aus Theorem 1.1. □

Bemerkung 2.11. *Aus Proposition 2.6* (b) *und Krivines Positivstellensatz (Satz 2.7) folgt, dass $K_{\mathcal{P}}$ genau dann nichtleer ist, wenn $T = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ ist. In diesem Fall erfüllt allerdings nur $L = 0$ die Bedingung (i) aus Schmüdgens Theorem.*

Nun führen wir Schmüdgens Positivstellensatz auf den "abstrakten" Positivstellensatz in Korollar 1.17 zurück.

Korollar 2.12 (Schmüdgens Positivstellensatz)**.** *Sei $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_s\} \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ eine Teilmenge mit kompakter Positivstellenmenge $K = K_{\mathcal{P}} \subset \mathbb{R}^n$.*
Dann gilt für $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$:

$$\text{Aus } p > 0 \text{ auf } K \text{ folgt } p \in T_{\mathcal{P}}.$$

Beweis. In dem Fall, dass K die leere Menge ist, gilt nach vorheriger Bemerkung $T_{\mathcal{P}} = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ und es ist nichts zu zeigen. Ansonsten folgt aus Satz 2.8, dass $T_{\mathcal{P}}$ archimedisch ist und damit die Voraussetzungen von Theorem 1.1 erfüllt, sodass sich die Behauptung aus Korollar 1.17 mit $\mathcal{C} = T_{\mathcal{P}}$ folgt. □

3 Subnormale Operatoren

Dieses Kapitel beinhaltet die Anwendung der Ergebnisse über Momentenprobleme in der Theorie der subnormalen Operatorentupel. Dazu werden im ersten Abschnitt einige Grundlagen zu subnormalen Operatoren und positiven, operatorwertigen Maßen zusammengestellt. Der zweite Abschnitt behandelt dann die Übertragung der Resultate aus Abschnitt I.4 in [17] auf die in dieser Arbeit betrachtete Verallgemeinerung. Dabei werden die Ergebnisse aus Kapitel 1 verwendet. Zum Schluss werden wir noch einige Beispiele für subnormale Operatoren geben.

Im gesamten Kapitel sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum über den komplexen Zahlen.

3.1 Grundlagen

Ein Tupel von Operatoren $S = (S_1, \dots, S_n) \in \mathscr{L}(\mathcal{H})^n$ heißt *vertauschend*, wenn

$$S_i S_j = S_j S_i \text{ für } i, j = 1, \dots, n$$

gilt. In diesem Fall sagt man auch: S ist ein Tupel kommutierender Operatoren.

Definition 3.1. *Es sei $S = (S_1, \dots, S_n) \in \mathscr{L}(\mathcal{H})^n$ ein Tupel kommutierender Operatoren.*

(i) *S heißt* subnormal*, falls ein Hilbertraum $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ und ein Tupel $N = (N_1, \dots, N_n) \in \mathscr{L}(\mathcal{K})^n$ kommutierender, normaler Operatoren existieren, sodass $\mathcal{H}$ invariant unter $N_1, \dots, N_n$ ist und $S_i = N_i|_{\mathcal{H}}$ für $i = 1, \dots, n$ ist. Das Operatorentupel N heißt* normale Erweiterung *von S.*

(ii) *Für ein subnormales Tupel S heißt eine normale Erweiterung N* minimale normale Erweiterung*, falls $\mathcal{K}$ der einzige reduzierende Teilraum von N ist, der $\mathcal{H}$ enthält.*

Die Betrachtung subnormaler Operatorentupel geht auf Takasi Itô in [9] zurück. Genau wie im eindimensionalen Fall (siehe [5]) beweist man den folgenden Satz.

Satz 3.2. *Für jedes subnormale Operatorentupel ist die minimale normale Erweiterung bis auf unitäre Äquivalenz eindeutig bestimmt.*

Es sei X ein topologischer Raum und $\mathfrak{B}(X)$ seine Borel-σ-Algebra.

Definition 3.3. *Eine Abbildung $E\colon \mathfrak{B}(X) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ heißt* operatorwertiges Maß *auf X, wenn für jede Folge disjunkter Mengen $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{B}(X)$ und $B = \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$*

$$\langle E(B)x, y\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \langle E(B_i)x, y\rangle \tag{3.1}$$

für alle $x, y \in \mathcal{H}$ gilt, das heißt, dass die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} E(B_i)$ in der schwachen Operatortopologie gegen $E(B)$ konvergiert.

Wir wollen nun zeigen, dass die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} E(B_i)$ sogar in der starken Operatortopologie gegen $E(B)$ konvergiert. Der Satz von Orlicz-Pettis (Corollary 4 in Kapitel I.4 von [6]) besagt, dass für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem Banachraum B aus der schwachen Konvergenz der Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} x_{n_j}$ für jede Teilfolge $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ die unbedingte Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ folgt, das heißt, dass für jede Bijektion $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_{\pi(n)}$ in der Norm konvergiert. Ist $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge disjunkter Mengen in $\mathfrak{B}(X)$, so ist auch jede Teilfolge eine Folge disjunkter Mengen. Daher besagt Gleichung (3.1) nach dem Satz von Riesz-Fréchet, dass für festes $x \in \mathcal{H}$ die Folge $(E(B_i)x)_{i\in\mathbb{N}}$ im Banachraum $\mathcal{H}$ der Voraussetzung des Satzes von Orlicz-Pettis genügt. Somit gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty} E(B_i)x = E(B)x$$

für alle $x \in \mathcal{H}$.

Die nächste Definition führt zwei wichtige Arten von operatorwertigen Maßen ein.

Definition 3.4. *Es sei $E\colon \mathfrak{B}(X) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ ein operatorwertiges Maß auf X. Dann heißt E*

- positiv*, falls $E(\varnothing) = 0$, $E(X) = 1$ und $E(B) \geq 0$ für alle $B \in \mathfrak{B}(X)$ gilt.*
- Spektralmaß*, falls $E(\varnothing) = 0$, $E(X) = 1$, $E(B_1 \cap B_2) = E(B_1)E(B_2)$ und $E(B) = E(B)^*$ für alle $B, B_1, B_2 \in \mathfrak{B}(X)$ gilt.*

Man beachte, dass für ein Spektralmaß E und für alle $B \in \mathfrak{B}(X)$ der Operator $E(B)$ eine Orthogonalprojektion ist, sodass jedes Spektralmaß auch ein positives, operatorwertiges Maß ist.

In Analogie zum Träger eines positiven Maßes möchten wir den Träger eines positiven, operatorwertigen Maßes einführen. Dazu sei X nun ein separabler metrischer Raum und $E\colon \mathfrak{B}(X) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ ein positives, operatorwertiges Maß auf X. Dann wird für jedes $x \in \mathcal{H}$ durch

$$\mu_x\colon \mathfrak{B}(X) \to [0,\infty), \quad \mu_x(A) = \langle E(A)x, x\rangle$$

ein positives Borelmaß μ_x auf X definiert. Es sei

$$\mathfrak{U} = \{U; U \subset X \text{ offen}, E(U) = 0\}.$$

Nach dem Satz von Lindelöf existiert eine Folge $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{U}$, sodass

$$V = \bigcup(U; U \in \mathfrak{U}) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$$

ist und damit

$$0 \leq \langle E(V)x, x\rangle = \mu_x(V) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu_x(U_i) = 0$$

für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt. Damit ist V die größte offene Teilmenge von X mit $E(V) = 0$. Erneut definiert man den *Träger* von E als die Menge $\operatorname{supp}(E) = X\backslash V$. Der Träger ist die kleinste abgeschlossene Menge mit $E(X\backslash \operatorname{supp}(E)) = 0$.

Lemma 3.5. *In der obigen Situation gilt:*

$$\operatorname{supp}(E) = \overline{\bigcup_{x\in\mathcal{H}} \operatorname{supp}(\mu_x)}.$$

Beweis. Wir setzen $V = X \setminus \operatorname{supp}(E)$ und $W = X \setminus \overline{\bigcup_{x\in\mathcal{H}} \operatorname{supp}(\mu_x)}$. Damit ist die Behauptung äquivalent zu $V = W$.

Aus $E(V) = 0$ folgt $\mu_x(V) = 0$ und daraus $\operatorname{supp}(\mu_x) \subset X\setminus V = \operatorname{supp}(E)$ für alle $x \in \mathcal{H}$. Aufgrund der Abgeschlossenheit von $\operatorname{supp}(E)$ liefert dieses Argument

$$\overline{\bigcup_{x\in\mathcal{H}} \operatorname{supp}(\mu_x)} \subset \operatorname{supp}(E),$$

also $W \supset V$.

Für die umgekehrte Inklusion beachte, dass aus $W \subset X \setminus \operatorname{supp}(\mu_x)$ die Ungleichung $0 \leq \mu_x(W) \leq \mu_x(X\setminus \operatorname{supp}(\mu_x)) = 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$ folgt. Also gilt $E(W) = 0$. Weil $W \subset X$ eine offene Teilmenge ist, folgt daraus $W \subset V$. □

Als nächstes soll zu einem Tupel vertauschender, normaler Operatoren ein Spektralmaß assoziiert werden. Zur Vorbereitung benötigen wir das folgende Resultat, das in Theorem 12.16 in [14] bewiesen wird.

Satz 3.6 (Fuglede-Putnam-Rosenblum)**.** *Es seien $M, N, T \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$, M, N normal und $MT = TN$. Dann gilt: $M^*T = TN^*$.*

Ein wichtiger Spezialfall dieses Satzes ist der Fall $M = N$. Dann gilt für einen normalen Operator $N \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ und einen Operator $T \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$, dass $N^*T = TN^*$ aus $NT = TN$ folgt. Diese Tatsache wird im Folgenden an vielen Stellen ohne explizite Erwähnung verwendet.

Es sei $N = (N_1, \ldots, N_n) \in \mathscr{L}(\mathcal{H})^n$ ein vertauschendes Tupel normaler Operatoren. Dann folgt aus dem vorherigen Satz, dass die unitale C^*-Algebra $C^*(N) \subset \mathscr{L}(\mathcal{H})$, die von $N_1, \ldots, N_n$ erzeugt wird, kommutativ ist. Die Menge

$$\Delta_{C^*(N)} = \{\lambda; \lambda\colon C^*(N) \to \mathbb{C} \text{ nichttriviales, multiplikatives, lineares Funktional}\}$$

nennt man den *Gelfandraum* von $C^*(N)$. Darüberhinaus bezeichne $\hat{N}_i$ die *Gelfandtransformierte*

$$\hat{N}_i\colon \Delta_{C^*(N)} \to \mathbb{C}, \quad \lambda \mapsto \lambda(N_i)$$

von N_i für $i = 1, \ldots, n$. Es sei $\hat{N} = (\hat{N}_1, \ldots, \hat{N}_n)$. Dann heißt $\sigma(N) = \hat{N}(\Delta_{C^*(N)}) \subset \mathbb{C}^n$ das *gemeinsame Spektrum* von N [8]. Wir werden diese Menge im Folgenden einfach als das Spektrum des normalen Tupels N bezeichnen. Aus der Kompaktheit von $\Delta_{C^*(N)}$ bezüglich der schwach-*-Topologie und der Stetigkeit von $\hat{N}$ folgt die Kompaktheit von $\sigma(N) \subset \mathbb{C}^n$.

Der folgende Satz, dessen Beweis sich in Anhang D von [1] befindet, ist eine Variante des Spektralsatzes für Tupel von kommutierenden normalen Operatoren.

Satz 3.7. *Sei $N = (N_1, \ldots, N_n) \in \mathscr{L}(\mathcal{H})^n$ ein vertauschendes Tupel normaler Operatoren. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Spektralmaß E auf $\sigma(N)$, sodass*

$$N_i = \int_{\sigma(N)} z_i \,\mathrm{d}E \textit{ für } i = 1, \ldots, n$$

und die Abbildung

$$\pi\colon C(\sigma(N)) \to \mathscr{L}(H), \quad f \mapsto \int_{\sigma(N)} f \,\mathrm{d}E$$

ein isometrischer, involutiver Algebrenhomomorphismus mit $\pi(1) = 1$ ist.

In der Situation des vorherigen Satzes entspricht π dem stetigen Funktionalkalkül für Tupel normaler Operatoren und wir schreiben $f(N) = \pi(f)$ für Funktionen $f \in C(\sigma(N))$.

Lemma 3.8. *Es sei $(S_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ ein Familie von Operatoren in $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ mit $S_0 = 1$ und $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge.*

Für jedes $x \in \mathcal{H}$ existiere ein positives Borelmaß μ_x auf K, sodass

$$\langle S_\gamma x, x\rangle = \int_K t^\gamma \,\mathrm{d}\mu_x \tag{3.2}$$

für alle $\gamma \in \mathbb{N}^n$ gilt.

Dann existiert ein eindeutig bestimmtes positives, operatorwertiges Maß E auf K, das

$$S_\gamma = \int_K t^\gamma \,\mathrm{d}E$$

für alle $\gamma \in \mathbb{N}^n$ erfüllt.

Beweis. Der Beweis orientiert sich an [10]. Da die Abbildungen

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto \langle S_\gamma x, y\rangle$$

Sesquilinearformen sind, folgt aus den Polarisationsgleichungen

$$\begin{aligned}
\langle S_\gamma x, y\rangle &= \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{3} i^k \left\langle S_\gamma(x + i^k y), (x + i^k y)\right\rangle \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{3} i^k \int_K t^\gamma \,\mathrm{d}\mu_{(x+i^k y)} \\
&= \int_K t^\gamma \,\mathrm{d}\left(\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{3} i^k \mu_{(x+i^k y)}\right) \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

für alle $\gamma \in \mathbb{N}^n$ und $x, y \in \mathcal{H}$. Wir definieren die Abbildung

$$\mu : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to M(K, \mathbb{C}), \quad (x, y) \mapsto \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{3} i^k \mu_{(x+i^k y)}.$$

Aufgrund der Endlichkeit und damit Regularität der Maße μ_x für $x \in \mathcal{H}$ folgt aus der Sesquilinearität der linken Seite von Gleichung (3.3) mit dem Satz von Stone-Weierstraß und dem Rieszschen Darstellungssatz, dass μ die Eigenschaften $\mu(\alpha x+\beta y, z) = \alpha\mu(x, z)+ \beta\mu(y, z)$ und $\mu(x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha}\mu(x, y) + \bar{\beta}\mu(x, z)$ für $x, y, z \in \mathcal{H}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ besitzt. Damit ist für eine nichtnegative, beschränkte und messbare Funktion $f\colon K \to \mathbb{C}$ die Abbildung

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto \int_K f \,\mathrm{d}\mu(x, y)$$

sesquilinear und aufgrund der Positivität von $\mu_x = \mu(x, x)$ für $x \in \mathcal{H}$ auch positiv semidefinit. Somit ist sie eine hermitesche Form, sodass aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\left|\int_K f \,\mathrm{d}\mu(x, y)\right|^2 \le \left|\int_K f \,\mathrm{d}\mu(x, x)\right| \left|\int_K f \,\mathrm{d}\mu(y, y)\right| \le \|f\|_\infty^2 \mu_x(K)\mu_y(K) = \|f\|_\infty^2 \|x\|^2\|y\|^2$$

für alle $x, y \in \mathcal{H}$ folgt. Für alle Borelmengen $A \subset K$ ist wegen

$$|\mu(x, y)(A)| = \left|\int_K \chi_A \,\mathrm{d}\mu(x, y)\right| \le \|x\|\|y\|$$

für alle $x, y \in \mathcal{H}$ die Abbildung $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto \mu(x, y)(A)$ sesquilinear und stetig. Es existiert also nach dem Satz von Lax-Milgram ein eindeutig bestimmter Operator $E_A \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$, sodass $\langle E_A x, y\rangle = \mu(x, y)(A)$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$ ist. Wegen $\langle E_A x, x\rangle = \mu_x(A) \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$ ist der Operator E_A positiv. Dann besitzt die Abbildung

$$E\colon \mathfrak{B}(K) \to \mathscr{L}(\mathcal{H}), \quad A \mapsto E_A$$

die Eigenschaften $E(K) = 1$ und $E(\varnothing) = 0$. Für eine Folge disjunkter Mengen $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{B}(K)$ und $x, y \in \mathcal{H}$ gilt

$$\left\langle E\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) x, y\right\rangle = \mu(x, y)\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(x, y)(A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \langle E(A_i)x, y\rangle,$$

sodass E ein positives, operatorwertiges Maß ist. Für $x, y \in \mathcal{H}$ und $\gamma \in \mathbb{N}^n$ ergibt sich

$$\langle S_\gamma x, y\rangle = \int_K t^\gamma \,\mathrm{d}\mu(x, y) = \int_K t^\gamma \,\mathrm{d}\langle E(t)x, y\rangle$$

aus Gleichung (3.3). Dies bedeutet nach der Definition des Integrals bezüglich eines positiven, operatorwertigen Maßes, dass

$$S_\gamma = \int_K t^\gamma \,\mathrm{d}E$$

für alle $\gamma \in \mathbb{N}^n$ gilt.

Zum Beweis der Eindeutigkeit beachte man zunächst, dass die Maße μ_x für jedes $x \in \mathcal{H}$ durch Gleichung (3.2) nach dem Satz von Stone-Weierstraß und dem Rieszschen Darstellungssatz aufgrund ihrer Regularität eindeutig bestimmt sind. Für eine Borelmenge $A \subset K$ ist $E(A) \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert, sodass $E(A)$ nach den Polarisationsgleichungen eindeutig durch $\langle E(A)x, x\rangle = \mu_x(A)$ für alle $x \in \mathcal{H}$ bestimmt. Somit folgt die Eindeutigkeit von $E(A)$ aus der Eindeutigkeit der Maße μ_x. □

Es sei $S \in \mathscr{L}(\mathcal{H})^n$ ein subnormales Operatorentupel mit der minimalen normalen Erweiterung $N \in \mathscr{L}(\mathcal{K})^n$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$. Dann bezeichne $\sigma_n(S)$ das Spektrum von N. Wir nennen $\sigma_n(S)$ das *Normalenspektrum* von S. Diese Festlegung ist wohldefiniert, weil die minimale normale Erweiterung bis auf unitäre Äquivalenz eindeutig bestimmt ist und damit die Spektren aller minimalen normalen Erweiterungen übereinstimmen.

Zum Schluss dieses Abschnitts geben wir ein Subnormalitätskriterium und eine Aussage über die Lage des Normalenspektrum eines subnormalen Operatorentupels an. Die Resultate werden im nächsten Abschnitt verwendet.

Satz 3.9. *Es sei $S = (S_1, \ldots, S_n) \in \mathscr{L}(\mathcal{H})^n$ ein Tupel vertauschender Operatoren.*

(a) *Das Tupel S ist genau dann subnormal, wenn eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ und ein positives, operatorwertiges Maß $E\colon \mathfrak{B}(K) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ existieren, sodass*

$$S^{*\gamma} S^\gamma = \int_K t^\gamma \,\mathrm{d}E$$

für alle $\gamma \in \mathbb{N}^n$ ist.

(b) *In der Situation von Teil (a) gilt für das Normalenspektrum*

$$\sigma_n(S) \subset \left\{z \in \mathbb{C}^n;\, \left(|z_1|^2, \ldots, |z_n|^2\right) \in K\right\}.$$

Beweis. (a) Korollar 2.16 in [10].

(b) Satz 2.18 in [10].

□

3.2 Subnormalitätskriterien

In diesem Abschnitt werden wir die Ergebnisse aus Kapitel 1 in der Theorie der subnormalen Operatoren anwenden. Dazu legen wir zunächst einige Bezeichnungen fest.

Für ein formales Polynom $p(\bar{z}, z) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta} \bar{z}^\alpha z^\beta \in \mathbb{C}[\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n, z_1, \ldots, z_n]$ in den Unbekannten $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n, z_1, \ldots, z_n$ und ein vertauschendes Tupel von Operatoren $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathscr{L}(\mathcal{H})^n$ wollen wir

$$p(T^*, T) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta} T^{*\alpha} T^\beta$$

definieren, wobei $T^\alpha = T_1^{\alpha_1} \cdots T_n^{\alpha_n}$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ gesetzt wird. Mit den Bezeichnungen

$$M_{T_j} \colon \mathscr{L}(\mathcal{H}) \to \mathscr{L}(\mathcal{H}), \quad X \mapsto T_j^* X T_j$$

für $j = 1, \ldots, n$ setzen wir $M_T = (M_{T_1}, \ldots, M_{T_n})$, wobei es sich um ein Tupel kommutierender Operatoren auf $\mathscr{L}(\mathcal{H})$ handelt, weil mit $T = (T_1, \ldots, T_n)$ auch $T^* = (T_1^*, \ldots, T_n^*)$ ein vertauschendes Operatorentupel ist. Dann ist die Abbildung

$$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathscr{L}(\mathscr{L}(\mathcal{H})), \quad p = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha \mapsto p(M_T) = \sum_\alpha a_\alpha M_T^\alpha$$

ein wohldefinierter, unitaler Algebrenhomomorphismus.

Im Folgenden werden wir an einigen Stellen die Abbildung

$$\tau \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n, \quad (z_1, \ldots, z_n) \mapsto \left(|z_1|^2, \ldots, |z_n|^2\right) = (\bar{z}_1 z_1, \ldots, \bar{z}_n z_n)$$

verwenden. Diese Abbildung ist offensichtlich stetig und für eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist $\overset{-1}{\tau}(K) \subset \mathbb{C}^n$ beschränkt und abgeschlossen, also kompakt.

Für ein Polynom $p = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ sei definitionsgemäß $p \circ \tau = \sum_\alpha a_\alpha \bar{z}^\alpha z^\alpha \in \mathbb{C}[\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n, z_1, \ldots, z_n]$. Dann gilt für ein Tupel $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathscr{L}(\mathcal{H})^n$ kommutierender Operatoren

$$(p \circ \tau)(T^*, T) = \sum_\alpha a_\alpha T^{*\alpha} T^\alpha = p(M_T)(1).$$

Ist $N \in \mathscr{L}(\mathcal{H})^n$ ein vertauschendes Tupel normaler Operatoren, so gilt

$$(p \circ \tau)(N^*, N) = \pi(p \circ \tau)$$

für $p \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, wobei $\pi \colon C(\sigma(N)) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ der stetige Funktionalkalkül von N ist und $p \circ \tau$ auf der rechten Seite für die Funktion $\sigma(N) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto p(\tau(z))$ steht.

Im nächsten Satz sei $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ ein archimedischer, konvexer Kegel, sodass $1 \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}\mathcal{C} \subset \mathcal{C}$ und $K = K_\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer ist.

Theorem 3.10. *Das vertauschende Operatortupel $T \in \mathscr{L}(\mathcal{H})^n$ hat genau dann eine normale Erweiterung $N \in \mathscr{L}(\mathcal{K})^n$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$, deren Spektrum in $\overset{-1}{\tau}(K)$ liegt, wenn $(p \circ \tau)(T^*, T) \geq 0$ für alle $p \in \mathcal{C}$ ist.*

In dieser Situation gibt es ein eindeutig bestimmtes positives, operatorwertiges Maß $F_T \colon \mathfrak{B}(K) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ mit

$$T^{*\gamma} T^\gamma = \int_K t^\gamma \, \mathrm{d}F_T$$

für alle $\gamma \in \mathbb{N}^n$.

(i) *Ist* $r \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ *ein Polynom mit* $((rp) \circ \tau)(T^*, T) \geq 0$ *für alle* $p \in \mathcal{C}$*, so ist* $\operatorname{supp}(F_T) \subset \{x \in K; r(x) \geq 0\}$.

(ii) *Ist* $r \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ *ein Polynom mit* $(r \circ \tau)(T^*, T) = 0$ *und ist* N *die minimale normale Erweiterung von* T*, so gilt* $\operatorname{supp}(F_T) \subset \{x \in K; r(x) = 0\}$ *und* $(r \circ \tau)(N^*, N) = 0$.

Beweis. Es sei N eine normale Erweiterung von T und $E \colon \mathfrak{B}(L) \to \mathscr{L}(\mathcal{K})$ die triviale Fortsetzung des Spektralmaßes von N auf $L = \overset{-1}{\tau}(K) \supset \sigma(N)$. Für jedes Polynom $p = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha \in \mathcal{C}$ und jeden Vektor $y \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\langle (p \circ \tau)(T^*, T)y, y \rangle &= \sum_\alpha a_\alpha \|T^\alpha y\|^2 \\
&= \sum_\alpha a_\alpha \|N^\alpha y\|^2 \\
&= \left\langle \left(\sum_\alpha a_\alpha N^{*\alpha} N^\alpha \right) y, y \right\rangle \\
&= \int_L \sum_\alpha a_\alpha \bar{z}^\alpha z^\alpha \, \mathrm{d}\langle E(z)y, y \rangle \\
&= \int_K p(x) \, \mathrm{d}\mu(x) \geq 0,
\end{aligned}$$

wobei μ das Bildmaß des positiven Maßes $\langle E(\cdot)y, y \rangle$ bezüglich der messbaren Abbildung $\tau \colon L \to K$ ist. Damit sind die Operatoren $(p \circ \tau)(T^*, T) \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ für $p \in \mathcal{C}$ definitionsgemäß positiv.

Wir betrachten nun die umgekehrte Richtung und definieren für jedes $y \in \mathcal{H}$ die Linearform

$$L_y \colon \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{R}, \quad p \mapsto \langle (p \circ \tau)(T^*, T)y, y \rangle.$$

Dies ist wohldefiniert, da die Polynome nur reelle Koeffizienten besitzen und die auftretenden Operatoren stets selbstadjungiert sind. Darüberhinaus gilt nach Voraussetzung $L_y(p) \geq 0$ für alle $p \in \mathcal{C}$.

Daher liefert Theorem 1.1 für jedes $y \in \mathcal{H}$ die Existenz eines positiven Borelmaßes μ_y auf K, welches insbesondere

$$\langle T^{*\alpha} T^\alpha y, y \rangle = L_y(x^\alpha) = \int_K x^\alpha \, \mathrm{d}\mu_y(x)$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ erfüllt.

Lemma 3.8, angewendet auf die Familie $(T^{*\alpha} T^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$, liefert die Existenz eines eindeutigen positiven, operatorwertigen Maßes $F_T \colon \mathfrak{B}(K) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$ auf K, das

$$T^{*\alpha} T^\alpha = \int_K t^\alpha \, \mathrm{d}F_T$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ erfüllt. Aus Satz 3.9(a) folgt die Subnormalität von T und aus Satz 3.9(b) die Inklusion

$$\sigma_n(T) \subset \left\{ z \in \mathbb{C}^n; \left(|z_1|^2, \ldots, |z_n|^2 \right) \in K \right\} = \overset{-1}{\tau}(K).$$

Zum Beweis von (i) sei nun $r \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ mit $((rp) \circ \tau)(T^*, T) \geq 0$ für alle $p \in \mathcal{C}$. Aus $L_y(rp) \geq 0$ für alle $p \in \mathcal{C}$ folgt dann mit Satz 1.12, dass $\operatorname{supp}(\mu_y) \subset \{s \in K; r(s) \geq 0\}$

gilt. Damit liefert Lemma 3.5 $\operatorname{supp}(F_T) \subset \{s \in K; r(s) \geq 0\}$, weil die rechte Seite eine abgeschlossene Menge ist.

Es sei $r \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ wie im Teil (ii). Für $p \in \mathcal{C}$ gilt dann $((pr) \circ \tau)(T^*, T) = p(M_T)r(M_T)(1) = p(M_T)(r \circ \tau)(T^*, T) = 0$. Wie im vorherigen Absatz folgt aus Satz 1.12 und Lemma 3.5 für den Träger von F_T die Inklusion $\operatorname{supp}(F_T) \subset \{s \in K; r(s) = 0\}$. Es sei $N \in \mathscr{L}(\mathcal{K})^n$ die minimale normale Erweiterung von T auf einem Hilbertraum $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$. Damit liefert Satz 3.9

$$\begin{aligned}\sigma(N) = \sigma_n(T) &\subset \{z \in \mathbb{C}^n; \tau(z) \in \operatorname{supp}(F_T)\} \\ &\subset \{z \in \mathbb{C}^n; \tau(z) \in K \text{ und } r(\tau(z)) = 0\}\,.\end{aligned}$$

Dann gilt $r(\tau(z)) = 0$ für alle $z \in \sigma(N)$. Damit folgt aus einer Bemerkung, die Theorem 3.10 vorausgeht, dass

$$(r \circ \tau)(N^*, N) = \pi(r \circ \tau) = \pi(0) = 0$$

ist, wobei $\pi\colon C(\sigma(N)) \to \mathscr{L}(\mathcal{K})$ den stetigen Funktionalkalkül und auf der rechten Seite $r \circ \tau$ die Funktion $\sigma(N) \to \mathbb{C},\quad z \mapsto r(\tau(z))$ bezeichnet. □

In einer anderen Situation folgt aus Lemma 3.8 folgender Darstellungssatz. Wie im vorherigen Theorem soll $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ einen archimedischen, konvexer Kegel bezeichnen, der $1 \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}\mathcal{C} \subset \mathcal{C}$ und $K = K_{\mathcal{C}} \neq \varnothing$ erfüllt.

Theorem 3.11. *Es sei $\Gamma = (\Gamma_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ eine Folge beschränkter, selbstadjungierter Operatoren auf $\mathcal{H}$ mit $\Gamma_0 = 1$ und*

$$L_\Gamma\colon \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \to \mathscr{L}(\mathcal{H}), \quad p(x) = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha \mapsto L_\Gamma(p) = \sum_\alpha c_\alpha \Gamma_\alpha.$$

Dann existiert genau dann ein positives, operatorwertiges Maß F_Γ auf K, das

$$L_\Gamma(p) = \int_K p|_K \,\mathrm{d}F_\Gamma$$

für alle $p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ erfüllt, wenn $L_\Gamma(p) \geq 0$ für alle $p \in \mathcal{C}$ ist.

In diesem Fall ist das positive, operatorwertige Maß F_Γ eindeutig bestimmt und es gilt:

(i) *Wenn ein $r \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ existiert, sodass $L_\Gamma(rp) \geq 0$ für alle $p \in \mathcal{C}$ ist, dann gilt:* $\operatorname{supp}(F_\Gamma) \subset \{s \in K; r(s) \geq 0\}$.

(ii) *Wenn ein $r \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ existiert, sodass $L_\Gamma(rp) = 0$ für alle $p \in \mathcal{C}$ ist, dann gilt:* $\operatorname{supp}(F_\Gamma) \subset \{s \in K; r(s) = 0\}$.

Beweis. Wenn ein positives, operatorwertiges Maß F_Γ auf K existiert, sodass $L_\Gamma(p) = \int_K p|_K \,\mathrm{d}F_\Gamma$ für alle $p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ ist, dann gilt für jedes $y \in \mathcal{H}$ und jedes $p \in \mathcal{C}$

$$\langle L_\Gamma(p)y, y\rangle = \int_K p|_K \,\mathrm{d}\langle F_\Gamma(\cdot)y, y\rangle \geq 0,$$

da $\langle F_\Gamma(\cdot)y, y\rangle\colon \mathfrak{B}(K) \to \mathbb{C},\quad A \mapsto \langle F_\Gamma(A)y, y\rangle$ für alle $y \in \mathcal{H}$ ein positives Maß definiert.

Für die umgekehrte Richtung sei nun $L_\Gamma(p) \geq 0$ für alle $p \in \mathcal{C}$. Weil Γ_α für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ein selbstadjungierter, linearer Operator ist, ist für jedes $y \in \mathcal{H}$ durch

$$L_\Gamma^y\colon \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n] \to \mathbb{R}, \quad p \mapsto \langle L_\Gamma(p)y, y\rangle$$

eine wohldefinierte Linearform gegeben. Diese besitzt nach Theorem 1.1 ein darstellendes Maß μ_y auf K, da $L_\Gamma^y(p) = \langle L_\Gamma(p)y, y\rangle \geq 0$ für alle $p \in \mathcal{C}$ gilt. Damit folgt die erste Behauptung aus Lemma 3.8.

Zum Beweis des Zusatzes sei nun F_Γ ein positives, operatorwertiges Maß auf K, sodass $L_\Gamma(p) = \int_K p|_K \, \mathrm{d}F_\Gamma$ für alle $p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ ist. Die Eindeutigkeit des Maßes F_Γ folgt ebenfalls aus Lemma 3.8.

Zunächst nehmen wir an, dass ein $r \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ existiert, sodass $L_\Gamma(rp) \geq 0$ für alle $p \in \mathcal{C}$ ist. Dann folgt aus Satz 1.12 und Lemma 3.5

$$\operatorname{supp}(F_\Gamma) \subset \{s \in K; r(s) \geq 0\}.$$

Für den letzten Teil sei $r \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, sodass $L_\Gamma(rp) = 0$ für alle $p \in \mathcal{C}$ ist. Damit liefern Satz 1.12 und Lemma 3.5 die Behauptung. □

Nun wollen wir eine Klasse von endlichen Teilmengen des Polynomrings betrachten, deren Positivitätsbereich kompakt ist. Dies wird uns zu einer Vereinfachung des Subnormalitätskriteriums in Theorem 3.10 führen.

Beispiel 3.12. *Wir betrachten eine Familie von Polynomen* $\{p_1, \dots, p_m\} \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ *der Gestalt*

$$p_j(x) = 1 - \sum_{k=1}^{n} c_{jk} x_k$$

für $j = 1, \dots, m$ *mit den Eigenschaften*

(i) $c_{jk} \geq 0$ *für* $j = 1, \dots, m$ *und* $k = 1, \dots, n$,

(ii) *für jedes* $k \in \{1, \dots, n\}$ *existiert ein* $j \in \{1, \dots, m\}$, *sodass* $c_{jk} \neq 0$.

Weiterhin setzte $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_m, x_1, \dots, x_n\}$. *Dann ist* $K = K_\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ *kompakt und* $\operatorname{Alg}(1, p_1, \dots, p_m, x_1, \dots, x_n) = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$.

Beweis. Wegen $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{P}$ gilt $K \subset \left(\mathbb{R}_0^+\right)^n$. Für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ wähle ein $j_k \in \{1, \dots, m\}$, sodass $c_{j_k k} > 0$ ist. Für $c = (c_1, \dots, c_n) \in K$ folgt aus $p_{j_k}(c) \geq 0$ die Ungleichung

$$0 \leq 1 - \sum_{i=1}^{n} c_{j_k i} c_i \leq 1 - c_{j_k k} c_k$$

und damit $0 \leq c_k \leq c_{j_k k}^{-1}$ für $k = 1, \dots, n$. Folglich ist

$$K \subset \prod_{i=1}^{n} \left[0, c_{j_i i}^{-1}\right],$$

sodass K als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge kompakt ist.

Aus $1, x_1, \dots, x_n \in \operatorname{Alg}(1, p_1, \dots, p_m, x_1, \dots, x_n)$ folgt die zweite Behauptung. □

In der Situation dieses Beispiels lassen sich die Voraussetzungen von Theorem 3.10 abschwächen.

Proposition 3.13. *Sei* $T \in \mathscr{L}(\mathcal{H})^n$ *ein Tupel vertauschender Operatoren. Dann besitzt* T *genau dann eine normale Erweiterung* $N \in \mathscr{L}(\mathcal{K})^n$ *auf einem Hilbertraum* $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ *mit* $\sigma(N) \subset \overset{-1}{\tau}(K)$, *wenn*

$$p^\alpha(M_T)(1) = p_1(M_T)^{\alpha_1} \cdots p_m(M_T)^{\alpha_m}(1) \geq 0$$

für alle $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$ *ist.*

Beweis. Die Aussage soll auf Theorem 3.10 zurückgeführt werden, dazu werden zunächst dessen Voraussetzungen verifiziert.

Es sei $\mathcal{C}$ der konvexe Kegel, der von den Polynomen $x^\beta p_1^{\alpha_1}(x)\cdots p_m^{\alpha_m}(x)$ für $\beta \in \mathbb{N}^n$ und $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_m) \in \mathbb{N}^m$ erzeugt wird. Dann gilt offensichtlich $1 \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}\mathcal{C} \subset \mathcal{C}$ sowie $K_\mathcal{C} \subset K_\mathcal{P}$. Aus $c = (c_1,\dots,c_n) \in K_\mathcal{P}$ folgt $c^\beta p_1(c)^{\alpha_1}\cdots p_m(c)^{\alpha_m} \geq 0$ für alle $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_m) \in \mathbb{N}^m$ und $\beta \in \mathbb{N}^n$ und daraus $K_\mathcal{P} \subset K_\mathcal{C}$. Weiterhin ist $0 \in K_\mathcal{C}$.

Sei $\Delta_\mathcal{P}$ die wie in Bemerkung 1.13 zu $\mathcal{P} = \{p_1,\dots,p_m,x_1,\dots,x_n\}$ gebildete Teilmenge von $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$. Zum Beweis der Archimedizität von $\mathcal{C}$ genügt es $\Delta_\mathcal{P} \subset \mathcal{C}$ zu zeigen. Dann enthält $\mathcal{C}$ auch den von $\Delta_\mathcal{P}$ erzeugten konvexen Kegel, der wie im Beweis von Satz 1.14 gesehen archimedisch ist. Mit der Notation aus Bemerkung 1.13 genügt es $1-\hat{p}_j \in \mathcal{C}$ für $j = 1,\dots,m$ und $1-\hat{x}_i \in \mathcal{C}$ für $i = 1,\dots,n$ zu beweisen. Aus $\hat{p}_j = p_j$ folgt

$$1-\hat{p}_j = 1-p_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk}x_k \in \mathcal{C}$$

aufgrund von Eigenschaft (i) für $j = 1,\dots,m$. Sei $m_i = \|x_i\|_K$ und e_i der kanonische i-te Basisvektor im $\mathbb{R}^n$ für $i = 1,\dots,n$. Für $i \in \{1,\dots,n\}$ ist $c_i = \max\{c_{1i},\dots,c_{mi}\} > 0$. Dann ist $c_i^{-1}e_i \in K$ und damit $m_i \geq c_i^{-1} > 0$. Da $m_i \leq c_{ji}^{-1}$ für alle $j \in \{1,\dots,m\}$ mit $c_{ji} > 0$ im Beweis von Beispiel 3.12 gezeigt wurde, folgt $m_i = c_i^{-1}$, sodass man $\hat{x}_i = m_i^{-1}x_i = c_i x_i$ für $i = 1,\dots,n$ erhält. Für $i \in \{1,\dots,n\}$ wähle ein $j_i \in \{1,\dots,m\}$ mit $c_{j_i i} = c_i$, dann folgt

$$1-\hat{x}_i = 1-m_i^{-1}x_i = 1-c_i x_i = p_{j_i} + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} c_{j_i k}x_k \in \mathcal{C}.$$

Somit erfüllt der konvexe Kegel $\mathcal{C}$ die Voraussetzungen von Theorem 3.10.

Für $i = 1,\dots,n$ ist $M_{T_i}\colon \mathscr{L}(\mathcal{H}) \to \mathscr{L}(\mathcal{H})$, $X \mapsto T_i^*XT_i$ eine positive Abbildung, da $M_{T_i}(S^*S) = T_i^*S^*ST_i = (ST_i)^*(ST_i)$ für $S \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ gilt. Damit ist M_T^β für alle $\beta \in \mathbb{N}^n$ eine positive Abbildung. Somit ist $p^\alpha(M_T)(1) \geq 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^m$ äquivalent zu $M_T^\beta p^\alpha(M_T)(1) \geq 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^m$ und alle $\beta \in \mathbb{N}^n$. Die zweite Aussage gilt wiederum genau dann, wenn $(q\circ\tau)(T^*,T) = q(M_T)(1) \geq 0$ für alle $q \in \mathcal{C}$ ist, weil $\mathcal{C}$ der konvexe Kegel ist, der von den Polynomen $x^\beta p_1^{\alpha_1}\cdots p_m^{\alpha_m}$ für $\beta \in \mathbb{N}^n$ und $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_m) \in \mathbb{N}^m$ erzeugt wird. Aus diesem Grund liefert Theorem 3.10 die Behauptung. □

Proposition 3.14. *Es seien $p_1,\dots,p_m \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ wie in Beispiel 3.12 und $T = (T_1,\dots,T_n) \in \mathscr{L}(\mathcal{H})^n$ ein vertauschendes Tupel mit*

$$(p_j\circ\tau)(T^*,T) = 0$$

für $j = 1,\dots,m$. Dann ist T subnormal und für die minimale normale Erweiterung $N \in \mathscr{L}(\mathcal{K})^n$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ gilt ebenfalls

$$(p_j\circ\tau)(N^*,N) = 0$$

für $j = 1,\dots,m$.

Beweis. Wir setzen $p = (p_1,\dots,p_m) \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]^m$. Aus $p_j(M_T)(1) = (p_j\circ\tau)(T^*,T) = 0$ für $j = 1,\dots,m$ folgt

$$p^\alpha(M_T)(1) = 0$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \geq 1$. Weil $p^0(M_T)(1) = 1 \geq 0$ ist, folgt aus Proposition 3.13 die Subnormalität von T.

In dieser Situation liefert Theorem 3.10 für die minimale normale Erweiterung N die Relationen

$$(p_j \circ \tau)(N^*, N) = 0$$

für $j = 1, \ldots, m$. $\square$

Mit dieser Proposition können wir die Subnormalität zweier wichtiger Klassen von Operatoren zeigen und damit zwei Resultate von Athavale [2] reproduzieren.

Wir erinnern daran, dass ein Operator $S \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ genau dann eine Isometrie ist, wenn $S^*S = 1$ ist. Ein vertauschendes Tupel $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathscr{L}(\mathcal{H})^n$ heißt *sphärische Isometrie*, falls

$$\sum_{i=1}^{n} T_i^* T_i = 1$$

ist. Das folgende Korollar zu Proposition 3.14 sagt unter anderem, dass es sich bei sphärischen Isometrien um subnormale Operatoren handelt.

Korollar 3.15. *Es sei $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathscr{L}(\mathcal{H})^n$ ein vertauschendes Operatorentupel.*

(a) *Ist T eine sphärische Isometrie, dann ist T subnormal und für die minimale normale Erweiterung $N = (N_1, \ldots, N_n) \in \mathscr{L}(\mathcal{K})^n$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ gilt:*

$$1 = \sum_{i=1}^{n} N_i^* N_i = \sum_{i=1}^{n} N_i N_i^*.$$

(b) *Sind $T_1, \ldots, T_n$ Isometrien, dann ist T subnormal und für die minimale normale Erweiterung $N = (N_1, \ldots, N_n) \in \mathscr{L}(\mathcal{K})^n$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ gilt für $i = 1, \ldots, n$ die Relation*

$$1 = N_i^* N_i = N_i N_i^*.$$

Beweis. Teil (a) folgt direkt aus Proposition 3.14 im Fall $m = 1$ mit $p = 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i$. Die Relation für die minimale normale Erweiterung folgt aus Proposition 3.14 und der Normalität von N.

Zum Beweis von Teil (b) wendet man Proposition 3.14 auf die Polynome $p_i = 1 - x_i$ für $i = 1, \ldots, n$ an und nutzt die Normalität von N. $\square$

Ein vertauschendes Tupel $S = (S_1, \ldots, S_n) \in \mathscr{L}(\mathcal{H})^n$ nennt man *sphärisch unitär*, wenn

$$1 = \sum_{i=1}^{n} S_i^* S_i = \sum_{i=1}^{n} S_i S_i^*$$

gilt. Damit zeigt Teil (a) des vorangegangenen Korollars, dass die minimale normale Erweiterung einer sphärischen Isometrie sphärisch unitär ist.

Weil ein Operator $U \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ mit

$$U^*U = UU^* = 1$$

unitär ist, folgt aus Teil (b) des vorherigen Korollars, dass die minimale normale Erweiterung eines Tupels kommutierender Isometrien ein Tupel kommutierender, unitärer Operatoren ist. Als Spezialfall erhält man das wohlbekannte Resultat, dass eine Isometrie zu einem unitären Operator fortgesetzt werden kann.

Korollar 3.16. *Es seien*

$$S_1 = (S_{11}, \dots, S_{1n_1}) \in \mathscr{L}(\mathcal{H})^{n_1}, \dots, S_m = (S_{m1}, \dots, S_{mn_m}) \in \mathscr{L}(\mathcal{H})^{n_m}$$

sphärische Isometrien, sodass $S_{ij}S_{kl} = S_{kl}S_{ij}$ *für* $i, k = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n_i$ *und* $l = 1, \dots, n_k$ *gilt. Dann ist* $S = (S_{11}, \dots, S_{1n_1}, S_{21}, \dots, S_{m1}, \dots, S_{mn_m}) \in \mathscr{L}(\mathcal{H})^n$ *mit* $n = n_1 + \ldots + n_m$ *subnormal. Für die minimale normale Erweiterung*

$$N = (N_{11}, \dots, N_{1n_1}, N_{21}, \dots, N_{m1}, \dots, N_{mn_m}) \in \mathscr{L}(\mathcal{K})^n$$

auf einem Hilbertraum $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ *sind*

$$N_1 = (N_{11}, \dots, N_{1n_1}) \in \mathscr{L}(\mathcal{K})^{n_1}, \dots, N_m = (N_{m1}, \dots, N_{mn_m}) \in \mathscr{L}(\mathcal{K})^{n_m}$$

sphärisch unitär.

Beweis. Wir setzen $m_0 = 0$ und $m_i = n_1 + \ldots + n_i$ für $i = 1, \dots, n$. Wir betrachten für $j = 1, \dots, m$ die Polynome

$$p_j = 1 - \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} x_i \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n].$$

Da $S_1, \dots, S_m$ sphärische Isometrien sind, gilt $(p_j \circ \tau)(S^*, S) = 0$ für $j = 1, \dots, m$, sodass aus Proposition 3.14 die Subnormalität von S folgt. Den Zusatz über die minimale normale Erweiterung liefert ebenfalls Proposition 3.14 zusammen mit der Normalität von N. $\square$

In der Situation von Korollar 3.16 nennt man $(S_1, \dots, S_m)$ ein Tupel vertauschender sphärischer Isometrien.

4 Archimedische, konvexe Kegel im Polynomring

In diesem Kapitel wollen wir die Beispiele von konvexen Kegeln $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, die wir in dieser Arbeit gesehen haben und die die Voraussetzungen von Theorem 1.1 erfüllen, zusammenstellen. Der konvexe Kegel $\mathcal{C}$ muss die Eigenschaften

(i) $1 \in \mathcal{C}$,

(ii) $\mathcal{C}\mathcal{C} \subset \mathcal{C}$,

(iii) $\mathcal{C}$ ist archimedisch,

(iv) $K_{\mathcal{C}} \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer,

besitzen.

In Bemerkung 1.11 hatten wir gesehen, dass für eine nichtleere, kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ die Menge $\mathcal{C} = \mathrm{Pos}(K) = \{p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]; p \geq 0 \text{ auf } K\} \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ ein solcher Kegel ist und darüberhinaus stets $K = K_{\mathcal{C}}$ gilt.

Sei $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_m\} \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ eine endliche Teilmenge, für die der Positivitätsbereich $K_{\mathcal{P}} = \{x \in \mathbb{R}^n; p_j(x) \geq 0 \text{ für } j = 1, \ldots, m\} \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und nichtleer ist. Ist

$$\mathrm{Alg}(1, p_1, \ldots, p_m) = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n], \tag{4.1}$$

so hatten wir im Beweis von Satz 1.14 gesehen, dass der von der Menge

$$\Delta_{\mathcal{P}} = \left\{r_0 \cdots r_k; k \in \mathbb{N} \text{ und } r_0, \ldots, r_k \in \hat{\mathcal{P}} \cup (1 - \hat{\mathcal{P}})\right\}$$

erzeugte konvexe Kegel die Eigenschaften (i) bis (iv) besitzt. Hierbei besteht $\hat{\mathcal{P}}$ aus den "Normalisierungen" der Polynome $p_1, \ldots, p_m$ über $K_{\mathcal{P}}$ (Die Details sind in Bemerkung 1.13 aufgeführt). Eine Variante dieses Ergebnisses, bei der man die Bedingung (4.1) abschwächen kann, ist in Bemerkung 1.15 und Satz 1.16 enthalten.

Für eine endliche Teilmenge $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_m\} \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ kann man die von dieser Menge erzeugte Präordnung

$$T_{\mathcal{P}} = \left\{\sum_{i=0}^{k} q_i^2 r_i; k \in \mathbb{N}, q_0, \ldots, q_k \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n], r_0, \ldots, r_k \in M\right\}$$

betrachten. Hierbei sei $M = \{p^\alpha; \alpha \in \mathbb{N}^m\}$ mit $p = (p_1, \ldots, p_m)$. Im Beweis zu Korollar 2.10 wurde gezeigt, dass $T_{\mathcal{P}}$ ein konvexer Kegel mit $1 \in T_{\mathcal{P}}$ und $T_{\mathcal{P}}T_{\mathcal{P}} \subset T_{\mathcal{P}}$ ist. Weiterhin besagt Satz 2.8, dass $T_{\mathcal{P}}$ genau dann archimedisch ist, wenn $K_{\mathcal{P}}$ kompakt ist.

Zum Beweis des Subnormalitätskriteriums in Proposition 3.13 hatten wir in Beispiel 3.12 Polynome der Form

$$p_j = 1 - \sum_{k=1}^{n} c_{jk} x_k \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

für $j = 1, \dots, m$ betrachtet, sodass $c_{jk} \geq 0$ für $j = 1, \dots, m$ und $k = 1, \dots, n$ sind sowie für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ ein $j_k \in \{1, \dots, m\}$ existiert mit $c_{j_k k} > 0$. Im Beweis von Proposition 3.13 hatten wir uns überlegt, dass der von der Menge $\{x^\beta p^\alpha; \alpha \in \mathbb{N}^m, \beta \in \mathbb{N}^n\}$ erzeugte konvexe Kegel in $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ die Eigenschaften (i) bis (iv) erfüllt. Dabei sei $p = (p_1, \dots, p_m)$.

Symbolverzeichnis

$\mathrm{Alg}(q_1, \dots, q_s)$	Teilalgebra von $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, die von $q_1, \dots, q_s \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ erzeugt wird, siehe Gleichung (1.1), Seite 18
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$\mathbb{C}[\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n, z_1, \dots, z_n]$	Vektorraum der formalen Polynome in den Unbekannten $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$, $z_1, \dots, z_n$ mit komplexen Koeffizienten
$\mathrm{im}\varphi$	Bild der Abbildung φ
$\|f\|_K$	Supremumsnorm der Funktion $f \colon K \to \mathbb{C}$ über der Menge K
$\mathfrak{B}(X)$	Borel-σ-Algebra des topologischen Raums X
$\mathscr{L}(\mathcal{H})$	Vektorraum der stetigen, linearen Operatoren auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen, beginnend bei 0
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$	Vektorraum der formalen Polynome in den Unbekannten $x_1, \dots, x_n$ mit reellen Koeffizienten
$\mathrm{supp}(\mu)$	Träger des positiven Borelmaßes μ, Seite 17
$\mathrm{supp}(E)$	Träger des positiven, operatorwertigen Maßes E, Seite 34
$C(X)$	Vektorraum der stetigen, komplexwertigen Funktionen auf dem topologischen Raum X
$C(X, \mathbb{R})$	Vektorraum der stetigen, reellwertigen Funktionen auf dem topologischen Raum X
$K_{\mathcal{P}}$	Positivitätsbereich von $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, siehe Gleichung (0.2), Seite 7
$M(X, \mathbb{C})$	Vektorraum der komplexen Borelmaße auf dem topologischen Raum X
$M(X, \mathbb{R})$	Vektorraum der signierten Borelmaße auf dem topologischen Raum X
$M^+(X)$	Menge der positiven, endlichen Borelmaße auf dem topologischen Raum X
$M_r(X, \mathbb{R})$	Vektorraum der signierten, regulären Borelmaße auf dem topologischen Raum X

$T_{\mathcal{P}}$	Präordnung, die von der endlichen Teilmenge $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ erzeugt wird, siehe Gleichung (2.2), Seite 27

Literaturverzeichnis

[1] J. Agler, J. E. MacCarthy: *Pick Interpolation and Hilbert Function Spaces*, Graduate Studies in Mathematics, Band 44. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[2] A. Athavale: *On the intertwining of joint isometries. J. Operator Theory*, **23**(1990), Nr. 2, 339–350.

[3] M. F. Atiyah, L. G. Macdonald: *Introduction to Commutative Algebra.* Perseus Books, Massachusetts, 1969.

[4] D. L. Cohn: *Measure Theory.* Birkhäuser, Boston, 1993.

[5] J. Conway: *The Theory of Subnormal Operators*, Math. Surveys and Monographs, Band 36. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

[6] J. Diestel, J. J. Uhl: *Vector Measures*, Math. Surveys and Monographs, Band 15. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1977.

[7] J. Elstrodt: *Maß- und Integrationstheorie.* Springer Verlag, Berlin, 2011.

[8] J. Eschmeier, M. Putinar: *Spectral Decompositions and Analytic Sheaves*, London Mathematical Society Monographs New Series, Band 10. Clarendon Press, Oxford, 1996.

[9] T. Itô: *On the Commutative Family of Subnormal Operators. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I*, **14**(1958), Nr. 1, 1–15.

[10] D. Karos: *Positive Polynome und Summen von Betragsquadraten.* Diplomarbeit, Universität des Saarlandes, 2009.

[11] G. Köthe: *Topologische Lineare Räume*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 107. Springer Verlag, Berlin, 1966.

[12] M. Marshall: *Positive Polynomials and Sums of Squares*, Math. Surveys and Monographs, Band 146. Amer. Math. Soc., Providence, R.I, 2008.

[13] W. Ricker: *Operator Algebras Generated by Commuting Projections: A Vector Measure Approach*, Lecture Notes in Mathematics, Band 1711. Springer Verlag, Berlin, 1999.

[14] W. Rudin: *Functional Analysis.* Tata McGraw-Hill, New Delhi, 1990.

[15] K. Schmüdgen: *The K-moment problem for compact semi-algebraic sets. Math. Ann.*, **289**(1991), Nr. 2, 203–206.

[16] F.-H. Vascilescu: *Moment Problems and positivity conditions for commuting multi-operators*, 1996. Unveröffentlichtes Preprint.

[17] F.-H. Vasilescu: *Spectral Measures and Moment Problems*. In *Spectral Theory and Its Applications*. Theta, Bukarest, 2003. S. 173 – 215.

[18] D. Werner: *Funktionalanalysis*. Springer Verlag, Berlin, 2007.