UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES

Modell- und Dilatationssätze für Zeilenkontraktionen mit polynomiellen Relationen

Bachelorarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science
im Studiengang Mathematik
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät I
- Mathematik und Informatik -
der Universität des Saarlandes

von

Markus Alt

betreut durch

Prof. Dr. Jörg Eschmeier

Saarbrücken, 2014

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich an Eides Statt, dass ich die Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Die mit der vorliegenden Arbeit eingereichte elektronische Version stimmt mit der schriftlichen überein.

Saarbrücken, den

Markus Alt

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Das Studium von Kontraktionen auf Hilberträumen hat im letzten Jahrhundert einige große Fortschritte gemacht. So konnte B. Sz.-Nagy in [13] zeigen, dass jede Kontraktion eine unitäre Dilatation besitzt.

Es existiert also zu jeder Kontraktion $T \in L(H)$ auf einem Hilbertraum H, ein Hilbertraum $K \supset H$ und ein unitärer Operator $U \in L(K)$ auf K, mit

$$T = P_H U|_H,$$

wobei P_H die orthogonale Projektion von K auf H ist.

Aus dieser Aussage kann man einfach die von Neumannsche Ungleichung, die John von Neumann mit einer anderen Beweismethode erstmals 1950 in [15] bewies, folgern. Nach dieser gilt für jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ und jede Kontraktion $T \in L(H)$, dass

$$\|p(T)\| \leq \|p\|_{\mathcal{D}},$$

wobei $\|\cdot\|_{\mathcal{D}}$ die Supremumsnorm auf der Einheitskreisscheibe bezeichnet.

Der Versuch die Ungleichung in der naheliegenden Weise

$$\|p(T)\| \leq \|p\|_{\mathcal{D}^n}, \tag{0.1}$$

auf den mehrdimensionalen Fall, also für alle $p \in \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$ und vertauschenden Tupel $T \in L(H)^n$, zu verallgemeinern, führt jedoch nur im Fall $n = 2$ zum Erfolg (siehe [1]). Für den höherdimensionalen Fall, d.h. $n \geq 3$ kann man Gegenbeispiele finden, die diese Ungleichung im Allgemeinen wiederlegen. Eines der ersten Gegenbeispiele hierzu findet man in [14]. Die Übertragung des Beweises für $n = 1$ auf diese höhere Dimensionen scheitert, da man im höherdimensionalen Fall im Allgemeinen keine unitären Dilatationen eines vertauschenden Tupels von Kontraktionen findet.

Mit Hilfe eines stärkeren Kontraktionsbegriffes, der sogenannten Zeilenkontraktion, kann man dieses Problem beheben. Eine Zeilenkontraktion ist ein vertauschendes Tupel $T = (T_1, ..., T_n) \in L(H)^n$ von Operatoren, so dass

$$\sum_{i=1}^{n} T_i T_i^* \leq id_H$$

gilt. Im Eindimensionalen ist diese Definition äquivalent dazu, dass T eine Kontraktion ist.

Für eine solche Zeilenkontraktion kann man nun passende Dilatationssätze, wie es in der Arbeit von Jochen Haupenthal [8] geschehen ist, formulieren. Diese Resultate besagen, dass für das Tupel $T \in L(H)^n$ ein Hilbertraum $K \supset H$, eine Indexmenge J, eine Zerlegung $K = \bigoplus_{j \in J} \mathscr{H}(\mathcal{B}) \oplus K_0$ und eine sphärisch unitäres Tupel $W \in L(K_0)^n$ existieren, so dass

$$T_i = P_H((\bigoplus_{j \in J} M_{z_i}) \oplus W_i)|_H.$$

Hierbei bezeichnet $\mathscr{H}(\mathcal{B})$ den komplexwertigen Drury-Arveson Raum, den wir im ersten Kapitel einführen werden und $M_z = (M_{z_1}, ..., M_{z_n})$, das Tupel der Multiplikationen mit den Koordinatenfunktionen, den sogenannten n-Shift auf dem Drury-Arveson Raum.

Zwar bleibt (0.1) auch für Zeilenkontraktionen im Allgemeinen falsch, jedoch kann man die von Neumannsche Ungleichung umformulieren, und für Zeilenkontraktionen in der Variante

$$\|p(T)\| \leq \|p(M_z)\|$$

beweisen.

Betrachtet man nun Zeilenkontraktionen mit bestimmten Relationen, so möchte man, dass sich diese Relationen auf die Dilatationen, also den n-Shift übertragen. Falls die Relationen in Form eines homogenen Ideals vorliegen, also gilt $p(T) \equiv 0$ für alle p in einem homogenen Ideal $I \subset \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$, so kann man im Modellsatz der Zeilenkontraktionen den n-Shift durch die Einschränkung des n-Shiftes auf das orthogonale Komplement des Ideales im Drury-Arveson Raumes ersetzen

$$S = (S_i)_{i=1}^n = (P_{\mathscr{H}(\mathcal{B})\ominus I} M_{z_i}|_{\mathscr{H}(\mathcal{B})\ominus I})_{i=1}^n.$$

Es ergibt sich also

$$T_i = P_H((\bigoplus_{j\in J} S_i) \oplus W_i)|_H.$$

Wobei das Tupel W in diesem Fall nur ein vertauschendes Tupel von Operatoren ist, so dass

$$\sum_{i=1}^n W_i W_i^* = id_{K_0}$$

gilt.
Dass das Tupels W sphärisch unitär ist, ist bisher nur eine Vermutung.

Diese Arbeit beschäftigt sich damit einen Beweis für den gerade erwähnten Modellsatz für Zeilenkontraktionen mit polynomiellen Relationen zu finden. Hierzu werden wir im ersten Kapitel einige Grundlagen einführen, wozu das Konzept eines funktionalen Hilbertraumes, insbesondere des Drury-Arveson Raumes zählt. Außerdem stellen wir einige Theorie über Zeilenkontraktionen, die Calkin-Algebra und über Darstellungen auf einem Hilbertraum zur Verfügung.

Im zweiten Kapitel werden wir dann einige wichtigen Resultate in der Theorie der vollständig positiven Abbildungen zitieren, die wir im Beweis des Modellsatzes noch benötigen werden. Dies sind unter anderem der Arvesonschen Fortsetzungssatz und der Stinespringsche Dilatationssatz.

Im letzten Kapitel wenden wir uns dann dem Modellsatz zu. Diesen werden wir formulieren und danach in den beiden letzten Abschnitten beweisen. Dabei werden wir im vorletzten Abschnitt zuerst eine vollständig kontraktive, vollständig positive Abbildung

$$\rho\colon \mathscr{S} \to L(H), \quad p(S)q(S^*) \mapsto p(T)q(T^*)$$

konstruieren, wobei $\mathscr{S}$ das von S erzeugte Operatorsystem beschreibt.
Diese werden wir anschließend mit Hilfe des Arvesonschen Fortsetzungssatzes zu einer

vollständig positiven Abbildung Φ auf dem gesamten $L(\mathscr{H}(\mathcal{B}) \ominus I)$ fortsetzen. Zu dieser finden wir unter Zuhilfenahme des Stinespringschen Dilatationssatzes einen Hilbertraum $K \supset H$ und einen C^*-Algebrenhomomorphismus

$$\pi \colon L(\mathscr{H}(\mathcal{B}) \ominus I) \to L(K),$$

mit

$$\Phi(a) = P_H \pi(a)|_H$$

für alle $a \in L(\mathscr{H}(\mathcal{B}) \ominus I)$. Damit folgt insbesondere

$$T_i = P_H \pi(S_i)|_H.$$

Da es sich bei dem C^*-Algebrenhomomorphismus π um eine Darstellung handelt, werden wir im letzten Abschnitt einige Theorie über Darstellungen auf π anwenden und können somit den Raum K und die Abbildung π so zerlegen, dass wir die oben beschriebene Form des Modellsatzes für Zeilenkontraktionen mit polynomiellen Relationen erhalten.

Danksagung

An erster Stelle danke ich hier meinen Freunden und meiner Familie, die mich bei meinem Studium immer unterstützt haben und mir in allen Situationen zur Seite standen.

Ein besonderer Dank geht an meinen Bruder Johannes Alt, der alle meine Fragen während des Studiums beantwortet hat und mir immer bei meinem Studium weitergeholfen hat. Ihm und Dominik Schillo möchte ich auch für das Korrekturlesen und die Hilfe beim Schreiben der Bachelorarbeit danken.

Schließlich möchte ich mich auch bei Herrn Prof. Dr. Jörg Eschmeier für das sehr interessante Thema und die Unterstützung, die ich während der Arbeit an meiner Bachelorarbeit erfahren habe, sehr herzlich bedanken.

1 Grundlagen

1.1 Funktionale Hilberträume

Zuerst führen wir das Konzept des funktionalen Hilbertraumes ein. Sei dazu im Folgenden H ein Hilbertraum und Λ eine beliebige Menge. Unter id_H verstehen wir im Folgenden die identische Abbildung auf H, also $\mathrm{id}_H \colon H \to H, \ \ h \mapsto h$. Die Menge aller Abbildungen von H nach Λ bezeichnen wir wie gewöhnlich mit H^Λ, also

$$H^\Lambda = \{f | f \colon \Lambda \to H \text{ ist eine Abbildung}\}.$$

Definition 1.1.1. *Ein Hilbertraum $\mathcal{F} \subset H^\Lambda$ heißt* funktional*, falls für alle $\lambda \in \Lambda$ die Punktauswertungen*

$$\delta_\lambda \colon \mathcal{F} \to H, \qquad f \mapsto f(\lambda)$$

stetig sind.

Zur Untersuchung von funktionalen Hilberträumen sind positiv definite Abbildungen von zentraler Bedeutung, weshalb wir nun zunächst definieren was eine positiv definiten Abbildungen ist.

Definition 1.1.2. *Eine Abbildung $K \colon \Lambda \times \Lambda \to L(H)$, die für alle endlichen Folgen $(\lambda_i)_{i=1}^n$ in Λ und $(h_i)_{i=1}^n$ in H*

$$\sum_{i,j=1}^n \langle K(\lambda_i, \lambda_j) h_j, h_i \rangle \geq 0$$

erfülllt, heißt positiv definit.

Bemerkung 1.1.3. a) Identifiziert man $\mathbb{C} \cong L(\mathbb{C})$, indem man jede stetig, lineare Abbildung auf $\mathbb{C}$ als Multiplikation mit einem Element aus $\mathbb{C}$ ansieht, so heißt eine Funktion $K \colon \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{C}$ positiv definit genau dann, wenn

$$\sum_{i,j=1}^n \langle K(\lambda_i, \lambda_j) z_j, z_i \rangle \geq 0,$$

für alle endlichen Folgen $(\lambda_i)_{i=1}^n$ in Λ und $(z_i)_{i=1}^n$ in $\mathbb{C}$.

b) Eine Abbildung $K \colon \Lambda \times \Lambda \to L(H)$ ist genau dann positiv definit, wenn alle endlichen Operatormatrizen

$$(K(\lambda_i, \lambda_j))_{i,j=1}^n \in L(H^n)$$

positive Operatoren auf H^n definieren. Da diese selbstadjungiert sind, folgt, dass positiv definite Abbildungen $K(\lambda, \mu)^* = K(\mu, \lambda)$ für alle $\lambda, \mu \in \Lambda$ erfüllen.

Die Beweise der folgenden Sätze finden sich im ersten Kapitel der Diplomarbeit von Barbian [4].

Satz 1.1.4. *Sei $\mathcal{F} \subset H^\Lambda$ ein Hilbertraum. Es sind äquivalent:*

(i) Der Raum $\mathcal{F}$ ist ein funktionaler Hilbertraum.

(ii) Es existiert eine Abbildung $K\colon \Lambda \times \Lambda \to L(H)$ mit:
   - *Für alle $x \in H$ und $\mu \in \Lambda$ gilt: $K(\cdot, \mu)x \in \mathcal{F}$*
   - *Für alle $x \in H$, $\mu \in \Lambda$ und $f \in \mathcal{F}$ gilt: $\langle f, K(\cdot, \mu)x\rangle_{\mathcal{F}} = \langle f(\mu), x\rangle_H$.*

In diesem Fall ist die Abbildung K eindeutig bestimmt, als $K(\lambda, \mu) = \delta_\lambda \delta_\mu^*$, und wird reproduzierender Kern *von $\mathcal{F}$ genannt.*

Diesen Satz findet man mit Beweis auf Seite 7f. der Diplomarbeit von C. Barbian [4]

Der reproduzierende Kern eines funktionalen Hilbertraumes hat folgende Eigenschaften:

Lemma 1.1.5. *Sei $\mathcal{F} \subset H^\Lambda$ ein funktionaler Hilbertraum mit reproduzierendem Kern K, so ist K positiv definit und $\mathcal{F}$ ist der Abschluss der Linearen Hülle aller Abbildungen der Form $K(\cdot, \mu)x$, $(\mu \in \Lambda, x \in H)$.*

Nun sind wir in der Lage uns aus einer beliebigen positiv definiten Abbildung einen funktionalen Hilbertraum zu konstruieren.

Satz 1.1.6. *Sei $K\colon \Lambda \times \Lambda \to L(H)$ positiv definit, so existiert genau ein funktionaler Hilbertraum $\mathcal{F}_K \subset H^\Lambda$ mit reproduzierendem Kern K.*

Als Letztes betrachten wir noch einen Satz über das Hilbertraum-Tensorprodukt eines funktionalen Hilbertraumes mit dem zugrundeliegenden Hilbertraum. Dieses Ergebnis wird im nächsten Abschnitt noch benötigt.

Satz 1.1.7. *Sei $K\colon \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{C}$ positiv definit. Dann ist auch die Abbildung*

$$K_H\colon \Lambda \times \Lambda \to L(H), \;\; K_H(\lambda, \mu) = K(\lambda, \mu) id_H$$

positiv definit und es existiert ein eindeutig bestimmter unitärer Operator $V\colon \mathcal{F}_K \otimes H \to \mathcal{F}_{K_H}$ mit

$$V(f \otimes x) = f \cdot x,$$

für alle $f \in \mathcal{F}_K$ und $x \in H$.

1.2 Der Drury Arveson Raum

In diesem Kapitel werden wir nun einen speziellen funktionalen Hilbertraum einführen, den Drury-Arveson Raum. Dieser Raum spielt in der Konstruktion unseres Beweises des Modellsatzes eine große Rolle und wir werden daher einige seiner Eigenschaften untersuchen.

Sei dazu $n \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|$ die euklidische Norm und $\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C}^n | \|z\| < 1\}$ die offene euklidische Einheitskugel. Für $\alpha \in \mathbb{N}^n$ sei $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$, $\alpha! = \Pi_{i=1}^n \alpha_i!$ sowie $\gamma_\alpha = |\alpha|!/\alpha!$. Wie üblich ist für $z \in \mathbb{C}^n$ die Potenz z^α definiert als $z^\alpha = \Pi_{i=1}^n z_i^{\alpha_i}$.

Definition 1.2.1. *Die Menge*

$$\mathscr{H}(\mathcal{B}, H) = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \middle| a_\alpha \in H, \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\|a_\alpha\|^2}{\gamma_\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$$

ist zusammen mit den üblichen Verknüpfungen und dem Skalarprodukt

$$\left\langle \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha, \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} b_\alpha z^\alpha \right\rangle_{\mathscr{H}(\mathcal{B}, H)} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\langle a_\alpha, b_\alpha \rangle_H}{\gamma_\alpha}$$

ein Hilbertraum und heißt Drury-Arveson Raum*.*

Für den komplexwertigen Drury-Arveson Raum, also falls $H = \mathbb{C}$ ist, schreibt man auch $\mathscr{H}(\mathcal{B})$, anstatt $\mathscr{H}(\mathcal{B}, \mathbb{C})$.

Außerdem sei die Abbildung K definiert durch

$$K \colon \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to L(H), \quad (z, w) \mapsto (1 - \langle z, w \rangle)^{-1} \cdot id_H.$$

Im ersten Teil des Kapitels werden wir zeigen, dass der Hilbertraum $\mathscr{H}(\mathcal{B}, H)$ ein funktionaler Hilbertraum ist, indem wir K als seinen reproduzierenden Kern identifizieren. Wir beginnnen mit einigen wichtigen Gleichungen.

Proposition 1.2.2. *Seien $z, w \in \mathcal{B}$. Es gilt die Gleichung*

$$(1 - \langle z, w \rangle)^{-1} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \gamma_\alpha z^\alpha \overline{w}^\alpha, \tag{1.1}$$

und insbesondere folgt

$$(1 - \|z\|^2)^{-1} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \gamma_\alpha |z^\alpha|^2. \tag{1.2}$$

Beweis: Sei $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$ mit $|\sum\limits_{i=1}^{n} x_i| < 1$. Mit dem Satz über die geometrische Reihe ergibt sich

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} x_{i_1} \cdots x_{i_k} \right).$$

Wir wollen nun die innere Summe so umschreiben, dass wir sie mit den Multiexponenten $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ausdrücken können. Weil in einem Summanden genau k verschiedene x_{i_j} vorkommen, hat der Exponent Betrag k. Da die Summe alle i_j von 1 bis n durchläuft, kommen alle Exponenten $|\alpha|= k$ vor. Da in der oberen Summe die Reihenfolge eine Rolle spielt, bei der Potenz x^α allerdings nicht, müssen wir nun noch abzählen wie oft die einzelnen Potenzen x^α für $|\alpha|= k$ vorkommen. Diese Anzahl beträgt

$$\begin{aligned}
&\binom{k}{\alpha_1}\binom{k-\alpha_1}{\alpha_2}\cdots\binom{k-\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i}{\alpha_n} \\
&\quad = \frac{k!}{\alpha_1!(k-\alpha_1)!}\frac{(k-\alpha_1)!}{\alpha_2!(k-\alpha_1-\alpha_2)!}\cdots\frac{(k-(|\alpha|-\alpha_n))!}{\alpha_n!(k-|\alpha|)!} \\
&\quad \overset{|\alpha|=k}{=} \frac{|\alpha|!}{\Pi_{i=1}^n \alpha_i!} = \frac{|\alpha|!}{\alpha!} = \gamma_\alpha,
\end{aligned}$$

und die Summe lässt sich daher schreiben als

$$\left(1-\sum_{i=1}^n x_i\right)^{-1} = \sum_{k=0}^\infty \left(\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^n x_{i_1}\cdots x_{i_k}\right) = \sum_{k=0}^\infty \sum_{|\alpha|=k} \gamma_\alpha x^\alpha = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \gamma_\alpha x^\alpha.$$

Setzen wir nun $x_i = z_i\overline{w_i}$, so beschreibt die Summe $\sum_{i=1}^n z_i\overline{w_i}$ gerade das Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$. Beachtet man, dass $z, w \in \mathcal{B}$ und wendet man die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung an, so ergibt sich

$$|\sum_{i=1}^n z_i\overline{w_i}| = |\langle z, w\rangle| \le \|z\|\cdot\|w\| < 1,$$

wodurch die Voraussetzung von oben erfüllt ist. Durch Einsetzen erhält man das Gewünschte.

Die zweite Formel folgt nun, wenn wir $w = z$ setzen:

$$\left(1-\|z\|^2\right)^{-1} = (1-\langle z, z\rangle)^{-1} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\gamma_\alpha z^\alpha\overline{z}^\alpha = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\gamma_\alpha|z^\alpha|^2.$$

□

Damit können wir folgende schöne Eigenschaft des Drury-Arveson Raumes beweisen.

Proposition 1.2.3. *Alle Funktionen im Drury-Arveson Raum sind holomorphe H-wertige Operatoren auf der offenen n-dimensionalen euklidischen Einheitskugel.*

Beweis: Sei $f = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \in \mathscr{H}(\mathcal{B}, H)$ beliebig. Wir zeigen nun, dass f auf der offenen euklidischen Einheitskugel holomorph ist. Sei dazu $z \in \mathcal{B}$, also $\|z\| < 1$.

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung liefert zusammen mit Formel (1.2) aus Proposition 1.2.2

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\|a_\alpha z^\alpha\| &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\left\|\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma_\alpha}}a_\alpha\right)(\sqrt{\gamma_\alpha}z^\alpha)\right\| \\
&\le \left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\frac{\|a_\alpha\|^2}{\gamma_\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\gamma_\alpha|z^\alpha|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|f\|\left(1-|z^\alpha|^2\right)^{-\frac{1}{2}} < \infty.
\end{aligned}$$

Daher konvergiert f punktweise auf $\mathcal{B}$. Da jede punktweise konvergente Potenzreihe auf $\mathcal{B}$ kompakt gleichmäßig konvergiert, erhalten wir durch

$$f\colon \mathcal{B} \to \mathscr{H}(\mathcal{B}, H), \quad z \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$$

eine holomorphe, lineare H wertige Funktion, so dass für $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$a_\alpha = \frac{\partial^\alpha f(0)}{\alpha!}.$$

□

Um nun weiter zu zeigen, dass der Drury-Arveson Raum ein funktionaler Hilbertraum mit reproduzierendem Kern K ist, weisen wir zunächst nach, dass K die Eigenschaften eines reproduzierenden Kernes erfüllt.

Proposition 1.2.4. *Für $w \in \mathcal{B}$, $x \in H$ und $f \in \mathscr{H}(\mathcal{B}, H)$ gilt*

$$K(\cdot, w)x \in \mathscr{H}(\mathcal{B}, H) \text{ und } \langle f, K(\cdot, w)x \rangle_{\mathscr{H}(\mathcal{B},H)} = \langle f(w), x \rangle_H.$$

Beweis: Nach Proposition 1.2.2 folgt mit Formel (1.1) für $w, z \in \mathcal{B}$ und $x \in H$ beliebig, dass

$$\begin{aligned} K(z, w)x &= (1 - \langle z, w \rangle)^{-1} id_H(x) = (1 - \langle z, w \rangle)^{-1} x \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \gamma_\alpha z^\alpha \overline{w}^\alpha x = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} (\gamma_\alpha x \overline{w}^\alpha) z^\alpha. \end{aligned}$$

Dadurch können wir die Norm von $K(\cdot, w)x$ berechnen. Falls diese endlich ist, so liegt $K(\cdot, w)x$ im Drury-Arveson Raum. Durch Anwendung der Formel (1.2) und dadurch dass $w \in \mathcal{B}$ ergibt sich hierfür

$$\begin{aligned} \|K(\cdot, w)x\|^2 &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\|\gamma_\alpha x \overline{w}^\alpha\|^2}{\gamma_\alpha} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \gamma_\alpha \|\overline{w}^\alpha\|^2 \|x\|^2 \\ &= \|x\|^2 (1 - \|w\|^2)^{-1} < \infty. \end{aligned}$$

Kommen wir zum zweiten Teil des Satzes. Sei also $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \in \mathscr{H}(\mathcal{B}, H)$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle f, K(\cdot, w)x \rangle_{\mathscr{H}(\mathcal{B},H)} &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\langle a_\alpha, \gamma_\alpha x \overline{w}^\alpha \rangle_H}{\gamma_\alpha} \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \langle a_\alpha w^\alpha, x \rangle_H \\ &= \langle \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha w^\alpha, x \rangle_H \\ &= \langle f(w), x \rangle_H. \end{aligned}$$

□

Damit können wir nun unsere anfängliche Aussage als einfache Folgerung aus Satz 1.1.4 formulieren.

Satz 1.2.5. *Der Drury-Arveson Raum $\mathscr{H}(\mathcal{B}, H)$ ist ein funktionaler Hilbertraum mit reproduzierendem Kern K.*

Beweis: Offensichtlich ist der Drury-Arveson Raum $\mathscr{H}(\mathcal{B}, H)$ eine Teilmenge von $H^{\mathcal{B}}$, da er sogar nur holomorphe H-wertige Funktionen beschreibt (Proposition 1.2.3).
Um nun Satz 1.1.4 anzuwenden, zeigen wir, dass für K die Abbildungen

$$K(\cdot, w)x \in \mathscr{H}(\mathcal{B}, H)$$

sind, für alle $x \in H$, $w \in \mathcal{B}$ und

$$\langle f, K(\cdot, w)x\rangle_{\mathscr{H}(\mathcal{B},H)} = \langle f(w), x\rangle_H,$$

für alle $x \in H$, $w \in \mathcal{B}$ ist.

Nach Proposition 1.2.4 besitzt K diese Eigenschaften, und daher ist nach Satz 1.1.4 der Drury-Arveson Raum $\mathscr{H}(\mathcal{B}, H)$ ein funktionaler Hilbertraum mit reproduzierendem Kern

$$K\colon \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to L(H), \quad (z, w) \mapsto (1 - \langle z, w\rangle)^{-1} \cdot id_H.$$

□

Durch Anwendung von Satz 1.1.7 erhalten wir nun eine unitäre Abbildung zwischen dem H-wertigen Drury-Arveson Raum $\mathscr{H}(\mathcal{B})$ und dem Hilbertraum-Tensorprodukt des komplexwertigen Drury-Arveson Raums mit dem Hilbertraum H. Daher gilt folgendes Korollar.

Korollar 1.2.6. *Sei $\mathscr{H}(\mathcal{B}) \otimes H$ das Hilbertraum-Tensorprodukt des komplexwertigen Drury-Arveson Raums mit dem Hilbertraum H, so sind die beiden Räume $\mathscr{H}(\mathcal{B}) \otimes H$ und $\mathscr{H}(\mathcal{B}, H)$ isometrisch isomorph unter dem kanonischen unitären Operator*

$$V\colon \mathscr{H}(\mathcal{B}) \otimes H \to \mathscr{H}(\mathcal{B}, H)$$

mit

$$V(f \otimes x) = f \cdot x,$$

für alle $f \in \mathcal{F}_K$ und $x \in H$.

Wir werden diese Charakterisierung des Drury-Arveson Raumes $\mathscr{H}(\mathcal{B}, H)$ in der Arbeit noch benutzen, indem wir ihn mit dem Hilbertraum-Tensorprodukt $\mathscr{H}(\mathcal{B}) \otimes H$ identifizieren.

Kommen wir nun zu einem im Folgenden noch wichtigen abgeschlossenen Unterraum des Drury-Arveson Raumes. Sei dazu $I \subset \mathbb{C}[z_1, .., z_n]$ ein Ideal im Polynomring in n Variablen. Da der Polynomring offensichtlich als eine Teilmenge des Drury-Arveson Raumes aufgefasst werden kann, kann man das orthogonale Komplement von I im Drury-Arveson Raum definieren:

$$\mathscr{F}_I^2 = \mathscr{H}(\mathcal{B}) \ominus I = \mathscr{H}(\mathcal{B}) \ominus \overline{I} \subset \mathscr{H}(\mathcal{B}).$$

Dieses bildet wieder einen Hilbertraum und kann durch die Identifizierung des H-wertigen Drury-Arveson Raumes als Tensorprodukt, auch in diesem einfach betrachtet werden:

$$\mathscr{F}_I^2 \bigotimes H \subset \mathscr{H}(\mathcal{B}) \otimes H \cong \mathscr{H}(\mathcal{B}, H).$$

Außerdem sei von nun an die Abbildung $P_{\mathscr{F}_I^2} \colon \mathscr{H}(\mathcal{B}) \to \mathscr{F}_I^2$ die orthogonale Projektion auf den Unterhilbertraum $\mathscr{F}_I^2$ mit Bild in $\mathscr{F}_I^2$.

1.3 Zeilenkontraktion und der *n*-Shift

In diesem Abschnitt wollen wir nun die Zeilenkontraktionen einführen, für die wir später den Modellsatz formulieren werden. Außerdem werden wir den Begriff des n-Shiftes erläutern, der im späteren Verlauf der Arbeit noch von großer Bedeutung ist.

Die orthogonale Projektion von $\mathscr{H}(\mathcal{B}, H)$ auf den Unterraum der konstanten Funktionen wird im Folgenden beschrieben durch

$$P_{\mathbb{C}}^{\mathscr{H}(\mathcal{B},H)} : \mathscr{H}(\mathcal{B}, H) \to \mathscr{H}(\mathcal{B}, H), \quad \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \mapsto a_{(0,\ldots,0)}$$

Definition 1.3.1. *Ein Tupel $T \in L(H)^n$ vertauschender, stetiger, linearer Operatoren, so dass*

$$\sum_{i=1}^{n} T_i T_i^* \leq id_H,$$

heißt Zeilenkontraktion *oder auch (n-Kontraktion).*

In einigen Fällen ist es einfacher eine äquivalente Charakterisierung von Zeilenkontraktionen nachzurechnen. Diese liefert der nachfolgende Satz.

Satz 1.3.2. *Sei $T \in L(H)^n$ ein Tupel vertauschender, stetig, linearer Operatoren, dann sind äquivalent:*

(i) Das Tupel T ist eine Zeilenkontraktion,

(ii) Die Abbildung

$$\varphi \colon H^n \to H, \;\; (x_i)_{i=1}^n \mapsto \sum_{i=1}^{n} T_i x_i$$

ist kontraktiv.

Beweis: Betrachten wir also die Abbildung

$$\varphi \colon H^n \to H, \;\; (x_i)_{i=1}^n \mapsto \sum_{i=1}^{n} T_i x_i.$$

Wir zeigen zunächst, dass die zu φ adjungierte Abbildung durch

$$\varphi^* \colon H \to H^n, \;\; x \mapsto (T_i^* x)_{i=1}^n$$

gegeben ist. Für $x \in H$, $y = (y_i)_{i=1}^n \in H^n$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\langle \varphi^*(x), y \rangle_{H^n} &= \langle x, \varphi(y) \rangle_H = \langle x, \sum_{i=1}^n T_i y_i \rangle_H \\ &= \sum_{i=1}^n \langle x, T_i y_i \rangle_H = \sum_{i=1}^n \langle T_i^* x, y_i \rangle_H \\ &= \langle (T_i^* x)_{i=1}^n, y \rangle_{H^n},\end{aligned}$$

da für $(a_i)_{i=1}^n, (b_i)_{i=1}^n \in H^n$ $\langle (a_i)_{i=1}^n, (b_i)_{i=1}^n \rangle_{H^n} = \sum_{i=1}^n \langle a_i, b_i \rangle_H$ gilt.
Damit haben wir die Form von φ^* bewiesen. Nun zeigen wir, dass

$$\varphi\varphi^* \leq id_H \quad \Leftrightarrow \quad \|\varphi\| \leq 1.$$

Sei $\mathrm{id}_H - \varphi\varphi^*$ positiv, also

$$\begin{aligned}0 &\leq \langle (\mathrm{id}_H - \varphi\varphi^*)(x), x \rangle = \langle x, x \rangle - \langle \varphi\varphi^*(x), x \rangle_H \\ &= \|x\|^2 - \langle \varphi^*(x), \varphi^*(x) \rangle_{H^n} \\ &= \|x\|^2 - \|\varphi^*(x)\|^2.\end{aligned}$$

Dies ist äquivalent dazu, dass φ^* eine Kontraktion ist, was gleichbedeutend zur Aussage ist, dass φ eine Kontraktion ist.

Außerdem gilt

$$\varphi\varphi^* = \sum_{i=1}^n T_i T_i^*,$$

woraus die Äquivalenz folgt. □

Ein sehr wichtiges Beispiel einer Zeilenkontraktion ist der n-Shift auf dem Drury-Arveson Raum. Dazu definieren wir uns zunächst die Multiplikationsoperatoren mit den Koordinatenfunktionen und fassen diese dann zum n-Shift zusammen.

Wir beweisen zunächst folgende Gleichung.

Proposition 1.3.3. *Sei $i \in \{1, ..., n\}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ so dass $\alpha \geq e_i$ mit $e_i = (\delta_{ij})_{j=1}^n$, also $\alpha_j \geq 1$. Es gilt*

$$\frac{\gamma_{\alpha - e_i}}{\gamma_\alpha} = \frac{\alpha_i}{|\alpha|} \leq 1. \tag{1.3}$$

Beweis: Mit der Definition der γ_α folgt

$$\frac{\gamma_{\alpha - e_i}}{\gamma_\alpha} = \frac{\frac{|\alpha - e_i|!}{(\alpha - e_i)!}}{\frac{|\alpha|!}{\alpha!}} = \frac{(|\alpha| - 1)!\alpha!}{(\alpha - e_i)!|\alpha|!} = \frac{\frac{|\alpha|!}{|\alpha|}\alpha!}{\frac{\alpha!}{\alpha_i}|\alpha|!} = \frac{\frac{1}{|\alpha|}}{\frac{1}{\alpha_i}} = \frac{\alpha_i}{|\alpha|}.$$

□

Somit können wir die erste wichtige Aussage über die Multiplikationsoperatoren mit den Koordinatenfunktionen formulieren.

Lemma 1.3.4. *Für alle $i = 1, ..., n$ ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} M_{z_i}^H \colon \mathscr{H}(\mathcal{B}, H) &\to \mathscr{H}(\mathcal{B}, H), \\ f &\mapsto z_i \cdot f \end{aligned}$$

stetig, linear und kontraktiv. Außerdem gilt

$$M_{z_i}^H \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \right) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^{\alpha + e_i} = \sum_{\alpha \geq e_i} a_{\alpha - e_i} z^\alpha. \tag{1.4}$$

Beweis: Sei $i \in \{1, ..., n\}$ beliebig und $f = \sum\limits_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \in \mathscr{H}(\mathcal{B}, H)$.
Formel (1.4) folgt durch Ausführen der Multiplikation von f mit z_i.
Zeigen wir nun die Wohldefiniertheit von $M_{z_i}^H$. Dazu müssen wir zeigen, dass $M_{z_i}^H f$ die gegebene Summierbarkeitsbedingung erfüllt, also dass $\|M_{z_i}^H f\| < \infty$. Mit der Formel (1.3) erhalten wir

$$\begin{aligned} \|M_{z_i}^H f\|^2 &= \sum_{\alpha \geq e_i} \frac{\|a_{\alpha - e_i}\|^2}{\gamma_\alpha} = \sum_{\alpha \geq e_i} \frac{\|a_{\alpha - e_i}\|^2}{\gamma_\alpha} \frac{\gamma_{\alpha - e_i}}{\gamma_{\alpha - e_i}} \\ &= \sum_{\alpha \geq e_i} \frac{\|a_{\alpha - e_i}\|^2}{\gamma_{\alpha - e_i}} \frac{\gamma_{\alpha - e_i}}{\gamma_\alpha} = \sum_{\alpha \geq e_i} \frac{\|a_{\alpha - e_i}\|^2}{\gamma_{\alpha - e_i}} \frac{\alpha_i}{|\alpha|} \\ &\leq \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\|a_\alpha\|^2}{\gamma_\alpha} = \|f\|^2 < \infty. \end{aligned}$$

Da $M_{z_i}^H$ offensichtlich linear ist folgt aus dieser Rechnung auch die Stetigkeit und Kontraktivität von $M_{z_i}^H$. □

Nun können wir den n-Shift definieren.

Definition 1.3.5. *Das Tupel $M_z^H = (M_{z_1}^H, ..., M_{z_n}^H) \in L(\mathscr{H}(\mathcal{B}, H))^n$ heißt n-*Shift *oder n-*dimensionaler Shift.

Bemerkung 1.3.6. Für den Fall $H = \mathbb{C}$, also für den $\mathbb{C}$-wertigen Drury-Arveson Raum, schreiben wir auch M_{z_i} anstatt $M_{z_i}^{\mathbb{C}}$ und M_z anstatt $M_z^{\mathbb{C}}$. Außerdem gilt durch den Isomorphismus aus Korollar 1.2.6 für H beliebig, dass $M_{z_i}^H = M_{z_i} \otimes id_H$.

Im nächsten Lemma betrachten wir nun die Wirkung des zu $M_{z_i}^H$ adjungierten Operators.

Lemma 1.3.7. *Für $f = \sum\limits_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \in \mathscr{H}(\mathcal{B}, H)$ und alle $i = 1, ...n$ gilt*

$$(M_{z_i}^{H^*} f)(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha + e_i}} a_{\alpha + e_i} z^\alpha.$$

Beweis: Seien $f = \sum\limits_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha, g = \sum\limits_{\alpha \in \mathbb{N}^n} b_\alpha z^\alpha \in \mathscr{H}(\mathcal{B}, H)$. Als erstes zeigen wir, dass die rechte Seite der Gleichung in $\mathscr{H}(\mathcal{B}, H)$ liegt um dann zu zeigen, dass

$$\langle M_{z_i}^{H^*} f, g \rangle_{\mathscr{H}(\mathcal{B}, H)} = \langle \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha + e_i}} a_{\alpha + e_i} z^\alpha, g \rangle_{\mathscr{H}(\mathcal{B}, H)},$$

woraus direkt das gewünschte folgt. Mit Hilfe der Formel (1.3) ergibt sich

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\frac{\|\frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha+e_i}}a_{\alpha+e_i}\|^2}{\gamma_\alpha}&=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha+e_i}}\frac{\|a_{\alpha+e_i}\|^2}{\gamma_{\alpha+e_i}}=\sum_{\alpha\geq e_i}\frac{\gamma_{\alpha-e_i}}{\gamma_\alpha}\frac{\|a_\alpha\|^2}{\gamma_\alpha}\\&=\sum_{\alpha\geq e_i}\frac{\alpha_i}{|\alpha|}\frac{\|a_\alpha\|^2}{\gamma_\alpha}\leq\|f\|^2<\infty,\end{aligned}$$

sodass

$$\begin{aligned}\langle M_{z_i}^{H*}f,g\rangle_{\mathscr{H}(\mathcal{B},H)}&=\langle f,M_{z_i}^H g\rangle_{\mathscr{H}(\mathcal{B},H)}\\&=\langle\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}a_\alpha z^\alpha,\sum_{\alpha\geq e_i}b_{\alpha-e_i}z^\alpha\rangle_{\mathscr{H}(\mathcal{B},H)}\\&=\sum_{\alpha\geq e_i}\frac{\langle a_\alpha,b_{\alpha-e_i}\rangle_H}{\gamma_\alpha}\\&=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\frac{\langle a_{\alpha+e_i},b_\alpha\rangle_H}{\gamma_{\alpha+e_i}}\frac{\gamma_\alpha}{\gamma_\alpha}\\&=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\frac{\langle\frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha+e_i}}a_{\alpha+e_i},b_\alpha\rangle_H}{\gamma_\alpha}\\&=\langle\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha+e_i}}a_{\alpha+e_i}z^\alpha,g\rangle_{\mathscr{H}(\mathcal{B},H)}.\end{aligned}$$

□

Wir können damit folgern, dass der n-Shift eine Zeilenkontraktion ist.

Satz 1.3.8. *Der n-Shift ist eine n-Kontraktion auf $\mathscr{H}(\mathcal{B},H)$.*

Beweis: Da die Multiplikationsoperatoren $M_{z_i}^H$ einer Multiplikation mit z_i entsprechen und diese kommutativ ist, ist der n-Shift ein vertauschendes Tupel.
Bleibt noch die Eigenschaft einer Zeilenkontraktion zu zeigen. Wir werden dazu zeigen, dass $\mathrm{id}_{\mathscr{H}(\mathcal{B},H)}-\sum_{i=1}^n M_{z_i}M_{z_i}^*$ die orthogonale Projektion auf den Unterraum der konstanten Funktionen in $\mathscr{H}(\mathcal{B},H)$ ist.

Für alle $f=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}a_\alpha z^\alpha\in\mathscr{H}(\mathcal{B},H)$ gilt nach Lemma 1.3.7 und mit Formel (1.3)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n M_{z_i}M_{z_i}^*f&=\sum_{i=1}^n M_{z_i}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha+e_i}}a_{\alpha+e_i}z^\alpha\\&=\sum_{i=1}^n\sum_{\alpha\geq e_i}\frac{\gamma_{\alpha-e_i}}{\gamma_\alpha}a_\alpha z^\alpha\\&=\sum_{i=1}^n\sum_{\alpha\geq e_i}\frac{\alpha_i}{|\alpha|}a_\alpha z^\alpha\\&=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}a_\alpha z^\alpha-a_{(0,\dots,0)}\\&=f-a_{(0,\dots,0)}.\end{aligned}$$

Da Projektionen positiv sind, ist somit $\mathrm{id}_{\mathscr{H}(\mathcal{B},H)} - \sum_{i=1}^{n} M_{z_i} M_{z_i}^*$ positiv, und damit folgt, dass der n-Shift eine Zeilenkontraktion ist. $\square$

Bemerkung 1.3.9. Für den n-Shift sei M_z^* definiert als das Tupel der Adjungierten der Multiplikatoren mit den Koordinatenfunktionen, also $M_z^* = (M_{z_i}^*)_{i=1}^n$. Da das Tupel M_z vertauschend ist, ist auch das Tupel M_z^* vertauschend.

Für diese Arbeit von großer Bedeutung ist die Einschränkung des n-Shifts auf den Unterhilbertraum $\mathscr{F}_I^2$. Dieses Tupel bezeichnen wir mit $S = (S_i)_{i=1}^n \in L(\mathscr{F}_I^2)^n$ und es gilt

$$S = (S_1, ..., S_n) = (P_{\mathscr{F}_I^2} M_{z_1}|_{\mathscr{F}_I^2}, ..., P_{\mathscr{F}_I^2} M_{z_n}|_{\mathscr{F}_I^2}). \tag{1.5}$$

Genauso wie eben für den n-Shift definieren wir das Tupel

$$S^* = (S_i^*)_{i=1}^n = (P_{\mathscr{F}_I^2} M_{z_i}^*|_{\mathscr{F}_I^2})_{i=1}^n.$$

Man beachte, dass diese Gleichung gilt, da die Einschränkung einer Funktion auf einen Unterraum durch Verknüpfen mit der Adjungierten der entsprechenden Projektion auf diesen Unterraum dargestellt werden kann.

Um einige wesentlichen Eigenschaften dieser Tupel zu formulieren, benötigen wir folgende Proposition.

Proposition 1.3.10. *Für das Tupel $S = (S_j)_{j=1}^n \in L(\mathscr{F}_I^2)^n$ aus (1.5) gilt*

$$S_k S_j = P_{\mathscr{F}_I^2} M_{z_k} M_{z_j}|_{\mathscr{F}_I^2} \text{ und}$$

$$S_j^* = M_{z_i}^*|_{\mathscr{F}_I^2},$$

für alle $j, k \in \{1, ..., n\}$

Beweis: Seien $j, k \in \{1, ..., n\}$ beliebig. Nach Voraussetzung ist I ein Ideal im Polynomring und, da z_j ein Element des Polynomrings ist, liegt die Multiplikation von z_j mit einem Element aus I in I. Da die Abbildung M_{z_j} eine Multiplikation mit z_j darstellt, folgt also

$$M_{z_j} i \in I,$$

für alle $i \in I$.
Sei nun $i \in \overline{I} \subset \mathscr{H}(\mathcal{B})$ ein Element im Abschluss von I im Drury-Arveson Raum, so existiert eine Folge $(i_l)_{l \in \mathbb{N}}$, die gegen i konvergiert und somit kann man, da M_{z_j} stetig ist, schließen, dass

$$M_{z_j} i = M_{z_j} \lim_{l \to \infty} i_l = \lim_{l \to \infty} M_{z_j} i_l \in \overline{I}. \tag{1.6}$$

Nach der Definition von $\mathscr{F}_I^2$ kann der Drury-Arveson Raum geschrieben werden als

$$\mathscr{H}(\mathcal{B}) = \mathscr{F}_I^2 \oplus \overline{I}.$$

Somit können wir $M_{z_j}(h)$ mit $h \in \mathscr{H}(\mathcal{B})$ schreiben als

$$M_{z_j}h = f_{jh} + i_{jh},$$

mit $f_{jh} \in \mathscr{F}_I^2$ und $i_{jh} \in \overline{I}$ woraus für $h \in \mathscr{H}(\mathcal{B})$ mit Hilfe von Formel (1.6)

$$\begin{aligned} P_{\mathscr{F}_I^2} M_{z_k} M_{z_j} h &= P_{\mathscr{F}_I^2} M_{z_k}(f_{jh} + i_{jh}) = P_{\mathscr{F}_I^2} M_{z_k}(f_{jh}) + P_{\mathscr{F}_I^2} M_{z_k} i_{jh} \\ &= P_{\mathscr{F}_I^2} M_{z_k}(f_{jh}) = P_{\mathscr{F}_I^2} M_{z_k} P_{\mathscr{F}_I^2} M_{z_j} h, \end{aligned}$$

und daher

$$P_{\mathscr{F}_I^2} M_{z_k} M_{z_j} = P_{\mathscr{F}_I^2} M_{z_k} P_{\mathscr{F}_I^2} M_{z_j}$$

folgt. Dies liefert die erste Aussage des Satzes beweisen können.

$$\begin{aligned} S_k S_j &= P_{\mathscr{F}_I^2} M_{z_k} P^*_{\mathscr{F}_I^2} P_{\mathscr{F}_I^2} M_{z_j}|_{\mathscr{F}_I^2} = P_{\mathscr{F}_I^2} M_{z_k} P_{\mathscr{F}_I^2} M_{z_j}|_{\mathscr{F}_I^2} \\ &= P_{\mathscr{F}_I^2} M_{z_k} M_{z_j}|_{\mathscr{F}_I^2}. \end{aligned}$$

Für die zweite Formel des Satzes müssen wir zeigen, dass der Raum $\mathscr{F}_I^2$ invariant unter Anwendung von $M^*_{z_j}$ ist, also dass $M^*_{z_j} f \perp I$ für alle $f \in \mathscr{F}_I^2$. Für beliebiges $f \in \mathscr{F}_I^2$ und $i \in I$ erhalten wir mit Formel(1.6)

$$\langle M^*_{z_j} f, i \rangle = \langle f, M_{z_j} i \rangle = 0,$$

da $f \perp I$.
Damit ergibt sich direkt

$$S_j^* = P_{\mathscr{F}_I^2} M^*_{z_j}|_{\mathscr{F}_I^2} = M^*_{z_j}|_{\mathscr{F}_I^2}.$$

□

Wir kommen nun zu der wichtigsten Folgerung hieraus.

Satz 1.3.11. *Das Tupel $S \in L(\mathscr{F}_I^2)$ ist eine Zeilenkontraktion auf $\mathscr{F}_I^2$.*

Beweis: Mit Proposition 1.3.10 und damit, dass M_z ein vertauschendes Tupel ist, folgt

$$S_k S_j = P_{\mathscr{F}_I^2} M_{z_k} M_{z_j}|_{\mathscr{F}_I^2} = P_{\mathscr{F}_I^2} M_{z_j} M_{z_k}|_{\mathscr{F}_I^2} = S_j S_k$$

für alle $j, k \in \{1, ..., n\}$. Somit ist S ein vertauschendes Tupel. Die Stetigkeit und Linearität überträgt sicht von den entsprechenden Eigenschaften von M_z.

Um nun zu folgern, dass S eine Zeilenkontraktion ist, benutzen wir Satz 1.3.2. Sei dazu

$$\varphi_{M_z} \colon \mathscr{H}(\mathcal{B})^n \to \mathscr{H}(\mathcal{B}), \ (x_i)_{i=1}^n \mapsto \sum_{i=1}^n M_{z_i} x_i$$

Da M_z eine Zeilenkontraktion ist, gilt dass $\|\varphi_M\| \leq 1$. Für die Abbildung

$$\varphi_S \colon \mathscr{F}_I^{2^n} \to \mathscr{F}_I^2, \ (x_i)_{i=1}^n \mapsto \sum_{i=1}^n S_i x_i$$

gilt somit

$$\|\varphi_S\| = \|\sum_{i=1}^n P_{\mathscr{F}_I^2} M_{z_i}|_{\mathscr{F}_I^2}\| = \|P_{\mathscr{F}_I^2}(\sum_{i=1}^n M_{z_i})|_{\mathscr{F}_I^2}\| = \|P_{\mathscr{F}_I^2} \varphi_M|_{\mathscr{F}_I^2}\| \leq \|\varphi_M\| \leq 1.$$

Damit ist auch S nach Satz 1.3.2 eine Zeilenkontraktion. □

Bemerkung 1.3.12. Da Zeilenkontraktionen vertauschende Tupel von Operatoren sind, kann man sie in Polynome in n-Variablen einzusetzen und somit eine Abbildung auf H erhalten.

Diese Eigenschaft von Zeilenkontraktionen wird im Verlauf der Arbeit eine große Rolle spielen, da die Zeilenkontraktionen, die wir betrachten werden, polynomielle Relationen erfüllen, also $p(T) \equiv 0$ für alle $p \in I$ für ein geeignetes Ideal $I \subset \mathbb{C}[z]$ gilt.

Bei einem Tupel von vertauschenden Operatoren ist offensichtlich auch das Tupel der adjungierten Operatoren vertauschend, sodass auch $p(T^*)$ eine Abbildung auf H definiert.

Es ist für uns von großem Interesse $p(M_z)$, $p(M_z^*)$, $p(S)$ und $p(S^*)$ zu betrachten. Auch Produkte $p(M_z) \cdot p(M_z^*)$ werden wir untersuchen, und es gilt dabei folgende Formel.

Satz 1.3.13. *Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ gilt*

$$S^\alpha S^{*\beta} = P_{\mathscr{F}_I^2} M_z^\alpha M_z^{*\beta}|_{\mathscr{F}_I^2}.$$

Beweis: Die Formel ergibt sich nun als einfache Folgerung der Formeln aus Proposition 1.3.10:

$$\begin{aligned}
S^\alpha S^{*\beta} &= \Pi_{i=1}^n P_{\mathscr{F}_I^2} M_{z_i}^{\alpha_i}|_{\mathscr{F}_I^2} \Pi_{i=1}^n P_{\mathscr{F}_I^2} M_{z_i}^{*\ \beta_i}|_{\mathscr{F}_I^2} \\
&= P_{\mathscr{F}_I^2}(\Pi_{i=1}^n M_{z_i}^{\alpha_i})|_{\mathscr{F}_I^2}(\Pi_{i=1}^n M_{z_i}^{*\ \beta_i})|_{\mathscr{F}_I^2} \\
&= P_{\mathscr{F}_I^2}(\Pi_{i=1}^n M_{z_i}^{\alpha_i})(\Pi_{i=1}^n M_{z_i}^{*\ \beta_i})|_{\mathscr{F}_I^2} \\
&= P_{\mathscr{F}_I^2}(M_z^\alpha M_z^{*\beta})|_{\mathscr{F}_I^2}.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.3.14. Beim Beweis des Modellsatzes wird der von diesen Monomen erzeugte Unterraum $\mathscr{S} = LH\{S^\alpha S^{*\beta} | \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\} \subset L(\mathscr{F}_I^2)$ eine wichtige Rolle spielen. Diese Menge ist offensichtlich ein Unterraum und für den gilt, dass $1 \in \mathscr{S}$ und $\mathscr{S}$ ist *-abgeschlossen, also für alle $s \in \mathscr{S}$ ist auch $s^* \in \mathscr{S}$. Einen solchen Unterraum nennt man auch *Operatorsystem*, was bei der Anwendung der Arvesonschen Fortsetzungssatzes von Bedeutung ist, womit wir uns im zweiten Kapitel noch näher beschäftigen werden.

Bemerkung 1.3.15. Aus der Identifikation $M_{z_i}^H = M_{z_i} \otimes id_H$ folgt eine ähnliche Identifikation für die Einschränkung von $M_{z_i}^H$ auf $\mathscr{F}_I^2 \otimes H$

$$P_{\mathscr{F}_I^2 \otimes H} M_{z_i}^H|_{\mathscr{F}_I^2 \otimes H} = (P_{\mathscr{F}_I^2} M_{z_i}|_{\mathscr{F}_I^2}) \otimes id_H = S_i \otimes id_H.$$

1.4 Die Calkin Algebra

Eine der wichtigsten Quotientenalgebren, die es in der Funktionalanalysis gibt, ist die sogenannte *Calkin-Algebra*, welche die Algebra der stetigen, linearen Operatoren auf einem Hilbertraum modulo des Ideals der kompakten Operatoren auf diesem Hilbertraum ist. Da die Calkin-Algebra auch in dieser Arbeit von Bedeutung ist, werden wir sie in diesem Abschnitt einführen und betrachten. Dazu werden wir zuerst einige Sätze über Ideale und Quotientenalgebren aufführen, um dann die Calkin-Algebra als C^*-Algebra einführen zu können.

Beginnen wir mit einem Satz, nach dem in jedem Ideal lokal, abzählbare, approximierende Rechts-Einsen existieren.

Lemma 1.4.1. *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra und $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ ein Ideal in $\mathcal{A}$.*
Dann existiert für alle $x \in \mathcal{I}$ ein Net $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von selbstadjungierten Elementen in $\mathcal{I}$, die

i) $Sp(e_\lambda) \subseteq [0,1]$ *für alle* $\lambda \in \Lambda$,

ii) $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda} \|xe_\lambda - x\| = 0$

erfüllen.

Den Beweis des Lemmas kann man im Buch von Arveson [2, S.10 f.] nachlesen.

Hieraus kann man direkt folgern, dass jedes Ideal *-abgeschlossen ist.

Korollar 1.4.2. *Jedes abgeschlossene Ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ in einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$ ist selbstadjungiert und ist somit selbst eine C^*-Algebra.*

Beweis: Sei also $x \in \mathcal{I}$. Nach Lemma 1.4.1 existiert eine approximierende Eins für x, also ein Netz $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ mit $e_\lambda = e_\lambda^*$ für alle $\lambda \in \Lambda$ und $\lim\limits_{\lambda\in\Lambda} \|xe_\lambda - x\| = 0$.
Außerdem gilt

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\in\Lambda} \|x^*e_\lambda - x^*\| &= \lim_{\lambda\in\Lambda} \|x^*e_\lambda^* - x^*\| = \lim_{\lambda\in\Lambda} \|(xe_\lambda - x)^*\| \\ &= \lim_{\lambda\in\Lambda} \|xe_\lambda - x\| = 0.\end{aligned}$$

Daher konvergiert x^*e_λ gegen x^*. Da $\mathcal{I}$ ein Ideal ist, ist $x^*e_\lambda \in \mathcal{I}$, und mit der Abgeschlossenheit von $\mathcal{I}$ folgt somit, dass x^* wieder in $\mathcal{I}$ liegt. □

Nun können wir eine wichtige Aussage über Quotientenalgebren treffen. Wir können nun nämlich folgern, dass eine Quotientenalgebra $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ aus einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$ und einem Ideal $\mathcal{I}$ wieder eine C^*-Algebra bildet.

Satz 1.4.3. *Sei $\mathcal{A}$ eine unitale C^*-Algebra und $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ ein abgeschlossenes Ideal in $\mathcal{A}$. Die Quotientenalgebra $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ mit den üblichen Verknüpfungen und der induzierten Norm und Involution bildet eine C^*-Algebra.*

Beweis: Durch die Aussage des Korollars 1.4.2 folgt die Wohldefiniertheit der Involution in der Quotientenalgebra. Auch die Norm $\|[a]\| = \inf_{i\in\mathcal{I}} \|a + i\|$ ist wohldefiniert, da $\mathcal{I}$ abgeschlossen ist und mit der Selbstadjungiertheit von $\mathcal{I}$ folgt auch $\|[a]\| = \|[a]*\|$. Damit bildet die Quotientenalgebra $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ mit den induzierten Verknüpfungen, Norm und Involution eine Banach-*-Algebra.
Es bleibt also nur zu zeigen, dass

$$\|[a]\|^2 = \|[a]^*[a]\| \tag{1.7}$$

für alle $a \in \mathcal{A}$.
Sei also $a \in \mathcal{A}$ beliebig und $e \in \mathcal{A}$ das neutrale Element der Multiplikation.
Dass die Linke Seite von Gleichung (1.7) größer gleich der rechten Seite ist, folgt direkt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung.
Die Gültigkeit der zweiten Richtung in Gleichung (1.7) zu zeigen ist etwas aufwändiger.
Wir definieren die Menge $U = \{u \in \mathcal{I} | u = u^*, Sp(u) \subseteq [0, 1]\}$. Nun zeigen wir, dass für die Norm auf $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ gilt:

$$\|[a]\| = \inf_{u\in U} \|a - au\|.$$

Dass die linke Seite kleiner gleich der rechten Seite ist, folgt direkt aus der Definition, da mit u auch au in $\mathcal{I}$ liegt.
Um nun auch die andere Richtung zu zeigen, genügt es für jedes $z \in \mathcal{I}$ ein Netz $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ zu finden, so dass

$$\|a + z\| \geq \inf_{\lambda\in\Lambda} \|a - au_\lambda\|.$$

Sei $z \in \mathcal{I}$ beliebig und $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ nun die approximierende Eins aus Lemma 1.4.1 für z, so gilt wegen 1.4.1i), dass $\|e - u_\lambda\| \leq 1$ für alle $\lambda \in \Lambda$. Damit folgt, dass

$$\begin{aligned}
\|a + z\| &= \liminf_{\lambda\in\Lambda} \|(a + z)(e - u_\lambda)\| \\
&= \liminf_{\lambda\in\Lambda} \|a(e - u_\lambda + z(e - u_\lambda)\| \\
&= \liminf_{\lambda\in\Lambda} \|(a - au_\lambda) + (z - zu_\lambda)\| \\
&= \liminf_{\lambda\in\Lambda} \|(a - au_\lambda)\| \\
&\geq \inf_{\lambda\in\Lambda} \|a - au_\lambda\|.
\end{aligned}$$

Es folgt also

$$\|[a]\| = \inf_{u\in U} \|a - au\|.$$

Wir erhalten mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung somit

$$\begin{aligned}
\|[a]\|^2 &= (\inf_{u\in U} \|a - au\|)^2 = \inf_{u\in U} \|a(e - u)\|^2 \\
&= \inf_{u\in U} \|(e - u)^* a^* a(e - u)\| \\
&\leq \inf_{u\in U} \|e - u\| \inf_{u\in U} \|a^* a(e - u)\| \\
&\leq \inf_{u\in U} \|a^* a - a^* au\| \\
&= \|[a^* a]\| = \|[a]^*[a]\|.
\end{aligned}$$

□

Nun können wir die Calkin-Algebra für einen beliebigen Hilbertraum H definieren. Diese ist nach dem letzten Satz eine C^*-Algebra, da die Menge der kompakten Operatoren ein abgeschlossenes Ideal in der C^*-Algebra der stetigen, linearen Operatoren bildet.

Definition 1.4.4. *Die Quotienten-Algebra*

$$\mathcal{C}(H) = L(H)/\mathcal{K}(H)$$

heißt Calkin-Algebra*.*

Bemerkung 1.4.5. Im späteren Verlauf der Arbeit werden wir die Calkin-Algebra über dem Hilbertraum $\mathscr{F}_I^2$ betrachten, also $\mathcal{C}(\mathscr{F}_I^2) = L(\mathscr{F}_I^2)/\mathcal{K}(\mathscr{F}_I^2)$. Dabei interessieren uns vor allem die Elemente $[S_i]$.
Nach einer Vermutung von Arveson ist das Tupel S wesentlich normal (Problem 2 [3, S.78]), das heißt, dass

$$S_iS_i^* - S_i^*S_i \in \mathcal{K}(\mathscr{F}_I^2).$$

Falls das Tupel S wesentlich normal ist, so ist das Tupel $[S] = ([S_1], ..., [S_n])$ demnach ein vertauschendes Tupel normaler Operatoren in der Calkin-Algebra $\mathcal{C}(\mathscr{F}_I^2)$.

Außerdem gilt für das Tupel $[S]$ folgende Gleichung.

Satz 1.4.6. *Für das Tupel* $[S] = ([S_1], ..., [S_n]) \in \mathcal{C}(\mathscr{F}_I^2)^n$ *von Operatoren in der Calkin-Algebra* $\mathcal{C}(\mathscr{F}_I^2)$ *gilt die Gleichung*

$$\sum_{i=1}^{n}[S_i][S_i^*] = [id_{\mathscr{F}_I^2}].$$

Beweis: Nach dem Beweis von Satz 1.3.8 ist die Abbildung $\mathrm{id}_{\mathscr{H}(\mathcal{B})} - \sum_{i=1}^{n} M_{z_i}M_{z_i}^*$ die orthogonale Projektion auf die konstanten Funktionen in $\mathscr{H}(\mathcal{B})$. Mit Hilfe der Eigenschaft des Tupels S aus Satz 1.3.13, kann man folgern, dass

$$\begin{aligned}
\mathrm{id}_{\mathscr{F}_I^2} - \sum_{i=1}^{n} S_iS_i^* &= P_{\mathscr{F}_I^2}\,\mathrm{id}_{\mathscr{H}(\mathcal{B})}|_{\mathscr{F}_I^2} - \sum_{i=1}^{n} P_{\mathscr{F}_I^2} M_{z_i}M_{z_i}^*|_{\mathscr{F}_I^2} \\
&= P_{\mathscr{F}_I^2}\left(\mathrm{id}_{\mathscr{H}(\mathcal{B})} - \sum_{i=1}^{n} M_{z_i}M_{z_i}^*\right)\Bigg|_{\mathscr{F}_I^2} \\
&= P_{\mathscr{F}_I^2} P^{\mathscr{H}(\mathcal{B})}_{\mathbb{C}\cdot 1_{\mathscr{H}(\mathcal{B})}}|_{\mathscr{F}_I^2}.
\end{aligned}$$

Also ist $\mathrm{id}_{\mathscr{F}_I^2} - \sum_{i=1}^{n} S_iS_i^*$ die Einschränkung der orthogonale Projektion auf die konstanten Funktionen, was der orthogonale Projektion auf die konstanten Funktionen in $\mathscr{F}_I^2$ entspricht. Da Projektionen kompakt sind, gilt somit in der Calkin-Algebra

$$[\mathrm{id}_{\mathscr{F}_I^2}] = \left[\sum_{i=1}^{n} S_iS_i^*\right].$$

□

1.5 Darstellungen

Im Beweis des Modellsatzes, den wir im späteren aufführen werden, ist die Konstruktion einer bestimmten Darstellung von großer Bedeutung. Daher ist es enorm wichtig die Eigenschaften und das Verhalten von Darstellungen zu untersuchen. Beginnen wir mit der Definition einer Darstellung und der wichtigsten Eigenschaft einer Darstellung.

Definition 1.5.1. *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra und H ein Hilbertraum. Ein C^*-Algebrenhomomorphismus $\pi\colon \mathcal{A} \to L(H)$ heißt* Darstellung *von $\mathcal{A}$ auf H*

Eine Darstellung $\pi\colon \mathcal{A} \to L(H)$ heißt nicht-entartet*, falls die Menge der Operatoren $\pi(\mathcal{A})$ trivialen Nullraum besitzt, d.h. $null(\pi(\mathcal{A}) = \{0\}$.*
Dabei bezeichne

$$null(M) = \bigcap_{m \in M} Ker(m)$$

den Nullraum *von M für eine Teilmenge $M \subset L(H)$.*

Bemerkung 1.5.2. Folgende Schreibweise wird eingeführt, um den Abschluss der linearen Hülle kürzer zu schreiben:

$$\bigvee_{k \in K} \{k\} = \overline{LH\{k | k \in K\}}.$$

Eine wichtige Charakterisierung von nicht-entarteten Darstellungen liefert das folgende Lemma.

Lemma 1.5.3. *Sei π eine Darstellung von $\mathcal{A}$ auf H. Dann ist π genau dann nicht-entartet, falls*

$$\bigvee_{a \in \mathcal{A}, h \in H} \{\pi(a)h\} = H.$$

Beweis: Da mit $p = \pi(a) \in \pi(\mathcal{A})$ auch $p^* = \pi(a^*) \in \pi(\mathcal{A})$ liegt, gilt die Äquivalenzkette

$$\begin{aligned} \pi \text{ nicht-entartet} &\Leftrightarrow \bigcap_{p \in \pi(\mathcal{A})} Ker(p) = \{0\} \\ &\Leftrightarrow \bigcap_{p \in \pi(\mathcal{A})} Im(p^*)^\perp = \{0\} \\ &\Leftrightarrow \bigcap_{p \in \pi(\mathcal{A})} Im(p)^\perp = \{0\} \\ &\Leftrightarrow (\bigcup_{p \in \pi(\mathcal{A})} Im(p))^\perp = \{0\} \\ &\Leftrightarrow \overline{LH\{\pi(a)h | a \in \mathcal{A}, h \in H\}} = H. \end{aligned}$$

□

Arveson zeigt [2, S.19ff.], dass jede nicht-entartete Darstellung von einer C^*-Unteralgebra $\mathcal{B} \subset \mathcal{K}(H)$ der kompakten Operatoren in H auf auf einen Hilbertraum K unitär äquivalent zu einem Vielfachen der identischen Darstellung ist. Genauer gilt der folgende Satz.

Satz 1.5.4. *Seien H, K Hilberträume, $\mathcal{B}$ eine C^*-Unteralgebra von $\mathcal{K}(H)$ und $\pi\colon \mathcal{B} \to L(K)$ eine nicht-entartete Darstellung von $\mathcal{B}$ auf K. Dann existiert eine Indexmenge I und eine Zerlegung*

$$K = \bigoplus_{i \in I} K_i, \quad \{0\} \neq K_i \subset K \ (i \in I),$$

von K in π-invariante (also invariant unter $\pi(\mathcal{B})$) Unterräume derart, dass für jedes $i \in I$ ein abgeschlossener $\mathcal{B}$-invarianter Unterraum $H_i \subset H$ existiert und eine unitäre Abbildung $U_i\colon K_i \to H_i$ so, dass

$$\pi(B)|_{K_i} = U_i^* B|_{H_i} U_i$$

gilt.

Diesen Satz findet man mit Beweis zum Beispiel in [2] auf S.19 ff..

Falls man anstatt einer Darstellung einer echten Unteralgebra $\mathcal{B}$ eine Darstellung auf allen kompakten Operatoren $\mathcal{K}(H)$ betrachtet, so müssen die Unterräume H_i aus obigem Satz invariant unter allen kompakten Operatoren sein. Dies gilt aber nur für die trivialen Unterräume H und $\{0\}$. Da H_i im Satz nicht der Nullraum sein darf, ergibt sich $H_i = H$ für alle $i \in I$.
Es gilt folgendes Korollar.

Korollar 1.5.5. *Seien H, K Hilberträume und $\pi\colon \mathcal{K}(H) \to L(K)$ eine nicht-entartete Darstellung der kompakten Operatoren auf K. Dann existiert eine Indexmenge I und eine Zerlegung*

$$K = \bigoplus_{i \in I} K_i, \quad \{0\} \neq K_i \subset K \ (i \in I),$$

von K in π-invariante Unterräume derart, dass für jedes $i \in I$ eine unitäre Abbildung $U_i\colon K_i \to H$ existiert, so dass

$$\pi(B)|_{K_i} = U_i^* B U_i$$

für alle $B \in \mathcal{K}(H)$ gilt.

Wenn man nun eine Darstellung auf den kompakten Operatoren betrachtet, kommt natürlich die Frage auf, ob man diese zu einer Darstellung von ganz $L(H)$ fortsetzen kann.

Im Allgemeinen kann die Darstellung einer C^*-Unteralgebra einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$ nicht eindeutig zu einer Darstellung von ganz $\mathcal{A}$ fortgesetzt werden. Falls es sich allerdings um eine nicht-entartete Darstellung von einem Unterideal handelt, so geht dies allerdings schon.

Satz 1.5.6. *Sei H ein Hilbertraum, $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra und $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ ein Ideal in $\mathcal{A}$, so hat jede nicht-entartete Darstellung $\pi\colon \mathcal{I} \to L(H)$ eine eindeutige Fortsetzung zu einer nicht-entarteten Darstellung $\tilde{\pi}\colon \mathcal{A} \to L(H)$.*
Sind zwei nicht-entartete Darstellungen von I äquivalent, so sind es auch die Fortsetzungen.

Auch den Beweis dieses Satzes kann man in dem Buch von Arveson [2, S.16] finden.

Bemerkung 1.5.7. Wir betrachten nun den umgekehrten Fall, der im späteren Verlauf der Arbeit noch wichtig wird. Sei nun also $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra, π eine Darstellung von $\mathcal{A}$ auf H und $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ ein Ideal in $\mathcal{A}$. In diesem Fall kann man einen abgeschlossenen Unterraum $H_{\mathcal{I}}$ von H definieren als

$$H_{\mathcal{I}} = \bigvee_{i \in \mathcal{I}} (\pi(i)H).$$

Dieser ist invariant unter $\pi(\mathcal{A})$, da $\mathcal{I}$ ein Ideal in $\mathcal{A}$ bildet. Auch sein Komplement $H_{\mathcal{I}}$ ist invariant unter $\pi(\mathcal{A})$, da $\pi(\mathcal{A})$ C^*-Algebra ist. Man kann H also schreiben als direkte Summe

$$H = H_{\mathcal{I}} \oplus H_{\mathcal{I}}^{\perp},$$

der π-invarianten Unterräume $H_{\mathcal{I}}$ und $H_{\mathcal{I}}^{\perp}$. Einen solchen π-invarianten abgeschlossenen Teilraum, für den auch das orthogonale Komplement π-invariant ist, nennt man auch *reduzierenden* Teilraum für π. Zu dem reduzierenden Teilraum $H_{\mathcal{I}}$, können nun folgende Darstellungen definiert werden:

$$\pi_{H_{\mathcal{I}}} \colon \mathcal{A} \to L(H_{\mathcal{I}}) \quad x \mapsto \pi(x)|_{H_{\mathcal{I}}}$$

und

$$\pi_{H_{\mathcal{I}}^{\perp}} \colon \mathcal{A} \to L(H_{\mathcal{I}}^{\perp}) \quad x \mapsto \pi(x)|_{H_{\mathcal{I}}^{\perp}}.$$

Man erhält die nicht-entartete Darstellung $\pi_{H_{\mathcal{I}}}$ auch als eindeutige Fortsetzung ihrer Einschränkung auf $\mathcal{I}$ (Satz 1.5.6), wodurch sie also eindeutig bestimmt ist. Die Darstellung $\pi_{H_{\mathcal{I}}^{\perp}}$ erfüllt dagegen die Bedingung $\pi_{H_{\mathcal{I}}^{\perp}}|_{\mathcal{I}} \equiv 0$, und induziert damit eine Darstellung der Algebra $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ auf $H_{\mathcal{I}}^{\perp}$. Die ursprüngliche Darstellung kann man nun in diese beiden Darstellungen zerlegen und schreiben als:

$$\pi(x) = \pi_{H_{\mathcal{I}}}(x) \oplus \pi_{H_{\mathcal{I}}^{\perp}} = \pi(x)|_{H_{\mathcal{I}}} \oplus \pi|_{H_{\mathcal{I}}^{\perp}}.$$

Auf dieser Zerlegung einer Darstellung π fußt auch der Modellsatz. Wir werden im Beweis als erstes, durch Anwendung des Arvesonschen Fortsetzungssatzes und des Stinespringschen Dilatationssatzes, eine Darstellung der C^*-Algebra $L(\mathscr{F}_I^2)$ finden, die die von uns geforderte Eigenschaften erfüllt, und diese dann wie oben beschrieben in ihre Anteile unter dem Ideal $\mathcal{K}(\mathscr{F}_I^2)$ zerlegen, deren Wirkung wir dann separat betrachten können.

2 Sätze zu positiven Operatoren und vollständig positiven Abbildungen

In diesem Kapitel wollen wir nun einige Hilfssätze einführen, die im späteren Verlauf der Arbeit von großer Bedeutung sind. Dazu zählen unter anderem der Aversonsche Fortsetzungssatz und der Stinespringsche Dilatationssatz.

Seien dazu H ein Hilbertraum, $T \in L(H)^n$ eine Zeilenkontraktion, $I \subset \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$ ein homogenes Ideal im Polynomring in n Variablen, $S = (P_{\mathscr{F}_I^2} M_{z_i}|_{\mathscr{F}_I^2})_{i=1}^n$ die Einschränkung des n-Shifts auf $\mathscr{F}_I^2$ und $\mathscr{S} = LH\{S^\alpha S^{*\beta} | \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}$.

2.1 Konvergenz monoton fallender Folgen

Als erstes benötigen wir einen Satz über die Konvergenz von monoton fallenden Folgen positiver Operatoren. Dazu wiederholen wir zunächst die Definition einer der wichtigsten lokalkonvexen Topologien auf $L(H)$, die starke Operatortopologie.

Definition 2.1.1. *Seien die Halbnormen $(p_x)_{x \in H}$ definiert als*

$$p_x \colon L(H) \to \mathbb{C}, \quad T \mapsto p_x(T) = \|Tx\|.$$

Die von diesen Halbnormen erzeugte lokalkonvexe Topologie heißt starke Operatortopologie (SOT).

Bemerkung 2.1.2. Ein Netz in $L(H)$ konvergiert genau dann in der starken Operatortopologie, wenn es punktweise konvergiert. Daher wird die starke Operatortopologie auch die Topologie der punktweisen Konvergenz genannt.

Kommen wir nun zu dem bereits angesprochenem Satz über die Konvergenz monoton fallender Folgen positver Operatoren in der starken Operator Topologie.

Satz 2.1.3. *Sei $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge positiver Operatoren in $L(H)$. Dann konvergiert $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen ein positiver Operator T in $L(H)$. Es gilt also:*

$$T = SOT - \lim_{n \to \infty} T_n \in L(H) \textit{ ist ein positiver Operator}$$

Diesen Satz findet man als Lemma 1.8 mit Beweis auf Seite 17f. in [6].

2.2 Der Arvesonsche Fortsetzungssatz

In vielen Bereichen der Funktionalanalysis spielen Fortsetzungssätze eine bedeutende Rolle, so auch in dieser Arbeit. Der von uns benötigte Fortsetzungssatz für vollständig positive Abbildungen stammt von William Arveson. In dieser Arbeit werden wir den Satz nur zitieren, einen Beweis hierfür findet man zum Beispiel in [9, S.81f.]. Zunächst müssen wir allerdings noch einige grundlegenden Definitionen ansprechen um die Ausgangssituation zu verstehen.

Da das Konzept eines Operatorsystems in einer C^*-Algebra zum formulieren des Arvesonschen Fortsetzungssatzes wichtig ist, führen wir als erstes die Definition eines Operatorsystems auf.

Definition 2.2.1. *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra.*

1) Eine Teilmenge $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ mit den Eigenschaften

- *$\mathcal{S}$ ist ein Unterraum von $\mathcal{A}$,*
- *$1 \in \mathcal{S}$,*
- *$\mathcal{S}$ ist *-abgeschlossen, das heißt, dass für alle $s \in \mathcal{S}$ auch $s^* \in \mathcal{S}$ ist,*

heißt Operatorsystem *in $\mathcal{A}$.*

2) Die Menge aller n-dimensionalen Matrizen mit Einträgen in $\mathcal{A}$

$$M_n(\mathcal{A}) = \{(a_{i,j})_{i,j=1}^n | a_{i,j} \in \mathcal{A}\}$$

heißt n-dimensionale Matrixalgebra *über $\mathcal{A}$*

Bemerkung 2.2.2. i) Die Matrixalgebra $M_n(\mathcal{A})$ ist zusammen mit der natürlichen Addition, der normalen Matrixmultiplikation und der Involution

$$(a_{i,j})_{i,j=1}^n{}^* = (a_{j,i}^*)_{i,j=1}^n$$

eine *-Algebra.

Man kann die Matrixalgebra auch in eindeutigem Wege zu einer C*-Algebra machen. Hierfür identifiziert man die zugrundeliegenden C*-Algebra $\mathcal{A}$ unter einem bijektiven C*-Algebrenhomomorphismus π mit einer C*-Unteralgebra von $L(H)$ (Satz von Gelfand-Naimark [2, S.34]).

Ein Element $(a_{i,j})_{i,j=1}^n$ der Matrixalgebra $M_n(\mathcal{A})$ operiert dann auf $H^n = \bigoplus_{i=1}^n H$, durch

$$(a_{i,j})_{i,j=1}^n((h_i)_{i=1}^n) = \left(\sum_{j=1}^n \pi(a_{i,j})(h_j)\right)_{i=1}^n.$$

Man kann dann dann zeigen, dass $M_n(\mathcal{A})$ unter dieser Darstellung mit der obigen Multiplikation und Involution eine abgeschlossenen *-Unteralgebra von $L(H^n)$ darstellt und mit der durch diese Darstellung induzierten Norm eine C*-Algebra bildet.

ii) Die Definition der Matrixalgebra macht auch für Operatorsysteme $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ Sinn. In diesem Fall bildet $M_n(\mathcal{S})$ einen Unterraum von $M_n(\mathcal{A})$ und da $\mathcal{S}$ ein Operatorsystem bildet, bildet auch $M_n(\mathcal{S})$ in der C*-Algebra $M_n(\mathcal{A})$ ein Operatorsystem.

Nun befinden wir uns in der Position vollständig positive Abbildungen auf einem Operatorsystem zu definieren, welche wir mit Hilfe des Arvesonschen Fortsetzungssatzes auf die gesamte zugrundeliegende C*-Algebra fortsetzen können.

Definition 2.2.3. *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{C}$ C*-Algebren, $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ ein Operatorsystem, $M_n(\mathcal{S})$ die n-dimensionale Matrixalgebra auf $\mathcal{S}$.*

Für eine lineare Abbildung $\phi\colon \mathcal{S} \to \mathcal{C}$, definieren wir für $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung

$$\phi_n\colon M_n(\mathcal{S}) \to M_n(\mathcal{B}), \ \ (a_{i,j})_{i,j=1}^n \mapsto (\phi(a_{i,j}))_{i,j=1}^n.$$

Die Abbildung ϕ heißt

i) n-positiv, *falls ϕ_n positiv ist,*

ii) vollständig positiv, *falls ϕ_n positv ist für alle $n \in \mathbb{N}$,*

iii) vollständig beschränkt, *falls $\|\phi\|_{cb} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \phi_n$ endlich ist,*

iv) vollständig kontraktiv, *falls $\|\phi\|_{cb} \leq 1$.*

Nun können wir den Arvesonschen Fortsetzungssatz formulieren.

Satz 2.2.4 (Arvesonscher Fortsetzungssatz)**.** *Ist $\mathcal{A}$ eine C*-Algebra, $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ ein Operatorsystem und*

$$\varphi\colon \mathcal{S} \to L(H)$$

eine vollständig positive Abbildung, so existiert eine vollständig positive Abbildung

$$\phi\colon \mathcal{A} \to L(H), \quad \text{so dass } \varphi = \phi|_{\mathcal{S}}.$$

Den Beweis findet man zum Beispiel im Buch von Paulsen [9] auf S.81f.

In unserem Szenario handelt es sich um die C*-Algebra $\mathcal{A} = L(\mathscr{F}_I^2)$ und das Operatorsystem $\overline{\mathscr{S}}$. Wir werden eine vollständig positive Abbildung $\varphi\colon \mathscr{S} \to L(H)$ mit $\varphi(p(S)) = p(T)$ konstruieren und diese mit Hilfe des Arvesonschen Fortsetzungssatzes dann zu einer vollständig positiven Abbildung $\phi\colon L(\mathscr{F}_I^2) \to L(H)$ fortsetzen, um auf diese dann den Stinespringschen Dilatationssatz, der im nächsten Abschnitt betrachtet wird, anzuwenden.

2.3 Der Stinespringsche Dilatationssatz

Wir haben gesehen, dass eine vollständig positive Abbildung $\varphi\colon \mathcal{S} \to L(H)$ auf einem Operatorsystem $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ immer eine Fortsetzung $\phi\colon \mathcal{A} \to L(H)$ besitzt, die wiederum vollständig positiv ist. Nun findet man nach dem Stinespringschen Dilatationssatzes zu dieser vollständig positiven Abbildung auf der C*-Algebra $\mathcal{A}$ einen Hilbertraum K, einen stetigen Operator $V\colon H \to K$, dessen Norm durch die Norm des Bildes der 1 unter ϕ bestimmt ist, und einen unitalen C*-Homomorphismus

$$\pi\colon \mathcal{A} \to L(K), \text{ so dass } \phi(a) = V^*\pi(a)V \text{ für alle } a \in \mathcal{A}.$$

Fassen wir dies im Stinespringschen Dilatationssatz zusammen.

Satz 2.3.1 (Stinespringscher Dilatationssatz)**.** *Sind H ein Hilbertraum, $\mathcal{A}$ eine unitale C*-Algebra und $\phi\colon \mathcal{A} \to L(H)$ eine vollständig positive Abbildung, so existieren ein Hilbertraum K, ein unitaler C*-Homomorphismus*

$$\pi\colon \mathcal{A} \to L(K)$$

und ein beschränkter Operator $V\colon H \to K$ mit $\|V\|^2 = \|\phi(1_{\mathcal{A}})\|$, so dass

$$\phi(a) = V^*\pi(a)V$$

für alle $a \in \mathcal{A}$. Ist ϕ unital, so ist V damit isometrisch und man kann den Hilbertraum H mit seinem Bild unter V identifizieren, so dass

$$\phi(a) = P_H\pi(a)|_H$$

für alle $a \in \mathcal{A}$

Auch diesen Beweis findet man im Buch von Paulsen [9, S.43ff.].

Auf unser Szenario übertragen, bedeutet das, dass zu der vollständig positven, unitalen Abbildung $\phi\colon L(\mathscr{F}_I^2) \to L(H)$, die wir durch den Arvesonschen Fortsetzungssatz erhalten haben, ein Hilbertraum $K \supset H$ und ein unitaler C*-Homomorphismus $\pi\colon L(\mathscr{F}_I^2) \to L(K)$ existieren, so dass

$$\phi(a) = P_H\pi(f)|_H, \text{ für alle } f \in \mathscr{F}_I^2 \text{ gilt.}$$

Dadurch erhalten wir im Endeffekt einen C*-Homomorphismus π mit

$$p(T)p(T^*) = P_H\pi(p(S)p(S^*))|_H.$$

3 Der Modellsatz und sein Beweis

Kommen wir nun zum Ziel dieser Arbeit, dem Beweises des Modellsatzes für Zeilenkontraktionen mit polynomiellen Relationen.

Legen wir dazu zunächst die Ausgangssituation fest.
Seien $n \in \mathbb{N}$, $T \in L(H)^n$ eine Zeilenkontraktion, $I \subset \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$ ein homogenes Ideal im Polynomring in n Variablen, M_z^H der n-Shift auf dem Drury-Arveson Raum $\mathscr{H}(\mathcal{B}, H)$, M_z der n-Shift auf dem $\mathbb{C}$-wertigen Drury-Arveson Raum $\mathscr{H}(\mathcal{B})$, $S = (P_{\mathscr{F}_I^2} M_{z_i}|_{\mathscr{F}_I^2})_{i=1}^n$ die Einschränkung des n-Shifts auf $\mathscr{F}_I^2$ und $\mathscr{S} = LH\{S^\alpha S^{*\beta} | \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}$.

Bevor wir nun den Modellsatz aufschreiben, definieren wir zunächst, was wir unter einer Zeilenkontraktion mit polynomiellen Relationen verstehen. Außerdem definieren wir sphärisch unitäres Tupel.

Definition 3.0.2. *1) Eine Zeilenkontraktion T erfüllt die* polynomiellen Relationen*, die durch das Ideal I gegeben sind, falls*

$$p(T) \equiv 0 \tag{3.1}$$

für alle $p \in I$.

2) Ein vertauschendes Tupel $W \in L(H)^n$, dessen Einträge normale Operatoren sind, und das die Gleichung

$$\sum_{i=1}^n W_i W_i^* = id_H$$

erfüllt, heißt sphärisch unitär*.*

Im Folgenden werden wir die Abhängigkeit der Relationen von dem Ideal I unterdrücken, und nur noch von einer Zeilenkontraktion mit polynomiellen Relationen reden.

3.1 Der Modellsatz

Formulieren wir also nun den Modellsatz, für den wir in den darauf folgenden Abschnitten einen Beweis geben werden.

Satz 3.1.1 (Modellsatz)**.** *Sei $I \subset \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$ ein homogenes Ideal im Polynomring und $T \in L(H)^n$ eine Zeilenkontraktion mit polynomiellen Relationen (3.1).*

Dann existieren ein Hilbertraum $K \supset H$, ein Unterraum $K_0 \subset K$, eine Indexmenge J, eine Zerlegung

$$K = \left(\bigoplus_{j \in J} \mathscr{F}_I^2 \right) \bigoplus K_0$$

von K, sowie ein vertauschendes n-Tupel $W \in L(K_0)^n$, so dass

$$T_i = P_H \left(\left(\bigoplus_{j \in J} S_i \right) \oplus W_i \right) |_H,$$

$$T_i^* = \left(\left(\bigoplus_{j \in J} S_i^* \right) \oplus W_i^* \right) |_H$$

für alle $i \in \{1, ..., n\}$ und

$$\sum_{i=1}^{n} W_i W_i^* = id_{K_0}.$$

Falls das Tupel S wesentlich normal ist, so ist W ein sphärisch unitäres Tupel.

Bemerkung 3.1.2. Eine berühmte Vermutung von Arveson, die man in Problem 2 in [3, S.78] findet, besagt, dass S für jedes homogene Ideal $I \subset \mathbb{C}[z]$ wesentlich normal wäre. Dann wäre W in jedem Fall ein sphärisch unitäres Tupel.

Nachdem wir nun den Modellsatz formuliert haben, werden wir in den nächsten beiden Abschnitten seinen Beweis erarbeiten. Dazu werden wir im nächsten Abschnitt eine Darstellung von $L(\mathscr{F}_I^2)$ auf einen Hilbertraum K konstruieren, die als Dilatation aus einer Abbildung entsteht, die Polynome in S auf die entsprechenden Polynome in T abbildet. Im darauffolgenden Abschnitt werden wir diese Darstellung dann über einen reduzierenden Teilraum als Summe einer nicht-entarteten Darstellung und einer Darstellung schreiben, deren Kern aus den lompakten Operatoren besteht. Indem wir die Wirkung dieser beiden Teile betrachten erhalten wir den gewünschten Modellsatz.

3.2 Konstruktion des Algebrenhomomorphismus

Der erste Teil des Beweises besteht aus der Konstruktion des gesuchten C^*-Algebrenhomomorphismus. Dazu konstruieren wir zunächst eine vollständig kontraktive, vollständig positive Abbildung ρ, die $\rho(p(S)q(S^*)) = p(T)q(T^*)$ erfüllt. Diese kann man anschließend durch Anwendung des Arvesonschen Fortsetzungssatzes zu einer vollständig positiven, unitalen Abbildung $\Phi\colon L(\mathscr{F}_I^2) \to L(H)$ fortsetzen, und diese dann mit dem Stinespringschen Dilatationssatzes zu dem C^*-Homomorphismus $\pi\colon L(\mathscr{F}_I^2) \to L(K)$ auf einen geeigneten Hilbertraum $K \supset H$ dilatieren.

Beginnen wir dazu mit etwas Theorie über Konjugationen.

Definition 3.2.1. *Für $A \in L(H, K)$ heißt die Abbildung $C_A\colon L(H) \longrightarrow L(K)$ $X \longmapsto AXA^*$* Konjugation *mit A.*

Bemerkung 3.2.2. 1. Sei $C_A\colon L(H_1) \to L(H_2)$ und $C_B\colon L(H_3) \to L(H_1)$, so gilt: $C_A(C_B) = C_{A\circ B}$.

2. C_A ist vollständig positiv.

Beweis von 2.: Sei $n \in \mathbb{N}, X \in M_n(L(H))$ positiv, so gilt $X = BB^*$ für ein B in $M_n(L(H))$.

Damit erhält man:

$$\begin{aligned}(C_A(X_{k,l}))_{k,l=1}^n = (AX_{k,l}A^*)_{k,l=1}^n &= \begin{pmatrix} A & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A \end{pmatrix} BB^* \begin{pmatrix} A^* & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A^* \end{pmatrix} \\ &= [\begin{pmatrix} A & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A \end{pmatrix} B][\begin{pmatrix} A & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A \end{pmatrix} B]^* \quad \geq 0.\end{aligned}$$

□

Da auch endliche Summen von positiven Elementen wieder positiv sind, ist auch die im folgenden Korollar definierte Abbildung vollständig positiv.

Korollar 3.2.3. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned}\sigma_T\colon L(H) &\longrightarrow L(H) \\ X &\longmapsto \sum_{i=1}^n C_{T_i}(X)\end{aligned}$$

ist vollständig positiv.

Betrachtet man nun Potenzen dieser Abbildung, so kann man, wie schon im Beweis von Proposition 1.2.2 gesehen, die entstehende Summe schreiben als

$$\sigma_T^k = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^n C_{T_{i_1}\dots T_{i_k}} = \sum_{|\alpha|=k} \gamma_\alpha C_{T^\alpha} = \sum_{|\alpha|=k} \gamma_\alpha C_{T^\alpha}. \tag{3.2}$$

Als Summe positiver Abbildungen sind die Potenzen von σ_T somit immer noch positive Operatoren und es gilt das folgende Lemma.

Lemma 3.2.4. *Die Folge $(\sigma_T^k(id_H))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen einen positiven Operator $A_{\infty,T}$ in $L(H)$.*

Beweis: Da id_H eine positive Abbildung und σ_T^k ein positiver Operator ist, ist $\sigma_T^k(id_H)$ positiv, und es gilt

$$\sigma_T^k(id_H) = \sum_{|\alpha|=k} \gamma_\alpha T^\alpha T^{*\alpha}.$$

Außerdem folgt, da $T \in L(H)^n$ eine Zeilenkontraktion ist und daher $id_H - \sum_{i=1}^{n} T_i T_i^* \geq 0$, somit

$$\begin{aligned}\sigma_T^k(id_H) - \sigma_T^{k+1}(id_H) &= \sigma_T^k(id_H) - \sigma_T^k(\sigma_T(id_H)) = \sigma_T^k(id_H) - \sigma_T^k\left(\sum_{i=1}^{n} T_i T_i^*\right) \\ &= \sigma_T^k\left(id_H - \sum_{i=1}^{n} T_i T_i^*\right) \geq 0,\end{aligned}$$

und daher ist $\sigma_T^k(id_H)$ eine monoton fallende Folge positiver Operatoren.
Satz 2.1.3 impliziert die Existenz eines positiven Operators $A_{\infty,T}$, so dass $\sigma_T^k(id_H)$ punktweise gegen $A_{\infty,T}$ konvergiert. Außerdem erhalten wir $\|A_{\infty,T}\| \leq \|\sigma_T^0(id_H)\| = 1$.

Somit erhält man für eine Zeilenkontraktion T einen positiven Operator

$$A_{\infty,T} \colon H \longrightarrow H, \quad A_{\infty,T} = SOT - \lim_{k\to\infty} \sigma_T^k(id_H).$$

□

Mit diesem Operator kann man nun eine wichtige Eigenschaft einer Zeilenkontraktion definieren.

Definition 3.2.5. *Eine Zeilenkontraktion $T \in L(H)^n$ heißt* rein*, falls $A_{\infty,T} = 0$ ist.*

Lemma 3.2.6. *Für $D_T = (id_H - \sum_{i=1}^{n} T_i T_i^*)^{\frac{1}{2}}$ ist die Abbildung*

$$\begin{aligned}K_T \colon H &\longrightarrow \mathscr{H}(\mathcal{B}, H) \\ x &\longmapsto \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \gamma_\alpha (D_T T^{\alpha *} x) z^\alpha\end{aligned}$$

eine wohldefinierte, stetige, lineare Kontraktion mit $\|K_T x\|^2 = \|x\|^2 - \langle A_{\infty,T} x, x\rangle$ für alle $x \in H$. Ist T eine Zeilenkontraktion mit Relationen (3.1), so gilt:

$$K_T \colon H \longrightarrow \mathscr{F}_I^2 \bigotimes H.$$

Beweis: Für den ersten Teil des Satzes reicht es zu zeigen, dass $\|K_T x\|^2 = \|x\|^2 - \langle A_{\infty,T} x, x\rangle \leq \|x\|^2$ für alle $x \in H$, da daraus folgt, dass $K_T x \in \mathscr{H}(\mathcal{B}, H)$ und K_T somit wohldefiniert, stetig und kontraktiv ist. Die Linearität folgt direkt aus der Definition.

Sei also $x \in H$ beliebig. Mit Hilfe der Formel (3.2) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|K_T x\|^2 &= \|\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \gamma_\alpha (D_T T^{\alpha *} x) z^\alpha\|^2 = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{\|\gamma_\alpha (D_T T^{\alpha *} x)\|^2}{\gamma_\alpha} \\
&= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \gamma_\alpha \langle D_T T^{\alpha *} x, D_T T^{\alpha *} x\rangle = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \gamma_\alpha \langle T^\alpha (D_T)^2 T^{\alpha *} x, x\rangle \\
&= \langle \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \gamma_\alpha C_{T^\alpha}(D_T^2) x, x\rangle = \langle \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} \sum_{|\alpha|=j} \gamma_\alpha C_{T^\alpha}(D_T^2) x, x\rangle \\
&= \langle \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} \sigma_T^j (D_T^2) x, x\rangle = \langle \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} \sigma_T^j (id_H - \sum_{i=1}^{n} T_i T_i^*) x, x\rangle \\
&= \langle \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} \sigma_T^j (id_H) - \sigma_T^{j+1}(id_H) x, x\rangle = \langle \lim_{k\to\infty} (id_H - \sigma_T^{k+1}(id_H)) x, x\rangle \\
&= \langle x, x\rangle - \langle A_{\infty,T} x, x\rangle.
\end{aligned}$$

Kommen wir nun zur zweiten Aussage des Satzes. Es reicht zu zeigen, dass die Bildvektoren von K_T senkrecht auf den Tensoren in $I \bigotimes H$ steht. Dafür müssen wir zunächst die Formel

$$K_T T_i^* = M_{z_i}^{H*} K_T. \tag{3.3}$$

zeigen.
Sei also $h \in H$. Es ergibt sich nach der Definition der Adjungierten in Lemma 1.3.7

$$\begin{aligned}
M_{z_i}^{H*} K_T h &= M_{z_i}^{H*} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \gamma_\alpha (D_T T^{\alpha *} h) z^\alpha \\
&= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha+e_i}} (\gamma_{\alpha+e_i} D_T T^{\alpha+e_i *} h) z^\alpha \\
&= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \gamma_\alpha (D_T T^{\alpha *} T_i^* h) z^\alpha \\
&= K_T T_i^* h.
\end{aligned}$$

Benutzen wir nun für $g, h \in H$ und $p \in I$ die Tauschformel (3.3) so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\langle K_T g, p \otimes h\rangle &= \langle K_T g, (p(M_z)\mathbf{1}_{\mathscr{H}(\mathcal{B})}) \otimes h\rangle = \langle K_T g, p(M_z^H)(\mathbf{1}_{\mathscr{H}(\mathcal{B})} \otimes h)\rangle \\
&= \langle p(M_z^H)^* K_T g, \mathbf{1}_{\mathscr{H}(\mathcal{B})} \otimes h\rangle = \langle \overline{p}(M_z^{H*}) K_T g, \mathbf{1}_{\mathscr{H}(\mathcal{B})} \otimes h\rangle \\
&= \langle K_T \overline{p}(T^*) g, \mathbf{1}_{\mathscr{H}(\mathcal{B})} \otimes h\rangle = \langle K_T p(T)^* g, \mathbf{1}_{\mathscr{H}(\mathcal{B})} \otimes h\rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

nach der Eigenschaft (3.1).
Da das Tensorprodukt $I \bigotimes H$ von Elementen der Form $p \otimes h$ aufgespannt wird, können wir aus obiger Rechnung folgern, dass das Bild von K_T senkrecht auf $\overline{I \bigotimes H}$ steht und daher in $\mathscr{F}_I^2 \bigotimes H$ liegt. □

Bemerkung 3.2.7. Eine Zeilenkontraktion $T \in L(H)^n$ ist genau dann rein, wenn K_T eine Isometrie ist.

Lemma 3.2.8. *Sei T eine reine Zeilenkontraktion mit polynomiellen Relationen.*

a) Die Abbildung

$$\rho\colon L(\mathscr{F}_I^2) \longrightarrow L(H), \quad X \longmapsto K_T^*(X \otimes id_H)K_T$$

ist vollständig kontraktiv, vollständig positiv, stetig, unital und linear.

b) Die Abbildung ρ erfüllt

$$\rho(\sum_{|\alpha|,|\beta|\leq k} a_{\alpha\beta} S^\alpha S^{*\beta}) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq k} a_{\alpha\beta} T^\alpha T^{*\beta}$$

für alle Familien $(a_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}}$ von komplexen Zahlen.

Beweis: a) Die Abbildung

$$R\colon L(\mathscr{F}_I^2) \longrightarrow L(\mathscr{F}_I^2 \bigotimes H), \quad X \longmapsto X \otimes id_H$$

ist ein *-Homomorphismus und ist daher vollständig positiv, vollständig kontraktiv und unital. Verknüpft man diesen *-Homomorphismus mit der Konjugation mit K_T^* so entsteht nach dem Beispiel auf Seite 28 in [9] eine vollständig positive, vollständig kontraktive, unitale Abbildung. Daher ist $\rho = C_{K_T^*} \circ R$ vollständig positiv, vollständig kontraktiv und unital. Die Stetigkeit und Linearität folgt, da sowohl R also auch $C_{K_T^*}$ stetig und linear sind.

b) Aus Bemerkung 1.3.15 und Proposition 1.3.10 schließt man, dass

$$S_i{}^* \otimes id_H = (S_i \otimes id_H)^* = M_{z_i}^{H^*}|_{\mathscr{F}_I^2 \otimes H}$$

ist.

Mit Formel 3.3 aus dem Beweis von Lemma 3.2.6 folgt

$$(S_i{}^* \otimes id_H)K_T = M_{z_i}^{H^*} K_T = K_T T_i^*.$$

Durch Adjungieren dieser Gleichung erhält man

$$K_T^*(S_i \otimes id_H) = T_i K_T^*$$

für alle $i \in \{1, ..., n\}$.

Dies ergibt induktiv

$$\begin{aligned}\rho(S^\alpha S^{*\beta}) &= K_T^*(S^\alpha \otimes id_H)(S^{*\beta} \otimes id_H)K_T \\ &= K_T^*(S \otimes id_H)^\alpha (S^* \otimes id_H)^\beta K_T \\ &= T^\alpha K_T^* K_T T^{*\beta} = T^\alpha T^{*\beta}.\end{aligned}$$

Die Linearität von ρ liefert die Behauptung.

□

Damit haben wir die Funktion ρ für reine Zeilenkontraktionen konstruiert. Nun konstruieren wir im Folgenden die Funktion noch für Zeilenkontraktionen, die nicht rein sind, indem wir sie als Grenzwert von ρ für reine Zeilenkontraktionen darstellen.

Lemma 3.2.9. *Sei T eine Zeilenkontraktion mit polynomiellen Relationen, dann ist für alle $0 < r < 1$ das Tupel rT eine reine Zeilenkontraktion, die dieselben polynomiellen Relationen erfüllt.*

Beweis: Das Tupel rT bildet wieder eine Zeilenkontraktion, da

$$\sum_{i=1}^{n} rT_i(rT_i)^* = r^2 \sum_{i=1}^{n} T_iT_i^* \leq \sum_{i=1}^{n} T_iT_i^* \leq id_H.$$

Die Reinheit der Zeilenkontraktion rT folgt aus

$$\|\sigma_{rT}\| = \|\sigma_{rT}(id_H)\| = \|\sum_{i=1}^{n} rT_i(rT_i)^*\| = \|r^2 \sum_{i=1}^{n} T_iT_i^*\| \leq r^2 < 1,$$

da somit $A_{\infty,rT} = SOT - \lim\limits_{k\to\infty} \sigma_{rT}^k(id_H) = 0$.

Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass rT, die polynomiellen Relationen (3.1) erfüllt, also dass $p(rT) \equiv 0$ für alle $p \in I$. Da I homogen ist, genügt es dies für alle homogenen Polynome in I nachzurechnen, weil diese das Ideal erzeugen. Sei also $p = \sum\limits_{|\alpha|=k} a_\alpha z^\alpha \in I$ homogen vom Grad $k \in \mathbb{N}$, so ergibt sich

$$p(rT) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha (rT)^\alpha = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha r^{|\alpha|} T^\alpha = r^k \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha T^\alpha = r^k p(T) \equiv 0,$$

wobei im letzten Schritt einging, dass T die polynomiellen Relationen (3.1) erfüllt. □

Lemma 3.2.10. *Sei T eine Zeilenkontraktion mit polynomiellen Relationen. Die Abbildungen*

$$\rho_r \colon L(\mathscr{F}_I^2) \longrightarrow L(H) \quad X \longmapsto K_{rT}^*(X \otimes id_H)K_{rT}$$

konvergieren auf $\overline{\mathscr{S}}$ für r gegen 1 gegen eine vollständig kontraktive, vollständig positive, unitale, stetige, lineare Abbildung ρ, mit

$$\rho(\sum_{|\alpha|,|\beta|\leq k} a_{\alpha\beta} S^\alpha S^{*\beta}) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq k} a_{\alpha\beta} T^\alpha T^{*\beta}.$$

Beweis: Es gilt nach Lemma 3.2.8, dass

$$\rho_r(\sum_{|\alpha|,|\beta|\leq k} a_{\alpha\beta} S^\alpha S^{*\beta}) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq k} a_{\alpha\beta} (rT)^\alpha (rT)^{*\beta} = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq k} r^{|\alpha||\beta|} a_{\alpha\beta} T^\alpha T^{*\beta}$$

für alle $0 < r < 1$.

Daher konvergiert $(\rho_r)_{0<r<1}$ für r gegen 1 punktweise auf $\mathscr{S}$ gegen eine Abbildung

$$\rho \colon \mathscr{S} \longrightarrow L(H) \quad \rho(\sum_{|\alpha|,|\beta|\leq k} a_{\alpha\beta} S^\alpha S^{*\beta}) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq k} a_{\alpha\beta} T^\alpha T^{*\beta}$$

Nach Definition ist ρ linear und unital, und als punktweiser Grenzwert von vollständig positiven, vollständig kontraktiven Abbildungen ist ρ auch vollständig positiv und vollständig kontraktiv. Da $\|\rho_r\| \leq 1$ ist, gilt auch, dass $\|\rho\| \leq 1$ und daher lässt sich ρ vollständig positiv, vollständig kontraktiv und stetig auf $\overline{\mathscr{S}}$ fortsetzen. □

Nun können wir das Hauptresultat dieses Abschnittes fest halten.

Lemma 3.2.11. *Sei T eine Zeilenkontraktion mit polynomiellen Relationen, so existiert ein Hilbertraum $K \supset H$ und ein C^*-Algebrenhomomorphismus $\pi\colon L(\mathscr{F}_I^2) \to L(K)$, so dass*

$$T_i = P_H \pi(S_i)|_H$$

und

$$T_i^* = \pi(S_i^*)|_H$$

Beweis: Da $\overline{\mathscr{S}}$ ein Operatorsystem ist, lässt sich der Arvesonsche Fortsetzungssatz 2.2.4 auf die in Lemma 3.2.10 konstruierte vollständig kontraktive, vollständig positive, unitale, stetige, lineare Abbildung ρ anwenden.

Wir erhalten somit eine vollständig positive, unitale Abbildung

$$\Phi\colon L(\mathscr{F}_I^2) \to L(H),$$

die ρ fortsetzt. Nun liefert der Stinespringschen Dilatationssatz 2.3.1, da Φ unital ist, die Existenz eines Hilbertraums $K \supset H$ und eines C^*-Algebrenhomomorphismus

$$\pi\colon L(\mathscr{F}_I^2) \to L(K),$$

so dass

$$\Phi(a) = P_H \pi(a)|_H$$

für alle $a \in L(\mathscr{F}_I^2)$.

Außerdem ist

$$\begin{aligned} p(T) &= \rho(p(S)) = \Phi(p(S)) \\ &= P_H \pi(p(S))|_H \\ &= P_H p(\pi(S_i), ..., \pi(S_n))|_H, \end{aligned}$$

und damit insbesondere

$$T_i = P_H \pi(S_i)|_H$$

für alle $i = 1, ..., n$ gilt.

Für die letze Aussage des Satzes müssen wir noch die Wirkung von π auf dem ursprünglichen Hilbertraum $H \subset K$ betrachten. Man kann hierbei erkennen, dass H invariant ist unter der Algebra $\{\pi(p(S^*))|p \in \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]\}$.

Lemma 3.2.12. *Der Hilbertraum $H \subset K$ ist invariant unter den Operatoren $\pi(p(S))^*$ mit $p \in \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$, d.h. dass $\pi(p(S))^*(H) \subset H$ für alle $p \in \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$.*

Beweis von 3.2.12: Sei $P_H\colon K \to H$ die Projektion auf den Unterhilbertraum H mit Bild in H und $P_H^K\colon K \to K$ die Projektion auf den Teilraum H mit Bild in K. Der Operator $P_H^*\colon H \to K$ ist dann die Inklusionsabbildung von H in K. Sei außerdem $p \in \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$ ein Polynom in n Variablen. Da $p(S)p(S)^* \in \mathscr{S}$ ist, gilt

$$\begin{aligned} P_H \pi(p(S)) P_H^K \pi(p(S)^*) P_H^* &= \rho(p(S))\rho(p(S)^*) \\ &= \rho(p(S)p(S)^*) \\ &= P_H \pi(p(S)p(S)^*) P_H^*. \end{aligned}$$

Also

$$P_H\pi(p(S))P_H^K\pi(p(S)^*)P_H^* = P_H\pi(p(S)p(S)^*)P_H^*. \tag{3.4}$$

Für

$$X = P_H^K\pi(p(S)^*)P_H^* - \pi(p(S)^*)P_H^* \tag{3.5}$$

erhält man nun unter Benutzung, dass P_H^K eine Projektion ist,

$$\begin{aligned}
X^*X = \;& (P_H^K\pi(p(S)^*)P_H^* - \pi(p(S)^*)P_H^*)^*\,(P_H^K\pi(p(S)^*)P_H^* - \pi(p(S)^*)P_H^*) \\
= \;& (P_H\pi(p(S)^*)^*P_H^{K^*})(P_H^K\pi(p(S)^*)P_H^* - \pi(p(S)^*)P_H^*) \\
& - (P_H\pi(p(S)^*)^*)(P_H^K\pi(p(S)^*)P_H^* - \pi(p(S)^*)P_H^*) \\
= \;& P_H\pi(p(S))P_H^K\pi(p(S)^*)P_H^* - P_H\pi(p(S))P_H^K\pi(p(S)^*)P_H^* \\
& - P_H\pi(p(S))P_H^K\pi(p(S)^*)P_H^* + P_H\pi(p(S))\pi(p(S)^*)P_H^* \\
= \;& 0 - P_H\pi(p(S))P_H^K\pi(p(S)^*)P_H^* + P_H\pi(p(S))\pi(p(S)^*)P_H^* \\
= \;& 0 - P_H\pi(p(S))\pi(p(S)^*)P_H^* + P_H\pi(p(S))\pi(p(S)^*)P_H^* \\
= \;& 0,
\end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt Formel (3.4) eingegangen ist.
Damit folgt, dass $\|X\|^2 = 0$ und somit auch $X = 0$, was nach (3.5) bedeutet, dass

$$P_H^K\pi(p(S)^*)|_H = P_H^K\pi(p(S)^*)P_H^* = \pi(p(S)^*)P_H^* = \pi(p(S)^*)|_H,$$

was die gewünschte Aussage zeigt. □

Kommen wir nun zum Beweis des Lemmas 3.2.11 zurück:

Mit Hilfe des Hilfslemmas 3.2.12 können wir nun folgern, dass

$$T_i^* = (P_H\pi(S_i)|_H)^* = P_H\pi(S_i)^*|_H = \pi(S_i^*)|_H.$$

□

3.3 Die Zerlegung in reduzierende Teilräume

Im Folgenden wollen wir nun die Darstellung π, die wir im letzten Abschnitt konstruiert haben, wie bereits in Bemerkung 1.5.7 angesprochen, in Teildarstellungen auf dem reduzierenden Teilraum $K_{\mathcal{K}}(\mathscr{F}_I^2)$, der im Folgenden K_1 heißen wird, und seinem Komplement zerlegen. Danach werden wir die Wirkung dieser beiden Teildarstellungen betrachten und können damit schließlich den Modellsatz beweisen.

Kommen wir zunächst zur Zerlegung der Darstellung π.

Satz 3.3.1. *Sei π die in Lemma 3.2.11 eingeführte Darstellung von $L(\mathscr{F}_I^2)$ auf den Hilbertraum K.*

a) Die beiden Unterräume

$$K_1 = \bigvee_{a \in \mathcal{K}(\mathscr{F}_I^2)} \pi(a)(K)$$

$$K_0 = K \ominus K_1 = \bigcap_{a \in \mathcal{K}(\mathscr{F}_I^2)} Ker(\pi(a))$$

sind π-invariant. Somit ist K_1 ein reduzierender Teilraum für π.

b) Die induzierte Darstellung

$$\pi_1 \colon \mathcal{K}(\mathscr{F}_I^2) \to L(K_1), \pi_1(x) = \pi(x)|_{K_1}$$

ist nicht-entartet.

Beweis: a) Sei $b \in L(\mathscr{F}_I^2)$. Da $\mathcal{K}(\mathscr{F}_I^2)$ ein Ideal ist, gilt

$$\pi(b)\pi(a)k = \pi(ba)k \in K_1$$

für alle $a \in \mathcal{K}(\mathscr{F}_I^2)$ und alle $k \in K$. Daher gilt

$$\pi(b)(\pi(a)K) \subset K_1$$

für alle $a \in \mathcal{K}(\mathscr{F}_I^2)$), und damit ist

$$\pi(b)(\bigvee_{a \in \mathcal{K}(\mathscr{F}_I^2)} (\pi(a)(K))) = \bigvee_{a \in \mathcal{K}(\mathscr{F}_I^2)} (\pi(ba)(K)) \subset K_1,$$

weil $\pi(b)$ linear und stetig ist.

Hiermit haben wir die Invarianz von K_1 unter $\pi(L(\mathscr{F}_I^2))$ gezeigt. Man kann weitergehend erkennen, dass damit auch die Invarianz des orthogonalen Komplementes von K_1 folgt. Seien dazu $b \in L(\mathscr{F}_I^2)$, $h_1 \in H_1$ und $h_0 \perp H_1$ beliebig.

$$\langle \pi(b)h_0, h_1 \rangle = \langle h_0, \pi(b)^* h_1 \rangle = \langle h_0, \pi(b^*)h_1 \rangle = 0,$$

da mit b auch b^* in $L(\mathscr{F}_I^2)$ liegt und H_1 π-invariant ist. Somit ist $K \ominus K_1$ auch π-invariant.

Um die Invarianz von K_0 zu folgern, brauchen wir daher nur noch zu zeigen, dass K_0 in obiger Form das orthogonale Komplement von K_1 in K ist.

$$\begin{aligned} K \ominus K_1 &= K \ominus \left(\bigvee_{a \in \mathcal{K}(\mathscr{F}_I^2)} \pi(a)(K) \right) \\ &= \bigcap_{a \in \mathcal{K}(\mathscr{F}_I^2)} (K \ominus \pi(a)K) \\ &= \bigcap_{a \in \mathcal{K}(\mathscr{F}_I^2)} (K \ominus Im(\pi(a))) \\ &= \bigcap_{a \in \mathcal{K}(\mathscr{F}_I^2)} (Ker(\pi(a^*))) \\ &= \bigcap_{a \in \mathcal{K}(\mathscr{F}_I^2)} (Ker(\pi(a))), \end{aligned}$$

da mit $a \in \mathcal{K}(\mathscr{F}_I^2)$ auch $a^* \in \mathcal{K}(\mathscr{F}_I^2)$.

b) π_1 ist nach a) wohldefiniert, da K_1 π-invariant ist. Da die Menge der kompakten Operatoren eine C^*-Algebra bildet (1.4.2) und π_1 ein C^*-Algebrenhomomorphismus ist, ist π_1 eine Darstellung.

Sei weiter nun $k \in K_1$ und

$$\pi_1(a)k = \pi(a)|_{K_1} = 0$$

für alle $a \in \mathcal{K}(\mathscr{F}_I^2)$, so ist auch

$$\pi(a)k = 0$$

für alle $a \in \mathcal{K}(\mathscr{F}_I^2)$, woraus $k \in Ker(\pi(a))$ für alle $a \in \mathcal{K}(\mathscr{F}_I^2)$ folgt.
Daher liegt k in $K_0 \cap K_1$ und die Orthogonalität von K_0 und K_1 liefert $k = 0$.
Somit ist π_1 eine nicht-entartete Darstellung. □

Das Anwenden von Korollar 1.5.5 auf die gegebene Situation ergibt folgendes Lemma.

Lemma 3.3.2. *a) Sei π_1 die in 3.3.1b) eingeführte nicht-entartete Darstellung von $\mathcal{K}(\mathscr{F}_I^2)$ auf K_1, so existiert eine Indexmenge I und eine Zerlegung*

$$K_1 = \bigoplus_{i \in I} K_i \quad \{0\} \neq K_i \subset K_1 (i \in I)$$

von K_1 in π_1-invariante Unterräume K_i so, dass für jedes $i \in I$ eine unitäre Abbildung $U_i \colon K_i \to \mathscr{F}_I^2$ existiert, mit

$$\pi_1(a)|_{K_i} = U_i^* a U_i$$

für alle $a \in \mathcal{K}(\mathscr{F}_I^2)$.

b) Die direkte Summe U der in a) erhaltenen unitären Abbildungen, ist selbst unitär, mit

$$U = \bigoplus_{i \in I} U_i \colon K_1 = \bigoplus_{i \in I} K_i \to \bigoplus_{i \in I} \mathscr{F}_I^2$$

$$\pi_1(a) = U^* (\bigoplus_{i \in I} a) U$$

für alle $a \in \mathcal{K}(\mathscr{F}_I^2)$.

Beweis: a) Wende Korollar 1.5.5 auf die Situation aus Satz 3.3.1 an.

b) Da die direkte Summe unitärer Abbildungen wieder unitär ist, ist U unitär. Außerdem gilt für alle $a \in \mathcal{K}(\mathscr{F}_I^2)$, dass

$$\begin{aligned}\pi_1(a) &= \bigoplus_{i\in I}(\pi_1(a)|_{K_i}) \\ &\overset{a)}{=} \bigoplus_{i\in I}(U_i^* a U_i) \\ &= (\bigoplus_{i\in I} U_i^*)(\bigoplus_{i\in I} a)(\bigoplus_{i\in I} U_i) \\ &= U^*(\bigoplus_{i\in I} a)U.\end{aligned}$$

□

Korollar 3.3.3. *a) Es existiert eine eindeutige, nicht-entartete Fortsetzung von* π_1 *auf* $L(\mathscr{F}_I^2)$*, die wir* π_{K_1} *nennen, und es gilt:*

$$\pi_{K_1}\colon L(\mathscr{F}_I^2) \to L(K_1), \quad a \mapsto \pi(a)|_{K_1} = U^*(\bigoplus_{i\in I} a)U.$$

b) Die Darstellung

$$\pi_{K_0}\colon L(\mathscr{F}_I^2) \to L(K_0), \quad a \mapsto \pi(a)|_{K_0}$$

erfüllt $\pi_{K_0}(\mathcal{K}(\mathscr{F}_I^2)) \equiv 0$*.*

Beweis: a) Die Abbildungen

$$A\colon L(\mathscr{F}_I^2) \to L(K_1), \quad a \mapsto \pi(a)|_{K_1},$$

$$B\colon L(\mathscr{F}_I^2) \to L(K_1), \quad a \mapsto U^*(\bigoplus_{i\in I} a)U$$

sind offenbar Darstellungen von $L(\mathscr{F}_I^2)$ und es gilt $A|_{\mathcal{K}(\mathscr{F}_I^2)} = B|_{\mathcal{K}(\mathscr{F}_I^2)} = \pi_1$ nach Lemma 3.3.2. Nach Satz 1.5.6 besitzt π_1 eine eindeutige Fortsetzung auf $L(\mathscr{F}_I^2)$. Dies liefert die Behauptung.

b) Die Aussage folgt unmittelbar aus der Definition von K_0.

□

Die Darstellung π_{K_0} induziert also einen unitalen C^*-Homomorphismus von der Calkin-Algebra $\mathcal{C}(\mathscr{F}_I^2)$ nach $L(K_0)$

$$\Phi\colon \mathcal{C}(\mathscr{F}_I^2) = L(\mathscr{F}_I^2)/\mathcal{K}(\mathscr{F}_I^2) \to L(K_0), \quad [x] \mapsto \pi(x)|_{K_0}.$$

Lemma 3.3.4. *Die Abbildung*

$$\Phi\colon \mathcal{C}(\mathscr{F}_I^2) = L(\mathscr{F}_I^2)/\mathcal{K}(\mathscr{F}_I^2) \to L(K_0), \quad [x] \mapsto \pi(x)|_{K_0}$$

definiert einen C^*-Homomorphismus, so dass das Tupel W mit $W_i = \Phi([S_i])$ für $(i = 1, ..., n)$ vertauschend ist und

$$\sum_{i=1}^{n} W_i W_i^* = id_{K_0}$$

gilt. Falls das Tupel S wesentlich normal ist, so ist $W = (W_i)_{i=1}^n$ ein sphärisch unitäres Tupel.

Beweis: Zum Beweis der Wohldefiniertheit seien $a \in L(\mathscr{F}_I^2)$ und $k \in \mathcal{K}(\mathscr{F}_I^2)$. Dann erhält man mit Korollar 3.3.3

$$\pi(a+k)|_{K_0} = \pi(a)|_{K_0} + \pi(k)|_{K_0} = \pi(a)|_{K_0}.$$

Damit ist $\Phi([a])$ wohldefiniert. Beachtet man, dass S ein vertauschendes Tupel ist, siehe Satz 1.3.11, so ergibt sich, dass W auch ein vertauschendes Tupel bildet, da

$$W_i W_j = \Phi([S_i])\Phi([S_j]) = \Phi([S_i S_j]) = \Phi([S_j][S_i]) = W_j W_i$$

gilt. Die nächste Eigenschaft des Tupels W, folgt direkt aus Satz 1.4.6.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} W_i W_i^* &= \sum_{i=1}^{n} \Phi([S_i])\Phi([S_i]^*) = \sum_{i=1}^{n} \Phi([S_i S_i^*]) \\ &= \Phi([\sum_{i=1}^{n} S_i S_i^*]) = \Phi([id_{\mathscr{F}_I^2}]) = id_{K_0}.\end{aligned}$$

Sei S nun wesentlich normal, also $S_i S_i^* - S_i^* S_i \in \mathcal{K}(\mathscr{F}_I^2)$ für $i = 1, ..., n$, so erhält man wie in Bemerkung 1.4.5, dass $[S]$ ein vertauschendes Tupel normaler Operatoren ist. Dann ergibt sich:

$$W_i W_i^* = \Phi([S_i])\Phi([S_i]^*) = \Phi([S_i S_i^*]) = \Phi([S_i^*][S_i]) = W_i^* W_i.$$

Also ist W sphärisch unitär. $\square$

3.4 Beweis des Modellsatzes

Nachdem wir nun alle Vorarbeit geleistet haben, können wir den Modellsatz durch Zusammenfassung unserer bisherigen Ergebnisse beweisen.

Beweis des Modellsatzes 3.1.1: Nach Lemma 3.2.11 existiert zu der Zeilenkontraktion T, die die polynomiellen Relationen aus (3.1) erfüllt, ein Hilbertraum $K \supset H$ und ein C^*-Algebrenhomomorphismus $\pi\colon L(\mathscr{F}_I^2) \to L(K)$, mit

$$T_i = P_H \pi(S_i)|_H$$

und

$$T_i^* = \pi(S_i^*)|_H.$$

Den Hilbertraum K können wir, nach Satz 3.3.1, als direkte Summe der Teilräume K_1 und K_0 schreiben.

Indem wir nun, durch die im Lemma 3.3.2 b) gegebene Abbildung, den Unterraum K_1 mit dem isometrisch isomorphen Raum $\bigoplus\limits_{j\in J} \mathscr{F}_I^2$, für eine geeignete Indexmenge J, identifizieren, so erhalten wir die Zerlegung

$$K = (\bigoplus_{j\in J} \mathscr{F}_I^2) \oplus K_0.$$

Unter Benutzung von Korollar 3.3.3 kann man π auf dieser Zerlegung schreiben als

$$\pi = (\bigoplus_{j\in J} \mathrm{id}_{\mathscr{F}_I^2}) \oplus \pi_{K_0}.$$

Mit Lemma 3.3.4 existiert ein vertauschendes Tupel $W \in L(K_0)^n$ von Operatoren auf K_0, mit

$$\sum_{i=1}^{n} W_i W_i^* = id_{K_0},$$

so dass $\pi_{K_0}(S_i) = W_i$. Hiermit können wir die Formeln aus Lemma 3.2.11 schreiben, als

$$T_i = P_H((\bigoplus_{j\in J} S_i) \oplus W_i)|_H$$

und

$$T_i^* = ((\bigoplus_{j\in J} S_i^*) \oplus W_i^*)|_H,$$

für alle $i \in \{1, ..., n\}$.
Falls das Tupel S wesentlich normal ist, so ist $W = (W_i)_{i=1}^n$ nach Lemma 3.3.4 ein sphärisch unitäres Tupel.

Dies schließt den Beweis des Modellsatzes 3.1.1 ab. □

Literaturverzeichnis

[1] T. Andô. On a pair of commutative contractions. *Acta Sci. Math.(Szeged)*, 24(1-2):88–90, 1963.

[2] W. Arveson. *An Invitation to C*-Algebras*. Springer Verlag, New York, 1976.

[3] W. Arveson. The Dirac Operator of a Commuting d-Tuple. *Journal of Functional Analysis*, 189(1):53 – 79, 2002.

[4] C. Barbian. *Positivitätsbedingungen funktionaler Hilberträume und Anwendungen in der mehrdimensionalen Operatorentheorie*. Diplomarbeit, Universität des Saarlandes, 2001.

[5] J. Eschmeier. *Funktionale Hilberträume und reproduzierende Kerne*. unveröffentlichtes Vorlesungsmanuskript, Universität des Saarlandes, 2011.

[6] M. Hartz. *Extremale Fortsetzungen in Familien von Operatoren auf Hilberträumen*. Bachelorarbeit, Universität des Saarlandes, 2010.

[7] M. Hartz. *Universal Operator Algebras for Commuting Row Contractions*. Masterarbeit, Universität des Saarlandes, 2012.

[8] J. Haupenthal. *Modellsätze für sphärische Kontraktionen*. Staatsexamensarbeit, Universität des Saarlandes, 2003.

[9] V.I. Paulsen. *Completely bounded maps and dilations*. Longman Scientific and Technical, 1986.

[10] V.I. Paulsen. *Completely Bounded Maps and Operator Algebras*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[11] D. Schillo. *Die von Neumannsche Ungleichung*. Bachelorarbeit, Universität des Saarlandes, 2012.

[12] O. Shalit. Operator theory and function theory in Drury-Arveson space and its quotients. *ArXiv e-prints*, August 2013.

[13] B. Sz.-Nagy and C. Foias. *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Spaces*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam-Budapest, 1970.

[14] N.Th. Varopoulos. On an inequality of von Neumann and an application of the metric theory of tensor products to operators theory. *Journal of Functional Analysis*, 16(1):83 – 100, 1974.

[15] J. von Neumann. Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes. *Mathematische Nachrichten*, 4(1-6):258–281, 1950.