Charakterisierungen subskalarer Operatoren über dem Einheitskreis

Wissenschaftliche Arbeit
zum ersten Staatsexamen
Lehramt Gymnasium und Gesamtschule

angefertigt von

Andreas Backes
Mat.-Nr.: 250 13 84

unter Betreuung von

Prof. Dr. Jörg Eschmeier *

*Fachrichtung 6.1 Mathematik, Universität des Saarlandes

Vorwort

In der Operatorentheorie ist es häufig von Nutzen, einen Operator auf einen größeren Raum zu erweitern. Dadurch erhält dieser Operator gegebenenfalls bessere oder besondere Eigenschaften. Ein Beispiel hierfür ist das bekannte Theorem von Sz.-Nagy [SNF70], welches besagt, dass jede Kontraktion auf einem Hilbertraum H eine Dilatation zu einem unitären Operator auf einem Hilbertraum $K \supset H$ besitzt.
Operatoren mit besonderen Eigenschaften sind zum Beispiel solche, für die spezielle Funktionalkalküle (siehe Definition 1.2) existieren. Erfüllt beispielsweise ein Operator $T \in B(H)$ auf einem Hilbertraum H einfache algebraische Bedingungen, zum Beispiel $T^*T = TT^*$ oder $T^* = T$, so lässt sich auf die Existenz eines Funktionalkalküls schließen. Interessant sind auch die Operatoren der Klasse $[\mathcal{E}(\mathbb{T})]$ (siehe Definition 1.4). Colojoară und Foiaş [CF68] charakterisieren Operatoren dieser Klasse auf einem Banachraum X als invertierbare Operatoren, die einer Wachstumsbedingung der Form

$$\|T^n\| \leq C|n|^m \qquad (n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\})$$

(mit Konstanten $C > 0, m \in \mathbb{N}$) oder

$$\|R(z,T)\| \leq \frac{M}{|1-|z||^{n+1}} \qquad (0 < |1-|z|| < 1)$$

(mit Konstanten $M > 0, n \in \mathbb{N}$) genügen. Andere Charakterisierungen finden wir auch in [LN00].
Wann lässt sich nun ein Operator zu einem $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalaren Operator erweitern, d.h. wann ist ein Operator $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar? In den Arbeiten von Didas ([Did00] und [Did98]) bieten sich uns notwendige und hinreichende Bedingungen für die $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Subskalarität eines Operators T auf einem Banachraum X. Ein Frage, die in diesen Arbeiten offen bleibt, ist, ob ein $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalarer Operator T durch ein polynomielles Wachstum der Potenzen

$$\|T^n\| \leq Cn^p \text{ und } m(T^n)^{-1} \leq Cn^q \qquad (n \in \mathbb{N})$$

(mit Konstanten $C > 0, p, q \geq 0$) charakterisiert werden kann.(Für die Definition von $m(T)$ siehe Definition 1.7.)
Diese bei Didas offen gebliebene Frage werden wir in Korollar 5.3 dieser Arbeit positiv beantworten:

> *Ein Operator $T \in B(X)$ ist genau dann $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar, wenn es Konstanten $C > 0$ und $p, q \geq 0$ gibt so, dass*
>
> $$\|T^n\| \leq Cn^p \text{ und } m(T^n)^{-1} \leq Cn^q$$
>
> *für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Desweiteren werden wir in Satz 7.1 der vorliegenden Arbeit eine für die $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Subskalarität hinreichende Bedingung eines Operators T in Termen des Wachstums der Resolvente und der Existenz einer analytischen Linksinversen von $T - z$ mit $z \in \mathbb{D}$ geben:

Sei $T \in B(X)$ mit $\sigma(T) \subset \overline{\mathbb{D}}$ so, dass Konstanten $C > 0$ und $p \geq 0$ existieren mit

$$\|(T-z)^{-1}\| \leq C(|z|-1)^{-p} \text{ für } 1 < |z| < 2.$$

Existieren $q \geq 0$ und eine analytische Funktion $L : \mathbb{D} \to B(X)$ so, dass

$$L(z)(T-z) = 1_{B(X)}$$

und

$$\|L(z)\| \leq C(1-|z|)^{-q} \text{ für } |z| < 1,$$

dann ist T ein $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalarer Operator.

Diese Arbeit ist in sieben Abschnitte gegliedert. Nachdem wir in Abschnitt 1 grundlegende Begriffe eingeführt und uns bekannte Begriffe wieder ins Gedächtnis gerufen haben, widmen wir uns in Abschnitt 2 den oben bereits erwähnten Charakterisierungen $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalarer Operatoren.
In Abschnitt 3 benutzen wir den Begriff des Minimalmodul, um die Ergebnsisse aus Abschnitt 2 zu übertragen auf den Fall $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalarer Operatoren. Wir werden sehen, dass die Bedingungen

$$\|T^n\| \leq Cn^p \text{ und } m(T^n)^{-1} \leq Cn^q \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{P}$$

sowie

$$\left.\begin{array}{lll} \|R(z,T)\| \leq C(|z|-1)^{-t} & \text{für} & 1 < |z| < 2 \\ & & \\ m(z-T)^{-1} \leq C(1-|z|)^{-s} & \text{für} & |z| < 1 \end{array}\right\} \quad \text{und} \tag{R}$$

mit geeigneten Konstanten $C, K > 0$ und $p, q, s, t \geq 0$ für die $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Subskalarität notwendig sind.
Um nun zu zeigen, dass die Bedingung (P) auch hinreichend ist, konstruieren wir in Abschnitt 4 invertierbare Fortsetzungen mit vorgegebenen Wachstumsbedingungen auf geeignete Banachräume. Ähnliche Konstruktionen lassen sich auch in [Rea84], [Rea88], [Rea87] und [BY01] finden.
Mit Hilfe dieser Konstruktion zeigen wir in Abschnitt 5, dass $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalare Operatoren durch die Bedingung (P) charakterisiert werden können.
In Abschnitt 6 werden wir anhand eines Beispieles sehen, dass Bedingung (R) nicht hinreichend für die $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Subskalarität eines Operators T ist.
Zu guter Letzt werden wir in Abschnitt 7 dieser Arbeit eine hinreichende Bedingung für die $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Subskalarität eines Operators T in Termen des Wachstums der Resolvente und der Existenz einer analytischen Linksinversen von $T - z$ auf der offenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ formulieren.
Die Behauptungen, Sätze und Konstruktionen aus den Abschnitten 4, 5, 6 und 7 gehen zum größten Teil auf die Arbeiten von Badea und Müller ([BM05] und [BM06]) zurück.

Abschließend möchte ich diese Gelegenheit nutzen um noch einigen Personen zu danken. Als erstes danke ich meinem Erstprüfer Prof. Dr. Jörg Eschmeier, der mein Interesse an

der Funktionalanalysis geweckt und mich bei der Erstellung dieser Arbeit hervorragend betreut hat. Desweiteren danke ich Dr. Christoph Barbian und Dominik Faas die mir bei Fragen zur Seite standen sowie Kevin Everard und Manuel Kaluza für das Korrekturlesen. Zu guter Letzt danke ich meiner Familie und meiner Freundin Kim für die Unterstützung während meines Studiums und während des Erstellens dieser Arbeit.
Primstal, den 2. Dezember 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Erste Begriffsklärungen

Eine $\mathbb{C}$-Algebra $\mathcal{A}$ heißt Banachalgebra, wenn $\mathcal{A}$ versehen ist mit einer Norm $\|\cdot\|$ so, dass $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und die Norm submultiplikativ ist in dem Sinne, dass

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$$

für alle $a, b \in \mathcal{A}$ ist.
Ein Beispiel für eine solche Banachalgebra ist die Menge $B(X)$ der stetig linearen Operatoren auf einem Banachraum X mit den üblichen algebraischen Operationen und der Norm

$$\|\cdot\| : B(X) \to [0, \infty), \ \|T\| = \sup_{x \in X, \|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_X.$$

Eine $\mathbb{C}$-Algebra $\mathcal{A}$ heißt topologische Algebra, wenn auf ihr eine Topologie τ definiert ist, so dass die Addition, skalare Multiplikation und Multiplikation stetig bezüglich τ sind.
Eine spezielle Klasse topologischer Algebren sind die Fréchet-Algebren. Eine Fréchet-Algebra ist eine Algebra $\mathcal{A}$ über $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) versehen mit einer Topologie τ so, dass $\mathcal{A}$ als Vektorraum versehen mit der Topologie τ ein Fréchetraum ist und die Multiplikation von $\mathcal{A}$ bezüglich τ stetig ist. Ein Beispiel ist die $\mathbb{C}$-Algebra $C^\infty(\mathbb{C})$ aller beliebig oft differenzierbaren komplexwertigen Funktionen auf $\mathbb{C}$, versehen der Topologie der kompakt gleichmäßigen Konvergenz aller Ableitungen. Diese Algebra bezeichnen wir im Folgenden mit $\mathcal{E}(\mathbb{C})$.
Um mehr über lokalkonvexe Räume und Frécheträume zu erfahren, sei hiermit auf [Wer00] Kapitel VIII verwiesen.
Für eine auf einer Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{C}$ definierte $\mathbb{C}$-wertige Funktion f bezeichnen wir mit

$$supp(f) = \overline{\{z \in \Omega : f(z) \neq 0\}}^{\mathbb{C}}$$

den Träger von f.

Definition 1.1. *Eine Algebra $\mathcal{A}$ von $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen über Ω heißt zulässig, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

i) Es sind $1, z \in \mathcal{A}$, wobei z die Funktion $\Omega \to \mathbb{C}, z \mapsto z$ bezeichnet.

ii) Für jede endliche, offene Überdeckung $U_1, \ldots U_n$ von $\mathbb{C}$ existieren Funktionen $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{A}$ mit $0 \leq f_i \leq 1$ für $1 \leq i \leq n$, $1 = f_1 + \ldots + f_n$ auf Ω und $supp(f_i) \subset U_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

iii) Für alle $f \in \mathcal{A}$ und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus supp(f)$ gehört die Funktion

$$f_\lambda : \Omega \to \mathbb{C}, f_\lambda(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{\lambda - z} & ; \ z \in \Omega, z \neq \lambda \\ 0 & ; \ z = \lambda \in \Omega \end{cases}$$

zu $\mathcal{A}$.

Definition 1.2. *Sei $\mathcal{A}$ eine zulässige Algebra. Wir bezeichnen einen Operator $T \in B(X)$ als* $\mathcal{A}$-skalar, *falls ein Algebrenhomomorphismus $\Phi : \mathcal{A} \to B(X)$ existiert mit $\Phi(1) = 1_{B(X)}$ und $\Phi(z) = T$. Hierbei bezeichne 1 die konstante Funktion $z \mapsto 1$ und z. In diesem Falle heißt Φ ein* $\mathcal{A}$-Kalkül *(oder einfach* Funktionalkalkül*) für T.*

Beispiel 1.3. *a) Ist $T \in B(H)$ ein normaler Operator auf einem Hilbertraum H, so ist T ein $C(\sigma(T))$-skalarer Operator.*

b) Ist $T \in B(X)$ kompakt, so ist T ein $\mathcal{A}$-skalarer Operator mit

$$\mathcal{A} = \{f \in C(\mathbb{C}) : \exists U_f \supset \sigma(T) \textit{offen mit } f|_{U_f} \in \mathcal{O}(U_f)\}$$

und dem $\mathcal{A}$-Kalkül

$$\Phi : \mathcal{A} \to B(X), f \mapsto (f|_{U_f})(T).$$

Die bereits oben erwähnte Algebra $\mathcal{E}(\mathbb{C})$ ist eine zulässige Algebra. Ihre Topologie wird durch die Halbnormen

$$\|f\|_{n,K} = \sup_{\substack{|\alpha| \le n \\ z \in K}} |D^\alpha f(z)|$$

erzeugt, wobei $n \in \mathbb{N}_0$ und $K \subset \mathbb{C}$ kompakt sind. Hierbei sei für $\alpha = (s,t) \in \mathbb{N}_0^2$ wie üblich $D^\alpha f = \frac{\partial^{s+t} f}{\partial x^s \partial y^t}(z)$. Es lässt sich leicht nachprüfen, dass es sich hierbei um eine Fréchet-Algebra handelt.
Auch bei der Algebra

$$\mathcal{E}(\mathbb{T}) = \{f : \mathbb{T} \to \mathbb{C} : f \circ exp(i\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ ist } C^\infty - \text{Funktion}\}$$

versehen mit der von den Halbnormen

$$\|f\|_n = \sup_{\substack{0 \le k \le n \\ t \in \mathbb{R}}} \left| \frac{d^k}{dt^k} f(e^{it}) \right| \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

erzeugten Topologie handelt es sich um eine Fréchet-Algebra.

Definition 1.4. *Sei nun $\mathcal{A} = \mathcal{E}(\mathbb{C})$ oder $\mathcal{E}(\mathbb{T})$ und $T \in B(X)$. Dann heißt T von der Klasse $\mathcal{A}$, in Zeichen $T \in [\mathcal{A}]$, wenn es einen stetigen $\mathcal{A}$-Kalkül Φ für T gibt.*

Einen solchen stetigen $\mathcal{A}$-Kalkül bezeichnet man auch als *Spektraldistribution für T*. Operatoren der Klasse $[\mathcal{E}(\mathbb{C})]$ heißen auch *verallgemeinert skalare Operatoren* (siehe etwa [CF68]). Operatoren der Klasse $[\mathcal{E}(\mathbb{T})]$ werden wir im Folgenden einfach als $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalar bezeichnen.
Die Stetigkeit des Funktionalkalküls $\Phi : \mathcal{E}(\mathbb{C}) \to B(X)$ ist äquivalent zur Existenz von $n \in \mathbb{N}_0$, $C > 0$, $K \subset \mathbb{C}$ kompakt mit

$$\|\Phi(f)\| \le C\|f\|_{n,K}$$

für alle $f \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$. Die minimale natürliche Zahl n, zu der C und K wie oben existieren, heißt *die Ordnung von* Φ (geschrieben $ord(\Phi)$). Analog definiert man die Ordnung einer Spektraldistribution $\Phi : \mathcal{E}(\mathbb{T}) \to B(X)$.

Einen stetig linearen Operator $\pi : X \hookrightarrow Y$ zwischen zwei Banachräumen X und Y bezeichnen wir als topologische Einbettung, wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt mit

$$C\|x\| \leq \|\pi x\|$$

für alle $x \in X$. Ein Operator $\pi \in B(X,Y)$ ist genau dann eine topologische Einbettung, wenn π injektiv mit abgeschlossenem Bild ist (siehe Lemma 1.9), oder äquivalent, wenn π einen topologischen Isomorphismus $X \to \pi(X)$ induziert.

Definition 1.5. *Sei X ein Banachraum. Ein Operator $T \in B(X)$ heißt $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar, wenn er ähnlich zu der Einschränkung eines $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalaren Operators ist, das heißt, wenn es einen $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalaren Operator $S \in B(Y)$ auf einem Banachraum Y und eine topologische Einbettung $\pi : X \hookrightarrow Y$ gibt mit $S\pi = \pi T$.*

Bevor wir uns nun Charakterisierungen $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalarer Operatoren widmen, erinnern wir an einige elementare Begriffe und Ergebnisse aus der Spektraltheorie.

Definition 1.6. *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins. Wir definieren das Spektrum eines Elementes $a \in \mathcal{A}$ durch*

$$\sigma^{\mathcal{A}}(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - a \textit{ ist nicht invertierbar in } \mathcal{A}\}.$$

Die Resolventenmenge eines Elementes $a \in \mathcal{A}$ definieren wir durch

$$\rho^{\mathcal{A}}(a) = \mathbb{C} \backslash \sigma^{\mathcal{A}}(a).$$

Ist es offensichtlich, in welcher Algebra wir das Spektrum bzw. die Resolventenmenge bilden, so lassen wir den oberen Index weg.

Für zwei Banachräume bezeichne $B(X,Y)$ die Menge aller stetig lienaren Operatoren von X nach Y. Außerdem führen wir für Operatoren auf Banachräumen folgende Bezeichnungen ein.

Definition 1.7. *Seien X, Y Banachräume und $T \in B(X), A \in B(X,Y)$ stetig lineare Operatoren. Wir definieren*

(a) die Resolvente *von T im Punkt $\lambda \in \rho(T)$ durch*

$$R(\lambda, T) = (\lambda - T)^{-1},$$

(b) den Spektralradius *von T als*

$$r(T) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\},$$

(c) den Minimalmodul *von A als*

$$m(A) = \inf\{\|Ax\| : x \in X, \|x\| = 1\}$$

(d) und das approximative Punktspektrum *von T durch*

$$\sigma_{ap}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : m(\lambda - T) = 0\}\,.$$

Für das approximative Punktspektrum gelten folgende Inklusionen.

Lemma 1.8. *Sei $T \in B(X)$ ein stetig linearer Operator auf einem Banachraum X. Dann gilt*

$$\partial\sigma(T) \subset \sigma_{ap}(T) \subset \sigma(T).$$

Beweis. Die rechte Inklusion ist klar. Für die linke Inklusion sei $\lambda \in \partial\sigma(T)$. Dann gibt es eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\rho(T)$, die gegen λ konvergiert und für die gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|R(\lambda_n, T)\| = \infty.$$

Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit finden wir ein $x \in X$ so, dass immerhin noch für eine Teilfolge $(\lambda_{n_k})_k$ von $(\lambda_n)_n$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \|R(\lambda_{n_k}, T)x\| = \infty.$$

Wir setzen

$$y_k = \frac{R(\lambda_{n_k}, T)x}{\|R(\lambda_{n_k}, T)x\|}.$$

Dann ist $\|y_k\| = 1$ und

$$(\lambda - T)y_k = (\lambda - \lambda_{n_k})y_k + \left(\frac{x}{\|R(\lambda_{n_k}, T)x\|}\right) \xrightarrow{k} 0.$$

Also ist $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$. □

Der Minimalmodul eines Operators besitzt wichtige Eigenschaften, die wir im folgenden Lemma näher beschreiben.

Lemma 1.9. *Seien X, Y, Z nicht triviale Banachräume.*

a) Für $T \in B(X, Y)$ gilt

$$m(T) = \max\{\alpha \geq 0 : \alpha\|x\| \leq \|Tx\| \textit{ für alle } x \in X\}.$$

b) Ist $S \in B(Y, Z)$ invertierbar, so gilt

$$m(S) = \|S^{-1}\|^{-1}.$$

c) Für Operatoren $S \in B(Y,Z)$ und $T \in B(X,Y)$ gilt

$$m(ST) \geq m(S)m(T).$$

d) Ein Operator $T \in B(X,Y)$ ist genau dann injektiv mit abgeschlossenem Bild, wenn $m(T) > 0$.

Beweis. a) Wir definieren

$$A = \{\alpha \geq 0 : \|Tx\| \geq \alpha \|x\|\}.$$

Zunächst folgt aus

$$\|Tx\| \leq \|T\| \|x\| \qquad (x \in X)$$

dass die Menge A beschränkt ist. Sei weiter $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus A, die gegen α konvergiert. Dann gilt

$$\alpha_n \|x\| \leq \|Tx\|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit auch

$$\alpha \|x\| = \lim_{n\to\infty} \alpha_n \|x\| \leq \|Tx\|.$$

Daraus erhalten wir, dass die Menge auch abgeschlossen, also kompakt ist. Somit existiert das Maximum. Zur Abkürzung bezeichnen wir dieses Maximum mit M. Dann gilt für alle $x \in X$ mit $\|x\| = 1$

$$\|Tx\| \geq M\|x\| = M,$$

folglich

$$m(T) \geq M.$$

Die umgekehrte Ungleichung folgt direkt aus der Tatsache, dass für $x \in X \backslash \{0\}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} m(T)\|x\| &= \inf\{\|Ty\| : \|y\| = 1\}\|x\| \\ &\leq \|T\frac{x}{\|x\|}\|\|x\| = \|Tx\| \end{aligned}$$

gilt.

b) Für alle $y \in Y$ gilt

$$\|y\| = \|S^{-1}Sy\| \leq \|S^{-1}\|\|Sy\|.$$

Daraus folgt

$$\|S^{-1}\|^{-1}\|y\| \leq \|Sy\|$$

für alle $y \in Y$ und wir erhalten

$$\|S^{-1}\|^{-1} \leq m(S).$$

Andererseits gilt für $y \in Y \backslash \{0\}$, dass

$$\|Sy\| \geq m(S)\|y\| = m(S)\|S^{-1}Sy\|$$

und somit

$$1 \geq m(S) \left\| S^{-1} \frac{Sy}{\|Sy\|} \right\|.$$

Da S surjektiv ist, erhalten wir

$$1 \geq m(S)\|S^{-1}\|$$

und schließlich

$$\|S^{-1}\|^{-1} \geq m(S).$$

c) Sei $x \in X$. Dann gilt

$$\|STx\| \geq m(S)\|Tx\| \geq m(S)m(T)\|x\|.$$

Aus Teil a) folgt nun

$$m(ST) \geq m(S)m(T).$$

d) Sei $m(T) > 0$. Angenommen T sei nicht injektiv. Dann gibt es ein $x \in X$ mit $x \neq 0$ so, dass

$$Tx = 0,$$

also

$$\left\| T \frac{x}{\|x\|} \right\| = 0$$

ist. Dies liefert $m(T) = 0$ und somit einen Widerspruch. Also ist T injektiv.
Desweiteren sei

$$T_0 : X \to ran(T), T_0x = Tx.$$

Dann ist T_0 offensichtlich bijektiv und stetig. Für die Umkehrabbildung gilt

$$\|x\| = \|T_0T_0^{-1}x\| \leq m(T)\|T_0^{-1}x\|.$$

Daraus folgt

$$\|T_0^{-1}x\| \leq m(T)^{-1}\|x\|$$

und damit ist T_0^{-1} stetig. Somit ist T_0 ein topologischer Isomorphismus und folglich $ran(T) \subset Y$ ein Banachraum, insbesondere abgeschlossenen.
Für die Rückrichtung sei $T \in B(X)$ injektiv und $ran(T) \subset Y$ abgeschlossen. Dann ist

$$T_0 : X \to ran(T), T_0x = Tx$$

ein bijektiver stetig linearer Operator zwischen Banachräumen. Nach dem Prinzip der stetigen Inversen ist die Umkehrabbildung $T_0^{-1} : ran(T) \to X$ stetig und es gilt

$$\|x\| = \|T_0^{-1}Tx\| \leq C_0\|Tx\|.$$

Daraus folgt

$$\|Tx\| \geq C_0\|x\|$$

und wegen Teil a)

$$m(T) > 0.$$

□

Die Resolvente eines Operators können wir wie folgt entwickeln.

Lemma 1.10. *Sei $T \in B(X)$. Dann gilt:*

a) Für $|\lambda| > \|T\|$ ist $R(\lambda, T) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$.

b) $R(z, T)$ konvergiert gegen 0 für $|z| \to \infty$.

Beweis. a) Für $|\lambda| > \|T\|$ gilt

$$(\lambda - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{T}{\lambda}\right)^{-1}.$$

Da $\frac{\|T\|}{|\lambda|} < 1$ folgt mit der Neumann-Reihe

$$\frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{T}{\lambda}\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{\lambda^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}}.$$

Nach dem Weierstraßschen Majorantenkriterium konvergiert diese Reihe kompakt gleichmäßig auf $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|T\|\}$. Ebenfalls ist die Reihe auf $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq r\}$ für $r > \|T\|$ gleichmäßig konvergiert.

b) Die obige Reihendarstellung impliziert, dass für $|z| > \|T\|$ gilt

$$\|R(z, T)\| \leq \frac{1}{|z|}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\|T\|}{|z|}\right)^n = \frac{1}{|z|}\frac{1}{1 - \frac{\|T\|}{|z|}} \overset{|z|\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Lemma 1.11. *Sei $T \in B(X)$ mit $\sigma(T) \subset \mathbb{T}$ und sei $|\lambda| < 1$. Dann gilt*

$$R(\lambda, T) = -\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \lambda^n T^{-(n+1)}$$

Beweis. Sei Φ der holomorphe Funktionalkalkül für T. Dann gilt

$$R(\lambda, T) = (\lambda - T)^{-1} = \Phi\left(\frac{1}{\lambda - z}\right).$$

Da $|\lambda| < 1$ ist, finden wir eine reelle Zahl r mit $|\lambda| < r < 1$. Dann gilt für $r \leq |z| \leq \frac{1}{r}$, dass $\left|\frac{\lambda}{z}\right| \leq \frac{|\lambda|}{r} < 1$ und daher

$$\frac{1}{\lambda - z} = \frac{1}{z\left(\frac{\lambda}{z} - 1\right)} = -\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \lambda^n z^{-(n+1)}.$$

Hierbei konvergiert die Reihe nach dem Weierstraßschen Majorantenkriterium für alle $r \leq |z| \leq \frac{1}{r}$ gleichmäßig. Da der holomorphe Kalkül stetig ist, folgt die Behauptung. □

2 Charakterisierungen von $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalaren Operatoren

In diesem Abschnitt wollen wir die bereits angesprochenen Charakterisierungen $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalarer Operatoren beweisen.
Wie wir auch in [Did98] nachlesen können, erhalten wireinen $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Kalkül für einen Operator $T \in B(X)$ auf einem Banachraum X mit einem polynomiellen Wachstum, indem wir in der Fourier-Entwicklung $\sum\limits_{p \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(p) z^p$ einer Funktion $f \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$ die Funktion z durch den Operator T ersetzen. Wir bilden also Reihen der Form

$$f(T) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(p) T^p.$$

Um zu zeigen, dass diese Reihen wohldefiniert sind und einen Funktionalkalkül für T definieren, benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 2.1. *Sei $f \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$ mit Fourierentwicklung*

$$f(z) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(p) z^p,$$

wobei

$$\widehat{f}(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cdot e^{-ipt} dt.$$

Dann ist die Familie

$$\left(\widehat{f}(p) p^m\right)_{p \in \mathbb{Z}}$$

beschränkt für jedes $m \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Sei $m \in \mathbb{N}$. Mit partieller Integration gilt für $p \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(p) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cdot e^{-ipt} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \underbrace{\left[-\frac{1}{ip} e^{-ipt} f(e^{it})\right]_0^{2\pi}}_{=0 \text{ da } f(e^{it})\ 2\pi\text{-periodisch}} + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{ip} \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt}\left(f(e^{it})\right) \cdot e^{-ipt} dt \\
&= \ldots = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{(ip)^m} \int_0^{2\pi} \frac{d^m}{dt^m} f(e^{it}) e^{-ipt} dt.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$|\widehat{f}(p)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{|p|^m} \cdot 2\pi \|f\|_m = \|f\|_m \frac{1}{|p|^m}$$

□

Hilfreich ist auch noch ein weiteres Lemma aus der Funktionentheorie.

Lemma 2.2. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{O}(U)$. Desweiteren sei $\gamma : [a, b] \to U$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ eine C^1-Funktion. Dann gilt für $t \in [a, b]$ die Formel*

$$(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).$$

Beweis. Wir wissen, dass für eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(U)$ und für $z_0 \in U$

$$\frac{d}{dz} f(z_0) = \frac{\partial}{\partial x} f(z_0)$$

und

$$\frac{d}{dz} f(z_0) = -i \frac{\partial}{\partial y} f(z_0)$$

gilt. Daraus erhalten wir mittels der reellen Kettenregel

$$\begin{aligned}
(f \circ \gamma)'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) \frac{d\Re\gamma}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) \frac{d\Im\gamma}{dt}(t) \\
&= f'(\gamma(t))(\Re\gamma)'(t) + i f'(\gamma(t))(\Im\gamma)'(t) \\
&= f'(\gamma(t))\gamma'(t).
\end{aligned}$$

□

Eine erste Charakterisierung $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalarer Operatoren liefert uns der nächste Satz.

Satz 2.3. *Sei $T \in B(X)$ mit $\sigma(T) \subset \mathbb{T}$. Dann sind äquivalent:*

(i) T ist $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalar.

(ii) Es existieren $M > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $\|R(\lambda, T)\| \leq \frac{M}{|1-|\lambda||^{n+1}}$ für $0 < |1 - |\lambda|| < 1$.

(iii) Es existieren $C > 0$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $\|T^k\| \leq C \cdot |k|^m$ für $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$:
Sei $\Phi : \mathcal{E}(\mathbb{T}) \to B(X)$ ein stetiger Algebrenhomomorphismus wie in der Definition $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalarer Operatoren und sei $0 < |1 - |\lambda|| < 1$. Dann ist $\lambda \notin \mathbb{T}$, also auch $\lambda \notin \sigma(T)$, und es existiert eine offene Umgebung $U \supset \mathbb{T}$, so dass $\lambda \notin U$. Somit ist $R(\lambda, T) = (\lambda - T)^{-1}$ definiert und lässt sich schreiben als

$$\|R(\lambda, T)\| = \left\|\Phi\left(\frac{1}{\lambda - z}\right)\right\| \overset{\text{Def. von } ord(\Phi)}{\leq} C \cdot \left\|\frac{1}{\lambda - z}\right\|_n,$$

wobei $n = ord(\Phi)$. Nach Definition der Halbnormen gilt für ein $f \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$

$$\|f\|_n = \sup_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ 0 \leq k \leq n}} \left|\frac{d^k}{dt^k} f(e^{it})\right|.$$

Setzen wir die Funktion

$$f : U \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{\lambda - z}$$

ein, so erhalten wir mit Lemma 2.2 durch elementares Nachrechnen und Induktion

$$\frac{d^n}{dt^n} f(e^{it}) = \frac{p_n(e^{it})}{(\lambda - e^{it})^{n+1}},$$

wobei $p_n(z)$ ein Polynom n-ten Grades ist. Da dieses Polynom beschränkt ist für $z \in \mathbb{T}$, erhalten wir

$$\left\|\frac{1}{\lambda - z}\right\|_n \leq C_1 \sup_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ 0 \leq k \leq n}} \frac{1}{|\lambda - e^{it}|^{k+1}} \overset{\Delta-Ugl.}{\leq} \frac{C_1}{|1 - |\lambda||^{n+1}}$$

und daher mit $M = C \cdot C_1$

$$\|R(\lambda, T)\| \leq M \cdot \frac{1}{|1 - |\lambda||^{n+1}}$$

für $0 < |1 - |\lambda|| < 1$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$:

1) Sei $k \in \mathbb{N}$ und $0 < \varepsilon < 1$. Es gilt:

$$\sup_{|z|=\varepsilon+1} \|R(z,T)\| \leq M \cdot \frac{1}{|1-|\varepsilon+1||^{n+1}} = \frac{M}{\varepsilon^{n+1}}. \tag{1}$$

Dann folgt mit dem holomorphen Funktionalkalkül und der Standardabschätzung für Integrale:

$$\frac{\|T^k\|}{k^{n+1}} = \frac{1}{k^{n+1}} \cdot \left\| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_{1+\varepsilon}(0)} z^k R(z,T) dz \right\| \overset{(1)}{\leq} M \cdot \frac{(1+\varepsilon)^{k+1}}{(k\varepsilon)^{n+1}}.$$

Für $k > 2(n+1)$ gilt mit $\varepsilon = \frac{n+1}{k-(n+1)}$:

$$\begin{aligned} \frac{\|T^k\|}{k^{n+1}} &\leq M \cdot \frac{\left(1 + \frac{n+1}{k-(n+1)}\right)^{k+1}}{\left(\frac{k(n+1)}{k-(n+1)}\right)^{n+1}} \\ &= M \cdot \frac{\left(\frac{k-(n+1)}{k}\right)^{-(k+1)}}{\left(\frac{(n+1)}{1-(n+1)/k}\right)^{n+1}} \xrightarrow{k} M \cdot \frac{e^{-(n+1)}}{(n+1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Also gibt es eine Konstante $C_1 > 0$ mit

$$\|T^k\| \leq C_1 \cdot k^{n+1}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

2) Sei $k \in \mathbb{N}$ und $0 < \varepsilon < 1$. Wie oben folgt:

$$\frac{\|T^{-k}\|}{k^{n+1}} = \frac{1}{k^{n+1}} \cdot \left\| \frac{1}{2\pi i} \left(\underbrace{\int\limits_{\partial^+ D_{2\|T\|}(0)} z^{-k} R(z,T) dz}_{=:A} + \underbrace{\int\limits_{\partial^- D_{1-\varepsilon}(0)} z^{-k} R(z,T) dz}_{=:B} \right) \right\|.$$

Wie in dem Beweis zu Bemerkung 1.10 gesehen ist die Neumannsche Reihe

$$R(z,T) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{T^l}{z^{l+1}}$$

gleichmäßig konvergent auf $\partial D_{2\|T\|}(0)$. Daher gilt

$$A = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} T^l \int\limits_{\partial D_{2\|T\|}(0)} \frac{dz}{z^{l+k+1}} = 0.$$

Weiter gilt

$$B = -\int\limits_{\partial^+ D_{1-\varepsilon}(0)} z^{-k} R(z,T)dz$$

und somit

$$\frac{\|T^{-k}\|}{k^{n+1}} = \frac{1}{k^{n+1}} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial^+ D_{1-\varepsilon}(0)} \frac{1}{z^k} R(z,T)dz \right\| \leq M \cdot \frac{1}{(1-\varepsilon)^{k-1}} \cdot \frac{1}{(k\varepsilon)^{n+1}}.$$

Mit $\varepsilon = \frac{n+1}{k+(n+1)}$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{\|T^{-k}\|}{k^{n+1}} &\leq M \frac{1}{\left(1 - \frac{n+1}{k+(n+1)}\right)^{k-1}} \frac{1}{\left(\frac{k(n+1)}{k+n+1}\right)^{n+1}} \\ &= M \left(\frac{k+(n+1)}{k}\right)^{k-1} \left(\frac{1+\frac{n+1}{k}}{n+1}\right)^{n+1} \xrightarrow{k} M \frac{e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Deswegen erhalten wir auch hier eine Konstante $C_2 > 0$ mit

$$\|T^{-k}\| \leq C_2 \cdot k^{n+1}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Mit $C = \max\{C_1, C_2\}$ und $m = n+1$ folgt

$$\|T^k\| \leq C \cdot |k|^m$$

für alle $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

$(iii) \Rightarrow (i)$:
Sei nun $f \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$. Es ist wohlbekannt, dass wir f als Fourierreihe schreiben können:

$$f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k) z^k, \text{ wobei } \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(e^{it}) \cdot e^{-ikt} dt.$$

Wir zeigen nun, dass die Abbildung $\Psi : \mathcal{E}(\mathbb{T}) \to B(X),\ \Psi(f) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k) T^k$ einen stetigen $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Kalkül definiert:
Seien $f, g \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$. Wie im Beweis zu Lemma 2.1 gesehen, gilt $|\widehat{f}(p)| \leq \|f\|_{m+2} |p|^{-(m+2)}$ für alle $p \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| \left\|T^k\right\| &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|f\|_{m+2} |k|^{-(m+2)} C |k|^m \\ &= \|f\|_{m+2} \cdot C \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^{-2} < \infty. \end{aligned}$$

Somit ist die Reihe

$$\Psi(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k) T^k$$

konvergent und Ψ ist wohldefiniert. Offensichtlich ist Ψ linear mit $\Psi(1) = 1_{B(X)}$ und $\Psi(z) = T$. Wie oben gesehen gilt

$$\begin{aligned} \|\Psi(f)\| &\leq \sum_{p\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(p)| \|T^p\| \\ &\leq C \left(\sum_{p\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |p|^{-2} \right) \|f\|_{m+2} \\ &\leq C \frac{\pi^2}{3} \|f\|_{m+2}, \end{aligned}$$

also ist Ψ stetig. Bleibt noch die Multiplikativität zu zeigen. Für $f, g \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$ ist $fg \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$ und es gilt

$$(fg)(z) = \sum_{q\in\mathbb{Z}} \widehat{fg}(q) z^q. \tag{2}$$

Andererseits ist jedoch

$$\begin{aligned} f(z) \cdot g(z) &= \left(\sum_{p\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(p) z^p \right) \left(\sum_{q\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(q) z^q \right) \\ &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{q\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(p) \widehat{g}(q) z^q z^p \right). \end{aligned}$$

Verschieben wir hier den Index $q \rightsquigarrow q - p$, so ändert sich nichts an der inneren Reihe und wir erhalten

$$f(z) \cdot g(z) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{q\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(p) \widehat{g}(q-p) z^q \right).$$

Wenden wir nun den Satz von Fubini (auf $\ell^1(\mathbb{Z}) = L^1(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \mu)$, wobei μ das Zählmaß ist) an, so erhalten wir

$$f(z)g(z) = \sum_{q\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{p\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(p) \widehat{g}(q-p) \right) z^q. \tag{3}$$

Da die Fourierentwicklung eindeutig ist, folgt nun aus (2) und (3), dass für $q \in \mathbb{Z}$

$$\widehat{fg}(q) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(p) \widehat{g}(q-p)$$

ist, also folgt

$$\Psi(fg) = \Psi(f)\psi(g).$$

$\square$

Sei $\mathcal{A} = \mathcal{E}(\mathbb{C})$ oder $\mathcal{E}(\mathbb{T})$ und sei $\Phi : \mathcal{A} \to B(X)$ ein stetiger Algebrenhomomorphismus. Wir definieren uns den Träger $supp(\Phi)$ von Φ als die kleinste abgeschlossene Menge $F \subset \mathbb{C}$ so, dass $\Phi(f) = 0$ für alle $f \in \mathcal{A}$ mit $supp(f) \cap F = \emptyset$. Die Existenz einer solchen Menge folgt aus dem nächsten Satz.

Satz 2.4. *Sei $\Phi : \mathcal{A} \to B(X)$ ein stetiger Algebrenhomomorphismus. Dann gilt*

$$supp(\Phi) = \sigma\left(\Phi(z)\right).$$

Beweis. Sei $f \in \mathcal{A}$ mit $supp(f) \cap \sigma\left(\Phi(\lambda)\right) = \emptyset$. Nach [CF68], Theorem 3.5.4 ist die Funktion

$$\xi \mapsto \Phi\left(f_\xi\right) \qquad (f_\xi \text{ wie in Definition 1.1})$$

auf $\mathbb{C} \backslash supp(f)$ analytisch. Offensichtlich gilt

$$(\xi 1_{B(X)} - \Phi(\lambda))\Phi\left(f_\xi\right) = \Phi\left((\xi - \lambda) f_\xi\right) = \Phi(f)$$

für $\xi \in \mathbb{C} \backslash supp(f)$. Daraus erhalten wir

$$\Phi\left(f_\xi\right) = R(\xi, \Phi(\lambda))\Phi(f)$$

für $\xi \in \rho(\Phi(\lambda)) \cap (\mathbb{C} \backslash supp(f))$. Durch $h : \mathbb{C} \to B(X)$,

$$h(\xi) = \begin{cases} R(\xi, \Phi(\lambda))\phi(f) & \text{für} \quad \xi \in \rho(\Phi(\lambda)) \\ \Phi\left(f_\xi\right) & \text{für} \quad \xi \in \mathbb{C} \backslash supp(f) \end{cases}$$

ist eine ganze Funktion definiert mit

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \|h(\xi)\| = 0.$$

Nach dem Satz von Liouville gilt $h(\xi) = 0$ für alle $\xi \in \mathbb{C}$. Also gilt auch $\Phi\left(f_\xi\right) = 0$ auf $\mathbb{C} \backslash supp(f)$, insbesondere $\Phi(f) = 0$. Sei $F \subset \mathbb{A}$ eine abgeschlossene Menge mit $\Phi(f) = 0$ für alle $f \in \mathcal{A}$ mit $supp(f) \cap F = \emptyset$ und sei G eine offene Umgebung von F. Sei $G_1 \subset \mathbb{C}$ offen, so dass $\overline{G_1} \cap F = \emptyset$ und $G \cup G_1 = \mathbb{C}$. Dann gibt es Funktionen $f, f_1 \in \mathcal{A}$ so, dass

$$0 \leq f, f_1 \leq 1,$$

$$supp(f) \subset G, supp(f_1) \subset G_1$$

und

$$f + f_1 = 1.$$

Daher erhalten wir

$$supp(1 - f) = supp(f_1) \subset G_1$$

und deshalb

$$supp(1 - f) \cap F = \emptyset.$$

Also ist

$$0 = \Phi(1-f) = \Phi(1) - \Phi(f),$$

das heißt

$$\Phi(f) = \Phi(1) = 1_{B(X)}.$$

Da *supp*$(f) \subset G$ ist, ist die Funktion $f_\xi \in \mathcal{A}$ für alle $\xi \in \mathbb{C}\backslash G$. Es gilt

$$\Phi\left(f_\xi\right)\left(\xi 1_{B(X)} - \Phi(\lambda)\right) = (\xi 1_{B(X)} - \Phi(\lambda))\Phi\left(f_\xi\right) = \Phi\left(\xi - \lambda)f_\xi\right) = \Phi(f) = 1_{B(X)}$$

und somit ist $\xi \in \rho(\Phi(\lambda))$. Folglich ist

$$\sigma(\Phi(\lambda)) \subset G.$$

Da G beliebig war, gilt nun

$$\sigma(\Phi(\lambda)) \subset \bigcap(G : G \supset F \text{ offen}) = F.$$

Damit haben wir gezeigt, dass $\sigma(\Phi(z))$ die kleinste abgeschlossene Menge $F \subset \mathbb{C}$ ist mit *supp*$(f) \cap F = \emptyset$. $\square$

Bemerkung 2.5. *Aus Satz 2.4 folgt insbesondere, dass für $f \in \mathcal{A}$ mit*

$$supp(1-f) \cap \sigma(\Phi(z)) = \emptyset$$

gilt

$$\Phi(f) = 1_{B(X)}.$$

Weitere Charakterisierungen $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalarer Operatoren liefert der folgende Satz.

Satz 2.6. *Sei $S \in B(X)$. Dann sind äquivalent:*

(i) *S ist $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalar,*

(ii) *S ist $\mathcal{E}(\mathbb{C})$-skalar mit $\sigma(S) \subset \mathbb{T}$,*

(iii) *S ist invertierbar und es existieren $C > 0,\ p, q \geq 0$ so, dass*

$$\|S^n\| \leq Cn^p \text{ und } \|S^{-n}\| \leq Cn^q.$$

für alle $n \in \mathbb{N}$,

(iv) *$\sigma(S) \subset \mathbb{T}$ und es existieren $K > 0,\ s, t \geq 0$ so, dass*

$$\|(S-z)^{-1}\| \leq K(|z|-1)^{-s} \text{ für } 1 < |z| < 2$$

und

$$\|(S-z)^{-1}\| \leq K(1-|z|)^{-t} \text{ für } |z| < 1.$$

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$:
Sei $\Phi : \mathcal{E}(\mathbb{T}) \to B(X)$ ein stetiger Algebrenhomomorphismus wie in der Definition $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalarer Operatoren. Wir definieren

$$\Psi : \mathcal{E}(\mathbb{C}) \to B(X),\ \ \Psi(f) = \Phi(f|_{\mathbb{T}}).$$

Dann ist Ψ wohldefiniert, linear, multiplikativ und stetig mit $\Psi(1) = 1_{B(X)}$, $\Psi(z) = S$ und somit ein $\mathcal{E}(\mathbb{C})$-Kalkül für S.
Ist $\lambda \notin \mathbb{T}$, so liegt die Funktion $z \mapsto \frac{1}{\lambda - z}$ in $\mathcal{E}(\mathbb{T})$ und es gilt

$$\Phi\left(\frac{1}{\lambda - z}\right)(\lambda - S) = \Phi\left(\frac{1}{\lambda - z}\right)\Phi(\lambda - z) = \Phi(1) = 1_{B(X)} = \ldots = (\lambda - S)\Phi\left(\frac{1}{\lambda - z}\right).$$

Somit ist $\lambda - S$ invertierbar.
$(ii) \Rightarrow (iii)$:
Sei $\Phi : \mathcal{E}(\mathbb{C}) \to B(X)$ ein stetiger Kalkül mit $ord(\Phi) = n$. Dann existieren $C > 0$ und $K \subset \mathbb{C}$ kompakt mit

$$\|\Phi(f)\| \leq C\|f\|_{n,K}$$

für alle $f \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$. Wir fixieren ein $g \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ mit $g(z) = 0$ für $|z| \leq \frac{1}{2}$ und $supp(1-g) \subset \mathbb{D}$ und setzen

$$M_1 = \sup_{\substack{|\alpha| \leq n \\ z \in \mathbb{C}}} |(D^\alpha g)(z)| < \infty.$$

Sei weiter $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $0 < |1 - |\lambda|| = r < 1$. Setze

$$g_\lambda(z) = g\left(\frac{z - \lambda}{r}\right)$$

für $z \in \mathbb{C}$. Dann ist $g_\lambda \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ mit $g_\lambda(z)|_{D_{\frac{r}{2}}(\lambda)} \equiv 0$ und $supp(1-g_\lambda) \cap \mathbb{T} = \emptyset$. Somit folgt bereits mit Bemerkung 2.5

$$\|R(\lambda, T)\| = \left\|\Phi\left(\frac{g_\lambda}{\lambda - z}\right)\right\| \leq C\left\|\frac{g_\lambda}{\lambda - z}\right\|_{n,K}.$$

Setzen wir nun $h = \frac{g_\lambda}{\lambda - z}$. Für $|\alpha| \leq n$ erhalten wir

$$(D^\alpha h)(z) = \begin{cases} 0 & ; \quad |z - \lambda| \leq \frac{r}{2} \\ D^\alpha\left(\frac{1}{\lambda - z}\right) & ; \quad |\lambda - z| \geq r \\ \sum\limits_{\mu + \nu = \alpha} \binom{\alpha}{\mu} D^\mu\left(\frac{1}{\lambda - z}\right)(D^\nu g_\lambda)(z) & ; \quad \frac{r}{2} < |z - \lambda| < r. \end{cases}$$

Wegen der Abschätzung

$$\left|D^\alpha\left(\frac{1}{\lambda - z}\right)\right| = |\alpha|!\frac{1}{|\lambda - z|^{|\alpha|+1}} \leq n!\frac{2^{n+1}}{r^{|\alpha|+1}}$$

für $|\lambda - z| \geq \frac{r}{2}$ und

$$|(D^\alpha g_\lambda)(z)| = \left|(D^\alpha g)\left(\frac{z-\lambda}{r}\right)\right| \frac{1}{r^{|\alpha|}} \leq M_1 \frac{1}{r^{|\alpha|}}$$

für $z \in \mathbb{C}$ gibt es eine von λ unabhängige Konstante $M_2 > 0$ mit

$$|(D^\alpha h)(z)| \leq M_2 \frac{1}{r^{n+1}}$$

für $|\alpha| \leq n$ und $z \in \mathbb{C}$. Daraus erhalten wir also mit $K' = CM_2$

$$\|R(\lambda, T)\| \leq K' \frac{1}{r^{n+1}} = \frac{K'}{|1-|\lambda||^{n+1}} \tag{4}$$

für $0 < |1 - |\lambda|| < 1$. Und somit folgt wie in Satz 2.3 die Behauptung.
$(iii) \Rightarrow (iv)$:
Aus (iii) folgt zunächst, dass

$$r(S) = \lim_{n\to\infty} \|S^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n\to\infty} (Cn^p)^{\frac{1}{n}} = 1$$

und

$$r(S^{-1}) = \lim_{n\to\infty} \|S^{-n}\|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n\to\infty} (Cn^q)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Also ist $\sigma(S) \subset \overline{\mathbb{D}}$ und $\frac{1}{\sigma(S)} = \sigma(S^{-1}) \subset \overline{\mathbb{D}}$ und damit $\sigma(S) \subset \mathbb{T}$. Die Bedingung (iii) impliziert offensichtlich die Bedingung (iii) aus Satz 2.3. (Wir können für m jede natürliche Zahl mit $m \geq \max\{p, q\}$ wählen.) Nach Satz 2.3 gibt es eine Konstante $M > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\|R(z, S)\| \leq \frac{M}{|1-|z||^{N+1}}$$

für $0 < |1 - |z|| < 1$. Hieraus folgt offensichtlich die Gültigkeit von (iv).
$(iv) \Rightarrow (i)$:
Diese Implikation ist ebenfalls klar nach Satz 2.3. □

3 Wichtige Folgerungen für $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalare Operatoren

Sei $T \in B(X)$ ein $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalarer Operator, das heißt es gibt eine topologische Einbettung $\pi : X \hookrightarrow Y$ in einen Banachraum Y und einen $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalaren Operator $S \in B(Y)$ mit $S\pi = \pi T$. Wir bemerken, dass in diesem Falle $\pi(X) \subset Y$ ein bezüglich S invarianter abgeschlossener Teilraum ist.

Folgerung 3.1. *Sei T wie oben. Dann gilt:*

a) Es existieren $C > 0$ und $p, q \geq 0$ mit

$$\|T^n\| \leq Cn^p \text{ und } m(T^n)^{-1} \leq Cn^q. \tag{P}$$

b) Es existieren $C > 0$ und $p, q \geq 0$, so dass

$$\|R(z,T)\| \leq K(|z|-1)^{-p} \text{ für } 1 < |z| < 2$$

und $\qquad (R)$

$$m(z-T)^{-1} \leq K(1-|z|)^{-q} \text{ für } |z| < 1.$$

Beweis. a) Nach Satz 2.6 (iii) gilt für die Erweiterung S von T, dass es Konstanten $K > 0$ und $p, q \geq 0$ gibt, so, dass

$$\underbrace{\|S^n\| \leq Kn^p}_{(I)} \text{ und } \underbrace{\|S^{-n}\| \leq Kn^q}_{(II)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus ergibt sich mit $Y_0 = \pi(X)$

$$\|T^n\| = \|\pi^{-1}\left(S|_{Y_0}\right)^n \pi\| \leq \|\pi^{-1}\| \cdot \|\pi\| \cdot \|S^n\| \overset{(I)}{\leq} C'n^p$$

mit $C' = \|\pi^{-1}\|\|\pi\|K$.

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \|T^n x\| &= \|\pi^{-1}\left(S|_{Y_0}\right)^n \pi x\| \\ &\geq m(\pi^{-1}\left(S|_{Y_0}\right)^n \pi)\|x\| \overset{1.9\ c)}{\geq} m(\pi^{-1})m(S^n)m(\pi)\|x\| \\ &\overset{1.9\ b)}{=} \frac{m(\pi^{-1})m(\pi)}{\|S^{-n}\|}\|x\| \overset{(II)}{\geq} m(\pi^{-1})m(\pi)K^{-1}n^{-q}\|x\| \end{aligned}$$

und somit

$$m(T^n)^{-1} \leq C''n^q$$

mit $C'' = \left(m(\pi^{-1})m(\pi)\right)^{-1}K$. Setze $C = \max\{C', C''\}$. Somit folgt (P).

b) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$z - T = \pi^{-1}(z - S|_{Y_0})\pi.$$

Da nach [Con90], Theorem 5.4, die Zusammenhangskomponenten von $\rho(S)$ entweder disjunkt sind zu $\sigma(S|_{Y_0})$ oder ganz in $\sigma(S|_{Y_0})$ enthalten sind, gilt

$$\sigma(S|_{Y_0}) \subset \overline{\mathbb{D}}$$

und

$$(z - S|_{Y_0})^{-1} = (z-S)^{-1}|_{Y_0}$$

für $|z| > 1$. Seien $K > 0$ und $p, q \geq 0$ wie in Bedingung (iv) von Satz 2.6 zu dem $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalaren Operator $S \in B(Y)$ gewählt. Dann folgt für $1 < |z| < 2$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|(z-T)^{-1}\| &= \|\pi^{-1}\left((z-S)^{-1}|_{Y_0}\right)\pi\| \\ &\leq \left(\|\pi^{-1}\|\|\pi\|K\right)(|z|-1)^{-p}. \end{aligned}$$

Sei $|z| < 1$. Da für $x \in X$ gilt

$$\begin{aligned}
\|(z-T)x\| &= \|\pi^{-1}(z-S)\pi x\| \geq m(\pi^{-1})m(\pi)m(z-S)\|x\| \\
&= m(\pi^{-1})m(\pi)\frac{1}{\|(z-S)^{-1}\|}\|x\| \\
&\geq \frac{m(\pi^{-1})m(\pi)}{K}(1-|z|)^q\|x\|,
\end{aligned}$$

folgt die Abschätzung

$$m(z-T) \geq \frac{m(\pi^{-1})m(\pi)}{K}(1-|z|)^q.$$

□

Die Bedingungen (P) und (R) sind also notwendig für die $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Subskalarität eines Operators $T \in B(X)$. Es stellt sich nun die Frage, welche dieser Bedingungen auch hinreichend dafür ist, dass ein Operator $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar ist. Dazu widmen wir uns in den nächsten beiden Abschnitten den Arbeiten von Badea und Müller ([BM05] sowie [BM06]).

4 Wachstumsbedingungen und Erweiterungen eines Operators

Wir betrachten zuerst allgemein Elemente einer Banachalgebra und untersuchen hinreichende Bedingungen für die Existenz einer größeren Algebra, in der die Elemente invertierbar sind. Wie üblich sei für jede positive Zahl $c > 0$ im Folgenden

$$\frac{c}{0} = \infty.$$

Definition 4.1. *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins und $u \in \mathcal{A}$. Wir definieren*

$$d^{\mathcal{A}}(u) = \inf\left\{\|ux\| : x \in \mathcal{A}, \|x\| = 1\right\}.$$

Bemerkung 4.2. *Für $\mathcal{A} = B(X)$ und für $T \in B(X)$ gilt*

$$d^{B(X)}(T) = m(T).$$

Beweis. Man beachte, dass gilt

$$d^{B(X)}(T) = m(L_T),$$

wobei

$$L_T : B(X) \to B(X), S \mapsto TS$$

der Operator der Linksmultiplikation mit T ist.
Für $x \in X$ und $u \in X'$ bezeichnen wir mit $x \otimes u \in B(X)$ den durch

$$x \otimes u(\xi) = \langle \xi, u \rangle x$$

definierten Operator. Wir fixieren $u \in X'$ mit $\|u\| = 1$ und definieren

$$\Theta : X \to B(X), x \mapsto x \otimes u.$$

Dann sind die Vertikalen in dem vertauschenden Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B(X) & \xrightarrow{L_T} & B(X) \\ {\scriptstyle\Theta}\big\uparrow & & {\scriptstyle\Theta}\big\uparrow \\ X & \xrightarrow{T} & X \end{array}$$

Isometrien. Also ist

$$d^{B(X)}(T) = m(L_T) \leq m(T).$$

Die umgekehrte Ungleichung erhalten wir aus der Beobachtung, dass

$$\begin{aligned} \|TS\| &= \sup\{\|TSx\| : \|x\| = 1\} \\ &\geq \sup\{m(T)\|Sx\| : \|x\| = 1\} \\ &= m(T)\|S\| \end{aligned}$$

für alle $S \in B(X)$ gilt. □

Diese Gleichheit zwischen dem Minimalmodul $m(T)$ und $d^{B(X)}(T)$ für einen Operator T lässt die Frage zu, ob wir auch für eine beliebige Banachalgebra $\mathcal{A}$ und die Abbildung $d^{\mathcal{A}}(\cdot)$ analoge Aussagen wie über den Minimalmodul in Lemma 1.9 beweisen können.

Lemma 4.3. *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra und $u, v \in \mathcal{A}$. Dann gilt:*

a) $d^{\mathcal{A}}(u) = \max\{\alpha \in [0, \infty) : \|ux\| \geq \alpha\|x\| \quad \forall x \in \mathcal{A}\}$.

b) Ist $v \in \mathcal{A}$ invertierbar, so gilt

$$d^{\mathcal{A}}(v) = \|v^{-1}\|^{-1}.$$

c) $d^{\mathcal{A}}(uv) \geq d^{\mathcal{A}}(u)d^{\mathcal{A}}(v)$.

Beweis. Wegen

$$d^{\mathcal{A}}(u) = m(L_u)$$

(L_u Operator der Linksmultiplikation mit u) folgen alle Behauptungen dirket aus Lemma 1.9. □

Der folgende Satz liefert uns eine erste Bedingung für die Existenz größerer Banachalgebren zu Elementen einer vorgegebenen Banachalgebra und der Invertierbarkeit der Elemente in dieser.

Satz 4.4. *Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative Banachalgebra mit Eins und $u \in \mathcal{A}$. Weiter sei $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ein submultiplikative Folge in $(0,\infty)$, das heißt $c_{i+j} \leq c_i \cdot c_j$ für alle $i,j \in \mathbb{N}$. Genau dann gibt es eine unitale Banachalgebra $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ mit derselben Eins so, dass u invertierbar in $\mathcal{B}$ ist mit $\|u^{-j}\| \leq c_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$, wenn*

$$\|a_0\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} c_j \|a_j - a_{j-1}u\|$$

für alle Folgen $(a_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathcal{A}$ mit $a_j = 0$ für fast alle $j \in \mathbb{N}$. In diesem Fall kann man $\mathcal{B}$ kommutativ wählen.

Beweis. Zur Vereinfachung schreiben wir im Folgenden $f_j = a_j - a_{j-1}u$ für $j \geq 1$.
Sei $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ eine Erweiterung so, dass u invertierbar in $\mathcal{B}$ ist und $\|u^{-j}\| \leq c_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Sei $(a_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathcal{A}$ mit $a_j = 0$ für alle $j \geq n$. Schreiben wir

$$a_0 = -\sum_{j=1}^{n} a_j u^{-j} - a_{j-1}u^{-(j-1)}$$

als Teleskopsumme, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \|a_0\| &= \left\| \sum_{j=1}^{n} (a_j - a_{j-1}u)u^{-j} \right\| \\ &= \left\| \sum_{j=1}^{n} f_j u^{-j} \right\| \leq \sum_{j=1}^{n} c_j \|f_j\|. \end{aligned}$$

Für die Rückrichtung setzen wir $c_0 = 1$. Sei $\mathcal{C}$ die Menge aller Potenzreihen $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ in einer Veränderlichen x mit Koeffizienten $a_j \in \mathcal{A}$ so, dass

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|a_j\| c_j < \infty.$$

Versehen mit der punktweisen Addition und der Multiplikation, die durch

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right) x^k$$

gegeben ist, sowie der durch

$$\left\| \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \right\| = \sum_{j=0}^{\infty} \|a_j\| c_j$$

definierten Norm, wird $\mathcal{C}$ zu einer kommutativen Banachalgebra, siehe etwa Example 2.13 in [Dal00]. Die Abbildung

$$\mathcal{A} \to \mathcal{C}, a \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$$

mit $a_0 = a$ und $a_j = 0$ für $j > 0$ definiert einen isometrischen Homomorphismus unitaler Banachalgebren. Vermöge dieser Isometrie lässt sich $\mathcal{A}$ als abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{C}$ auffassen. Sei J das von $1_{\mathcal{A}} - ux$ erzeugte, abgeschlossene Ideal und sei $\mathcal{B} = \mathcal{C}/J$. Sei $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ die Komposition der Einbettung $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{C}$ und der Quotientenabbildung $\mathcal{C} \to \mathcal{C}/J$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \rho(u) \cdot (x+J) &= (u+J)(x+J) = ux + J \\ &= ux + (1_{\mathcal{A}} - ux) + J = 1_{\mathcal{A}} + J = 1_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

und somit ist $\rho(u)$ invertierbar in $\mathcal{B}$ mit dem Inversen $(x+J)$. Desweiteren gilt

$$(x+J)^n = x^n + J$$

und somit, da die Quotientenabbildung Norm ≤ 1 hat, folgt $\|(x+J)^n\|_{\mathcal{B}} \leq \|x^n\|_{\mathcal{C}} = c_n$. Es genügt also zu zeigen, dass ρ eine Isometrie ist. Nach Definition der Norm auf der Quotientenalgbra $\mathcal{B}$ gilt offensichtlich

$$\|\rho(a)\|_{\mathcal{B}} = \|a + J\|_{\mathcal{B}} \leq \|a\|_{\mathcal{C}} = \|a\|_{\mathcal{A}}.$$

Angenommen es gäbe ein $a^* \in \mathcal{A}$ so, dass $\|\rho(a^*)\|_{\mathcal{B}} < \|a^*\|_{\mathcal{A}}$. Nach der Definition der Quotientennorm

$$\|a + J\|_{\mathcal{B}} = \inf_{c \in J} \|a + c\|_{\mathcal{C}}$$

und des Infimums gibt es Elemente $a_j \in \mathcal{A}$ so, dass

$$\begin{aligned} \|a^*\|_{\mathcal{A}} &> \|a^* + (1 - ux) \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j\|_{\mathcal{C}} \\ &= \|a^* + \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j - \sum_{j=0}^{\infty} u a_j x^{j+1}\|_{\mathcal{C}} \\ &= \|a^* x^0 + a_0 x^0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j x^j - \sum_{j=1}^{\infty} u a_{j-1} x^j\|_{\mathcal{C}} \\ &= c_0 \|a^* + a_0\|_{\mathcal{A}} + \sum_{j=1}^{\infty} c_j \|a_j - a_{j-1} u\|_{\mathcal{A}} \\ &\overset{c_0=1}{\geq} \|a^*\|_{\mathcal{A}} - \|a_0\|_{\mathcal{A}} + \sum_{j=1}^{\infty} c_j \|f_j\|. \end{aligned}$$

Also gilt $\|a_0\| > \sum\limits_{j=1}^{\infty} c_j\|f_j\|$. Da die Menge der Potenzreihen mit $a_j = 0$ für fast alle $j \in \mathbb{N}$ dicht in $\mathcal{C}$ ist, können wir annehmen, dass nur endlich viele $a_j \neq 0$ sind. Dies führt uns zu einem Widerspruch. Also kann es kein solches $a^* \in \mathcal{A}$ geben und somit gilt $\|\rho(a)\|_{\mathcal{B}} = \|a\|_{\mathcal{A}}$ für alle $a \in \mathcal{A}$. $\square$

Wir haben also eine notwendige und hinreichende Bedingung für Elemente einer Banachalgebra gefunden, dass es eine größere Banachalgebra gibt, in der die Elemente invertierbar sind und die Potenzen des Inversen vorgegebene Wachstumsbedingungen erfüllen. Unser Ziel ist es nun zusätzliche Bedingungen an die Folge $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ zu stellen, unter welchen das Kriterium aus Satz 4.4 für die Existenz einer solchen größeren Algebra automatisch erfüllt ist.

Definition 4.5. *Sei $\mathcal{A}$ eine unitale Banachalgebra und $u \in \mathcal{A}$. Weiter sei $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $(0,\infty)$ eine submultiplikative Folge. Wir sagen, dass die Folge $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ die Eigenschaft $(*)$ bezüglich u besitzt, wenn es eine Folge $(k_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{N}_0$ gibt mit $0 = k_0 < k_1 < \ldots$ und*

$$c_j \geq \left(d^{\mathcal{A}}(u^{k_1})d^{\mathcal{A}}(u^{k_2-k_1})\ldots d^{\mathcal{A}}(u^{k_{n+1}-k_n})\right)^{-1} \|u^{k_{n+1}-j}\|$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $k_n < j \leq k_{n+1}$.

Die Bedingung $(*)$ ermöglicht die folgende nützliche Umformulierung von Satz 4.4.

Satz 4.6. *Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative unitale Banachalgebra und $u \in \mathcal{A}$. Sei $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine submultiplikative Folge in $(0,\infty)$, die die Bedingung $(*)$ für u erfüllt. Dann gibt es eine kommutative Banachalgebra $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$, so dass u in $\mathcal{B}$ invertierbar ist mit $\|u^{-j}\| \leq c_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Setze $c_0 = 1$. Sei $(a_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathcal{A}$ mit $a_j = 0$ für fast alle $j \in \mathbb{N}$. Wir schreiben $f_j = a_j - a_{j-1}u$ für $j > 0$. Dann gilt $d^{\mathcal{A}}(u^m) \leq \left\|u^m \frac{a_l}{\|a_l\|}\right\|$ und somit

$$\|a_l\| \leq d^{\mathcal{A}}(u^m)^{-1}\|u^m a_l\| \tag{5}$$

für alle $m, l \in \mathbb{N}_0$. Also ist

$$\begin{aligned}
\|a_0\| &\overset{(5)}{\leq} d^{\mathcal{A}}(u^{k_1})^{-1}\|a_0u^{k_1}\| \\
&\leq d^{\mathcal{A}}(u^{k_1})^{-1}\left(\|a_0u^{k_1} - a_1u^{k_1-1}\| + \ldots + \|a_{k_1-1}u - a_{k_1}\| + \|a_{k_1}\|\right) \\
&\leq d^{\mathcal{A}}(u^{k_1})^{-1}\left(\|f_1\|\|u^{k_1-1}\| + \|f_2\|\|u^{k_1-2}\| + \ldots + \|f_{k_1}\|\right) + d^{\mathcal{A}}(u^{k_1})^{-1}\|a_{k_1}\|.
\end{aligned}$$

Da die Folge $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ die Bedingung $(*)$ bezüglich u erfüllt, gilt die Abschätzung

$$\|a_0\| \leq \sum_{j=1}^{k_1} c_j\|f_j\| + d^{\mathcal{A}}(u^{k_1})^{-1}\|a_{k_1}\|. \tag{6}$$

Mithilfe der Ungleichung (5) lässt sich nun abschätzen

$$d^{\mathcal{A}}(u^{k_1})^{-1}\|a_{k_1}\| \leq d^{\mathcal{A}}(u^{k_1})^{-1}d^{\mathcal{A}}(u^{k_2-k_1})^{-1}\|u^{k_2-k_1}a_{k_1}\|.$$

Indem man wieder benutzt, dass die Folge $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ die Eigenschaft $(*)$ bezüglich u besitzt, erhält man wie oben die Abschätzung

$$d^{\mathcal{A}}(u^{k_1})^{-1}\|a_{k_1}\| \leq \sum_{j=k_1+1}^{k_2} c_j\|f_j\| + d^{\mathcal{A}}(u^{k_1})^{-1}d^{\mathcal{A}}(u^{k_2-k_1})^{-1}\|a_{k_2}\|.$$

Wendet man diese Schritte nun induktiv an, so erhält man

$$\|a_0\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} c_j\|f_j\|.$$

Damit haben wir gezeigt, dass u und die Folge $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ die in Satz 4.4 angegebene Abschätzung erfüllen. Nach diesem Satz existiert eine kommutative Banachalgebra $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ so, dass u invertierbar in $\mathcal{B}$ ist mit $\|u^{-j}\| \leq c_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$. $\square$

Eine wichtige Arbeit in diesem Gebiet stammt von Arens [Are58]. Er bewies, dass zu Elementen $u \in \mathcal{A}$ einer Banachalgebra $\mathcal{A}$ mit $d^{\mathcal{A}}(u) > 0$ eine Banachalgebra $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ derart existiert, dass u invertierbar in $\mathcal{B}$ ist. Desweiteren folgt aus seiner Konstruktion, dass $\|u^{-j}\| \leq \left(d^{\mathcal{A}}(u)\right)^{-j}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Dieses Resultat von Arens, lässt sich aus Satz 4.6 folgern:
Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra und $u \in \mathcal{A}$ mit $d^{\mathcal{A}}(u) > 0$. Wir setzen $c_j = \left(d^{\mathcal{A}}(u)\right)^{-j}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$c_{j+i} = \left(d^{\mathcal{A}}(u)\right)^{-(j+i)} = \left(d^{\mathcal{A}}(u)\right)^{-j}\left(d^{\mathcal{A}}(u)\right)^{-i} = c_j c_i$$

für alle $j, i \in \mathbb{N}$. Desweiteren ist $k_n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen und für alle $k_n < j \leq k_{n+1}$ gilt

$$\begin{aligned}
\left(d^{\mathcal{A}}(u)\right)^{-j} &= \left(d^{\mathcal{A}}(u)\right)^{-k_1}\left(d^{\mathcal{A}}(u)\right)^{-(k_2-k_1)}\cdots\left(d^{\mathcal{A}}(u)\right)^{-(k_{n+1}-k_n)} \\
&\overset{4.3}{\geq} \left(d^{\mathcal{A}}(u^{k_1})d^{\mathcal{A}}(u^{k_2-k_1})\cdots d^{\mathcal{A}}(u^{k_{n+1}-k_n})\right)^{-1}\|1_{\mathcal{A}}\| \\
&= \left(d^{\mathcal{A}}(u^{k_1})d^{\mathcal{A}}(u^{k_2-k_1})\cdots d^{\mathcal{A}}(u^{k_n-k_{n+1}})\right)^{-1}\|u^{k_{n+1}-j}\|.
\end{aligned}$$

Somit erfüllt die Folge $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ die Bedingung $(*)$ bezüglich u und nach Satz 4.6 ist das Ergebnis von Arens bewiesen.
Folgendes Lemma aus der Spektraltheorie ist nützlich für unser weiteres Vorgehen.

Lemma 4.7. *Sei $\mathcal{R}$ eine Banachalgebra mit Einselement 1 und sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{R}$ eine abgeschlossene Unteralgebra mit $1 \in \mathcal{A}$. Dann gilt für alle $x \in \mathcal{A}$*

$$\sigma^{\mathcal{R}}(x) \subset \sigma^{\mathcal{A}}(x).$$

Beweis. Sei $x \in \mathcal{A}$ beliebig und sei $\lambda \in \sigma^{\mathcal{R}}(x)$. Dann ist $\lambda 1 - x$ nicht invertierbar in $\mathcal{R}$. Angenommen $\lambda 1 - x$ sei invertierbar in $\mathcal{A}$. Dann gibt es ein $w \in \mathcal{A}$ mit

$$(\lambda 1 - x)w = 1 = w(\lambda 1 - x).$$

Da aber $w \in \mathcal{A} \subset \mathcal{R}$, wäre $\lambda 1 - x$ invertierbar in $\mathcal{R}$. Dies ist ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung. $\square$

Im Folgenden werden wir uns die Banachalgebra $B(X)$ der stetig linearen Operatoren auf einem Banachraum X näher betrachten.

Satz 4.8. *Sei $T \in B(X)$ und $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $(0,\infty)$ eine submultiplikative Folge, die die Bedingung $(*)$ bezüglich T erfüllt. Dann gibt es einen Banachraum $Y \supset X$ und einen invertierbaren Operator $S \in B(Y)$ mit*

(i) $S|_X = T$,

(ii) $\|S^j\| \leq \|T^j\|$ *für alle* $j \in \mathbb{N}$,

(iii) $\|S^{-j}\| \leq c_j$ *für alle* $j \in \mathbb{N}$ *und*

(iv) $\sigma(S) \subset \sigma(T)$.

Beweis. Sei $\mathcal{A}$ die von T und $R(\lambda, T)$ für alle $\lambda \in \rho(T)$ erzeugte abgeschlossene Unteralgebra von $B(X)$. Dann ist $\mathcal{A}$ offensichtlich kommutativ, denn T vertauscht mit allen seinen Resolventen und alle Resolventen von T vertauschen. Außerdem enthält $\mathcal{A}$ die Eins, denn

$$1_{B(X)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_{\|T\|+1}(0)} R(\lambda, T) d\lambda \subset \mathcal{A}.$$

Beachte hierzu, dass sich dieses Integral als Grenzwert von Riemannsummen in $R(\lambda, T)$ darstellen lässt und dass diese Riemannsummen in $\mathcal{A}$ liegen. Desweiteren ist offensichtlich

$$\sigma^{\mathcal{A}}(T) = \sigma^{B(X)}(T). \tag{7}$$

Sei $\mathcal{B} = \mathcal{A} \oplus X$. Wir definieren eine Multiplikation auf $\mathcal{B}$ durch

$$(A \oplus x)(A' \oplus x') = AA' \oplus (Ax' + A'x) \qquad (A, A' \in \mathcal{A}, x, x' \in X)$$

und eine Norm durch

$$\|(A \oplus x)\| = \|A\|_{\mathcal{A}} + \|x\|.$$

Diese Multiplikation und diese Norm machen $\mathcal{B}$ zu einer kommutativen Banachalgebra mit Eins und $\mathcal{A}$ zu einer abgeschlossenen Unteralgebra vermöge der isometrischen Einbettung

$$j : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}, A \mapsto (A \oplus 0).$$

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$d^{\mathcal{B}}(T^n \oplus 0) = d^{B(X)}(T^n) = m(T^n),$$

denn

$$\begin{aligned}
d^{\mathcal{B}}(T^n \oplus 0) &= \inf\{\|(T^n \oplus 0)(S \oplus x)\| : \|S \oplus x\| = \|S\| + \|x\| = 1\} \\
&= \inf\{\|T^n S\| + \|T^n x\| : \|S\| + \|x\| = 1\} \\
&\overset{S=0}{\leq} \inf\{\|T^n x\| : \|x\| = 1\} = m(T^n).
\end{aligned}$$

Andererseits gilt für $x \in X$ und $S \in \mathcal{A}$ mit $\|S\| + \|x\| = 1$ nach Bemerkung 4.2

$$\begin{aligned}
\|T^n S\| + \|T^n x\| &\geq m(T^n)\|S\| + m(T^n)\|x\| \\
&= m(T^n).
\end{aligned}$$

Zusammen mit Bemerkung 4.2 impliziert dies die Identität

$$d^{\mathcal{B}}(T^n \oplus 0) = m(T^n) = d^{B(X)}(T^n).$$

Daher erfüllt die Folge $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ die Bedingung $(*)$ bezüglich $(T \oplus 0)$ als Element der kommutativen unitalen Banachalgebra $\mathcal{B} = \mathcal{A}\oplus X$ und nach Satz 4.6 existiert eine unitale kommutative Banachalgebra $\mathcal{C} \supset \mathcal{B}$ mit der selben Eins so, dass $(T \oplus 0)$ invertierbar in $\mathcal{C}$ ist mit $\|(T \oplus 0)^{-j}\| \leq c_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$.
Sei nun $S : \mathcal{C} \to \mathcal{C},\ Sc = (T\oplus 0)c$. Dann ist S invertierbar mit $\|S^{-j}\| \leq c_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Identifizieren wir $x \in X$ mit $(0 \oplus x) \in \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$, dann gilt

$$S(0 \oplus x) = (T \oplus 0)(0 \oplus x) = (0 \oplus Tx)$$

und wir erhalten $S|_X = T$. Somit haben wir eine invertierbare Erweiterung von T gefunden. Außerdem sieht man, dass

$$S^j c = (T \oplus 0)^j c = (T^j \oplus 0)c$$

gilt und somit

$$\|S^j\| = \|T^j \oplus 0\| = \|T^j\|.$$

Letztendlich erhalten wir auch, dass

$$\sigma^{B(X)}(T) \overset{(7)}{=} \sigma^{\mathcal{A}}(T) \overset{j \text{ hom.}}{\supset} \sigma^{\mathcal{B}}(T \oplus 0) \overset{4.7}{\supset} \sigma^{\mathcal{C}}(T \oplus 0).$$

Für $\lambda \notin \sigma^{\mathcal{C}}(T \oplus 0)$ existiert ein $u \in \mathcal{C}$, so dass $((T \oplus 0) - \lambda)u = 1_{\mathcal{C}} = u((T \oplus 0) - \lambda)$. Dann gilt für alle $c \in \mathcal{C}$

$$u(S - \lambda)c = u((T \oplus 0) - \lambda)c = c$$

und somit ist $R : \mathcal{C} \to \mathcal{C},\ Rc = uc$ die Inverse zu $S - \lambda$. Daraus erhalten wir

$$\sigma(T) \supset \sigma^{\mathcal{C}}(T \oplus 0) \supset \sigma(S).$$

□

Unser nächstes Ziel wird es nun sein, eine submultiplikative Folge $(c_j)_j$ positiver Zahlen zu finden, die der Bedingung $(*)$ bezüglich T genügt und zusätzlich noch die Ungleichung $c_j \leq Cj^s$ für alle $j \in \mathbb{N}$ mit geeineten $C > 0$ und $s \geq 0$ erfüllt.
In Korollar 5.3 werden wir uns eine solche Folge konstruieren. (Beachte hierzu Definition 4.14 und Bemerkung 4.15.) Diese Konstruktion ist jedoch sehr aufwendig und liefert uns interessante zusätzliche Ergebnisse. Zur Vorbereitung führen wir im folgenden Unterabschnitt eine Klasse spezieller Banachräume ein.

4.1 Erweiterungen auf $SQ_p(X)$-Räume

Die Räume die wir einführen woolen, sind die sogenannten $SQ_p(X)$-Räume für einen Banachraum X. Ebenfalls werden wir invertierbare Erweiterungen mit vorgegebenem Potenzwachstum auf solche $SQ_p(X)$-Räume betrachten. Wir werden zudem sehen, dass wir Operatoren auf Hilberträumen wieder zu Operatoren auf Hilberträumen erweitern zu können.

Definition 4.9. *Sei $p \geq 1$ und X ein Banachraum. Ein Banachraum Y heißt ein $SQ_p(X)$-Raum, wenn er isomorph zu einem Quotienten eines abgeschlossenen Teilraums eines Ultraproduktes von $L^p(\Omega, \mu, X)$-Räumen für irgendwelche Maßräume (Ω, μ) ist.*

Sei E ein beliebiger Banachraum und $p \geq 1$. Für eine $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ mit komplexen Einträgen definieren wir

$$\|A\|_{p,E} = \sup \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j \right\|^p \right)^{1/p} : e_1 \dots e_n \in E, \sum_{j=1}^{n} \|e_j\|^p \leq 1 \right\}.$$

Bemerkung 4.10. *(a) Sei X ein Banachraum. Dann ist ein Banachraum Y genau dann ein $SQ_p(X)$-Raum, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede komplexe $n \times n$-Matrix A gilt*

$$\|A\|_{p,Y} \leq \|A\|_{p,X}.$$

(b) Ist H ein Hilbertraum, so ist jeder $SQ_2(H)$-Raum insbesondere ein Hilbertraum.

Beweis. (a) Theorem 3.2 in [LM96]

(b) Nach [Lan83] Chapter XI, §1, ist ein $L^2(\Omega, \mu, H)$ wieder ein Hilbertraum. Desweiteren gilt wegen [Pis86] Chapter 8 b und Proposition 2.3, dass Ultraprodukte von Hilberträumen wieder Hilberträume sind. Da nun Quotienten abgeschlossener Teilräume von Hilberträumen wieder Hilberträume sind, folgt die Behauptung.

□

Wir suchen hinreichende Bedingungen dafür, dass ein gegebener Operator eine Erweiterung auf einen $SQ_p(X)$-Raum besitzt.

Lemma 4.11. *Seien $x_1, \dots, x_n \geq 0$ und $p \geq 1$. Dann gilt*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^p \leq n^{p-1}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^p\right).$$

Beweis. Seien $x_1, \dots, x_n \geq 0$ und $p > 1$. Dann gilt mit der Hölder-Ungleichung

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 \\ 1 \cdot x_2 \\ \vdots \\ 1 \cdot x_n \end{pmatrix} \right\|_1 \leq \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_q \cdot \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_p,$$

wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ bzw. $q = \frac{p}{p-1}$. Weiter gilt

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_q \cdot \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} 1^q\right)^{(1/q)} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^p\right)^{(1/p)} = n^{1/q} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^p\right)^{(1/p)}.$$

Potenzieren wir mit p, so erhalten wir schließlich die Behauptung. □

Folgerung 4.12. *Sei $p \geq 1$ und X ein Banachraum. Dann gilt*

$$\frac{1}{2^{p-1}}\|a\|^p - \|b\|^p \leq \|a-b\|^p$$

für alle $a, b \in X$.

Beweis. Mit $n = 2$, $x_1 = \|a-b\|$ und $x_2 = \|b\|$ folgt direkt aus der Dreiecksungleichung und Lemma 4.11, dass

$$\frac{1}{2^{p-1}}\|a\|^p \leq \frac{1}{2^{p-1}}(\|a-b\| + \|b\|)^p \leq \frac{1}{2^{p-1}}2^{p-1}(\|a-b\|^p + \|b\|^p)$$

und somit

$$\frac{1}{2^{p-1}}\|a\|^p - \|b\|^p \leq \|a-b\|^p.$$

□

Der folgende Satz (Theroem 3.1 in [BM05]) ist von zentraler Bedeutung in dieser Arbeit. Er formuliert Bedingungen an einen Operator $T \in B(X)$, die es gestatten,ihn zu einem invertierbaren Operator auf einen $SQ_p(X)$-Raum $Y \supset X$ erweitern zu können.

Satz 4.13. *Sei $c = (c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine submultiplikative Folge positiver Zahlen, seien $M, p \geq 1$ und sei $T \in B(X)$ ein stetiger Operator auf einem Banachraum X. Dann gilt:*

(a) Ist $\pi : X \hookrightarrow Y$ *ein stetig linearer Operator in einen Banachraum* Y *mit* $\|x\| \leq M\|\pi(x)\|$ *für alle* $x \in X$ *und ist* $S \in B(Y)$ *invertierbar mit* $S\pi = \pi T$ *und*

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} S^{-j}\pi(y_j) \right\| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} c_j^p \|y_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ *und* $y_1, \ldots, y_n \in X$*, dann gilt für je endlich viele Vektoren*

$$x, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \in X$$

mit

$$T^n x = x_0 + Tx_1 + \ldots T^{n-1}x_{n-1}$$

die Ungleichung

$$\|x\|^p \leq M^p(c_n^p\|x_0\|^p + c_{n-1}^p\|x_1\|^p + \ldots + c_1^p\|x_{n-1}\|^p).$$

(b) Folgt für je endlich viele Vektoren $x, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \in X$ *mit*

$$T^n x = x_0 + Tx_1 + \ldots T^{n-1}x_{n-1}$$

die Ungleichung

$$\|x\|^p \leq M^p(c_n^p\|x_0\|^p + c_{n-1}^p\|x_1\|^p + \ldots + c_1^p\|x_{n-1}\|^p),$$

dann gibt es umgekehrt einen stetig linearen Operator $\pi : X \hookrightarrow Y$ *in einen* $SQ_p(X)$*-Raum* $(Y, |\cdot|)$ *mit*

$$\frac{\|x\|}{M2^{(p-1)/p}} \leq |\pi(X)| \leq \|x\|$$

für alle $x \in X$ *und einen invertierbaren Operator* $S \in B(Y)$ *mit*

(i) $S\pi = \pi T$*,*

(ii) $\|S^j\| \leq \|T^j\|$ *und* $\|S^{-j}\| \leq c_j$ *für alle* $j \in \mathbb{N}$*,*

(iii) $\sigma(S) \subset \sigma(T)$*,*

(iv) $\left| \sum\limits_{j=1}^{n} S^{-j}\pi(y_j) \right| \leq \left(\sum\limits_{j=1}^{n} c_j^p \|y_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ *für je endlich viele* $y_1, \ldots y_n \in X$.

Beweis. (a) Sei $T^n x = x_0 + Tx_1 + \ldots + T^{n-1}x_{n-1}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|x\| &\leq M\|\pi(x)\| = M\|S^{-n}S^n\pi(x)\| = M\|S^{-n}\pi(T^n x)\| \\
&= M\left\|S^{-n}\pi\left(\sum_{j=0}^{n-1} T^j x_j\right)\right\| = M\left\|S^{-n}\left(\sum_{j=0}^{n-1} S^j\pi(x_j)\right)\right\| \\
&= M\left\|\sum_{j=0}^{n-1} S^{-(n-j)}\pi(x_j)\right\| \\
&\leq M\left(\sum_{j=0}^{n-1} c_{n-j}^p\|x_j\|^p\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

(b) Angenommem $T^n x = x_0 + Tx_1 + \ldots T^{n-1}x_{n-1}$ impliziert

$$\|x\|^p \leq M^p(c_n^p\|x_0\|^p + c_{n-1}^p\|x_1\|^p + \ldots + c_1^p\|x_{n-1}\|^p).$$

Für $x_0 = T^n x$ erhalten wir

$$\|T^n x\| \geq \frac{1}{Mc_n}\|x\|.$$

Also ist jeder Operator T^n injektiv.

Die folgende Konstruktion geht zurück auf [BY01], Theorem 3.3.
Wir nennen zwei Paare (x,t) und (y,s) in $X_0 = X \oplus \mathbb{Z}$ äquivalent (geschrieben $(x,t) \sim (y,s)$), falls ein $m \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $s+m, t+m \in \mathbb{N}_0$ und $T^{s+m}x = T^{t+m}y$. Offensichtlich ist diese Relation reflexiv und symmetrisch. Um zu zeigen, dass diese Relation transistiv und somit eine Äquivalenzrelation ist, genügt es zu bemerken, dass für je drei Paare $(x,t), (y,s), (z,r) \in X_0$ mit $(x,t) \sim (y,s)$ und $(y,s) \sim (z,r)$ ein $m \in \mathbb{N}_0$ existiert mit

$$T^{s+m}x = T^{t+m}y, \; T^{r+m}y = T^{s+m}z$$

und dass in diesem Fall

$$T^{r+(s+2m)}x = T^{r+m+s+m}x = T^{t+m+r+m}y = T^{t+m+s+m}z = T^{t+(s+2m)}z$$

gilt. Sei X_1 die Menge aller Äquivalenzklassen $X_1 = X_0/\sim$ und sei $[x,t]$ die Äquivalenzklasse des Paares $(x,t) \in X_0$.
Für alle $x \in X$, $t \in \mathbb{Z}$ gilt

$$(x,t) \sim (Tx, t+1), \tag{8}$$

denn für $m \in \mathbb{N}_0$ mit $t+m \in \mathbb{N}_0$ ist auch $t+m+1 \in \mathbb{N}_0$und

$$T^{t+1+m}Tx = T^{t+m}(Tx).$$

Insbesondere gibt es in jeder Klasse $[x,t]$ mit $t < 0$ einen Vertreter $(T^{-t}x, 0)$. Wir können also im Folgenden immer annehmen, dass $t \in \mathbb{N}_0$ ist. Aus (8) folgt sofort, dass $[0,0]=[0,s]$ für alle $s\in\mathbb{Z}$.

Wir definieren Verknüpfungen auf dem Raum X_1 durch

$$+:X_1\times X_1\to X_1, [x,t]+[y,s]=[T^sx+T^ty,s+t],$$

falls $t,s\in\mathbb{N}_0$ und

$$\cdot:\mathbb{C}\times X_1\to X_1, \alpha\cdot[x,t]=[\alpha x,t].$$

Seien $(x',t')\sim(x,t)$ und $(y',s')\sim(y,s)$ mit $t,t',s,s'\in\mathbb{N}_0$. Dann existiert ein $m\in\mathbb{N}_0$ so, dass

$$T^{t'+m}x=T^{t+m}x' \text{ und } T^{s'+m}y=T^{s+m}y'.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}T^{s'+t'+m}(T^sx+T^ty) &= T^{s'+t'+s+m}x+T^{s'+t'+t+m}y\\ &= T^{s+t+m+s'}x'+T^{(t+s+m+t'}y'=T^{s+t+m}(T^{s'}x'+T^{t'}y').\end{aligned}$$

Somit stehen $(T^sx+T^ty,s+t)$ und $(T^{s'}x'+T^{t'}y',s'+t')$ in Relation zueinander. Die Operationen sind also wohldefiniert.
Weiter gilt für $[x,t],[y,s],[z,r]\in X_1$ mit $r,s,t\in\mathbb{N}_0$ und $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
[x,t]+[y,s] &= [T^sx+T^ty,t+s]\\
&= [T^ty+T^sx,s+t]=[y,s]+[x,t],\\
[x,t]+([y,s]+[z,r]) &= [x,t]+[T^ry+T^sz,s+r]\\
&= [T^{s+r}x+T^{t+r}y+T^{t+s}z,t+s+r]\\
&= [T^sx+T^ty,t+s]+[z,r]=([x,t]+[y,s])+[z,r],\\
[x,t]+[0,0] &= [T^0x+T^t0,t]=[x,t],\\
[x,t]+[-x,t] &= [T^t(-x)+T^tx,t+t]=[0,2t]=[0,0],\\
(\alpha+\beta)[x,t] &= [\alpha x+\beta x,t]\overset{(8)}{=}[T^t\alpha x+T^t\beta x,t+t]=[\alpha x,t]+[\beta x,t],\\
\alpha([x,t]+[y,s]) &= \alpha[T^sx+T^ty,t+s]\\
&= [T^s\alpha x+T^t\alpha y,t+s]=[\alpha x,t]+[\alpha y,s].
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen zeigen, dass X_1 versehen mit obigen Operationen zu einem Vektorraum wird.
Setze $c_0=1$. Wir wollen nun zeigen, dass

$$|\cdot|:X_1\to[0,\infty),\ |[x,t]|=\inf\left\{\sum_{j=0}^n\|x_J\|^pc_j^p : n\in\mathbb{N}_0,\sum_{j=0}^n[x_j,j]=[x,t]\right\}^{1/p}$$

eine Norm auf X_1 definiert. Diese Abbildung ist wohldefiniert, da für $[x,t]\in X_1$ mit $t\in\mathbb{N}_0$ gilt

$$[x,t]=[0,0]+[0,1]+\ldots+[0,t-1]+[x,t].$$

Außerdem gilt offensichtlich $|\lambda[x,t]| = |\lambda||[x,t]|$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und $[x,t] \in X_1$.
Seien nun $[x,t],[y,s] \in X_1$ mit den Zerlegungen
$[x,t] = \sum_j [x_j, j]$ und $[y,s] = \sum_j [y_j, j]$. Dann folgt wegen der Minkowski-Ungleichung, dass

$$|[x,t]+[y,s]| \leq \left(\sum_j \|x_j + y_j\|^p c_j^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_j \|x_j\|^p c_j^p\right)^{1/p} + \left(\sum_j \|y_j\|^p c_j^p\right)^{1/p}.$$

Bilden wir das Infimum über alle solchen Zerlegungen von $[x,t]$ und $[y,s]$, so erhalten wir die Dreiecksungleichung für $|\cdot|$.
Bleibt noch die Definitheit zu zeigen. Nehmen wir uns hierfür ein $x \in X$, ein $t \in \mathbb{N}_0$ und eine Zerlegung

$$[x,t] = \sum_{j=0}^{n} [x_j, j].$$

Dann gilt

$$[x,t] \overset{(8)}{=} \sum_{j=0}^{n} [T^{n-j} x_j, n] = \left[\sum_{j=0}^{n} T^{n-j} x_j, n\right].$$

Nach Definition der äquivalenzrelation existiert ein $l \in \mathbb{N}_0$ mit

$$T^{n+l}(x - T^t x_0) = \sum_{j=1}^{n} T^{n+l-j} T^t x_j.$$

Da T^l injektiv ist, folgt

$$T^n(x - T^t x_0) = \sum_{j=1}^{n} T^{n-j} T^t x_j = \sum_{j=0}^{n-1} T^j y_j$$

mit $y_{n-j} = T^t x_j$ für $j = 1, \dots n$. Nach Folgerung 4.12 gilt mit $a = x$ und $b = T^t x_0$, dass

$$\frac{1}{2^{p-1}} \|x\|^p - \|T^t x_0\|^p \leq \|x - T^t x_0\|^p$$

und somit

$$\frac{1}{2^{p-1}} \|x\|^p \leq M^p \left(\sum_{j=0}^{n} c_j^p \|T^t x_j\|^p\right) \leq M^p \|T^t\|^p \left(\sum_{j=0}^{n} c_j^p \|x_j\|^p\right).$$

Da dies für alle Zerlegungen von $[x,t]$ gilt, können wir nun folgern, dass

$$|[x,t]| \geq \frac{1}{2^{(p-1)/p} M \|T^t\|} \|x\|.$$

Damit ist gezeigt, dass $|\cdot|$ eine Norm auf X_1 definiert.
Die Abbildung $\pi : X \hookrightarrow X_1,\ x \mapsto [x, 0]$ definiert eine topologische Einbettung von X nach X_1. Offensichtlich gilt

$$|\pi(x)| \leq \|x\|.$$

Der vorhergehende Abschnitt zeigt zudem, dass für alle $x \in X$ gilt

$$|\pi(x)| = |[x, 0]| \geq \frac{1}{2^{(p-1)/p} M} \|x\|.$$

Wir definieren eine lineare Abbildung durch

$$S : X_1 \to X_1,\ S[x, t] = [x, t-1].$$

Die Abbildung S ist wohldefiniert, denn seien $(x, t), (y, s) \in X_0$ äquivalent, dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ so, dass $t + m, s + m \in \mathbb{N}_0$ und $T^{s+m}x = T^{t+m}y$. Setze $n = m + 1$. Dann gilt $s - 1 + n, t - 1 + n \in \mathbb{N}_0$ sowie

$$T^{s-1+n}x = T^{s+m}x = T^{t+m}y = T^{t-1+n}y.$$

Daraus folgt die Äquivalenz von $(x, t - 1)$ und $(y, s - 1)$.
Seien $[x, t], [y, s] \in X_1$ mit $t, s \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} S([x,t] + [y,s]) &= S[T^s x + T^t y, t + s] = [T^s x + T^t y, t + s - 1] \\ &= [T^{s+1}x + T^{t+1}y, t + s] = [Tx, t] + [Ty + s] \\ &= [x, t-1] + [y, s-1] = S[x, t] + S[y, s]. \end{aligned}$$

Somit ist S linear.
Offensichtlich ist S invertierbar mit

$$S^{-1}[x, t] = [x, t + 1]$$

für alle $[x, t] \in X_1$.
Ebenso gilt nach Gleichung (8), dass $S\pi x = [x, -1] = [Tx, 0] = \pi T x$ für alle $x \in X$ und somit gilt $S\pi = \pi T$.
Nach Gleichung (8) gilt

$$\begin{aligned} [T^j x, t] &= [x, t - j] = S^j [x, t] \\ &= S^j \sum_{k=0}^{n} [x_k, k] = \sum_{k=0}^{n} S^j [x_k, k] \\ &= \sum_{k=0}^{n} [T^j x_k, k] \end{aligned}$$

für jede Darstellung $[x,t] = \sum_{k=0}^{n} [x_k, k]$ eines Elementes $[x,t] \in X_1$ und jedes $j \in \mathbb{N}_0$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
|S^j[x,t]|^p &= |[T^j x, t]|^p \\
&\leq \inf \left\{ \sum_{k=0}^{n} c_k^p \|T^j x_k\|^p : n \in \mathbb{N}_0, [x,t] = \sum_{k=0}^{n} [x_k, k] \right\} \\
&\leq \|T^j\|^p \inf \left\{ \sum_{k=0}^{n} c_k^p \|x_k\|^p : n \in \mathbb{N}_0, [x,t] = \sum_{k=0}^{n} [x_k, k] \right\} \\
&= \|T^j\|^p |[x,t]|^p.
\end{aligned}$$

Also gilt $\|S^j\| \leq \|T^j\|$.
Desweiteren sei $[x,t] \in X_1$ mit der Zerlegung $[x,t] = \sum_{j=0}^{n} [x_j, j]$. Dann gilt für jedes $s \in \mathbb{N}_0$

$$[x, t+s] = S^{-s}[x,t] = \sum_{j=0}^{n} [x_j, j+s].$$

Folglich gilt dann auch

$$|[x, t+s]|^p \leq \sum_{j=0}^{n} c_{j+s}^p \|x_j\|^p.$$

Da die Folge $(c_j)_{j \in \mathbb{N}}$ submultiplikativ ist, gilt nun

$$|S^{-s}[x,t]|^p \leq c_s^p \left(\sum_{j=0}^{n} c_j^p \|x_j\|^p \right).$$

Bilden wir das Infimum über alle Zerlegungen von $[x,t]$, so erhalten wir $\|S^{-s}\| \leq c_s$ für alle $s \in \mathbb{N}$.
Für $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n \in X$ folgt

$$\sum_{j=1}^{n} S^{-j}\pi(x_j) = \sum_{j=1}^{n} S^{-j}[x_j, 0] = \sum_{j=1}^{n} [x_j, j]$$

und somit

$$\left| \sum_{j=1}^{n} S^{-j}\pi(x_j) \right|^p \leq \sum_{j=1}^{n} c_j^p \|x_j\|^p.$$

Wir bezeichnen die Vervollständigung von X_1 als Y. Damit ist Y ein Banachraum bezüglich der Norm $|\cdot|$. Den Operator S erweitern wir zu einem stetig linearen Operator auf Y, welchen wir ebenfalls mit S bezeichnen. Die oben für S bewiesenen Eigenschaften übertragen sich offensichtlich auf die eindeutige stetig lineare Fortsetzung von S.

Wir zeigen, dass Y ein $SQ_p(X)$-Raum ist.
Sei hierzu

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$$

eine $n \times n$-Matrix mit komplexen Einträgen und $\|A\|_{p,X} = 1$. Desweiteren seien $[x_j, t_j] \in X_1$ für $j = 1, \ldots, n$ mit den Zerlegungen

$$[x_j, t_j] = \sum_{\nu=0}^{n(j)} \left[w_\nu^{(j)}, \nu \right].$$

Wir definieren $m = \max\{n(j)\} : j = 1, \ldots, n\}$ und setzen $w_\nu^{(j)} = 0$ für alle $\nu > n(j)$ und für alle $j = 1, \ldots, n$.
Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n [a_{ij} x_j, t_j] \right|^p &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n \sum_{\nu=0}^m [a_{ij} w_\nu^{(j)}, \nu] \right|^p = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{\nu=0}^m \left[\sum_{j=0}^n a_{ij} w_\nu^{(j)}, \nu \right] \right|^p \\
&\leq \sum_{i=1}^n \sum_{\nu=0}^m c_\nu^p \left\| \sum_{j=1}^n a_{ij} w_\nu^{(j)} \right\|^p = \sum_{\nu=0}^m c_\nu^p \sum_{i=1}^n \left\| \sum_{j=1}^n a_{ij} w_\nu^{(j)} \right\|^p \\
&\leq \sum_{\nu=0}^m c_\nu^p \sum_{j=1}^n \|w_\nu^{(j)}\|^p \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{\nu=0}^m c_\nu^p \|w_\nu^{(j)}\|^p.
\end{aligned}$$

Bilden wir nun das Infimum über alle möglichen Zerlegungen von $[x_j, t_j]$ mit $j = 1, \ldots, n$, so erhalten wir

$$\sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n [a_{ij} x_j, t_j] \right|^p \leq \sum_{j=1}^n |[x_j, t_j]^p.$$

Da X_1 dicht in Y liegt, folgt aus obiger Abschätzung, dass

$$\sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j \right|^p \leq \sum_{j=1}^n \|\xi_j\|^p$$

für alle $\xi_1, \ldots, \xi_n \in Y$ und somit auch $\|A\|_{p,Y} \leq 1$. Daher ist nach Bemerkung 4.10 Y ein $SQ_p(X)$-Raum.

Um den Beweis zu beenden, zeigen wir, dass $\sigma(S) \subset \sigma(T)$. Sei hierzu $\lambda \notin \sigma(T)$. Wir definieren

$$L : X_1 \to X_1, \; L[x, t] = [(T - \lambda)^{-1} x, t].$$

Dann ist L wohldefiniert, denn für $(x,t) \sim (y,s)$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}_0$ mit

$$T^{t+m}y = T^{s+m}x.$$

Dann gilt aber auch, da $(T-\lambda)^{-1}$ und T kommutieren, dass

$$T^{s+m}(T-\lambda)^{-1}x = (T-\lambda)^{-1}T^{s+m}x = (T-\lambda)^{-1}T^{t+m}y = T^{t+m}(T-\lambda)^{-1}y.$$

Daher gilt $\big((T-\lambda)^{-1}x, t\big) \sim \big((T-\lambda)^{-1}y, s\big)$.
Für $[x,t] \in X_1$ mit $t \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} (S-\lambda)[x,t] &= [x,t-1] - [\lambda x, t] = [T^t x - T^{t-1}\lambda x, t+t-1] \\ &= [T^{t-1}(T-\lambda)x, t+t-1] \\ &= [(T-\lambda)x, t]. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$L(S-\lambda)[x,t] = L[(T-\lambda)x,t] = [x,t] = (S-\lambda)[(T-\lambda)^{-1}x,t] = (S-\lambda)L[x,t]$$

und somit

$$L(S-\lambda) = 1_{B(X_1)} = (S-\lambda)L.$$

Insbesondere ist L linear. Offensichtlich ist L auch stetig, denn hat $[x,t]$ eine Zerlegung

$$[x,t] = \sum_{j=0}^{n} [x_k, k],$$

so ist $[(T-\lambda)^{-1}x, t] = \sum_{j=0}^{n} [(T-\lambda)^{-1}x_k, k]$. Daraus folgt

$$|L[x,t]|^p \leq \sum_{j=0}^{n} \|(T-\lambda)^{-1}\|^p \|x_k\|^p c_k^p = \|(T-\lambda)^{-1}\|^p \sum_{j=0}^{n} \|x_k\|^p c_k^p,$$

also $\|L\| \leq \|(T-\lambda)^{-1}\|$. Die Abbildung L hat also eine stetig lineare Fortsetzung auf Y, die wir ebenfalls mit L bezeichnen. Da $X_1 \subset Y$ dicht ist, gilt die Identität $L(S-\lambda)\xi = \xi = (S-\lambda)L\xi$ für alle $\xi \in Y$. Also ist $\lambda \notin \sigma(S)$. Damit ist auch die Eigenschaft (iii) bewiesen.

□

Unser nächstes Ziel ist es, dass in Teil b) von Satz 4.13 formuliert Kriterium für die Existenz geeigneter invertierbarer Fortsetzungen in eine Form zu bringen, die für unsere Anwendungen nützlicher ist.

Definition 4.14. *Sei $T \in B(X)$ ein Operator und $p \geq 1$. Sei $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine submultiplikative Folge in $(0,\infty)$.*

(a) Die Folge $(c_j)_j$ erfüllt die Bedingung $(*)_p$ bezüglich T definitionsgemäß, wenn es eine Folge $(k_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{N}_0$ mit $0 = k_0 < k_1 < \ldots$ gibt, so dass

$$c_j \geq \frac{2^{\frac{(n+1)(p-1)}{p}}(k_{n+1}-k_n)^{\frac{(p-1)}{p}}}{m(T^{k_1})m(T^{k_2-k_1})\ldots m(T^{k_{n+1}-k_n})}\|T^{k_{n+1}-j}\|$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $k_n < j \leq k_{n+1}$.

(b) Die Folge $(c_j)_j$ erfüllt die Bedingung $(*)_\infty$ bezüglich T, wenn es eine Folge $(k_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{N}_0$ mit $0 = k_0 < k_1 < \ldots$ gibt, so dass

$$c_j \geq \frac{2^{n+1}(k_{n+1}-k_n)}{m(T^{k_1})m(T^{k_2-k_1})\ldots m(T^{k_{n+1}-k_n})}\|T^{k_{n+1}-j}\|$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $k_n < j \leq k_{n+1}$.

Bemerkung 4.15. *Sei $T \in B(X)$ und $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ein submultiplikative Folge in $(0,\infty)$.*

(a) Die Bedingung $(*)_1$ entspricht der Bedingung $(*)$ aus Definition 4.5 mit $\mathcal{A} = B(X)$.

(b) Erfüllt die Folge $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ die Bedingung $(*)_p$ für T mit $p \in [1,\infty]$, so erfüllt sie die Bedingung $(*)_q$ für T für $1 \leq q \leq p \leq \infty$. Insbesondere erfüllt $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ die Bedingung $(*)$.

Beweis zu (b). Die Funktion

$$p \mapsto \frac{p-1}{p}$$

ist stetig differenzierbar für alle $p \geq 1$ und ist wegen

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{p-1}{p}\right) = \frac{1}{p^2} > 0$$

für alle $p \geq 1$ monoton wachsend. Außerdem gilt $\lim_{p\to\infty}\frac{p-1}{p} = 1$. Also folgt für

$$1 \leq q \leq p < \infty,$$

dass

$$0 \leq \frac{q-1}{q} \leq \frac{p-1}{p} \leq 1.$$

$\square$

Die folgende Beobachtung wird es uns erlauben, Satz 4.13 zur Konstruktion $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalarer Fortsetzungen zu benutzen.

Lemma 4.16. *Sei $1 \leq p < \infty$ und $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine submultiplikative Folge positiver Zahlen, die die Bedingung $(*)_p$ für $T \in B(X)$ erfüllt. Dann gilt*

$$\|x\|^p \leq (c_n^p\|x_0\|^p + c_{n-1}^p\|x_1\|^p + \ldots + c_1^p\|x_{n-1}\|^p),$$

falls

$$T^n x = x_0 + Tx_1 + \ldots T^{n-1}x_{n-1}.$$

Beweis. Sei die Folge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ wie in Definiton 4.14 gewählt und sei $k_n < m \leq k_{n+1}$. Es genügt zu zeigen, dass die Aussage für Zerlegungen der Form

$$T^{k_{n+1}}x = x_0 + Tx_1 + \ldots T^{k_{n+1}-1}x_{k_{n+1}-1}$$

gilt. Denn sei

$$T^m y = y_0 + Ty_1 + \ldots T^{m-1}y_{m-1},$$

so erhalten wir

$$T^{k_{n+1}}y = 0 + \ldots 0 + T^{k_{n+1}-m}y_0 + T^{k_{n+1}-m+1}y_1 + \ldots T^{k_{n+1}-1}y_{m-1}.$$

Sei also

$$T^{k_{n+1}}x = x_0 + Tx_1 + \ldots T^{k_{n+1}-1}x_{k_{n+1}-1}.$$

Durch Anwendung von Folgerung 4.12 und Bemerkung 1.9 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|x_0\|^p &= \left\| T^{k_{n+1}}x - \sum_{j=1}^{k_{n+1}-1} T^{k_{n+1}-j}x_{k_{n+1}-j} \right\|^p \\
&= \left\| T^{k_{n+1}-k_n}\left(T^{k_n}x - \sum_{j=1}^{k_n} T^{k_n-j}x_{k_{n+1}-j}\right) - \sum_{j=k_n+1}^{k_{n+1}-1} T^{k_{n+1}-j}x_{k_{n+1}-j} \right\|^p \\
&\geq \frac{1}{2^{p-1}} m(T^{k_{n+1}-k_n})^p \left\| T^{k_n}x - \sum_{j=1}^{k_n} T^{k_n-j}x_{k_{n+1}-j} \right\|^p - \left\| \sum_{j=k_n+1}^{k_{n+1}-1} T^{k_{n+1}-j}x_{k_{n+1}-j} \right\|^p .
\end{aligned}$$

Wenden wir Lemma 4.11 auf den hinteren Summanden an und bringen ihn auf die andere Seite der Ungleichung, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\|x_0\|^p + (k_{n+1} - k_n - 1)^{p-1} \sum_{j=k_n+1}^{k_{n+1}-1} \|T^{k_{n+1}-j}\|^p \|x_{k_{n+1}-j}\|^p \\
\geq\ & \frac{1}{2^{p-1}} m(T^{k_{n+1}-k_n})^p \left\| T^{k_n}x - \sum_{j=1}^{k_n} T^{k_n-j}x_{k_{n+1}-j} \right\|^p .
\end{aligned}$$

Wie oben können wir

$$\|T^{k_n}x - \sum_{j=1}^{k_n} T^{k_n-j}x_{k_{n+1}-j}\|^p$$

nach unten abschätzen. Durch endliches Iterieren diesen Schrittes erhalten wir die Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\|x_0\|^p + (k_{n+1}-k_n-1)^{p-1}\sum_{j=k_n+1}^{k_{n+1}-1}\|T^{k_{n+1}-j}\|^p\|x_{k_{n+1}-j}\|^p \\
&+\sum_{\nu=1}^{n}\Bigg[\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{\nu} m(T^{k_{n+1}-k_n})^p\dots m(T^{k_{n-\nu+2}-k_{n-\nu+1}})^p(k_{n-\nu+1}-k_{n-\nu})^{p-1} \\
&\cdot\sum_{j=k_{n-\nu}+1}^{k_{n-\nu+1}}\|T^{k_{n-\nu+1}-j}\|^p\|x_{k_{n+1}-j}\|^p\Bigg] \\
\geq\ &\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{n+1} m(T^{k_{n+1}-k_n})^p\dots m(T^{k_2-k_1})^p m(T^{k_1})^p\|x\|^p.
\end{aligned}$$

Da $(c_j)_j$ nach Voraussetzung die Bedingung $(*)_p$ für T erfüllt, folgt

$$\begin{aligned}
\|x\|^p &\leq \sum_{\nu=0}^{n}\frac{(2^{p-1})^{n+1-\nu}(k_{n-\nu+1}-k_{n-\nu})^{p-1}}{m(T^{k_{n-\nu+1}-k_{n-\nu}})^p\dots m(T^{k_1})^p}\sum_{j=k_{n-\nu}+1}^{k_{n-\nu+1}}\|T^{k_{n-\nu+1}-j}\|^p\|x_{k_{n+1}-j}\|^p \\
&\leq \sum_{\nu=0}^{n}\sum_{j=k_{n-\nu}+1}^{k_{n-\nu+1}} c_j^p\|x_{k_{n+1}-j}\|^p = \sum_{j=1}^{k_{n+1}} c_j^p\|x_{k_{n+1}-j}\|^p,
\end{aligned}$$

und dies zeigt unsere Behauptung. □

5 Subskalare Operatoren und die Bedingung (P)

Die Resultate in Abschnitt 4.1 ermöglichen uns, eine Erweiterung S eines Operators $T \in B(X)$ auf einem $SQ_p(X)$-Raum zu finden, für die wir die Norm aller ganzzahligen Potenzen von S kontollieren können. Durch Konstruktion einer entsprechenden Folge $(c_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ erzielen wir unser gewünschtes Resultat.

Folgerung 5.1. *i) Sei $p \geq 1$, $T \in B(X)$ und sei $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine submultiplikative Folge positiver Zahlen, die die Bedingung $(*)_p$ für T erfüllt. Dann gibt es einen $SQ_p(X)$-Raum $(Y, |\cdot|)$, eine topologische Einbettung $\pi : X \hookrightarrow Y$ mit*

$$\frac{\|x\|}{2^{(p-1)/p}} \leq |\pi(x)| \leq \|x\|$$

für alle $x \in X$ und einen invertierbaren Operator $S \in B(Y)$ so, dass $S\pi = \pi T$, $\|S^j\| \leq \|T^j\|$, $\|S^{-j}\| \leq c_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und $\sigma(S) \subset \sigma(T)$. Wir können zusätzlich *erreichen, dass*

$$\left|\sum_{j=1}^{n} S^{-j}\pi(y_j)\right| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} c_j^p \|y_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

für je endlich viele Vektoren $y_1, \dots y_n \in X$ gilt.

ii) *Sei $T \in B(H)$ und sei $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine submultiplikative Folge positiver Zahlen, die die Bedingung $(*)_2$ für T erfüllt. Dann gibt es einen $SQ_2(H)$-Raum $(K, |\cdot|)$, welcher nach Bemerkung 4.10 ein Hilbertraum ist, eine topologischen Einbettung $\pi : H \hookrightarrow K$ mit*

$$\frac{\|x\|}{\sqrt{2}} \leq |\pi(x)| \leq \|x\|$$

für alle $x \in H$ und einen invertierbaren Operator $S \in B(K)$ so, dass $S\pi = \pi T$, $\|S^j\| \leq \|T^j\|$, $\|S^{-j}\| \leq c_j$ für $j \in \mathbb{N}$ und $\sigma(S) \subset \sigma(T)$. Ebenfalls können wir hier erreichen, dass

$$\left|\sum_{j=1}^{n} S^{-j}\pi(y_j)\right| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} c_j^2 \|y_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

für je endlich viele Vektoren $y_1, \dots y_n \in X$ gilt.

Beweis. i) Nach Lemma 4.16 impliziert

$$T^n x = x_0 + Tx_1 + \dots T^{n-1}x_{n-1}$$

immer, dass

$$\|x\|^p \leq (c_n^p\|x_0\|^p + c_{n-1}^p\|x_1\|^p + \dots + c_1^p\|x_{n-1}\|^p).$$

Für $M = 1$ haben wir also alle Voraussetzungen aus Satz 4.13 (b). Somit folgt die Behauptung.

ii) Analog obigem Teil mit $p = 2$ folgt die Behauptung.

□

Bemerkung 5.2. *In Folgerung 5.1 ii) können wir erreichen, dass die topologische Einbettung $\pi : H \hookrightarrow K$ isometrisch wird.*

Beweis. Sei $\|\cdot\|$ die Hilbertraumnorm auf H und $|\cdot|$ die Hilbertraumnorm auf K wie in der Folgerung 5.1 ii).
Sei P die Orthogonalprojektion auf $\pi(H)$. Wir definieren uns eine weitere Norm auf K durch

$$|||u||| = \left(\|\pi^{-1}Pu\|^2 + |(I-P)u|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

für alle $u \in K$. Dann gilt für alle $u \in K$

$$\begin{aligned} |u| &= |Pu + (I-P)u| = |\pi\pi^{-1}Pu + (I-P)u| \\ &\leq |\pi\pi^{-1}Pu| + |(I-P)u| \leq \|\pi^{-1}Pu\| + |(I-P)u| \leq \sqrt{2}|||u|||. \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} |||u||| &= \left(\|\pi^{-1}Pu\|^2 + |(I-P)u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\|\pi^{-1}Pu\|^2 + |u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\|\pi^{-1}P\|^2|u|^2 + |u|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\|\pi^{-1}P\|^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}} |u|. \end{aligned}$$

Somit sind $|\cdot|$ und $|||\cdot|||$ äquivalente Hilbertraumnormen auf $K \supset H$ und der Operator $S \in B((K, |||\cdot|||))$ ist eine $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalare Erweiterung von T. Insbesondere gilt

$$|||\pi(x)||| = \|x\|$$

für alle $x \in H$. Also ist $\pi : (H, \|\cdot\|) \hookrightarrow (K, |||\cdot|||)$ eine Isometrie. □

Mit dieser Vorarbeit lässt sich nun folgendes Korollar beweisen:

Korollar 5.3. *Ein Operator $T \in B(X)$ ist genau dann $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar, wenn es Konstanten $C > 0$ und $p, q \geq 0$ gibt so, dass T die polynomielle Wachstumsbedingung (P) aus Folgerung 3.1 erfüllt.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung (P) für die $\mathcal{A}(\mathbb{T})$-Subskalarität wurde bereits in der Folgerung 3.1 (a) gezeigt..
Für die umgekehrte Richtung sei nun $T \in B(X)$ so, dass es ein $C > 0,\ s \geq 0$ gibt mit

$$\nu_n(T) = \max\{\|T^n\|, m(T^n)^{-1}\} \leq Cn^s$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n(T)}{n^{s+\varepsilon/6}} = 0$. Wähle $k_1 \geq e^4$ so, dass

$$\nu_n(T) \leq n^{s+\varepsilon/6} \tag{9}$$

für alle $n \geq k_1$. Sei $M = \max\{2k_1\|T^j\| \cdot m(T^{k_1})^{-1} : 0 \leq j \leq k_1\}$. Für alle $x \in X$ ist

$$\|T^{k_1}\|\|x\| \geq \|T^{k_1}x\| \geq m(T^{k_1})\|x\|$$

und somit

$$M \geq \|T^{k_1}\| \cdot m(T^{k_1})^{-1} \geq 1.$$

Setzen wir $\alpha = 6s + \varepsilon + 3$ und $c_j = M(j+1)^\alpha$ für $j \geq 1$ dann gilt für $i, j \in \mathbb{N}$, dass

$$c_{j+i} = M(j+i+1)^\alpha \overset{\alpha\geq 0}{\leq} M(j+1)^\alpha(i+1)^\alpha \overset{M\geq 1}{\leq} M(j+1)^\alpha M(i+1)^\alpha = c_j c_i.$$

Die Folge $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ist also submultiplikativ. Setze $k_n = k_1^{2^{n-1}}$ für $n \in \mathbb{N}$. Für $0 < j \leq k_1$ gilt

$$2k_1 m(T^{k_1})^{-1} \cdot \|T^{k_1-j}\| \leq M \leq c_j. \tag{10}$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und $k_n < j \leq k_{n+1}$. Wir definieren

$$d_j = 2^{n+1}(k_{n+1} - k_n) m(T^{k_1})^{-1} m(T^{k_2-k_1})^{-1} \dots m(T^{k_{n+1}-k_n})^{-1} \|T^{k_{n+1}-j}\|$$

i) Für $k_{n+1} - j \geq k_1$ folgt, da $p \mapsto p^{s+\varepsilon/6}$ monoton wachsend auf $[0, \infty)$ ist, mit (9)

$$\|T^{k_{n+1}-j}\| \leq (k_{n+1} - j)^{s+\varepsilon/6} \leq M(k_{n+1})^{s+\varepsilon/6}.$$

Somit gilt wegen (9)

$$\begin{aligned} d_j &\leq 2^n k_{n+1}(k_1 k_2 \ldots k_{n+1})^{s+\varepsilon/6} M(k_{n+1})^{s+\varepsilon/6} \\ &= M 2^{n+1} k_{n+1}(k_1 k_2 \ldots k_{n+1} k_{n+1})^{s+\varepsilon/6}. \end{aligned}$$

ii) Falls $k_{n+1} - j < k_1$, so gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $0 < i \leq k_1$ so, dass $k_{n+1} - j = k_1 - i$. Nach (10) folgt nun

$$\|T^{k_{n+1}-j}\| \leq \frac{M}{2k_1 m(T^{k_1})^{-1}}.$$

Ebenfalls wegen (9) ist

$$\begin{aligned} d_j &\leq 2^n k_{n+1}(k_2 \ldots k_{n+1})^{s+\varepsilon/6} M \frac{1}{k_1} \\ &\leq M 2^{n+1} k_{n+1}(k_1 k_2 \ldots k_{n+1})^{s+\varepsilon/6} \\ &\leq M 2^{n+1} k_{n+1}(k_1 k_2 \ldots k_{n+1} k_{n+1})^{s+\varepsilon/6}. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt also für alle $k_n < j \leq k_{n+1}$, dass

$$d_j \leq M 2^{n+1} k_{n+1}(k_1 k_2 \ldots k_{n+1} k_{n+1})^{s+\varepsilon/6}.$$

Offensichtlich gilt $2^{n-1} \log k_1 < \log j$ und es folgt

$$2^{n+1} k_{n+1}(k_1 k_2 \ldots k_{n+1} k_{n+1})^{s+\varepsilon/6} \leq \left(\frac{2^2}{\log k_1} \log j\right) k_1^{2^n} (k_1 k_2 \ldots k_1^{2^n} k_1^{2^n})^{s+\varepsilon/6}.$$

Wegen $k_1 \geq e^4$ ist $\log k_1 \geq 4$. Ebenfalls ist

$$k_1 k_2 \ldots k_n = k_1^{\sum_{j=1}^{n} 2^{j-1}} \leq k_1^{2^n}$$

und somit folgt

$$\begin{aligned} \left(\frac{2^2}{\log k_1} \log j\right) k_1^{2^n} (k_1 k_2 \ldots k_1^{2^n} k_1^{2^n})^{s+\varepsilon/6} &\leq (\log j)(k_1^{2^{n-1}})^2 (k_1^{3 \cdot 2^n})^{s+\varepsilon/6} \\ &\leq j(k_1^{2^{n-1}})^{2+6s+\varepsilon} \leq j^{6s+\varepsilon+3} \leq \frac{c_j}{M}. \end{aligned}$$

Zusammengefasst erhalten wir

$$\frac{2^{n+1}(k_{n+1} - k_n)}{m(T^{k_1}) m(T^{k_2-k_1}) \ldots m(T^{k_{n+1}-k_n})} \|T^{k_{n+1}-j}\| \leq c_j$$

für alle $k_n < j \leq k_{n+1}$. Die Folge $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ erfüllt also die Bedingung $(*)_\infty$ bezüglich T und somit nach Bemerkung 4.15 auch für jedes beliebige $p \geq 1$ die Bedingung $(*)_p$.
Nach der Folgerung 5.1 existiert nun zu $T \in B(X)$ ein invertierbarer Operator S auf einem $SQ_p(X)$-Raum Y mit

$$\|S^j\| \leq \|T^j\| \leq Cj^s$$

und

$$\|S^{-j}\| \leq c_j = M(j+1)^{6s+\varepsilon+3}$$

für alle $j \in \mathbb{N}$. Nach Satz 2.6 ist $S \in B(Y)$ ein $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalarer Operator. Desweiteren existiert nach Folgerung 5.1 eine topologische Einbettung $\pi : X \hookrightarrow Y$ mit $S\pi = \pi T$. Somit ist T ein $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalarer Operator.

$\square$

Bemerkung 5.4. *Wir können erreichen, dass die topologische Einbettung $\pi : X \hookrightarrow Y$ isometrisch wird, indem wir $p = 1$ wählen.*

Bemerkung 5.5. *Sei H ein Hilbertraum und $T \in B(H)$ ein $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalarer Operator. Die Konstruktion im Beweis zu Korollar 5.3 zeigt, dass ein $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalarer Operator $S \in B(K)$ auf einem Hilbertraum K und eine topologische Einbettung $\pi : H \hookrightarrow K$ existieren, so dass $S\pi = \pi T$ ist. Beachte dazu, dass nach Bemerkung 4.10 jeder $SQ_2(H)$-Raum ein Hilbertraum ist. Nach Bemerkung 5.2 kann man π in diesem Fall als Isometrie wählen.*

Es stellt sich nun die Frage, ob auch die Umkehrung der Folgerung 3.1 (b) gilt. Eine Antwort darauf liefert der nächste Abschnitt.

6 Subskalare Operatoren und die Bedingung (R)

In Folgerung 3.1 haben wir gesehen, dass zu jedem $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalaren Operator Konstanten $C > 0$ und $p, q \geq 0$ existieren so, dass die Abschätzungen

$$\left.\begin{aligned} \|R(z,T)\| &\leq C(|z|-1)^t \quad \text{für} \quad 1 < |z| < 2 \\ \text{und} \qquad m(z-T)^{-1} &\leq C(1-|z|)^{-s} \quad \text{für} \quad |z| < 1 \end{aligned}\right\} \qquad (R)$$

gelten. In diesem Abschnitt wollen wir jedoch zeigen, dass Eigenschaft (R) nicht hinreichend ist für die $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Subskalarität von T ist. Doch auch hier führen wir zunächst noch ein paar Bezeichnungen ein.

Definition 6.1. *a) Ein Operator $T \in B(X)$ heißt zerlegbar, wenn für alle offenen Überdeckungen $\mathbb{C} = U \cup V$ abgeschlossene Unterräume $Z, Y \subset X$ existieren mit:*

(i) $TY \subset Y,\ TZ \subset Z$

(ii) $X = Y + Z$

(iii) $\sigma(T|_Y) \subset U, \sigma(T|_Z) \subset V$

b) Ein Operator $T \in B(X)$ hat Bishops Eigenschaft (β), *wenn für alle offenen Mengen $U \subset \mathbb{C}$ der Operator $T_U : \mathcal{O}(U,X) \to \mathcal{O}(U,X), T_U(f)(z) = (T-z)f(z)$ injektiv mit abgeschlossenem Bild ist.*

c) Ein Operator $T \in B(X)$ erfüllt die Beurlingsche Bedingung (B) *falls*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log \max\left\{\|T^n\|, m(T^n)^{-1}\right\}}{n^2} < \infty.$$

Bemerkung 6.2. *(a) In [AE97] wird gezeigt: Ein Operator $T \in B(X)$ hat genau dann* Bishops Eigenschaft (β), *wenn er subzerlegbar ist , d.h. ähnlich zur Einschränkung eines zerlegbaren Operators.*

(b) In [CF68] wird gezeigt: Ist $T \in B(X)$ invertierbar mit

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\log \|T^n\|}{1+n^2} < \infty,$$

so ist S zerlegbar.

(c) Aus [BM05], Theorem 4.5, zusammen mit (a) und (b), folgt, dass Operatoren, die die Beurlingsche Bedingung (B) *erfüllen, die Eigenschaft (β) besitzen.*

Für den Minimalmodul ergeben sich noch folgende nützliche Abschätzungen.

Lemma 6.3. *Sei $T \in B(X)$ ein stetiger Operator auf einem Banachraum X und sei $z \in \mathbb{C}\backslash\sigma_{ap}(T)$. Dann existiert ein $y \in X$ mit $\|y\| = 1$ so, dass*

$$\|(T-z)y\| < 2m(T-z).$$

Beweis. Es gilt $m(T-z) > 0$ und es folgt

$$2m(T-z) > m(T-z) = \inf\{\|(T-z)x\| : \|x\| = 1\}.$$

Nach Definition des Infimums existiert nun ein $y \in X$ mit $\|y\| = 1$ so, dass

$$\|(T-z)y\| < 2m(T-z).$$

□

Lemma 6.4. *Sei $T \in B(X)$ ein stetiger Operator auf einem Banachraum X. Dann gilt für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{C}\backslash\sigma_{ap}(T)$*

$$\inf_{z\in K} m(T-z) > 0.$$

Beweis. Angenommen $\inf_{z \in K} m(T-z) = 0$. Dann gibt es eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K mit

$$\lim_{n\to\infty} m(T-z_n) = 0.$$

Da K kompakt ist, kann man durch Übergang zu einer Teilfolge erreichen, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Punkt $z \in K$ konvergiert. Nach Lemma 6.3 existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $\|x_n\| = 1$ und

$$\|(T-z_n)x_n\| < 2m(T-z_n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt

$$\|(T-z)x_n\| \leq \|(T-z_n)x_n\| + \|(z_n-z)x_n\| < 2m(T-z_n) + \|z_n - z\| \xrightarrow{n} 0.$$

Da $\|x_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, folgt nun, dass entweder $T-z$ nicht injektiv ist, oder kein abgeschlossenes Bild hat. Dies ist ein Widerspruch zu $z \in K$. $\square$

Im folgenden Beispiel konstruieren wir einen Operator, der die Bedingung (R) erfüllt, jedoch nicht $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar ist.

Beispiel 6.5. *Sei $X = c_0$ der Banachraum aller komplexen Nullfolgen versehen mit der Supremumsnorm*

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

Es existiert ein $T \in B(X)$ so, dass

(i) $\|T\| = 1,\ \sigma_{ap}(T) = \mathbb{T},\ \sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}$,

(ii) $\|(T-z)^{-1}\| \leq (|z|-1)^{-1}$ *für* $1 < |z| < 2$,

(iii) für eine geeignete Konstante $C > 0$ gilt $m(T-z)^{-1} \leq C(1-|z|)^{-3}$ für $|z| < 1$,

(iv) T nicht $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar ist und

(v) T die Eigenschaft (β) hat.

Insbesonderere ist die Eigenschaft (R) nicht hinreichend für die $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Subskalarität.

Beweis. Sei $e_1, e_2, \ldots$ die Standardbasis von c_0. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$w_n = e^{\log^2(n+2) - \log^2(n+3)}.$$

Sei $T \in B(X)$ der gewichtete Shift mit $Te_n = w_n e_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Um zu zeigen, dass T die gewünschten Eigenschaften hat, gehen wir in verschiedenen Schritten vor.

Behauptung 1: Die Folge $(w_n)_n$ ist monoton wachsend mit $\lim_{n\to\infty} w_n = 1$.

Beweis. Offensichtlich gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $0 < w_n < 1$.
Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $x = x(n)$ so dass $n+2 \leq x \leq n+3$ und

$$\log^2(n+2) - \log^2(n+3) = -2\frac{\log x}{x}. \tag{11}$$

Die Funktion $g(x) = -2\frac{\log x}{x}$ ist wegen $g'(x) = -2\frac{1-\log x}{x^2} > 0$ für $x > e$ monoton wachsend. Also ist $\log^2(n+2) - \log^2(n+3)$ monoton wachsend für $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\lim_{n\to\infty}(\log^2(n+2) - \log^2(n+3)) = 0.$$

□

Behauptung 1 impliziert, dass

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|T\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\| \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|\sum_{n=1}^{\infty} x_n T e_n\| \\ &= \sup_{\|x\|=1} \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n w_n| = 1. \end{aligned}$$

Also folgt für $1 < |z| < 2$, dass

$$\left\|(T-z)^{-1}\right\| = \left\|-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}T^n\right\| \leq \frac{1}{|z|-1}.$$

Dies zeigt (ii).
Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$T^n e_k = w_k w_{k+1} \dots w_{k+n-1} e_{k+n}.$$

Behauptung 2: Es gilt

$$m(T) = \inf\{|w_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Beweis. Offensichtlich gilt

$$m(T) = \inf\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} \leq \inf\{\|Te_n\| : n \in \mathbb{N}\} = \inf\{\|w_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Für die andere Ungleichung seien $x \in X$ mit $\|x\| = 1$ und $\varepsilon > 0$. Wir fixieren ein $k \in \mathbb{N}$ so, dass $|x_{k-1}| > 1-\varepsilon$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |(Tx)_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |w_n||x_{k-1}| \\ &\geq |w_k||x_{k-1}| > |w_k|(1-\varepsilon) \\ &\geq \inf\{|w_n| : n \in \mathbb{N}\}(1-\varepsilon) \end{aligned}$$

Dieser Term konvergiert für $\varepsilon \to 0$ gegen $\inf\{|w_n| : n \in \mathbb{N}\}$ und es folgt, da x beliebig mit $\|x\| = 1$ war, die Aussage. □

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann ist die Folge $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und somit ist die Folge $(w_k w_{k+1} \dots w_{k+n-1})_{k\in\mathbb{N}}$ ebenfalls monoton wachsend. Zusammen mit Behautpung 2 liefert dies

$$\begin{aligned}
m(T^n) &= \inf_k w_k \dots w_{k+n-1} = w_1 \dots w_n \\
&= e^{\log^2 3 - \log^2 4} e^{\log^2 4 - \log^2 5} \dots e^{\log^2(n+2) - \log^2(n+3)} \\
&= e^{\sum_{j=3}^{n+2} \log^2(j) - \log^2(j+1)} = e^{\log^2 3 - \log^2(n+3)} \\
&= \frac{3^{\log 3}}{(n+3)^{\log(n+3)}}.
\end{aligned}$$

Angenommen, es gäbe nun ein $C > 0$ und ein $q \geq 0$ so, dass $m(T^n)^{-1} \leq Cn^q$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann müsste die Folge

$$a_n = \frac{m(T^n)^{-1}}{n^q}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ beschränkt sein. Allerdings gilt

$$\frac{n^{\log n}}{n^q} = n^{-q+\log n} \xrightarrow{n} \infty.$$

Somit gilt auch

$$a_n = \frac{\left(\frac{3^{\log 3}}{(n+3)^{\log(n+3)}}\right)^{-1}}{n^q} = \frac{(n+3)^{\log(n+3)}}{3^{\log 3} n^q} \to \infty,$$

was zu einem Widerspruch führt. Daher erfüllt T keine polynomielle Wachstumsbedingung (P) und ist deswegen nach Korollar 3.1 nicht $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar. Wir haben also (iv) gezeigt.

Behautpung 3: Es gilt $\sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}$

Beweis. Die Inklusion $\sigma(T) \subset \overline{\mathbb{D}}$ ist klar wegen $\|T\| = 1$. Für die andere Inklusion sei $z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$. Wir zeigen nun, dass $(z - T)$ nicht surjektiv ist. Angenommen es existiere ein $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c_0$ so, dass $e_1 = (z - T)x$. Dann gilt

$$e_1 = (z - T)x = (zx_k - w_{k-1}x_{k-1})_{k\in\mathbb{N}},$$

wobei $x_0 = w_0 = 0$. Dies führt zu

$$x_1 = \frac{1}{z}$$

und

$$x_k = \frac{w_{k-1}x_{k-1}}{z} \qquad (k \geq 2).$$

Induktiv sieht man, dass

$$x_k = \left(\prod_{j=1}^{k-1} w_j\right) z^{-k}.$$

Da $|z| < 1$ und $w_k \to 1$ für $k \to \infty$, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $w_k > |z|$ für $k \geq N$.Also ist für $k \geq N$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} |x_k| &= \frac{1}{|z|} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{w_j}{|z|} \\ &< \frac{1}{|z|} \prod_{j=1}^{k} \frac{w_j}{|z|} = |x_{k+1}|. \end{aligned}$$

Erfüllt. Die Folge $(|x_k|)_k$ ist somit ab dem Index N monoton wachsend. Folglich kann $x = (x_k)_k$ keine Nullfolge gewesen sein. Somit ist $\mathbb{D}\backslash\{0\} \subset \sigma(T)$. Da das Spektrum eines Operators kompakt ist, ist auch $\overline{\mathbb{D}} \subset \sigma(T)$. $\square$

Es gilt, dass

$$\begin{aligned} \left(\frac{3^{\log 3}}{(n+3)^{\log(n+3)}} \right)^{1/n} &= \left(3^{\log 3}\right)^{1/n} \exp\left(-\frac{\log(n+3)}{n} \log(n+3) \right) \\ &= \left(3^{\log 3}\right)^{1/n} \exp\left(-\frac{\log^2(n+3)}{n} \right). \end{aligned}$$

Da

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{\log^2(n+3)}{n} = 0,$$

folgt

$$\lim_{n\to\infty} m(T^n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(3^{\log 3}\right)^{1/n}}_{\to 1} \underbrace{\exp\left(-\frac{\log^2(n+3)}{n} \right)}_{\to 1} = 1.$$

Deswegen gilt nach [MZ83], Theorem 3 in Section 4, dass

$$\sigma_{ap}(T) \subset \mathbb{C}\backslash\mathbb{D}.$$

Zusammen mit der Aussage

$$\partial\sigma(T) \subset \sigma_{ap}(T) \subset \sigma(T)$$

und Behauptung 3 folgt

$$\sigma_{ap}(T) = \mathbb{T}$$

und wir erhalten (i).
Da

$$\|T^n\| \leq 1,$$

folgt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(\max\{\|T^n\|, m(T^n)^{-1}\})}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log\left((n+3)^{\log(n+3)}/3^{\log 3}\right)}{n^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^2(n+3) - \log^2 3}{n^2} < \infty. \end{aligned}$$

Also erfüllt T die Beurlingsche Bedingung (B). Nach Bemerkung 6.2 besitzt T Bishops Eigenschaft (β). Also gilt (v).

Bleibt noch (iii) zu zeigen.
Behauptung 4: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(1-w_n)^3}{w_{n+1}-w_n} = 0.$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$. Durch Anwenden des Mittelwertsatzes finden wir ein $x = x(n)$ mit $n+2 \leq x \leq n+3$ so, dass gilt

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= e^{\log^2(n+3)-\log^2(n+4)} - e^{\log^2(n+2)-\log^2(n+3)} \\ &= e^{\log^2 x - \log^2(x+1)} \left(\frac{2\log x}{x} - \frac{2\log(x+1)}{x+1} \right). \end{aligned}$$

Wenden wir erneut den Mittelwertsatz an, so finden wir ein $y = y(x)$ mit $x \leq y \leq x+1$ so, dass

$$w_{n+1} - w_n = e^{\log^2 x - \log^2(x+1)} \left(\frac{2\log x}{x} - \frac{2\log(x+1)}{x+1} \right) = -2e^{\log^2 x - \log^2(x+1)} \frac{1-\log y}{y^2}.$$

Mit einem $n+2 \leq x' \leq n+3$ wie in (11) folgt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{(1-w_n)^3}{w_{n+1}-w_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1-e^{\log^2(n+2)-\log^2(n+3)}}{\log^2(n+2)-\log^2(n+3)} \right)^3 (\log^2(n+2) - \log^2(n+3))^3}{-2e^{\log^2 x - \log^2(x+1)} \frac{1-\log y}{y^2}} \\ &= (-1)^3 \left(-\frac{1}{2} \right) \lim_{n\to\infty} \frac{(\log^2(n+2) - \log^2(n+3))^3}{\frac{1-\log y}{y^2}} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{-2\log x'}{x'} \right)^3}{\frac{1-\log y}{y^2}} \\ &= -4 \lim_{n\to\infty} \frac{y^2}{x'^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\log^3 x'}{x'(1-\log y)} = 0. \end{aligned}$$

□

Behauptung 5: Es gibt ein $r \in (0,1)$ so, dass $m(T-z) \geq (1-|z|)^3$ für alle $z \in \mathbb{D}$ mit $|z| > r$.

Beweis. Wähle ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\frac{(1-w_n)^3}{w_{n+1}-w_n} < \frac{1}{16}$$

für alle $n \geq n_0$. Zu diesem n_0 wählen wir ein r mit $\frac{1}{2} \leq r < 1$, so dass

$$r - (1-r)^3 > w_{n_0}.$$

Angenommen es gäbe ein $\lambda \in \mathbb{D}$ mit $|\lambda| > r$ so, dass

$$m(T-\lambda) < (1-|\lambda|)^3.$$

Dann gibt es ein $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ mit $\|x\| = \sup_n |x_n| = 1$ und $\|(T-\lambda)x\| < (1-|\lambda|)^3$. Da

$$(T-\lambda)x = (-\lambda x_1, w_1x_1 - \lambda x_2, w_2x_2 - \lambda x_3, \ldots),$$

erhalten wir

$$|\lambda||x_1| < (1-|\lambda|)^3 \text{ und } \sup_{n\in\mathbb{N}} |w_nx_n - \lambda x_{n+1}| < (1-|\lambda|)^3. \tag{12}$$

Wir zeigen nun, dass dies nicht möglich ist.
Aus der umgekehrten Dreiecksungleichung folgt

$$\sup_n \big||w_n|x_n| - |\lambda||x_{n+1}|\big| \leq \sup_n |w_nx_n - \lambda x_{n+1}| < (1-|\lambda|)^3.$$

Indem wir λ durch $|\lambda|$ und die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch die Folge $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ersetzen, können wir annehmen, dass $\lambda > 0$ und alle $x_n \geq 0$ sind.
Wir schreiben $a = (1-\lambda)^3$. Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $x_m = 1$ und $x_j < 1$ für alle $j < m$. Nach Konstruktion gilt $x_1 < \frac{(1-\lambda)^3}{\lambda} < 1$. Also muss $m \geq 2$ sein. Wre $w_{m-1} < \lambda - a$ so müsste nach (12) die Ungleichung

$$\begin{aligned} a &> |w_{m-1}x_{m-1} - \lambda x_m| \geq \lambda x_m - w_{m-1}x_{m-1} \geq \lambda - (\lambda - a)x_{m-1} \\ &= (\lambda - a)(1 - x_{m-1}) + a \geq a \end{aligned}$$

gelten. Dies ist ein Widerspruch. Folglich gilt

$$w_{m-1} \geq \lambda - a. \tag{13}$$

Nehmen wir nun an, dass $w_m < \lambda + a$. Dann ist

$$w_m - w_{m-1} \leq 2a$$

und

$$1 - w_{m-1} \geq 1 - w_m \geq 1 - \lambda - a.$$

Da $\lambda \geq \frac{1}{2}$ und somit

$$(1-\lambda) - (1-\lambda)^3 = (1-\lambda)\lambda(2-\lambda) \geq \frac{1}{2}(1-\lambda),$$

folgt nun

$$\frac{(1-w_m)^3}{w_m - w_{m-1}} \geq \frac{(1-\lambda-a)^3}{2a} = \frac{(1-\lambda-(1-\lambda)^3)^3}{2(1-\lambda)^3} \geq \frac{1}{16}.$$

Also ist $m - 1 < n_0$ und es gilt

$$\lambda - a = \lambda - (1-\lambda)^3 \geq r - (1-r)^3 > w_{n_0} \geq w_{m-1}.$$

Dies widerspricht jedoch (13). Somit ist

$$w_m \geq \lambda + a. \tag{14}$$

Weil $|w_m x_m - \lambda x_{m+1}| < a$ und $x_m = 1$ ist, folgt nun $\lambda x_{m+1} > w_m - a$ und somit

$$x_{m+1} > \frac{w_m - a}{\lambda} \geq 1,$$

was wiederum der Annahme $\|x\| = 1$ widerspricht.
Somit gilt

$$m(T - z) \geq (1 - |z|)^3$$

für alle $z \in \mathbb{D}$ mit $|z| > r$. □

Wegen Lemma 6.4 ist $C' = \inf\{m(T - z) : |z| \leq r\} > 0$. Daher gilt

$$m(T - z) \geq C' \geq C'(1 - |z|)^3$$

für alle $|z| \leq r$. Setzen wir $C = \min\{1, C'\}$, so erhalten wir

$$m(T - z) \geq C(1 - |z|)^3$$

für alle $z \in \mathbb{D}$. Somit haben wir (iii) gezeigt und unser Beispiel ist bewiesen. □

Satz 6.6. *Sei X ein separabler Banachraum und $\pi : c_0 \to X$ eine topologische Einbettung. Dann gibt es ein $R \in B(X)$ und ein $C > 0$ so dass*

(i) $\sigma(R) = \overline{\mathbb{D}}$,

(ii) $\|(R - z)^{-1}\| \leq C(|z| - 1)^{-1}$ *für* $1 < |z| < 2$,

(iii) $m(R - z)^{-1} \leq C(1 - |z|)^{-3}$ *für* $|z| < 1$,

(iv) *R ist nicht $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar,*

(v) *R hat Eigenschaft (β)*

Beweis. Nach [BP58] ist $Y = \pi(c_0) \subset X$ topologisch komplementiert, das heißt es gibt einen abgeschlossenen Teilraum $Z \subset X$ so, dass $X = Y \oplus Z$. Sei $T \in B(c_0)$ der in Beispiel 6.5 konstruierte Operator und $R \in B(X)$ der stetig lineare Operator mit $R\pi x = \pi T x$ für $x \in c_0$ und $Rz = z$ für $z \in Z$. Dann hat R die geforderten Eigenschaften. □

Somit haben wir die Frage aus dem vorherigen Abschnitt mit nein beantwortet. Aus dem polynomiellen Wachstum der Resolvente und des Minimalmoduls nahe der Einheitskreislinie lässt sich nicht die $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Subskalarität eines Operators folgern.

7 Langsam wachsende Linksinverse und $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Subskalarität

In Korollar 5.3 haben wir gesehen, dass die Bedingung (P) sowohl notwendig als auch hinreichend für die $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Subskalarität eines Operators $T \in B(X)$ auf einem Banachraum X ist. Im vorhergehenden Abschnitt haben wir gezeigt, dass die Bedingung (R) nur notwendig hierfür ist.
In diesem Abschnitt wollen wir zu einem Operator $T \in B(X)$ auf einem Banachraum X eine für die $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Subskalarität hinreichende Bedingung in Termen von dem Wachstum der Resolvente und der Existenz einer analytischen Linksinversen von $T - z$ mit vorgegebenen Wachstumsbedingungen formulieren.

Satz 7.1. *Sei $T \in B(X)$ mit $\sigma(T) \subset \overline{\mathbb{D}}$ so, dass Konstanten $C > 0$ und $p \geq 0$ existieren mit*

$$\|(T-z)^{-1}\| \leq C(|z|-1)^{-p} \textit{ für } 1 < |z| < 2.$$

Existieren $q \geq 0$ und eine analytische Funktion $L : \mathbb{D} \to B(X)$ so, dass

$$L(z)(T-z) = 1_{B(X)}$$

und

$$\|L(z)\| \leq C(1-|z|)^{-q} \textit{ für } |z| < 1, \tag{15}$$

so ist T ein $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalarer Operator.

Bemerkung 7.2. *Die Ungleichung (15) impliziert, dass für $|z| < 1$ und $x \in X$ gilt*

$$\|x\| = \|L(z)(T-z)x\| \leq C(1-|z|)^{-q}\|(T-z)x\|,$$

was sich umschreiben lässt zu

$$\|(T-z)x\| \geq C^{-1}(1-|z|)^{q}\|x\|.$$

Daraus folgt

$$m(T-z) \geq C^{-1}(1-|z|)^{q}.$$

Beweis zu Satz 7.1: Wie im Beweis zu Satz 2.3 $(ii) \Rightarrow (iii)$ gesehen, impliziert

$$\|(T-z)^{-1}\| \leq C(|z|-1)^{-p} \text{ für } 1 < |z| < 2,$$

dass

$$\|T^n\| \leq M \cdot n^p$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit einem geeigneten $M > 0$.
Sei $0 < R < 1$ beliebig. Wir entwickeln L in seine Taylorreihe und schreiben

$$L(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} L_\nu z^\nu, \ z \in \mathbb{D}, \text{ wobei } L_\nu = \frac{L^{(\nu)}(0)}{\nu!} \in B(X).$$

Nach den Cauchyungleichungen für die Taylorkoeffizienten gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\|L_\nu\| \leq \frac{\max\{\|L(z)\| : |z| = R\}}{R^\nu} \overset{(15)}{\leq} C \cdot \frac{1}{R^\nu(1-R)^q}$$

Sei $f : (0,1) \to \mathbb{R}, r \mapsto r^{-\nu}(1-r)^{-q}$. Wegen

$$\frac{d}{dr} f(r) = -\nu r^{-(\nu+1)}(1-r)^{-q} + q r^{-\nu}(1-r)^{-(q+1)} = \frac{\nu r + qr - \nu}{r^{(\nu+1)}(1-r)^{(q+1)}} \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0$$

genau dann, wenn

$$r \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \frac{\nu}{\nu + p}$$

ist, nimmt die Funktion f im Punkt $r = \frac{\nu}{\nu+q}$ ihr absolutes Minimum auf $(0,1)$ an. Wir folgern, dass

$$\|L_\nu\| \leq C \cdot \left(\frac{\nu}{\nu+q}\right)^{-\nu} \cdot \left(1 - \frac{\nu}{\nu+q}\right)^{-q}.$$

Weiter gilt, dass $\left(\left(\frac{\nu}{\nu+q}\right)^{-\nu}\right)_\nu$ eine monoton wachsende Folge ist, mit

$$\lim_{\nu\to\infty} \left(\frac{\nu}{\nu+q}\right)^{-\nu} = \lim_{\nu\to\infty} \left(1 + \frac{q}{\nu}\right)^{\nu} = e^q.$$

Für $\nu \geq q$ ist

$$\left(1 - \frac{\nu}{\nu+q}\right)^{-q} = \left(\frac{\nu+q}{q}\right)^q \leq \left(\frac{2\nu}{q}\right)^q = \left(\frac{2}{q}\right)^q \nu^q.$$

Für alle $2 \leq \nu < q$ erhalten wir

$$\left(1 - \frac{\nu}{\nu+q}\right)^{-q} = \left(\frac{\nu+q}{q}\right)^q \leq \left(\frac{2q}{q}\right)^q = 2^q \leq \nu^q.$$

Dann folgt mit

$$K = Ce^q \cdot \max\left\{\left(\frac{2}{q}\right)^q, 1\right\}$$

dass

$$\|L_\nu\| \leq K \cdot \nu^q$$

für alle $\nu \geq 2$. Außerdem ist

$$1_{B(X)} = L(z)(T - z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} L_\nu z^\nu (T - z) = L_0 T + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(L_\nu T - L_{\nu-1}\right) z^\nu$$

für alle $|z| < 1$. Daraus können wir folgern, dass

$$L_0 T = 1_{B(X)} \text{ und } L_\nu T = L_{\nu-1}$$

für alle $\nu \in \mathbb{N}$ und somit

$$L_\nu T^{\nu+1} = L_{\nu-1} T^\nu = \ldots = L_0 T = 1_{B(X)}.$$

Sei $x \in X$ mit $\|x\| = 1$. Dann gilt wegen

$$\|x\| = \|L_{\nu-1} T^\nu x\| \leq \|L_{\nu-1}\| \|T^\nu x\|,$$

dass für alle $\nu \geq 2$

$$m(T^\nu) \geq \|L_{\nu-1}\|^{-1} \geq K^{-1}(\nu-1)^{-q} \geq K^{-1}\nu^{-q}.$$

Mit einer geeigneten Konstanten $\rho > 0$ gilt

$$\|T^n\| \leq \rho n^p \text{ und } (m(T^n))^{-1} \leq \rho n^q$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Korollar 5.3 ist T ein $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalarer Operator. $\square$

Im Hilbertraum-Fall ist das in Satz 7.1 gegebene Kriterium auch notwendig für die $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Subskalarität.

Satz 7.3. *Sei H ein Hilbertraum und $T \in B(H)$ mit $\sigma(T) \subset \overline{\mathbb{D}}$.*
Der Operator T ist $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar genau dann, wenn es $C > 0, p, q \geq 0$ und eine analytische Funktion $L : \mathbb{D} \to B(H)$ gibt so, dass

(i) $\|(T-z)^{-1}\| \leq C(|z|-1)^{-p}$ *für* $1 < |z| < 2$,

(ii) $L(z)(T-z) = 1_{B(H)}$ *für* $|z| < 1$,

(iii) $\|L(z)\| \leq C(1-|z|)^{-q}$ *für* $|z| < 1$.

Beweis. Sei $T \in B(H)$ ein $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalarer Operator. Nach Bemerkung 5.5 gibt es einen Hilbertraum K, eine Isometrie $\pi : H \to K$ und einen $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalaren Operator $S \in B(K)$ mit

$$S\pi x = \pi T x$$

für alle $x \in H$. Im Folgenden identifizieren wir H mit dem abgeschlossenen Teilraum $\pi H \subset K$ vermöge der Isometrie π. Nach 2.6 existieren Konstanten $C > 0$ sowie $p, q \geq 0$ so, dass

$$\|(S-z)^{-1}\| \leq C(|z|-1)^{-p} \text{ für } 1 < |z| < 2$$

und

$$\|(S-z)^{-1}\| \leq C(1-|z|)^{-q} \text{ für } |z| < 1$$

ist. Daraus folgt nun

$$\|(T-z)^{-1}\| \leq C(|z|-1)^{-p} \text{ für } 1 < |z| < 2.$$

Definieren wir

$$L : \mathbb{D} \to B(H),\ L(z)x = P_H(S-z)^{-1}x$$

für $x \in H$, so ist L analytisch und es gilt

$$\|L(z)\| \le \|(S-z)^{-1}\| \le C(1-|z|)^{-q}$$

für $|z| < 1$. Die Identität $L(z)(T-z) = 1_{B(H)}$ auf $\mathbb{D}$ folgt aus $T - z = (S-z)|_H$. Die Rückrichtung des Beweises folgt unmittelbar aus Satz 7.1. □

Wir haben also eine hinreichende Bedingung in Termen des Wachtums der Resolvente und der Existenz einer analytischen Linksinversen mit vorgeschriebendem Wachtum für die $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Subskalarität gefunden. Diese Bedingung ist zudem notwendig für $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalare Operatoren auf Hilberträumen. Eine Frage die offen bleibt: Ist diese Bedingung auch notwendig für die $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Subskalarität von Operatoren auf Banachräumen? Zudem kennen wir kein zu Beispiel 6.5 analoges Gegenspiel eines Operators auf einem Hilbertraum, der der Bedingung (R) genügt, jedoch nicht $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar ist.

Literatur

[AE97] Ernst Albrecht and Jörg Eschmeier. Analytic functional models and local spectral theory. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 75(2):323–348, 1997.

[Are58] Richard Arens. Inverse-producing extensions of normed algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 88:536–548, 1958.

[BM05] Cătălin Badea and Vladimír Müller. Growth conditions and inverse producing extensions. *J. Operator Theory*, 54(2):415–439, 2005.

[BM06] Cătălin Badea and Vladimír Müller. Subscalar operators and growth of resolvent. *J. Operator Theory*, 56(2):249–258, 2006.

[BP58] C. Bessaga and A. Pełczyński. On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces. *Studia Math.*, 17:151–164, 1958.

[BY01] Charles J. K. Batty and Stephen B. Yeates. Extensions of semigroups of operators. *J. Operator Theory*, 46(1):139–157, 2001.

[CF68] Ion Colojoară and Ciprian Foiaş. *Theory of generalized spectral operators*. Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1968. Mathematics and its Applications, Vol. 9.

[Con90] John B. Conway. *A course in functional analysis*, volume 96 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1990.

[Dal00] H. G. Dales. *Banach algebras and automatic continuity*, volume 24 of *London Mathematical Society Monographs. New Series*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2000. Oxford Science Publications.

[Did98] M. Didas. *Eine Charakterisierung $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalarer Operatoren auf Banachräumen*. Diplomarbeit, Universität des Saarlandes, 1998.

[Did00] M. Didas. $\mathcal{E}(\mathbb{T}^n)$-subscalar n-tuples and the Cesaro operator on H^p. *Ann. Univ. Sarav. Ser. Math.*, 10(2):i–iii and 284–335, 2000.

[Lan83] Serge Lang. *Real analysis*. Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Reading, MA, second edition, 1983.

[LM96] Christian Le Merdy. Factorization of p-completely bounded multilinear maps. *Pacific J. Math.*, 172(1):187–213, 1996.

[LN00] Kjeld B. Laursen and Michael M. Neumann. *An introduction to local spectral theory*, volume 20 of *London Mathematical Society Monographs. New Series*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2000.

[MZ83] Endre Makai, Jr. and Jaroslav Zemánek. The surjectivity radius, packing numbers and boundedness below of linear operators. *Integral Equations Operator Theory*, 6(3):372–384, 1983.

[Pis86] Gilles Pisier. *Factorization of linear operators and geometry of Banach spaces*, volume 60 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1986.

[Rea84] C. J. Read. Inverse producing extension of a Banach algebra which eliminates the residual spectrum of one element. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 286(2):715–725, 1984.

[Rea87] C. J. Read. Extending an operator from a Hilbert space to a larger Hilbert space, so as to reduce its spectrum. *Israel J. Math.*, 57(3):375–380, 1987.

[Rea88] C. J. Read. Spectrum reducing extension for one operator on a Banach space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 308(1):413–429, 1988.

[SNF70] Béla Sz.-Nagy and Ciprian Foiaş. *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*. Translated from the French and revised. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1970.

[Wer00] Dirk Werner. *Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, Berlin, extended edition, 2000.

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbst angefertigt und nur die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Primstal, den 2. Dezember 2008