

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

FAKULTÄT 6 – NATURWISSENSCHAFTLICH-TECHNISCHE FAKULTÄT I  
FACHRICHTUNG: MATHEMATIK

BACHELORARBEIT

ZUR ERLANGUNG DES AKADEMISCHEN GRADES  
BACHELOR OF SCIENCE

---

**Das Dirichlet-Problem über offenen  
Mengen in  $\mathbb{R}^n$  mit  $C^1$ -Rand**

---

vorgelegt von

CHRISTOPHER S. JENAL

angefertigt unter Betreuung von

PROF. DR. JÖRG ESCHMEIER

Saarbrücken, September 2016



Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Saarbrücken, den 7. September 2016

(Christopher S. Jenal)



## Danksagung

An dieser Stelle möchte ich die Gelegenheit nutzen und meiner Familie und meinen Freunden für die Unterstützung während meines Studiums danken. Ich bin sehr dankbar für den guten Rat und die lieben Worte, die mir stets geholfen haben. Ein besonderer Dank gilt meinen Eltern, die mich bei allen Entscheidungen unterstützt und mir mein Studium ermöglicht haben.

Ebenso gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. Jörg Eschmeier für ein sehr interessantes Thema und die gute Betreuung während der Entstehung dieser Arbeit und meines Studiums. Ferner möchte ich mich herzlich bei Daniel Kraemer für das außerordentliche Engagement und die enorme Hilfsbereitschaft während der letzten Monate bedanken. Die unzähligen Stunden konstruktiver Gespräche und des Korrekturlesens haben diese Arbeit erst möglich gemacht.

Auch möchte ich Herrn Prof. Dr. Hans-Peter Lenhof für interessante, fachübergreifende Gespräche und hilfreiche Ratschläge danken.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>9</b>
<b>1 Grundlagen</b>	<b>13</b>
<b>2 Das Dirichlet-Problem</b>	<b>21</b>
<b>3 Das Harnacksche Konvergenzprinzip</b>	<b>41</b>
<b>4 Die Perronsche Methode</b>	<b>47</b>
<b>5 Barrierefunktionen und geometrische Lösbarkeitskriterien</b>	<b>53</b>
5.1 Barrierefunktionen . . . . .	54
5.2 Geometrische Lösbarkeitskriterien . . . . .	57
<b>Anhang</b>	<b>77</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>81</b>





# Einleitung

Partielle Differentialgleichungen sind ein zentrales Mittel zur analytischen Untersuchung physikalischer Modelle. Im 18. Jahrhundert begannen J.-B. d'Alembert, L. Euler, J.-L. Lagrange und P.-S. Laplace mit dem Studium partieller Differentialgleichungen zur Beschreibung von Problemen der Kontinuumsmechanik. Wie in [2] dargelegt, leistete B. Riemann im 19. Jahrhundert einen wesentlichen Beitrag zur Verbreitung partieller Differentialgleichungen in weiteren Gebieten der Mathematik. In diesem Kontext rückte das sogenannte *Dirichlet-Problem* (siehe Definition 2.2) in den Fokus vieler Mathematiker, das spezielle Differentialgleichungen beschreibt, mit denen sich Phänomene, die beim Studium der Konvektion, Fluidmechanik, Elektrostatik und weiterer physikalischer Bereiche auftraten, beschreiben lassen. Konkret beschreibt das Dirichlet-Problem die Frage, ob es zu einer beschränkten, offenen Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und jeder stetigen, reellwertigen Funktion  $f \in C(\partial\Omega, \mathbb{R})$  eine stetige Fortsetzung von  $f$  auf den Abschluss von  $\Omega$  gibt, die auf  $\Omega$  harmonisch ist. Nach [13] hat B. Riemann dazu beigetragen, dass das Problem nach dem deutschen Mathematiker *Peter Gustav Lejeune Dirichlet* (1805 - 1859) benannt wurde. Wie L. Gårding in [13] darlegt, hat die Lösung des Dirichlet-Problems für die Kugel im Fall  $n = 3$  durch S. D. Poisson zur Entdeckung der sogenannten *Greenschen Funktionen* durch G. Green geführt.

Dem Buch [7] von O. Forster folgend, werden wir das Dirichlet-Problem für Kugeln im zweiten Kapitel dieser Arbeit untersuchen und mithilfe hierbei entstandener Resultate im weiteren Verlauf das Dirichlet-Problem für allgemeinere Mengen studieren. Es wird sich herausstellen, dass sich das Problem für Kugeln leicht lösen lässt und wir sogar eine explizite Lösung angeben können. Hierbei werden wir auf Resultate von S.D. Poisson und G. Green zurückgreifen. Anders verhält es sich jedoch für allgemeinere Mengen im Fall  $n \geq 2$ . Hier kann die Lösbarkeit des Problems nicht so einfach entschieden werden. Ist das Problem lösbar, so kann eine konkrete Lösung in den meisten Fällen nicht angegeben werden. Hieran lässt

---

sich erkennen, wie schwer es ist, die Natur harmonischer Funktionen und harmonischer Ausdehnungsprozesse zu erfassen. Jedoch ist es in vielen Fällen sehr wohl möglich zu entscheiden, ob das Dirichlet-Problem für eine beschränkte, offene Menge lösbar ist. Dies soll das Ziel der vorliegenden Arbeit sein.

Wie G. Tsogtgerel in [12] darlegt, stellen die Untersuchung subharmonischer Funktionen (siehe Definition 2.12) – insbesondere die sogenannte *Perronsche Methode* – sowie die Variationsrechnung, genauer gesagt die Untersuchung von Sobolev-Räumen, wesentliche Lösungsansätze für das Dirichlet-Problem dar. Wir werden das Problem mithilfe der Perronschen Methode, die im vierten Kapitel vorgestellt wird, untersuchen. Hierbei dient uns das Buch *Harmonic Function Theory* ([1]) von S. Axler, P. Bourdon und W. Ramey als Grundlage. Wir orientieren uns an den dortigen Ausführungen der Kapitel 1-3, 7 und 11 und ergänzen die Argumentation. Eine wichtige Rolle für die Perronsche Methode spielt das *Harnacksche Konvergenzprinzip*, das im dritten Kapitel dieser Arbeit präsentiert wird. Es macht eine Aussage über das Konvergenzverhalten von Folgen harmonischer Funktionen. In Kapitel 5 wird sich zeigen, dass die Lösbarkeit des Dirichlet-Problems für eine Menge allein von der Struktur des Randes der Menge abhängig ist. Hierfür zeigen wir zunächst, dass das Dirichlet-Problem für eine beschränkte, offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  genau dann lösbar ist, wenn die Menge in jedem ihrer Randpunkte eine *Barrierefunktion* (siehe Definition 5.1) besitzt. Im nächsten Schritt stellen wir geeignete geometrische Bedingungen an den Rand der Menge  $\Omega$ , die die Existenz solcher Barrierefunktionen garantieren. So stellt sich zuerst heraus, dass sowohl konvexe als auch Mengen mit  $C^2$ -Rand eine Lösung des Problems erlauben. Die Gültigkeit der Aussage im zweiten Fall untersuchen wir mithilfe der *äußeren Kugelbedingung* (siehe Definition 5.4). Dieses geometrische Kriterium stellt die Existenz von Barrierefunktionen sicher. Ein weiteres geometrisches Kriterium, die *äußere Kegelbedingung* (siehe Definition 5.21), wird schließlich zeigen, dass Mengen mit  $C^1$ -Rand und allgemeinere Mengen die Lösung des Dirichlet-Problems erlauben.





# 1 Grundlagen

Wir bezeichnen mit  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  die Menge der natürlichen Zahlen. Es sei  $n \in \mathbb{N}^*$  eine von Null verschiedene natürliche Zahl. Für zwei Vektoren  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  schreiben wir

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

für das Standardskalarprodukt in  $\mathbb{R}^n$  und

$$\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

für die euklidische Norm. Ist  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , so bezeichnen wir mit

$$C^k(\Omega, \mathbb{R}) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist } k\text{-fach stetig partiell differenzierbar}\}$$

den Raum der  $k$ -fach stetig partiell differenzierbaren reellwertigen Funktionen auf  $\Omega$ . Ist  $D \subset \mathbb{R}^n$  eine Menge, so schreiben wir

$$C(D, \mathbb{R}) = \{f: D \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$$

für die Menge der stetigen reellwertigen Funktionen auf  $D$ . Es seien  $\varepsilon > 0$  und  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ . Mit

$$B_\varepsilon^n(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < \varepsilon\} \text{ bzw.} \\ \overline{B}_\varepsilon^n(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq \varepsilon\}$$

werden die offene bzw. die abgeschlossene Kugel um  $a$  mit Radius  $\varepsilon$  bezeichnet. Geht die Dimension aus dem aktuellen Kontext klar hervor, so schreiben wir auch  $B_\varepsilon(a) = B_\varepsilon^n(a)$  bzw.  $\overline{B}_\varepsilon(a) = \overline{B}_\varepsilon^n(a)$ . Ist ferner  $r = (r_1, \dots, r_n) \in [0, \infty)^n$ , so nennen wir die Menge

$$P_r^n(a) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |a_k - x_k| < r_k, \text{ für } k = 1, \dots, n\}$$

den Polyzylinder im  $\mathbb{R}^n$  mit Mittelpunkt  $a$  und Multiradius  $r$ . Der entsprechende abgeschlossene Polyzylinder wird mit  $\overline{P}_r^n(a)$  bezeichnet. Zur Vereinfachung schreiben wir auch  $P_r^n(a) = P_{(r, \dots, r)}^n(a)$  für  $r \in [0, \infty)$ .

Für Vektoren  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  und  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  verwenden wir in dieser Arbeit die abkürzenden Schreibweisen

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \\ \alpha! &= (\alpha_1!)(\alpha_2!) \cdots (\alpha_n!) \quad \text{und} \\ x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \end{aligned}$$

und für eine Funktion  $f \in C^{|\alpha|}(\Omega, \mathbb{R})$  definieren wir

$$D^\alpha f = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

mit  $D_i^{\alpha_i} = \partial^{\alpha_i} / \partial x_i^{\alpha_i}$ .

Es bezeichne  $\text{Span}\{v_1, \dots, v_t\}$  die lineare Hülle der Vektoren  $v_1, \dots, v_t \in \mathbb{R}^n$  ( $t \in \mathbb{N}^*$ ).

Seien im Folgenden  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $p$ -dimensionale  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit mit  $p \in \{1, \dots, n\}$  und  $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$  und  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Wir wollen in diesem Abschnitt für geeignete Funktionen  $f$  das Integral von  $f$  über  $M$  erklären. Für eine offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^p$  sei  $g: \Omega \rightarrow V \subset M$  eine Parametrisierung von  $M$ . Wir nennen die Umkehrfunktion  $g^{-1}: V \rightarrow \Omega$  einer solchen Abbildung auch Karte von  $M$ . Es bezeichne  $J_g(x) \in \mathbb{R}^{n \times p}$  die Jacobi-Matrix von  $g$  im Punkt  $x$  und  $J_g^T(x) \in \mathbb{R}^{p \times n}$  ihre Transponierte. Dann verstehen wir unter der Gramschen Determinante von  $g$  die  $C^{k-1}$ -Funktion  $G: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$G(x) = \det(J_g(x)^T J_g(x)).$$

Ist  $\lambda: \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  das Lebesguemaß auf der Borelschen- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , so bezeichnen wir für eine Menge  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\lambda|_A = \lambda|_{(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)|_A)}$  die Einschränkung von  $\lambda$  auf die Spur- $\sigma$ -Algebra von  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  auf  $A$  und schreiben  $\mathcal{L}^1(A)$  für den Raum aller bezüglich  $\lambda|_A$  integrierbaren reellwertigen Funktionen auf  $A$ . Wie in [6, Definition 9.4] können wir nun folgende Definition treffen:

---

**Definition 1.1** Ist  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion so, dass eine Karte  $g: \Omega \rightarrow V \subset M$  existiert mit  $f|_{M \setminus V} \equiv 0$ , so heißt  $f$  **integrierbar über  $M$** , falls

$$f \circ g \sqrt{G} \in \mathcal{L}^1(\Omega)$$

ist. In diesem Fall definiert man das **Integral** von  $f$  über  $M$  durch

$$\int_M f dS = \int_{\Omega} f \circ g \sqrt{G} d\lambda.$$

In [6, Kapitel 9] wird gezeigt, dass die obige Definition unabhängig von der Wahl der Karte ist. Ähnlich wie in [6, Kapitel 9] wollen wir im zweiten Schritt die Integrierbarkeit und das Integral von Funktionen  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  definieren, die außerhalb der Bilder endlich vieler Parametrisierungen

$$g_i: \Omega_i \rightarrow V_i \subset M \quad (i = 1, \dots, m)$$

verschwinden. Es sei  $(\alpha_i)_{i=1}^m$  eine messbare Zerlegung der Eins bezüglich  $(V_i)_{i=1}^m$  und  $f$ , also nach [6, Kapitel 9] seien  $\alpha_i: M \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) messbare Funktionen auf  $(M, \mathcal{B}(M))$  mit

- (i)  $0 \leq \alpha_i \leq 1$ ,
- (ii)  $\alpha_i|_{M \setminus V_i} \equiv 0$  und
- (iii)  $\sum_{i=1}^m \alpha_i(x) = 1$  für alle  $x \in M$  mit  $f(x) \neq 0$ .

Wir nennen  $f$  integrierbar über  $M$ , falls die Funktionen  $\alpha_i f$  für alle  $i = 1, \dots, m$  im Sinne von Definition 1.1 integrierbar über  $M$  sind. In diesem Fall definieren wir das Integral von  $f$  über  $M$  durch

$$\int_M f dS = \sum_{i=1}^m \int_M \alpha_i f dS.$$

Nach [6, Kapitel 9] ist die Definition unabhängig von der Wahl der überdeckenden Karten und der Zerlegung der Eins. Für eine Teilmenge  $A \subset M$  heißt eine Funktion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  über  $A$  integrierbar, falls  $f \chi_A$  über  $M$  integrierbar ist, wobei

$$\chi_A: M \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die charakteristische Funktion von  $A$  ist. In diesem Fall definiert man das Integral von  $f$  über  $A$  durch

$$\int_A f dS = \int_M f \chi_A dS.$$

Nach [6, Satz 9.8] ist jede beschränkte, messbare Funktion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ , die außerhalb einer kompakten Menge  $K \subset M$  verschwindet, integrierbar über  $M$ . Insbesondere ist jede stetige Funktion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  mit kompaktem Träger integrierbar über  $M$ . Ferner kann man zeigen, dass es ein reguläres Borelmaß  $\mu: \mathcal{B}(M) \rightarrow [0, \infty)$  gibt, sodass

$$\int_M g dS = \int_M g d\mu$$

für alle beschränkt messbaren Funktionen  $g: M \rightarrow \mathbb{R}$  gilt. Daher werden wir im weiteren Verlauf nicht mehr zwischen  $dS$  und  $d\mu$  unterscheiden.

Wir bezeichnen mit  $\text{Vol}_k(A)$  das  $k$ -dimensionale Volumen von  $A$ , das durch

$$\text{Vol}_k(A) = \int_M \chi_A dS$$

definiert ist, falls  $\chi_A$  integrierbar über  $M$  ist. Wollen wir kenntlich machen, nach welcher Variable integriert wird, so schreiben wir auch

$$\int_A f(x) dS(x) = \int_A f dS.$$

Es sei

$$\omega_n = \text{Vol}_{n-1}(S_{n-1})$$

das  $(n-1)$ -dimensionale Volumen der Einheitskugel  $S_{n-1} = \partial B_1^n(0) \subset \mathbb{R}^n$  (siehe [6, Beispiel 11.7]).

Ist  $a \in M$  ein Punkt in der Untermannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^n$ , so heißt ein Vektor  $\nu \in \mathbb{R}^n$  Tangentialvektor an  $M$  im Punkt  $a$ , falls es ein  $\varepsilon > 0$  und eine stetig differenzierbare Abbildung  $\varphi: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\varphi(-\varepsilon, \varepsilon) \subset M$  und

$$\varphi(0) = a, \quad \varphi'(0) = \nu$$

gibt. Der Tangentialraum von  $M$  in  $a$  ist definiert durch

$$T_a(M) = \{\nu \in \mathbb{R}^n \mid \nu \text{ ist Tangentialvektor an } M \text{ in } a\}.$$



---

Die Vektoren  $v \in T_a(M)^\perp$  bezeichnen wir als Normalenvektoren von  $M$  in  $a$ .

### Definition 1.2

(a) Sei  $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ . Man sagt, dass eine beschränkte, offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  einen  **$C^k$ -Rand** besitzt, wenn für jeden Punkt  $\xi \in \partial\Omega$  eine offene Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^n$  von  $\xi$  und eine Funktion  $\varphi \in C^k(U, \mathbb{R})$  existieren mit

(i)  $\Omega \cap U = \{x \in U \mid \varphi(x) < 0\}$ ,

(ii)  $\partial\Omega \cap U = \{x \in U \mid \varphi(x) = 0\}$  und

(iii)  $\text{grad } \varphi(x) \neq 0$  für alle  $x \in \partial\Omega \cap U$ .

(b) Wir nennen eine kompakte Menge  $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^n$  ein **Kompaktum mit glattem Rand**, wenn es zu jedem Randpunkt  $\xi \in \partial\Omega$  eine offene Umgebung  $V \subset \mathbb{R}^n$  von  $\xi$  und eine Funktion  $\psi \in C^1(V, \mathbb{R})$  mit den folgenden Eigenschaften gibt:

(i)  $K \cap V = \{x \in V \mid \psi(x) \leq 0\}$  und

(ii)  $\text{grad } \psi(x) \neq 0$  für alle  $x \in V$ .

### Bemerkung 1.3

(i) Ein einfaches Stetigkeitsargument zeigt, dass in Teil (a) von Definition 1.2 aus den Bedingungen (i) und (iii) bereits die Bedingung (ii) folgt.

(ii) Hat die beschränkte, offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  einen  $C^k$ -Rand, so ist  $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine  $C^k$ -Hyperfläche, das heißt eine  $(n-1)$ -dimensionale  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit (siehe [6, Satz 8.5]). Insbesondere ist nach [6, Satz 10.2] in jedem Punkt  $\xi \in \partial\Omega$  der Tangentialraum  $T_\xi(\partial\Omega)$  von  $\partial\Omega$  in  $\xi$  ein wohldefinierter  $(n-1)$ -dimensionaler Untervektorraum in  $\mathbb{R}^n$  und der Normalenraum

$$N_\xi(\partial\Omega) = T_\xi(\partial\Omega)^\perp$$

von  $\partial\Omega$  in  $\xi$  ist ein 1-dimensionaler Teilraum.

**Proposition 1.4** *Es seien  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\varepsilon > 0$  und  $f \in C^k(B_{2\varepsilon}^n(0), \mathbb{R})$  derart, dass  $D^\alpha f(0) = 0$  für alle  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  mit  $|\alpha| \leq k - 1$  ist. Dann gibt es eine Konstante  $C > 0$  mit*

$$|f(\xi)| \leq C \|\xi\|^k$$

für alle  $\xi \in B_\varepsilon^n(0)$ .

Beweis: Es sei  $\xi \in B_\varepsilon^n(0)$ . Wegen  $f \in C^k(B_{2\varepsilon}^n(0), \mathbb{R})$  und da  $t\xi \in B_\varepsilon^n(0)$  für alle  $t \in [0, 1]$  gilt, gibt es nach der Taylorschen Formel [5, Satz 7.2] ein  $\theta \in (0, 1)$  mit

$$f(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq k-1} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} + \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(\theta\xi)}{\alpha!} \xi^\alpha = \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha f(\theta\xi)}{\alpha!} \xi^\alpha.$$

Die stetigen Funktionen  $D^\alpha f: B_{2\varepsilon}^n(0) \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\alpha \in \mathbb{N}^n$  mit  $|\alpha| = k$ ) nehmen auf dem Kompaktum  $\overline{B}_\varepsilon^n(0)$  ihre Extrema an. Daher existiert eine Konstante  $M \in \mathbb{R}$  mit

$$|D^\alpha f(y)| \leq M$$

für alle  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  mit  $|\alpha| = k$  und alle  $y \in \overline{B}_\varepsilon^n(0)$ . Wegen  $\theta\xi \in B_\varepsilon^n(0)$  folgt

$$\begin{aligned} |f(\xi)| &\leq \sum_{|\alpha|=k} \frac{|D^\alpha f(\theta\xi)|}{\alpha!} |\xi^\alpha| \\ &\leq M \left( \sum_{|\alpha|=k} 1 \right) \|\xi\|^k \\ &= C \|\xi\|^k, \end{aligned}$$

mit  $C = M \sum_{|\alpha|=k} 1$ . □

**Proposition 1.5** *Es seien  $C > 0$  eine Konstante und  $n \geq 2$ . Schreiben wir  $0' = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$ , so gilt*

$$\overline{B}_R^n((0', R)) \cap \left\{ x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid |x_n| \leq C \|x'\|^2 \right\} = \{0\}$$

für alle  $R \in (0, \frac{1}{2C})$ .

---

Beweis: Es seien  $C > 0$  und  $R \in (0, \frac{1}{2C})$ . Dann ist

$$f: \overline{B}_R^{n-1}(0') \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto -\sqrt{R^2 - \|x\|^2} + R - C\|x\|^2$$

stetig und auf  $B_R^{n-1}(0')$  stetig partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{\sqrt{R^2 - \|x\|^2}} - 2Cx_i$$

für  $i = 1, \dots, n$  und jedes  $x \in B_R^{n-1}(0')$ .

Für  $x \in B_R^{n-1}(0')$  gilt  $\text{grad } f(x) = 0$  genau dann, wenn

$$x = 0' \quad \text{oder} \quad \|x\|^2 = R^2 - \left(\frac{1}{2C}\right)^2$$

erfüllt ist. Die rechte Gleichung ist wegen  $R \in (0, \frac{1}{2C})$  für kein  $x \in B_R^{n-1}(0')$  erfüllt, sodass  $0' \in B_R^{n-1}(0')$  der einzige kritische Punkt von  $f$  ist. Wegen  $f(0') = 0$  zeigt die Abschätzung

$$f(x) = R(1 - CR) \geq R(1 - \frac{1}{2}) = \frac{R}{2} > 0 \quad (x \in \partial B_R^{n-1}(0')),$$

dass die stetige Funktion  $f$  ihr Minimum 0 auf dem Kompaktum  $\overline{B}_R^{n-1}(0')$  nur im Nullpunkt annimmt. Es genügt nun

$$|x_n| > C\|x'\|^2$$

für alle  $x = (x', x_n) \in \overline{B}_R^n((0', R)) \setminus \{(0', 0)\} \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$  zu zeigen. Für ein solches  $x = (x', x_n)$  folgt aus

$$\|x - (0', R)\|^2 \leq R^2,$$

dass

$$|x_n| \geq -\sqrt{R^2 - \|x'\|^2} + R$$

ist. Wir dürfen annehmen, dass  $x' \neq 0$  ist. Nach obigem Argument gilt  $f(x') > 0$ , d.h.

$$|x_n| \geq -\sqrt{R^2 - \|x'\|^2} + R > C\|x'\|^2.$$

□



## 2 Das Dirichlet-Problem

Bevor wir im weiteren Teil dieser Arbeit die Lösbarkeit des Dirichlet-Problems für allgemeine beschränkte, offene Mengen  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  untersuchen, werden wir in diesem Kapitel im Zuge der Präsentation von Eigenschaften harmonischer und subharmonischer Funktionen eine Lösung für den Spezialfall  $\Omega = B_r^n(a) \subset \mathbb{R}^n$  präsentieren.

Wir orientieren uns hierbei am Buch von O. Forster ([7, S.189ff]) und ergänzen die dortige Argumentation. In diesem Kapitel sei  $n \geq 2$  eine natürliche Zahl und es sei, wenn nicht näher spezifiziert,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine nicht-leere, offene Menge. Es bezeichne  $\Delta$  den *Laplace-Operator*, der in  $\mathbb{R}^n$  durch

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

gegeben ist.

**Definition 2.1** Eine Funktion  $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$  heißt **harmonisch auf  $\Omega$** , falls

$$\Delta u \equiv 0$$

auf  $\Omega$  ist. Wir schreiben  $\text{Harm}(\Omega)$  für die Menge aller reellwertigen, harmonischen Funktionen auf  $\Omega$ .

Wir können nun das *Dirichlet-Problem über  $\Omega$*  formulieren:

**Definition 2.2** Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränkte, offene Menge. Die Frage, ob es zu jeder stetigen Funktion  $f: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion  $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  gibt so, dass

- (i)  $u|_{\partial\Omega} = f$  ist und
- (ii)  $u$  auf  $\Omega$  harmonisch ist,

ist als das **Dirichlet-Problem** über  $\Omega$  bekannt.

Wir sagen dann auch, dass  $u$  eine Lösung des Dirichlet-Problems über  $\Omega$  mit **Randbedingung**  $f$  ist.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden wir folgende Beispiele für harmonische Funktionen benötigen:

### Beispiel 2.3

(i) Die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log \|x\|$$

ist harmonisch auf ihrem Definitionsbereich. Denn es gelten

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = x_i \|x\|^{-2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \|x\|^{-2} (1 - 2x_i^2 \|x\|^{-2})$$

für  $i = 1, 2$  und damit folgt

$$\begin{aligned} \Delta f &= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \\ &= \|x\|^{-2} (1 - 2x_1^2 \|x\|^{-2}) + \|x\|^{-2} (1 - 2x_2^2 \|x\|^{-2}) \\ &= \frac{2}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{2}{x_1^2 + x_2^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(ii) Für eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > 2$  ist die Funktion

$$g: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \|x\|^{2-n}$$

harmonisch auf ihrem Definitionsbereich. Denn wegen  $\frac{\partial \|x\|}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\|x\|}$  gelten

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} &= (2-n)x_i \|x\|^{-n} \quad \text{und} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} &= (2-n)\|x\|^{-n-2} (\|x\|^2 - nx_i^2) \end{aligned}$$

für  $i = 1, \dots, n$ . Somit folgt

$$\begin{aligned}\Delta f &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \\ &= (2-n)\|x\|^{-n-2} \left( \sum_{i=1}^n \|x\|^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

**Definition 2.4** Es sei  $a \in \mathbb{R}^n$  ein Punkt. Man nennt die Funktion  $N_a: \mathbb{R}^n \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch

$$N_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2-n)\omega_n} \|x-a\|^{2-n} & \text{für } n > 2 \\ \frac{1}{2\pi} \log \|x-a\| & \text{für } n = 2 \end{cases}$$

definiert ist, das **Newton-Potential in  $a$** .

**Bemerkung 2.5** Das Newton-Potential im Punkt  $a \in \mathbb{R}^n$  ist zweimal stetig partiell differenzierbar und mit den Ergebnissen aus Beispiel 2.3 folgen  $\Delta N_a \equiv 0$  auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$  und

$$\text{grad } N_a(x) = \frac{1}{\omega_n} \frac{x-a}{\|x-a\|^n}$$

für  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ .

Ist  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und  $A \subset U$  ein Kompaktum mit glattem Rand, so definieren wir für eine Funktion  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$  die Ableitung in Normalenrichtung in einem Punkt  $x \in \partial A$  durch

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x) = \langle \text{grad } f(x), \nu(x) \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \nu_i(x), \quad (2.1)$$

wobei  $\nu: \partial A \rightarrow \mathbb{R}^n$  das äußere Einheits-Normalenfeld ist (siehe [7, §15]).

**Proposition 2.6** Es seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Umgebung eines Punktes  $a \in \mathbb{R}^n$  und  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig partiell differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$f(a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\|x-a\|=\varepsilon} \left( f(x) \frac{\partial N_a(x)}{\partial \nu} - N_a(x) \frac{\partial f(x)}{\partial \nu} \right) dS(x).$$

Beweis: Für  $\varepsilon > 0$  klein genug seien

$$I_\varepsilon^{(1)} = \int_{\|x-a\|=\varepsilon} f(x) \frac{\partial N_a(x)}{\partial \nu} dS(x)$$

und

$$I_\varepsilon^{(2)} = \int_{\|x-a\|=\varepsilon} N_a(x) \frac{\partial f(x)}{\partial \nu} dS(x).$$

Wir wollen zeigen, dass

$$(1) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon^{(1)} = f(a) \quad \text{und} \quad (2) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon^{(2)} = 0$$

gelten.

Zum Beweis der ersten Identität sei  $\varepsilon > 0$  gegeben mit  $\overline{B_\varepsilon^n}(a) \subset U$ . Aus dem Beweis von [7, §15 Satz 2] folgt, dass das äußere Einheits-Normalenfeld der Kugel  $\overline{B_\varepsilon^n}(a)$  durch die Funktion

$$\nu: \partial B_\varepsilon^n(a) \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \longmapsto \frac{x-a}{\|x-a\|}$$

gegeben ist. Hiermit folgt nach Definition

$$\frac{\partial N_a(x)}{\partial \nu} = \langle \text{grad } N_a(x), \nu(x) \rangle = \frac{1}{\omega_n} \frac{1}{\|x-a\|^{n-1}}$$

und damit

$$\begin{aligned} I_\varepsilon^{(1)} &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\|x-a\|=\varepsilon} f(x) \frac{1}{\|x-a\|^{n-1}} dS(x) \\ &= \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{\|x-a\|=\varepsilon} f(x) dS(x). \end{aligned}$$

Mit  $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x \mapsto a + \varepsilon x$  folgt aus [6, Bemerkung 9.14], dass

$$\begin{aligned} I_\varepsilon^{(1)} &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\|\xi\|=1} (f \circ \Phi)(\xi) dS(\xi) \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\|\xi\|=1} f(a + \varepsilon \xi) dS(\xi). \end{aligned}$$



---

Da  $f$  im Punkt  $a$  stetig ist, folgt aus

$$|f(a) - I_\varepsilon^{(1)}| = \left| \frac{1}{\omega_n} \int_{\|\xi\|=1} f(a) - f(a + \varepsilon\xi) dS(\xi) \right|$$

durch den Grenzübergang  $\varepsilon \downarrow 0$ , dass  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon^{(1)} = f(a)$  ist.

Zum Beweis der zweiten Identität sei erneut  $\varepsilon > 0$  mit  $\overline{B_\varepsilon^n}(a) \subset U$  vorgegeben. Die Funktion  $f$  ist nach Voraussetzung stetig partiell differenzierbar. Daher existiert  $M \geq 0$  so, dass

$$\left| \frac{\partial f(x)}{\partial \nu} \right| \leq M$$

für alle  $x \in \overline{B_\varepsilon^n}(a)$  ist. Wir unterscheiden nun die Fälle  $n > 2$  und  $n = 2$ . Beachtet man, dass  $\text{Vol}_{n-1}(\partial B_\varepsilon^n(a)) = \omega_n \varepsilon^{n-1}$  gilt (siehe [7, §14]), so folgt für  $n > 2$ , dass

$$\begin{aligned} |I_\varepsilon^{(2)}| &= \left| \int_{\|x-a\|=\varepsilon} N_a(x) \frac{\partial f(x)}{\partial \nu} dS(x) \right| \\ &= \left| \int_{\|x-a\|=\varepsilon} \frac{-1}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{\|x-a\|^{n-2}} \frac{\partial f(x)}{\partial \nu} dS(x) \right| \\ &\leq \left| \frac{-1}{(n-2)\omega_n} \right| M \int_{\|x-a\|=\varepsilon} \varepsilon^{2-n} dS(x) \\ &= \frac{1}{n-2} M \varepsilon \end{aligned}$$

und im Fall  $n = 2$ , dass

$$\begin{aligned} |I_\varepsilon^{(2)}| &= \left| \int_{\|x-a\|=\varepsilon} N_a(x) \frac{\partial f(x)}{\partial \nu} dS(x) \right| \\ &= \left| \int_{\|x-a\|=\varepsilon} \frac{1}{2\pi} \log \|x-a\| \frac{\partial f(x)}{\partial \nu} dS(x) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{1}{2\pi} M \int_{\|x-a\|=\varepsilon} |\log \varepsilon| dS(x) \\
 &= \frac{1}{2\pi} M |\log \varepsilon| \int_{\|x-a\|=\varepsilon} 1 dS(x) \\
 &= M |\log \varepsilon| \varepsilon
 \end{aligned}$$

ist. In beiden Fällen erhalten wir  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon^{(2)} = 0$ . □

Sind  $M, M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$  Mengen mit den Eigenschaften

$$M = M_1 \cup M_2 \quad \text{und} \quad M_1 \cap M_2 = \emptyset,$$

so schreiben wir

$$M = M_1 \dot{\cup} M_2.$$

**Proposition 2.7** *Es seien  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und  $A \subset U$  ein Kompaktum mit glattem Rand. Ist  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion mit  $\Delta f \equiv 0$  auf  $A$ , so gilt für jeden Punkt  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \partial A$  die Identität*

$$\int_{\partial A} \left( f \frac{\partial N_a}{\partial \nu} - N_a \frac{\partial f}{\partial \nu} \right) dS = \begin{cases} f(a) & \text{für } a \in \text{Int}(A) \\ 0 & \text{für } a \in \mathbb{R}^n \setminus A. \end{cases}$$

Beweis: Zuerst sei  $a \in \mathbb{R}^n \setminus A$ . Dann ist  $N_a$  in einer Umgebung  $V$  von  $A$  zweimal stetig partiell differenzierbar mit  $\Delta N_a \equiv 0$  auf  $V$ . Mit der Greenschen Integralformel (siehe [7, §15, Satz 4]) folgt dann

$$\int_{\partial A} \left( f \frac{\partial N_a}{\partial \nu} - N_a \frac{\partial f}{\partial \nu} \right) dS = \int_A (f \Delta N_a - N_a \Delta f) d\lambda = 0.$$

Sei nun  $a \in \text{Int}(A)$ . Dann existiert ein  $\delta > 0$  mit  $\overline{B_\delta^n}(a) \subset \text{Int}(A)$ . Seien  $\varepsilon \in (0, \delta]$  und  $A_\varepsilon = A \setminus B_\varepsilon^n(a)$ . Wie eben folgt dann wieder aus der Greenschen Integralformel

$$\int_{\partial A_\varepsilon} \left( f \frac{\partial N_a}{\partial \nu} - N_a \frac{\partial f}{\partial \nu} \right) dS = 0.$$

---

Für den Rand  $\partial A_\varepsilon$  von  $A_\varepsilon$  gilt die Identität

$$\partial A_\varepsilon = \partial A \cup \partial B_\varepsilon^n(a).$$

Bezeichnen  $\nu$  das äußere Einheits-Normalenfeld von  $A_\varepsilon$  und  $\tilde{\nu}$  dasjenige von  $\overline{B}_\varepsilon^n(a)$ , so gilt  $\nu = -\tilde{\nu}$  auf  $\partial B_\varepsilon^n(a)$ . Daher gilt

$$\int_{\partial A} \left( f \frac{\partial N_a}{\partial \nu} - N_a \frac{\partial f}{\partial \nu} \right) dS = \int_{\partial B_\varepsilon^n(a)} \left( f \frac{\partial N_a}{\partial \tilde{\nu}} - N_a \frac{\partial f}{\partial \tilde{\nu}} \right) dS.$$

Das Integral auf der rechten Seite konvergiert laut Proposition 2.6 für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegen  $f(a)$ . Das Integral auf der linken Seite ist unabhängig von  $\varepsilon$  und damit folgt

$$\int_{\partial A} \left( f \frac{\partial N_a}{\partial \nu} - N_a \frac{\partial f}{\partial \nu} \right) dS = f(a).$$

□

**Definition 2.8** Wir definieren den **Poissonschen Integralkern**

$$P: \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x \neq y\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

durch

$$P(x, y) = \frac{1}{\omega_n} \frac{\|y\|^2 - \|x\|^2}{\|x - y\|^n}.$$

Wie leicht zu zeigen ist, gilt für zwei Vektoren  $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  die Identität

$$\left\| \frac{y}{\|y\|} - \|y\|x \right\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} - \|x\|y \right\|, \quad (2.2)$$

die wir im Beweis des folgenden Lemmas benötigen werden.

Ist  $F = (F_1, \dots, F_n): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$   $n$ -mal stetig partiell differenzierbar, so bezeichne

$$\operatorname{div}(F) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} F_i \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

die Divergenz des Vektorfeldes  $F$ .

**Lemma 2.9**

a) Für festes  $y \in \mathbb{R}^n$  ist die Funktion

$$\mathbb{R}^n \setminus \{y\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto P(x, y)$$

harmonisch auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$ .

b) Für jedes  $x \in B_1^n(0)$  gilt

$$\int_{\|y\|=1} P(x, y) dS(y) = 1.$$

Beweis:

a) Es sei  $y \in \mathbb{R}^n$ . Die Funktionen

$$u: \mathbb{R}^n \setminus \{y\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \|y\|^2 - \|x\|^2$$

und

$$v: \mathbb{R}^n \setminus \{y\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \|x - y\|^{-n}$$

sind zweimal stetig partiell differenzierbar. Es sei  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{y\}$ . Dann gelten  $\text{grad } u(x) = -2x$  und  $\Delta u = -2n$ . Für die Funktion  $v$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{grad } v(x) &= -n \|x - y\|^{-n-1} \frac{x - y}{\|x - y\|} \\ &= -n \|x - y\|^{-n-2} (x - y) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Delta v &= -n \text{div} (\|x - y\|^{-n-2} (x - y)) \\ &= -n(-n-2) \|x - y\|^{-n-3} \|x - y\| - n^2 \|x - y\|^{-n-2} \\ &= 2n \|x - y\|^{-n-2}. \end{aligned}$$

Hiermit folgt nun

$$\begin{aligned} \|x - y\|^{n+2} \Delta(uv) &= (\|y\|^2 - \|x\|^2) 2n - 2n \|x - y\|^2 + 4n \langle x, x - y \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

und da  $x \neq y$  ist, folgt die Behauptung.

b) Für  $x = 0$  und  $y \in \partial B_1^n(0)$  gilt

$$P(0, y) = \frac{1}{\omega_n} \frac{\|y\|^2 - \|0\|^2}{\|0 - y\|^n} = \frac{1}{\omega_n},$$

also ist die Behauptung in diesem Fall klar. Für  $x \in B_1^n(0) \setminus \{0\}$  gilt  $\tilde{x} = \|x\|^{-2}x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_1^n(0)}$ . Somit erhalten wir durch Anwendung von Proposition 2.7 auf die Menge  $A = \overline{B_1^n(0)}$  und die Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto 1$ , dass

$$\int_{\|y\|=1} \frac{\partial}{\partial \nu} N_x(y) dS(y) = 1$$

und

$$\int_{\|y\|=1} \frac{\partial}{\partial \nu} N_{\tilde{x}}(y) dS(y) = 0,$$

wobei  $\nu: \partial A \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $y \mapsto y$  das äußere Einheits-Normalenfeld von  $A$  ist. Können wir nun noch zeigen, dass

$$P(x, y) = \frac{\partial}{\partial \nu} \left( N_x(y) - \frac{1}{\|x\|^{n-2}} N_{\tilde{x}}(y) \right)$$

für  $y \in \partial B_1^n(0)$  gilt, so ist die Aussage bewiesen. Aus (2.2) folgt

$$\|x\| \|y - \tilde{x}\| = \left\| \|x\|y - \frac{1}{\|x\|}x \right\| = \|y - x\|.$$

Weiterhin gelten

$$\text{grad } N_x(y) = \frac{1}{\omega_n} \frac{y - x}{\|y - x\|^n}$$

und

$$\begin{aligned} \text{grad} \left( \frac{1}{\|x\|^{n-2}} N_{\tilde{x}}(y) \right) &= \frac{1}{\omega_n \|x\|^{n-2}} \frac{y - \tilde{x}}{\|y - \tilde{x}\|^n} \\ &= \frac{\|x\|^2}{\omega_n} \frac{y - \tilde{x}}{\|y - x\|^n}. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt schließlich wegen (2.1) wie behauptet

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \nu} \left( N_x(y) - \frac{1}{\|x\|^{n-2}} N_{\tilde{x}}(y) \right) \\
 &= \frac{1}{\omega_n \|y-x\|^n} (\langle y-x, y \rangle - \|x\|^2 \langle y-\tilde{x}, y \rangle) \\
 &= \frac{1}{\omega_n \|y-x\|^n} (1 - \|x\|^2 - \langle x, y \rangle + \|x\|^2 \langle \tilde{x}, y \rangle) \\
 &= \frac{1 - \|x\|^2}{\omega_n \|y-x\|^n} \\
 &= P(x, y).
 \end{aligned}$$

□

Der folgende Satz gibt eine Lösung für das Dirichlet-Problem über der  $n$ -dimensionalen Einheitskugel an:

**Satz 2.10** *Es sei  $f: \partial B_1^n(0) \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann ist die Funktion*

$$u: \overline{B_1^n}(0) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \int_{\|y\|=1} P(x, y) f(y) dS(y) & \text{für } x \in B_1^n(0) \\ f(x) & \text{für } x \in \partial B_1^n(0), \end{cases}$$

auf  $\overline{B_1^n}(0)$  stetig und auf  $B_1^n(0)$  harmonisch.

Beweis: Nach [4, Example 2.4.6] dürfen wir unter dem Integral zweimal partiell differenzieren. Die Funktion  $B_1^n(0) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto P(x, y)$  ist nach Lemma 2.9 harmonisch auf ihrem Definitionsbereich und somit ist  $u$  auf  $B_1^n(0)$  harmonisch.

Es bleibt also zu zeigen, dass  $u$  auf  $\overline{B_1^n}(0)$  stetig ist. Wegen  $u \in \text{Harm}(B_1^n(0))$  gilt natürlich auch  $u \in C(B_1^n(0), \mathbb{R})$ . Es genügt also

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \xi_0 \\ \|x\| < 1}} (u(x) - f(\xi_0)) = 0$$

für  $\xi_0 \in \partial B_1^n(0)$  zu zeigen. Es sei  $x \in B_1^n(0)$ . Aus Lemma 2.9(b) folgt

$$u(x) - f(\xi_0) = \int_{\|y\|=1} P(x, y) (f(y) - f(\xi_0)) dS(y).$$

---

Es sei  $\varepsilon > 0$ . Da  $f$  auf  $\partial B_1^n(0)$  stetig ist, gibt es ein  $\delta > 0$  so, dass

$$|f(y) - f(\xi_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle  $y \in \partial B_1^n(0) \cap B_\delta^n(\xi_0)$  gilt. Setzen wir

$$M_1 = \{y \in \partial B_1^n(0) \mid \|y - \xi_0\| \leq \delta\}$$

und

$$M_2 = \{y \in \partial B_1^n(0) \mid \|y - \xi_0\| > \delta\},$$

so gilt  $\partial B_1^n(0) = M_1 \dot{\cup} M_2$ .

Für  $x \in B_1^n(0)$  definieren wir nun

$$I_j(x) = \int_{M_j} P(x, y) (f(y) - f(\xi_0)) dS(y) \quad \text{für } j = 1, 2,$$

sodass

$$u(x) - f(\xi_0) = I_1(x) + I_2(x)$$

gilt. Für  $x \in B_1^n(0)$ ,  $y \in \partial B_1^n(0)$  ist  $P(x, y) > 0$  und damit folgt

$$\begin{aligned} |I_1(x)| &\leq \int_{M_1} P(x, y) \frac{\varepsilon}{2} dS(y) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\partial B_1^n(0)} P(x, y) dS(y) \\ &= \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Sei  $m = \sup_{y \in \partial B_1^n(0)} |f(y)|$ . Dann gilt für  $y \in \partial B_1^n(0)$  nach der Dreiecksungleichung

$$|f(y) - f(\xi_0)| \leq 2m$$

und daraus folgt

$$|I_2(x)| \leq 2m \int_{M_2} P(x, y) dS(y).$$

Sei weiter

$$\mu = \min \left\{ \frac{\delta}{2}, \frac{\varepsilon}{8m} \left( \frac{\delta}{2} \right)^n \right\}.$$

Für  $x \in \overline{B}_\mu^n(\xi_0) \cap B_1^n(0)$  gilt wegen  $\xi_0 \in \partial B_1^n(0)$  und der Dreiecksungleichung

$$1 - \|x\|^2 = (1 + \|x\|)(1 - \|x\|) \leq 2(1 - \|x\|) \leq 2\|x - \xi_0\| \leq 2\mu.$$

Für  $y \in M_2$  gilt dann

$$\|y - x\| \geq \|y - \xi_0\| - \|x - \xi_0\| \geq \delta - \mu \geq \frac{\delta}{2}.$$

Somit erhalten wir die Abschätzung

$$\frac{1 - \|x\|^2}{\|x - y\|^n} \leq \frac{2\mu}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^n} \leq \frac{\varepsilon}{4m}$$

und es folgt

$$|I_2(x)| \leq \frac{2m}{\omega_n} \int_{M_2} \frac{\varepsilon}{4m} dS(y) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle  $x \in \overline{B}_\mu^n(\xi_0) \cap B_1^n(0)$ .

Es folgt nun insgesamt

$$|u(x) - f(\xi_0)| \leq \varepsilon$$

für alle  $x \in \overline{B}_\mu^n(\xi_0) \cap B_1^n(0)$  und damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

Wir formulieren nun die **Mittelwerteigenschaft für harmonische Funktionen**:

**Satz 2.11** *Es seien  $u \in C(\Omega, \mathbb{R})$  und  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $r > 0$  so, dass  $\overline{B}_r(a) \subset \Omega$  ist. Ist  $u$  harmonisch auf  $B_r(a)$ , so gilt die Mittelwertgleichung*

$$u(a) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\|\xi\|=1} u(a + r\xi) dS(\xi). \quad (2.3)$$



---

Beweis: Es seien  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $r > 0$  so, dass  $\overline{B}_r(a) \subset \Omega$  und  $u \in C(\Omega, \mathbb{R})$  harmonisch auf  $B_r(a)$ . Nach Proposition 2.7 gilt dann

$$u(a) = \int_{\|x-a\|=r} \left( u(x) \frac{\partial N_a(x)}{\partial \nu} - N_a(x) \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \right) dS(x),$$

wobei

$$\nu: \partial B_r(a) \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \longmapsto \frac{x-a}{\|x-a\|}$$

das äußere Einheits-Normalenfeld der Sphäre  $\partial B_r(a)$  ist (siehe [7, §15]). Wir werten beide Summanden einzeln aus. Wegen

$$\frac{\partial N_a(x)}{\partial \nu} = \langle \text{grad } N_a(x), \nu(x) \rangle = \frac{1}{\omega_n} \frac{1}{\|x-a\|^{n-1}}$$

liefert die Substitution  $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x \mapsto a + rx$  nach [6, Bemerkung 9.14], dass

$$\begin{aligned} \int_{\|x-a\|=r} u(x) \frac{\partial N_a(x)}{\partial \nu} dS(x) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\|x-a\|=r} u(x) \frac{1}{r^{n-1}} dS(x) \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\|x\|=1} u(a+rx) dS(x). \end{aligned}$$

Können wir nun zeigen, dass das Integral

$$- \int_{\|x-a\|=r} N_a(x) \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} dS(x)$$

verschwindet, so ist die Behauptung gezeigt. Auf der Sphäre  $\partial B_r(a)$  ist die Funktion  $N_a: \mathbb{R}^n \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  konstant, d.h. von  $r$ , aber nicht von  $x$  abhängig. Daher genügt es also

$$\int_{\|x-a\|=r} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = 0$$

zu zeigen. Da  $u$  harmonisch auf  $B_r(a)$  ist, gilt  $\Delta u \equiv 0$  auf  $B_r(a)$  und mit der Greenschen Integralformel (siehe [7, §15, Satz 4]) folgt daher

$$\begin{aligned} \int_{\|x-a\|=r} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS &= \int_{\|x-a\|=r} \left( 1 \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial 1}{\partial \nu} \right) dS \\ &= \int_{B_r(a)} (1 \Delta u - u \Delta 1) d\lambda \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

**Definition 2.12** Wir nennen eine stetige Funktion  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  **subharmonisch auf  $\Omega$** , wenn für jedes  $a \in \Omega$  ein  $R > 0$  existiert mit  $B_R(a) \subset \Omega$  so, dass für alle  $r \in (0, R)$  die Mittelwertungleichung

$$u(a) \leq \frac{1}{\omega_n} \int_{\|\xi\|=1} u(a + r\xi) dS(\xi) \quad (2.4)$$

gilt.

**Bemerkung 2.13**

- (i) Aus Satz 2.11 folgt, dass jede auf  $\Omega$  harmonische Funktion  $u \in \text{Harm}(\Omega)$  auch subharmonisch auf  $\Omega$  ist.
- (ii) Sind  $u_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2$ ) subharmonisch auf  $\Omega$  und  $\alpha \geq 0$ , so sind wegen (2.4) auch  $u_1 + u_2: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto u_1(x) + u_2(x)$  und  $\alpha u_1: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \alpha u_1(x)$  subharmonisch.

Für subharmonische Funktionen gilt ein Maximumprinzip:

**Satz 2.14** Ist  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und zusammenhängend,  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine auf  $\Omega$  subharmonische Funktion und ist  $a \in \Omega$  ein Punkt mit  $u(x) \leq u(a)$  für alle  $x \in \Omega$ , so ist  $u \equiv u(a)$  auf  $\Omega$ .

---

Beweis: Es sei  $a \in \Omega$  so, dass  $u(x) \leq u(a)$  für alle  $x \in \Omega$  gilt. Wir definieren

$$\Omega_{\max} = \{x \in \Omega \mid u(x) = u(a)\}.$$

Dann gilt  $\emptyset \neq \Omega_{\max}$  und  $\Omega_{\max}$  ist abgeschlossen in  $\Omega$ . Können wir nun noch zeigen, dass  $\Omega_{\max}$  offen in  $\Omega$  ist, so folgt – da  $\Omega$  zusammenhängend ist – wie behauptet  $\Omega_{\max} = \Omega$ . Sei  $x \in \Omega_{\max}$  und  $R > 0$  so, dass  $B_R^n(x) \subset \Omega$ . Wir nehmen an, es gäbe  $r \in (0, R)$ ,  $w \in \partial B_1^n(0)$  so, dass  $u(x + rw) < u(a)$  ist. Da  $u$  stetig ist, existiert dann zu jedem hinreichend kleinen  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  so, dass

$$u(x + rv) < u(a) - \varepsilon$$

für alle  $v \in \partial B_1^n(0)$  mit  $\|w - v\| < \delta$  ist. Mit

$$M = \{v \in \partial B_1^n(0) \mid \|w - v\| < \delta\}$$

folgt somit

$$\begin{aligned} u(a) = u(x) &\leq \frac{1}{\omega_n} \int_{\|\xi\|=1} u(x + r\xi) dS(\xi) \\ &= \frac{1}{\omega_n} \left( \int_M u(x + r\xi) dS(\xi) + \int_{\partial B_1(0) \setminus M} u(x + r\xi) dS(\xi) \right) \\ &\leq u(a) - \int_M \varepsilon dS(\xi) \\ &< u(a), \end{aligned}$$

was ein Widerspruch ist. □

Für harmonische Funktionen  $u \in \text{Harm}(\Omega)$  folgt hieraus:

**Korollar 2.15** *Es seien  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und zusammenhängend und  $u \in \text{Harm}(\Omega)$  eine harmonische Funktion. Besitzt  $u$  auf  $\Omega$  ein Maximum oder Minimum, so ist  $u$  konstant.*

Beweis: Existiert  $a \in \Omega$  mit  $u \leq u(a)$  auf  $\Omega$ , so folgt die Behauptung aus Satz 2.14. Im Falle, dass  $u \geq u(a)$  auf  $\Omega$  ist, wende Satz 2.14 auf die Funktion  $-u \in \text{Harm}(\Omega)$  an. □

**Lemma 2.16** *Es seien  $r > 0$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$  und  $u: \overline{B}_r^n(a) \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, die auf  $B_r^n(a)$  harmonisch ist. Dann gilt für alle  $x \in B_r^n(a)$  die Poissonsche Integralformel*

$$u(x) = \int_{\|y-a\|=r} P_{(r,a)}(x,y)u(y)dS(y),$$

wobei

$$P_{(r,a)}(x,y) = \frac{1}{r\omega_n} \frac{\|y-a\|^2 - \|x-a\|^2}{\|x-y\|^n} \quad (x \neq y)$$

ist.

Beweis: Mit  $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x \mapsto \frac{1}{r}x - a$  in [6, Bemerkung 9.14] können wir ohne Einschränkung  $r = 1$  und  $a = 0$  annehmen.

Definieren wir

$$v: \overline{B}_1^n(0) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \int_{\|y\|=1} P_{(1,0)}(x,y)u(y)dS(y) & \text{für } x \in B_1^n(0) \\ u(x) & \text{für } x \in \partial B_1^n(0), \end{cases}$$

so ist  $v$  nach Satz 2.10 Lösung des Dirichlet-Problems mit Randbedingung  $u|_{\partial B_1(0)}$ . Aus dem Maximumprinzip für harmonische Funktionen (Korollar 2.15) folgt  $u = v$ .  $\square$

**Bemerkung 2.17** *Im Beweis des vorangegangenen Satzes haben wir insbesondere gezeigt, dass das Dirichlet-Problem für die Menge  $\Omega = B_r^n(a)$  ( $a \in \mathbb{R}^n, r > 0$ ) mit Randbedingung  $f \in C(\partial\Omega, \mathbb{R})$  die eindeutige Lösung*

$$u: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} \int_{\|y-a\|=r} P_{(r,a)}f(y)dS(y) & \text{für } x \in B_r^n(a) \\ f(y) & \text{für } x \in \partial B_r^n(a) \end{cases}$$

hat.

Wenn wir sagen, dass eine Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  gegen  $\infty$  konvergiert, dann meinen wir damit  $\|a_k\| \rightarrow \infty$  für  $k \rightarrow \infty$ . Wir orientieren uns im folgenden Korollar an [1, Corollary 1.10].

---

**Korollar 2.18** Seien  $M \in \mathbb{R}$  eine reelle Zahl und  $u \in \text{Harm}(\Omega)$  eine Funktion mit der Eigenschaft

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} u(a_k) \leq M$$

für alle Folgen  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\Omega$ , die entweder gegen einen Randpunkt  $\xi \in \partial\Omega$  oder gegen  $\infty$  konvergieren. Dann gilt  $u \leq M$  auf  $\Omega$ .

Beweis: Es sei

$$M' = \sup_{x \in \Omega} u(x) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Wir wählen eine Folge  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\Omega$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} u(b_k) = M'$ . Hat  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge, die gegen einen Punkt  $b \in \Omega$  konvergiert, so gilt  $M' = u(b) \in \mathbb{R}$ . Aus dem Maximumprinzip (Korollar 2.15) würde dann folgen, dass  $u$  konstant auf jener Zusammenhangskomponente  $K \subset \Omega$  von  $\Omega$  ist, die  $b$  enthält. Somit gäbe es in diesem Fall eine Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\Omega$ , die gegen einen Randpunkt  $\xi \in \partial K \subset \partial\Omega$  oder gegen  $\infty$  konvergiert, mit  $u(a_k) = M'$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), also  $M' \leq M$ .

Gibt es keine konvergente Teilfolge von  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , die gegen einen Punkt in  $\Omega$  konvergiert, so hat  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , die entweder gegen einen Randpunkt  $\xi \in \partial\Omega$  oder gegen  $\infty$  konvergiert. Daher gilt auch in diesem Fall  $M' \leq M$  nach Voraussetzung.  $\square$

**Satz 2.19** Seien  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränkte, offene Menge und  $u, v \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$  stetig. Ist  $u$  subharmonisch auf  $\Omega$ ,  $v$  harmonisch auf  $\Omega$  und gilt die Ungleichung  $u \leq v$  auf  $\partial\Omega$ , so gilt schon  $u \leq v$  auf ganz  $\bar{\Omega}$ .

Beweis: Es sei  $K$  eine Zusammenhangskomponente von  $\Omega$ . Wir nehmen an, dass  $u - v \leq 0$  auf  $\partial K \subset \partial\Omega$  gilt. Aus Bemerkung 2.13 folgt, dass  $u - v$  subharmonisch auf  $K$  ist. Somit folgt aus dem Maximumprinzip (Satz 2.14), dass  $u - v \leq 0$  auf  $K$  gilt.  $\square$

**Proposition 2.20** Es seien  $u_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2$ ) subharmonisch auf  $\Omega$ . Dann ist auch die Funktion

$$\max\{u_1, u_2\}: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \max\{u_1(x), u_2(x)\}$$

subharmonisch auf  $\Omega$ .

## 2 Das Dirichlet-Problem

---

Beweis: Es seien  $u_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2$ ) subharmonisch auf  $\Omega$ . Dann sind  $u_1$  und  $u_2$  insbesondere stetig und somit ist auch die Funktion

$$\max\{u_1, u_2\}: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{2}(u_1(x) + u_2(x) + |u_1(x) - u_2(x)|)$$

als Verknüpfung stetiger Funktionen stetig. Es seien  $x \in \Omega$  und  $r > 0$  so klein, dass  $\overline{B}_r^n(x) \subset \Omega$  und

$$u_i(x) \leq \frac{1}{\omega_n} \int_{\|\xi\|=1} u_i(x + r\xi) dS(\xi)$$

für  $i = 1, 2$  gilt. Damit gilt insbesondere

$$u_i(x) \leq \frac{1}{\omega_n} \int_{\|\xi\|=1} \max\{u_1, u_2\}(x + r\xi) dS(\xi) \quad (i = 1, 2)$$

und schließlich

$$\max\{u_1, u_2\}(x) \leq \frac{1}{\omega_n} \int_{\|\xi\|=1} \max\{u_1, u_2\}(x + r\xi) dS(\xi).$$

Somit ist  $\max\{u_1, u_2\}$  nach Definition 2.12 subharmonisch auf  $\Omega$ .  $\square$

Im nächsten Lemma werden wir erstmalig folgende abkürzende Schreibweise verwenden: Sind  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine Menge,  $y \in \mathbb{R}^n$  ein Punkt und  $A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Abbildung, so schreiben wir

$$A\Omega + y = \{Ax + y \mid x \in \Omega\}.$$

**Lemma 2.21** *Es sei  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine subharmonische Funktion und es seien  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha > 0$  und  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine orthogonale Matrix. Definiert man*

$$A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \longmapsto \alpha Mx + y$$

und setzt

$$\Omega_A = \{A^{-1}x \mid x \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^n,$$

so ist  $u \circ A|_{\Omega_A}: \Omega_A \rightarrow \mathbb{R}$  subharmonisch.

---

Beweis: Nach Definition von  $A$  gilt  $A\Omega_A = \Omega$  und  $u \circ A|_{\Omega_A}$  ist stetig. Seien  $x \in \Omega_A$  und  $r > 0$  mit  $\overline{B}_r^n(x) \subset \Omega_A$ . Dann gilt

$$A\overline{B}_r^n(x) = \overline{B}_{\alpha r}^n(\alpha Mx + y) \subset \Omega.$$

Ist  $r$  klein genug, so liefert die Subharmonizität von  $u$  zusammen mit [6, Satz 9.13] die Abschätzung

$$\begin{aligned} (u \circ A)(x) &\leq \frac{1}{\omega_n} \int_{\|\xi\|=1} u(Ax + \alpha r \xi) dS(\xi) \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\|\xi\|=1} u(\alpha M(x + rM^T \xi) + y) dS(\xi) \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\|\xi\|=1} u(\alpha M(x + r\xi) + y) dS(\xi) \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\|\xi\|=1} (u \circ A)(x + r\xi) dS(\xi). \end{aligned}$$

□





# 3 Das Harnacksche Konvergenzprinzip

In diesem Kapitel sei  $n \geq 2$  eine natürliche Zahl.

**Satz 3.1** *Seien  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  eine Folge harmonischer Funktion  $u_m \in \text{Harm}(\Omega)$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) so, dass  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  kompakt gleichmäßig gegen eine Funktion  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert. Dann ist  $u$  harmonisch auf  $\Omega$ .*

Beweis: Zunächst sei bemerkt, dass aus der kompakt gleichmäßigen Konvergenz der Folge  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  die Stetigkeit der Grenzfunktion  $u$  folgt (siehe [8, §2 Satz 10]). Es seien  $r > 0$ ,  $a \in \Omega$  so, dass  $\overline{B_r}(a) \subset \Omega$  gilt. Es genügt zu zeigen, dass  $u$  harmonisch auf  $B_r(a)$  ist. Es sei  $x \in B_r(a)$ . Nach Lemma 2.16 gilt für alle  $m \in \mathbb{N}$

$$u_m(x) = \int_{\|y-a\|=r} P_{(r,a)}(x, y) u_m(y) dS(y).$$

Durch den Übergang zum Grenzwert  $m \rightarrow \infty$  auf beiden Seiten folgt aufgrund der kompakt gleichmäßigen Konvergenz von  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  dann

$$u(x) = \int_{\|y-a\|=r} P_{(r,a)}(x, y) u(y) dS(y).$$

Nach Bemerkung 2.17 ist  $u$  harmonisch auf  $B_r(a)$ . □

**Satz 3.2** *Es seien  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $R > 0$  und  $u: B_R(a) \rightarrow \mathbb{R}$  eine nicht-negative harmonische Funktion. Dann gilt für alle  $x \in B_R(a)$  die Ungleichung*

$$\frac{1 - R^{-1}\|x - a\|}{(1 + R^{-1}\|x - a\|)^{n-1}} u(a) \leq u(x) \leq \frac{1 + R^{-1}\|x - a\|}{(1 - R^{-1}\|x - a\|)^{n-1}} u(a). \quad (3.1)$$

### 3 Das Harnacksche Konvergenzprinzip

---

Beweis: Wir betrachten die nicht-negative Funktion

$$v: B_R(0) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto u(x+a).$$

Für  $r \in (0, R)$  folgt aus Lemma 2.16

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_{\|y\|=r} P_{(r,0)}(x,y)v(y)dS(y) \\ &= \frac{1}{r\omega_n} \int_{\|y\|=r} \frac{\|y\|^2 - \|x\|^2}{\|x-y\|^n} v(y)dS(y) \end{aligned} \tag{3.2}$$

für alle  $x \in B_r(0)$ . Für  $x \in B_r(0)$ ,  $y \in \partial B_r(0)$  gilt mit der Dreiecksungleichung die Abschätzung

$$\begin{aligned} \frac{r - \|x\|}{(r + \|x\|)^{n-1}} &= \frac{r^2 - \|x\|^2}{(r + \|x\|)^n} \\ &\leq \frac{\|y\|^2 - \|x\|^2}{\|y-x\|^n} \\ &\leq \frac{r^2 - \|x\|^2}{(r - \|x\|)^n} \\ &= \frac{r + \|x\|}{(r - \|x\|)^{n-1}}. \end{aligned}$$

Wegen  $v \geq 0$  auf  $B_R(0)$  folgt aus (3.2) daher

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r\omega_n} \frac{r - \|x\|}{(r + \|x\|)^{n-1}} \int_{\|y\|=r} v(y)dS(y) \\ &\leq v(x) \\ &\leq \frac{1}{r\omega_n} \frac{r + \|x\|}{(r - \|x\|)^{n-1}} \int_{\|y\|=r} v(y)dS(y) \end{aligned}$$

---

für alle  $x \in B_r(0)$ . Die Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen (Satz 2.11) liefert nun

$$\begin{aligned} \frac{1 - r^{-1}\|x\|}{(1 + r^{-1}\|x\|)^{n-1}}v(0) &= \frac{r^{n-2}(r - \|x\|)}{(r + \|x\|)^{n-1}}v(0) \\ &\leq v(x) \\ &\leq \frac{r^{n-2}(r + \|x\|)}{(r - \|x\|)^{n-1}}v(0) \\ &= \frac{1 + r^{-1}\|x\|}{(1 - r^{-1}\|x\|)^{n-1}}v(0) \end{aligned}$$

für alle  $x \in B_r(0)$ . Mit dem Grenzübergang  $r \rightarrow R$  erhalten wir schließlich mit  $u(x) = v(x - a)$  für alle  $x \in B_R(a)$  wie gewünscht (3.1).  $\square$

Den nun folgenden Satz bezeichnet man auch als die **Harnacksche Ungleichung**.

**Satz 3.3** *Es seien  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine offene und zusammenhängende Menge und  $K \subset \Omega$  kompakt. Dann existiert eine Konstante  $C \in (1, \infty)$  so, dass*

$$\frac{1}{C} \leq \frac{u(y)}{u(x)} \leq C$$

für alle  $x, y \in K$  und alle strikt positiven Funktionen  $u \in \text{Harm}(\Omega)$  gilt.

Beweis: Es reicht die zweite Ungleichung zu zeigen. Denn  $x$  und  $y$  spielen symmetrische Rollen und somit folgt die andere Ungleichung sofort. Wir zeigen, dass die Abbildungsvorschrift

$$s(x, y) = \sup \left\{ \frac{u(y)}{u(x)} \mid u \in \text{Harm}(\Omega) \text{ ist strikt positiv} \right\}$$

eine wohldefinierte und nach oben beschränkte Funktion  $s: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definiert. Hierzu sei  $x \in \Omega$  fest. Wir definieren

$$E = \{y \in \Omega \mid s(x, y) < \infty\}.$$

### 3 Das Harnacksche Konvergenzprinzip

---

Wegen  $x \in E$  ist  $E$  nicht leer. Um die Notation im Folgenden zu vereinfachen, definieren wir die monoton fallende Funktion

$$\alpha: (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \frac{1-t}{(1+t)^{n-1}}$$

und die monoton wachsende Funktion

$$\beta: (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \frac{1+t}{(1-t)^{n-1}}.$$

Bemerke, dass für  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $R > 0$  und jede strikt positive Funktion  $u \in \text{Harm}(B_R^n(a))$  nach Satz 3.2 und aufgrund der Monotonie-Eigenschaften der Funktionen  $\alpha$  und  $\beta$  die Ungleichungen

$$\alpha\left(\frac{r}{R}\right) u(a) \leq u(z) \leq \beta\left(\frac{r}{R}\right) u(a) \quad (3.3)$$

für alle  $r \in [0, R)$  und alle  $z \in \overline{B}_r^n(a)$  gelten.

Sei nun  $y \in E$ . Wir wählen  $r > 0$  so, dass  $B_{2r}^n(y) \subset \Omega$ . Nach (3.3) gilt dann

$$\frac{u(z)}{u(x)} = \frac{u(z) u(y)}{u(y) u(x)} \leq \beta\left(\frac{1}{2}\right) s(x, y) < \infty$$

für alle  $z \in B_r^n(y)$  und alle strikt positiven Funktionen  $u \in \text{Harm}(\Omega)$ . Es gilt also  $B_r^n(y) \subset E$  und damit ist  $E$  offen in  $\Omega$ .

Ist  $z \in \Omega$  ein Randpunkt von  $E$  in  $\Omega$ , dann gibt es  $r > 0$  und  $y \in E$  mit

$$z \in B_r^n(y) \subset B_{2r}^n(y) \subset \Omega.$$

Nach (3.3) gilt dann wieder

$$\frac{u(z)}{u(x)} \leq \beta\left(\frac{1}{2}\right) s(x, y)$$

für alle strikt positiven Funktionen  $u \in \text{Harm}(\Omega)$ . Es gilt also  $z \in E$  und somit ist  $E$  abgeschlossen. Da  $\Omega$  zusammenhängend ist, folgt nun  $E = \Omega$ .

Wir wissen jetzt, dass  $s$  in  $\Omega \times \Omega$  nur endliche Werte annimmt. Seien jetzt  $K \subset \Omega$  eine kompakte Teilmenge und  $(a, b) \in K \times K$ . Nach (3.3)

---

gibt es dann eine offene Umgebung  $U = U_1 \times U_2 \subset \Omega \times \Omega$  von  $(a, b)$  so, dass für alle  $(x, y) \in U$  und alle strikt positiven Funktionen  $u \in \text{Harm}(\Omega)$

$$\frac{u(y)}{u(x)} \leq \frac{\beta\left(\frac{1}{2}\right) u(b)}{\alpha\left(\frac{1}{2}\right) u(a)} \leq \frac{\beta\left(\frac{1}{2}\right)}{\alpha\left(\frac{1}{2}\right)} s(a, b)$$

gilt. Da  $K$  kompakt ist, kann  $K \times K$  durch endlich viele solcher offenen Umgebungen überdeckt werden und somit ist  $s$  auf  $K \times K$  nach oben beschränkt. Dies war zu zeigen.  $\square$

**Bemerkung 3.4** Die Konstante  $C$  im vorherigen Satz hängt von  $\Omega$  und  $K$ , nicht aber von  $u \in \text{Harm}(\Omega)$  ab.

Nun können wir das Hauptresultat dieses Kapitels, das so genannte **Harnacksche Konvergenzprinzip**, formulieren und beweisen:

**Satz 3.5** Es seien  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine offene und zusammenhängende Menge und  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  eine punktweise monoton wachsende Folge harmonischer Funktionen  $u_m \in \text{Harm}(\Omega)$  ( $m \in \mathbb{N}$ ). Dann gilt entweder

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u_m(x) = \infty$$

für alle  $x \in \Omega$ , oder die Folge  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  konvergiert kompakt gleichmäßig auf  $\Omega$  gegen eine harmonische Funktion  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

Beweis: Es seien  $\varepsilon > 0$  beliebig und  $(\varepsilon_m)_{m \in \mathbb{N}}$  eine streng monoton wachsende Folge positiver reeller Zahlen mit  $\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m = \varepsilon$ . Ersetzen wir die obige Folge  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  auf  $\Omega$  harmonischer Funktionen durch die Folge  $(u_m - u_1 + \varepsilon_m)_{m \in \mathbb{N}}$ , so können wir annehmen, dass  $u_m$  für alle  $m \in \mathbb{N}$  positiv auf  $\Omega$  ist. Wir definieren die Funktion

$$u: \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad x \longmapsto \lim_{m \rightarrow \infty} u_m(x).$$

Zuerst nehmen wir an, dass  $u$  auf ganz  $\Omega$  nur endliche Werte annimmt. Seien  $K \subset \Omega$  eine kompakte Teilmenge und  $x \in K$ . Aus der Harnackschen Ungleichung (Satz 3.3) folgt, dass es eine Konstante  $C \in (1, \infty)$  gibt, sodass für alle  $y \in K$  und alle  $m, k \in \mathbb{N}$  mit  $m \geq k$  die Ungleichung

$$0 \leq u_m(y) - u_k(y) \leq C (u_m(x) - u_k(x))$$

### 3 Das Harnacksche Konvergenzprinzip

---

gilt. Da nach Annahme  $u(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} u_m(x)$  existiert, finden wir also zu jedem  $\delta > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  so, dass

$$u_m(x) - u_k(x) \leq \delta$$

für alle  $m \geq k \geq N$  gilt. Das heißt  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  konvergiert gleichmäßig auf  $K$ . Aus Satz 3.1 folgt nun, dass die Grenzfunktion  $u$  harmonisch auf  $\Omega$  ist.

Sei nun  $u(x) = \infty$  für ein  $x \in \Omega$  und sei  $y \in \Omega$ . Wenden wir die Harnacksche Ungleichung (Satz 3.3) auf die kompakte Teilmenge  $K = \{x, y\}$  an, so folgt, dass eine Konstante  $C \in (1, \infty)$  existiert mit

$$u_m(x) \leq C u_m(y)$$

für alle  $m \in \mathbb{N}$ . Da aber nach Voraussetzung  $u_m(x) \rightarrow \infty$  für  $m \rightarrow \infty$  gilt, gilt auch  $u_m(y) \rightarrow \infty$  für  $m \rightarrow \infty$  und damit  $u(y) = \infty$ .  $\square$

## 4 Die Perronsche Methode

In diesem Kapitel seien, wenn nicht näher spezifiziert,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränkte, offene Menge und  $f: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Wir werden zeigen, dass die Funktion

$$P[f]: \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sup \{u(x) \mid u \in S_f\},$$

wobei  $S_f = \{u \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) \mid u \text{ ist subharmonisch auf } \Omega \text{ und } u|_{\partial\Omega} \leq f|_{\partial\Omega}\}$  ist, auf  $\Omega$  harmonisch ist.

Wir nennen die Menge  $S_f$  die **Perron-Familie** von  $f$  und die Funktion  $P[f]$  die **Perron-Funktion** von  $f$ .

**Bemerkung 4.1** *Da  $\Omega$  beschränkt ist, ist  $\partial\Omega$  kompakt. Somit nimmt die stetige Funktion  $f: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ihr Minimum  $m \in \mathbb{R}$  an. Daher ist die Menge  $S_f$  nicht leer, denn sie enthält die Funktion  $u: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto m$ .*

Bevor wir einige Eigenschaften der Perron-Familie und der Perron-Funktion untersuchen, benötigen wir noch den folgenden Satz über subharmonische Funktionen:

**Satz 4.2** *Es seien  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge,  $a \in \mathbb{R}^n$  und  $R > 0$  so, dass  $\overline{B}_R(a) \subset \Omega$  ist und sei  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine auf  $\Omega$  subharmonische Funktion. Es sei  $s: \overline{B}_R(a) \rightarrow \mathbb{R}$  die Lösung des Dirichlet-Problems über  $B_R(a)$  mit Randbedingung  $u|_{\partial B_R(a)}$ . Dann ist die Funktion*

$$w: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in \Omega \setminus B_R(a) \\ s(x) & \text{für } x \in B_R(a) \end{cases}$$

*subharmonisch auf  $\Omega$  und es gilt  $u \leq w$  auf  $\Omega$ .*

Beweis: Aus Satz 2.19 folgt unmittelbar  $u \leq w$  auf  $\Omega$ . Aufgrund der Definition von  $w$  ist die Stetigkeit auf  $\Omega$  klar. Seien  $a \in \Omega$ ,  $\tilde{r} > 0$  so, dass  $B_{\tilde{r}}(a) \subset \Omega$  gilt. Es bleibt nun

$$w(a) \leq \frac{1}{\omega_n} \int_{\|\xi\|=1} w(a + r\xi) dS(\xi)$$

für alle  $r \in (0, \tilde{r})$  zu zeigen. Sei hierzu  $b \in \Omega$ .

Nehmen wir zuerst  $b \in B_R(a)$  an. Dann existiert ein genügend kleines  $r \in (0, R]$  so, dass  $w$  auf  $B_r(a)$  harmonisch ist und nach Definition gilt

$$w(b) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\|\xi\|=1} w(b + r\xi) dS(\xi).$$

Sei nun  $b \in \Omega \setminus B_R(a)$ . Nach Voraussetzung gilt dann  $u(b) = w(b)$ . Da  $u$  subharmonisch auf  $\Omega$  ist und  $u \leq w$  auf  $\Omega$  ist, gilt

$$w(b) \leq \frac{1}{\omega_n} \int_{\|\xi\|=1} w(b + r\xi) dS(\xi)$$

für alle  $r > 0$  klein genug. Damit ist  $w$  subharmonisch auf  $\Omega$  und der Beweis ist beendet.  $\square$

**Definition 4.3** Wir nennen die in Satz 4.2 definierte Funktion  $w: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  die **Poisson-Modifikation von  $u$  auf  $B_r(a)$** .

**Lemma 4.4**

- (i) Für  $u_1, u_2 \in S_f$  ist auch  $\max\{u_1, u_2\} \in S_f$ .
- (ii) Seien  $u \in S_f$  und  $\bar{B}_R(a) \subset \Omega$  und  $v \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$  die stetige Fortsetzung der Poisson-Modifikation von  $u|_{\Omega}$ . Dann ist auch  $v \in S_f$ .

Beweis:

- (i) Seien  $u_1, u_2 \in S_f$ . Nach Voraussetzung gilt  $u_1, u_2 \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$  und wegen  $\max\{u_1, u_2\}(x) = \frac{1}{2}(u_1(x) + u_2(x) + |u_1(x) - u_2(x)|)$  ist auch  $\max\{u_1, u_2\}: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. In Proposition 2.20 haben wir gezeigt, dass  $\max\{u_1, u_2\}$  auch subharmonisch ist. Da  $u_i|_{\partial\Omega} \leq f|_{\partial\Omega}$  ( $i = 1, 2$ ) gilt, folgt  $\max\{u_1, u_2\}|_{\partial\Omega} \leq f|_{\partial\Omega}$  und wir haben  $\max\{u_1, u_2\} \in S_f$  gezeigt.



---

(ii) Es seien  $u \in S_f$ ,  $\overline{B}_R(a) \subset \Omega$  und  $v$  wie in (ii) erklärt. Dann gilt  $v|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega} \leq f|_{\partial\Omega}$  und nach Satz 4.2 ist  $v|_{\Omega}$  subharmonisch, also  $v \in S_f$ .

□

**Lemma 4.5** *Setzt man*

$$m = \min_{y \in \partial\Omega} f(y) \quad \text{bzw.} \quad M = \max_{y \in \partial\Omega} f(y),$$

so gilt  $m \leq P[f] \leq M$  auf  $\overline{\Omega}$ . Weiterhin gilt  $P[f] \leq f$  auf  $\partial\Omega$ .

Beweis: Sei  $x \in \partial\Omega$ . Dann gilt  $u(x) \leq f(x)$  für alle  $u \in S_f$ , sodass  $P[f](x) \leq f(x)$  ist.

Nach Definition von  $m$  liegt die konstante Funktion

$$\overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto m$$

in  $S_f$  und somit folgt  $m \leq P[f]$  auf  $\overline{\Omega}$  aus der Definition der Perron-Funktion  $P[f]$ .

Seien nun  $u \in S_f$  und  $K \subset \Omega$  eine Zusammenhangskomponente von  $\Omega$ . Dann ist  $u|_{\overline{K}}$  stetig und auf  $K$  subharmonisch. Nach Satz 2.14 nimmt  $u|_{\overline{K}}$  sein Maximum auf  $\partial K \subset \partial\Omega$  an. Somit folgt

$$u(x) \leq \max_{y \in \partial K} u(y) \leq \max_{y \in \partial\Omega} u(y) \leq M$$

für alle  $x \in \overline{K}$ . Dies liefert  $u \leq M$  auf  $\overline{\Omega}$ , sodass  $P[f] \leq M$  auf  $\overline{\Omega}$  nach Definition von  $P[f]$  gilt. □

**Lemma 4.6** *Hat das Dirichlet-Problem für  $\Omega$  mit Randbedingung  $f$  eine Lösung  $v$ , so gilt bereits  $v = P[f]$ .*

Beweis: Es sei  $v$  eine Lösung des Dirichlet-Problems für  $\Omega$  mit Randbedingung  $f$ . Dann gilt  $v \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ ,  $v|_{\Omega}$  ist harmonisch, also auch subharmonisch, auf  $\Omega$  und es gilt  $v|_{\partial\Omega} = f$ . Damit ist  $v \in S_f$  und es folgt  $v \leq P[f]$  auf  $\overline{\Omega}$ . Für die umgekehrte Abschätzung folgt aus Satz 2.19, dass jede Funktion aus  $S_f$  auf  $\overline{\Omega}$  punktweise durch  $v$  majorisiert wird. Daher gilt also auch  $P[f] \leq v$  auf  $\overline{\Omega}$ . □

**Satz 4.7**  $P[f]$  ist harmonisch auf  $\Omega$ .

Beweis: Es seien  $a \in \Omega$  und  $R > 0$  so, dass  $\overline{B}_R(a) \subset \Omega$ . Es genügt zu zeigen, dass  $P[f]$  auf  $B_R(a)$  harmonisch ist. Hierfür wählen wir eine Folge  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in der Perron-Familie  $S_f$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(a) = P[f](a)$ . Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass die Folge  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  punktweise monoton wachsend ist. Andernfalls beachte, dass die Funktionen

$$w_k: \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \max\{u_1(x), \dots, u_k(x)\} \quad (k \in \mathbb{N})$$

nach Lemma 4.4 in  $S_f$  liegen und die Ungleichungen

$$u_k(a) \leq w_k(a) \leq P[f](a) \quad (k \in \mathbb{N})$$

die Identität  $\lim_{k \rightarrow \infty} w_k(a) = P[f](a)$  liefern. Ersetze nun  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  durch die punktweise monoton wachsende Folge  $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ .

Es seien  $\tilde{u}_k$  die Poisson-Modifikationen der  $u_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) auf  $B_R(a)$ . Dann gilt für  $x \in B_R(a)$  nach Lemma 2.16, dass

$$\tilde{u}_k(x) = \frac{1}{R\omega_n} \int_{\|y-a\|=R} \frac{\|y-a\|^2 - \|x-a\|^2}{\|x-y\|^n} u_k(y) dS(y)$$

und daher ist auch die Folge  $(\tilde{u}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  punktweise monoton wachsend. Nach Lemma 4.4 gilt  $\tilde{u}_k \in S_f$  und aus Satz 4.2 zusammen mit Lemma 4.5 folgt

$$u_k(a) \leq \tilde{u}_k(a) \leq P[f](a) < \infty$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$ , sodass  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{u}_k(a) = P[f](a)$  ist. Nun folgt aus dem Harnackschen Konvergenzprinzip (Satz 3.5), dass  $(\tilde{u}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  kompakt gleichmäßig auf  $B_R(a)$  gegen eine harmonische Funktion  $u: B_R(a) \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert.

Wir zeigen, dass  $P[f](x) = u(x)$  für alle  $x \in B_R(a)$  ist. Zunächst gilt dies in  $a$ . Sei  $x_0 \in B_R(a)$ . Wir wählen eine punktweise monoton wachsende Folge  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $S_f$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k(x_0) = P[f](x_0)$ . Dann definiert

$$w_k: \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \max\{u_k(x), v_k(x)\} \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (4.1)$$

eine punktweise monoton wachsende Folge in  $S_f$ . Es seien nun  $\tilde{w}_k \in S_f$  die Poisson-Modifikationen der  $w_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) auf  $B_R(a)$ . Dann ist  $(\tilde{w}_k)_{k \in \mathbb{N}}$

---

wieder eine punktweise monoton wachsende Folge in  $S_f$ . Zusammen mit (4.1), Satz 4.2 und Lemma 4.5 folgt daher

$$v_k(x_0) \leq w_k(x_0) \leq \tilde{w}_k(x_0) \leq P[f](x_0).$$

Nach dem Harnackschen Konvergenzprinzip (Satz 3.5) folgt nun wieder, dass  $(\tilde{w}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  kompakt gleichmäßig auf  $B_R(a)$  gegen eine harmonische Funktion  $w: B_R(a) \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert. Insbesondere gilt

$$w(x_0) = P[f](x_0). \tag{4.2}$$

Weil  $u_k \leq w_k$  auf  $B_R(a)$  ist, ist auch  $\tilde{u}_k \leq \tilde{w}_k \leq P[f]$  auf  $B_R(a)$ . Somit gilt auch  $u \leq w$  auf  $B_R(a)$  und  $u(a) = w(a) = P[f](a)$ . Aus dem Maximumprinzip (Satz 2.14) folgt dann wegen  $u - w \leq 0$  auf  $B_R(a)$  und  $(u - w)(a) = 0$ , dass  $u = w$  gilt. Insbesondere gilt wegen (4.2)  $u(x_0) = w(x_0) = P[f](x_0)$ .

Also ist  $P[f]|_{B_R(a)}$  harmonisch und der Beweis ist abgeschlossen.  $\square$



# 5 Barrierenfunktionen und geometrische Lösbarkeitskriterien

In diesem Kapitel seien, wenn nicht näher spezifiziert,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränkte, offene Menge und  $f: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Wir werden zeigen, dass die Lösbarkeit des Dirichlet-Problems für  $\Omega$  mit Randbedingung  $f$  äquivalent ist zur Frage, ob  $\Omega$  in jedem Randpunkt  $\xi \in \partial\Omega$  eine Barrierenfunktion (siehe Definition 5.1) besitzt. Im Anschluss formulieren wir zwei geometrische Kriterien für den Rand von  $\Omega$ , welche die Existenz von Barrierenfunktionen garantieren.

Das erste dieser beiden geometrischen Kriterien, die sogenannte *äußere Kugelbedingung* (siehe Definition 5.4), wird zeigen, dass wir das Dirichlet-Problem für beschränkte, konvexe Mengen und für Mengen mit  $C^2$ -Rand lösen können. Wir werden jedoch sehen, dass wir mithilfe dieses Kriteriums keine Aussage über die Lösbarkeit des Problems für Mengen mit  $C^1$ -Rand und allgemeinere Fälle treffen können. Hierfür werden wir das zweite der beiden Kriterien, die sogenannte *äußere Kegelbedingung* (siehe Definition 5.21), definieren. Diese wird schließlich zeigen, dass das Dirichlet-Problem für Mengen mit  $C^1$ -Rand und allgemeinere Mengen lösbar ist.

## 5.1 Barrierefunktionen

**Definition 5.1** Sei  $\xi \in \partial\Omega$ . Wir nennen eine stetige Funktion  $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  eine **Barrierefunktion** für  $\Omega$  in  $\xi$ , wenn gilt:

- (i)  $u$  ist subharmonisch auf  $\Omega$ ,
- (ii)  $u < 0$  auf  $\bar{\Omega} \setminus \{\xi\}$  und
- (iii)  $u(\xi) = 0$ .

Existiert eine solche Funktion  $u$ , so sagen wir auch, dass  $\Omega$  eine **Barriere** in  $\xi$  hat.

Aus der Existenz einer Barriere in  $\xi \in \partial\Omega$  folgt bereits die Stetigkeit der Perron-Funktion  $P[f]$  in  $\xi$ , wie der folgende Satz zeigt:

**Satz 5.2** Hat  $\Omega$  eine Barriere in  $\xi \in \partial\Omega$ , so gilt

$$\lim_{\substack{y \rightarrow \xi \\ y \in \Omega}} P[f](y) = f(\xi) = P[f](\xi).$$

Beweis: Es seien  $u \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$  eine Barrierefunktion für  $\Omega$  in  $\xi \in \partial\Omega$  und  $\varepsilon > 0$ . Da  $f: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist, gibt es  $r > 0$  so, dass

$$|f(y) - f(\xi)| < \varepsilon \tag{5.1}$$

für alle  $y \in \partial\Omega \cap B_r(\xi)$  gilt. Weiter nehmen die stetigen Funktionen  $u$  und

$$\partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \longmapsto |f(y) - f(\xi)|$$

auf dem Kompaktum  $K = \partial\Omega \cap (\mathbb{R}^n \setminus B_r(\xi))$  ihre Maxima an. Da  $u|_K$  außerdem nur negative Werte annimmt, können wir  $C > 0$  so wählen, dass

$$\varepsilon - C \max u(K) > \max_{y \in K} |f(y) - f(\xi)|.$$

Zusammen mit (5.1) und der Tatsache, dass  $u \leq 0$  auf  $\partial\Omega$  ist, folgt

$$|f(y) - f(\xi)| \leq \varepsilon - Cu(y) \tag{5.2}$$

für alle  $y \in \partial\Omega$ . Es genügt nun

$$|P[f](y) - f(\xi)| \leq \varepsilon - Cu(y) \quad (5.3)$$

für alle  $y \in \bar{\Omega}$  zu zeigen. Denn dann folgt aus  $u(\xi) = 0$  und der Stetigkeit von  $u$ , dass ein  $\delta > 0$  existiert so, dass

$$|P[f](y) - f(\xi)| < 2\varepsilon$$

für alle  $y \in \bar{\Omega}$  mit  $\|y - \xi\| < \delta$  ist.

Da die Funktion  $f(\xi) - \varepsilon + Cu: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf  $\bar{\Omega}$  und nach Bemerkung 2.13 subharmonisch auf  $\Omega$  ist und  $f(\xi) - \varepsilon + Cu(y) \leq f(y)$  für alle  $y \in \partial\Omega$  gilt, ist die Funktion  $f(\xi) - \varepsilon + Cu \in S_f$  ein Element der Perron-Familie  $S_f$ . Somit gilt aufgrund der Definition von  $P[f]$  bereits

$$-\varepsilon + Cu(y) \leq P[f](y) - f(\xi) \quad (5.4)$$

für alle  $y \in \bar{\Omega}$ . Es sei nun  $v \in S_f$ . Dann gilt  $v(y) \leq f(y)$  für jedes  $y \in \partial\Omega$  und aus (5.2) folgt  $v(y) + Cu(y) \leq f(\xi) + \varepsilon$  für  $y \in \partial\Omega$ . Da die Funktion  $v + Cu: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist und harmonisch auf  $\Omega$ , folgt aus Satz 2.19 schließlich, dass  $v + Cu \leq f(\xi) + \varepsilon$  auf  $\bar{\Omega}$  gilt. Aufgrund der Definition von  $P[f]$  folgt nun hieraus

$$P[f](y) - f(\xi) \leq \varepsilon - Cu(y) \quad (5.5)$$

für alle  $y \in \bar{\Omega}$ . Aus den Ungleichungen (5.4) und (5.5) folgt schließlich (5.3) und die Behauptung ist gezeigt.

Aus (5.3) folgt insbesondere wegen  $u(\xi) = 0$

$$|P[f](\xi) - f(\xi)| \leq \varepsilon - Cu(\xi) = \varepsilon$$

und da  $\varepsilon > 0$  beliebig gewählt war folgt daraus  $P[f](\xi) = f(\xi)$ .

□

**Satz 5.3** *Das Dirichlet-Problem für eine beschränkte, offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann lösbar, wenn  $\Omega$  in jedem Randpunkt  $\xi \in \partial\Omega$  eine Barriere hat.*

Beweis: Zuerst nehmen wir an, dass das Dirichlet-Problem für  $\Omega$  lösbar ist. Für einen Randpunkt  $\xi \in \partial\Omega$  definieren wir die stetige Funktion  $f_\xi: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto -|y - \xi|$ . Nach Voraussetzung existiert eine stetige Funktion  $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ , die auf  $\Omega$  harmonisch ist und  $f_\xi = u|_{\partial\Omega}$  erfüllt. Wir zeigen, dass  $u$  eine Barrierefunktion für  $\Omega$  in  $\xi$  ist. Die Funktion  $u$  ist harmonisch auf  $\Omega$  – damit auch subharmonisch – und nach dem Maximumprinzip (Satz 2.14) strikt negativ auf  $\bar{\Omega} \setminus \{\xi\}$ . Denn wäre  $z \in \bar{\Omega} \setminus \{\xi\}$  ein Punkt mit  $u(z) \geq 0$ , so folgte aus Satz 2.19  $u(z) = 0$ . Weiter folgte  $z \in \Omega$  wegen  $u|_{\partial\Omega \setminus \{\xi\}} \neq 0$ . Ist  $K \subset \Omega$  jene Zusammenhangskomponente von  $\Omega$  mit  $z \in K$ , so folgte aus dem Maximumprinzip (Satz 2.14)  $u|_K \equiv 0$ . Wegen  $\partial K \subset \partial\Omega$  würde dann  $\partial K = \{\xi\}$  gelten, aufgrund der Beschränktheit von  $\Omega$  folgte also  $K = \{\xi\}$  und damit  $z = \xi$ , ein Widerspruch. Zusätzlich gilt  $u(\xi) = f_\xi(\xi) = 0$  und somit ist  $u$  eine Barrierefunktion für  $\Omega$  in  $\xi$ .

Nehmen wir nun umgekehrt an, dass für jeden Randpunkt  $\xi \in \partial\Omega$  eine Barrierefunktion existiert. Aus Satz 4.7 und Satz 5.2 folgt dann, dass die Perronfunktion  $P[f]$  das Dirichlet-Problem mit Randbedingung  $f \in C(\partial\Omega, \mathbb{R})$  löst.  $\square$

Der letzte Satz reduziert die Frage nach der Lösung des Dirichletproblems auf einer beschränkten, offenen Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  auf die Frage, ob die Menge  $\Omega$  in jedem ihrer Randpunkte eine Barriere hat. Im folgenden Abschnitt stellen wir geeignete Bedingungen an den Rand von  $\Omega$ , die die Existenz von Barrierefunktionen garantieren.



## 5.2 Geometrische Lösbarkeitskriterien

**Definition 5.4** *Es seien  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränkte, offene Menge und  $\xi \in \partial\Omega$  ein Randpunkt. Wir sagen, dass  $\Omega$  die **äußere Kugelbedingung in  $\xi$**  erfüllt, wenn  $r > 0$  und  $a \in \mathbb{R}^n$  so existieren, dass  $\overline{B}_r(a) \cap \overline{\Omega} = \{\xi\}$  gilt.*

**Bemerkung 5.5** *Sind  $\Omega$  eine beschränkte, offene Menge,  $\xi \in \partial\Omega$ ,  $r > 0$  und  $a \in \mathbb{R}^n$  so, dass  $\overline{B}_r(a) \cap \overline{\Omega} = \{\xi\}$  gilt, so folgt  $\overline{B}_r(a) \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ .*

**Satz 5.6** *Erfüllt  $\Omega$  in  $\xi \in \partial\Omega$  die äußere Kugelbedingung, so hat  $\Omega$  eine Barriere in  $\xi$ .*

Beweis: Für einen Randpunkt  $\xi \in \partial\Omega$  seien  $r > 0$  und  $a \in \mathbb{R}^n$  so gewählt, dass  $\overline{B}_r(a) \cap \overline{\Omega} = \{\xi\}$  gilt. Wir definieren die Funktion  $u: \mathbb{R}^n \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$u(x) = \begin{cases} \log r - \log \|x - a\| & \text{für } n = 2 \\ \|x - a\|^{2-n} - r^{2-n} & \text{für } n > 2. \end{cases}$$

Wie in Beispiel 2.3 gezeigt, sind die Funktionen  $\log \|\cdot\|$  und  $\|\cdot\|^{2-n}$  harmonisch auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  bzw.  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Somit sind auch die zweimal stetig partiell differenzierbaren Funktionen  $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \log r - \log \|x - a\|$  und  $g: \mathbb{R}^n \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x - a\|^{2-n} - r^{2-n}$  (für  $n > 2$ ) harmonisch und damit subharmonisch. Weiterhin gilt

$$u|_{\overline{\Omega} \setminus \{\xi\}} = \begin{cases} f|_{\overline{\Omega} \setminus \{\xi\}} < 0 & \text{für } n = 2 \\ g|_{\overline{\Omega} \setminus \{\xi\}} < 0 & \text{für } n > 2 \end{cases}$$

und  $u(\xi) = 0$ . Also ist  $u|_{\overline{\Omega}}$  nach Definition 5.1 eine Barrierefunktion für  $\Omega$  in  $\xi$ .  $\square$

**Lemma 5.7** *Es seien  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränkte, offene Menge und  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine orthogonale Matrix. Erfüllt  $\Omega$  in  $\xi \in \partial\Omega$  die äußere Kugelbedingung, so erfüllt auch  $M\Omega + w$  in  $M\xi + w \in \partial(M\Omega + w)$  für jedes  $w \in \mathbb{R}^n$  die äußere Kugelbedingung.*

Beweis: Seien  $\xi \in \partial\Omega$ ,  $w \in \mathbb{R}^n$  und  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine orthogonale Matrix. Wähle  $r > 0, a \in \mathbb{R}^n$  mit  $\overline{B}_r(a) \cap \overline{\Omega} = \{\xi\}$ . Da

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \longmapsto Mx + w$$

ein Homöomorphismus ist mit

$$\|f(x)\| \leq \|x\| + \|w\|$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ , ist  $f(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränkte, offene Menge mit  $f(\xi) \in f(\partial\Omega) = \partial f(\Omega)$ . Da  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  orthogonal ist, gilt  $M\overline{B}_r(0) = \overline{B}_r(0)$  und damit auch

$$f(\overline{B}_r(a)) = M(\overline{B}_r(0) + a) + w = \overline{B}_r(0) + (Ma + w) = \overline{B}_r(f(a)).$$

Insbesondere ist

$$\overline{B}_r(f(a)) \cap \overline{f(\Omega)} = f(\overline{B}_r(a)) \cap f(\overline{\Omega}) = f(\overline{B}_r(a) \cap \overline{\Omega}) = \{f(\xi)\}.$$

□

**Korollar 5.8** *Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränkte, offene und konvexe Menge. Dann ist das Dirichlet-Problem für  $\Omega$  lösbar.*

Beweis: Es sei  $\xi \in \partial\Omega$ . Nach den Trennungssätzen [11, Theorem 3.4] gibt es eine Linearform  $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$u(\xi) < u(y)$$

für alle  $y \in \Omega$ . Sei  $v \in \mathbb{R}^n$  ein Vektor mit  $u = \langle \cdot, v \rangle$ . Offensichtlich ist  $\xi \in \overline{B}_{\|v\|}(\xi - v) \cap \overline{\Omega}$ . Für  $w \in \overline{B}_{\|v\|}(\xi - v)$  gilt

$$\begin{aligned} \langle w, v \rangle &= \langle w - (\xi - v), v \rangle + \langle \xi - v, v \rangle \\ &\leq |\langle w - (\xi - v), v \rangle| + \langle \xi - v, v \rangle \\ &\leq \|w - (\xi - v)\| \|v\| + \langle \xi, v \rangle - \|v\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + \langle \xi, v \rangle - \|v\|^2 \\ &= \langle \xi, v \rangle. \end{aligned}$$

Ist  $w \in \overline{\Omega}$ , so gilt außerdem  $\langle \xi, v \rangle \leq \langle w, v \rangle$ . Damit folgt  $\langle w, v \rangle = \langle \xi, v \rangle$  und

$$|\langle w - (\xi - v), v \rangle| = \|w - (\xi - v)\| \|v\|.$$

Also gibt es ein  $t \in \mathbb{R}$  mit  $w - (\xi - v) = tv$ . Einsetzen liefert nun

$$0 = \langle w - \xi, v \rangle = (t - 1) \|v\|^2.$$

Folglich ist  $t = 1$  und  $w = \xi$ . Insgesamt haben wir gezeigt, dass

$$\overline{B}_{\|v\|}(\xi - v) \cap \overline{\Omega} = \{\xi\}$$

ist. Also erfüllt  $\Omega$  in  $\xi$  die äußere Kugelbedingung.

Der Satz über die äußere Kugelbedingung (Satz 5.6) besagt nun, dass  $\Omega$  eine Barriere in  $\xi$  hat und aus Satz 5.3 folgt schließlich die Behauptung, denn  $\xi \in \partial\Omega$  war beliebig gewählt.  $\square$

Wir haben bisher gezeigt, dass das Dirichlet-Problem lösbar ist, wenn  $\Omega$  in jedem Randpunkt  $\xi \in \partial\Omega$  die äußere Kugelbedingung erfüllt und dass dies auf Mengen zutrifft, die beschränkt, offen und konvex sind. Im Folgenden wollen wir andere hinreichende Bedingungen für die Lösbarkeit des Dirichlet-Problems herleiten. Hierfür werden wir im ersten Schritt begründen, dass das Dirichlet-Problem für beschränkte, offene Mengen mit  $C^2$ -Rand (siehe Definition 1.2) lösbar ist, um schließlich zu zeigen, dass das Problem für jede beschränkte, offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  mit  $C^1$ -Rand – und darüber hinaus sogar für weitere „weniger glatte“ Fälle – lösbar ist.

**Lemma 5.9** *Seien  $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$  und  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränkte, offene Menge mit  $C^k$ -Rand. Außerdem gelte  $0 \in \partial\Omega$  und es sei  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$  der Tangentialraum von  $\partial\Omega$  in  $0$ . Dann existieren eine offene Nullumgebung  $V = V_1 \times V_2 \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$  und eine Funktion  $g \in C^k(V_1, \mathbb{R})$  so, dass*

$$\partial\Omega \cap V = \{(x, g(x)) \mid x \in V_1\}.$$

Beweis: Für  $\xi = 0$  seien die offene Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^n$  von  $\xi$  und die Funktion  $\varphi \in C^k(U, \mathbb{R})$  wie in Definition 1.2 gewählt. Es sei  $\varepsilon > 0$  so, dass  $P_\varepsilon^n(0) \subset U$ . Wir wollen den Satz über implizite Funktionen (siehe [5, Satz 8.5]) anwenden und setzen dafür  $U_1 = P_\varepsilon^{n-1}(0) \subset \mathbb{R}^{n-1}$  und

$U_2 = P_\varepsilon^1(0) \subset \mathbb{R}$ . Dann ist  $\varphi|_{U_1 \times U_2}$   $k$ -fach stetig partiell differenzierbar und es gilt nach Definition 1.2

$$\partial\Omega \cap P_\varepsilon^n(0) = \{x \in P_\varepsilon^n(0) \mid \varphi(x) = 0\}$$

und damit insbesondere  $\varphi(0) = 0$ . Können wir nun noch begründen, dass

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(0) \neq 0 \tag{5.6}$$

ist, so folgt aus dem Satz über implizite Funktionen, dass offene Nullumgebungen  $V_1 \subset U_1$ ,  $V_2 \subset U_2$  und eine stetige Abbildung  $g: V_1 \rightarrow V_2$  existieren mit

$$\begin{aligned} \partial\Omega \cap (V_1 \times V_2) &= \{(x, y) \in V_1 \times V_2 \mid \varphi(x, y) = 0\} \\ &= \{(x, g(x)) \mid x \in V_1\}. \end{aligned}$$

Da  $\varphi$   $k$ -fach stetig partiell differenzierbar ist, kann man durch Verkleinern von  $V_1$  und  $V_2$  zusätzlich erreichen, dass auch  $g$   $k$ -fach stetig partiell differenzierbar ist (siehe [5, Bemerkung 8.6]).

Nach [6, Korollar 10.4] gilt

$$N_0(\partial\Omega) = \text{Span}\{\text{grad } \varphi(0)\}.$$

Definitionsgemäß ist

$$N_0(\partial\Omega) = T_0(\partial\Omega)^\perp = (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})^\perp = \{0\} \times \mathbb{R}.$$

Also ist  $0 \neq \text{grad } \varphi(0) \in \{0\} \times \mathbb{R}$  und damit

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(0) \neq 0.$$

□

**Korollar 5.10** *In der Situation von Lemma 5.9 gelten*

$$g(0) = 0 \quad \text{und} \quad \text{grad } g(0) = 0.$$

Beweis: Offensichtlich ist  $g(0) = 0$ . Es seien  $V \subset \mathbb{R}^n$ ,  $V_1 \subset \mathbb{R}^{n-1}$  und  $g \in C^k(V_1, \mathbb{R})$  ( $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ ) wie in Lemma 5.9. Wähle  $\varepsilon > 0$  so klein, dass  $P_\varepsilon^{n-1}(0) \subset V_1$ . Für  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  definiert

$$\psi: (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \longmapsto (te_i, g(te_i))$$

eine stetig differenzierbare Kurve in  $\mathbb{R}^n$  mit  $\psi(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \partial\Omega \cap V \subset \partial\Omega$  und  $\psi(0) = 0$ . Nach Voraussetzung gilt

$$\psi'(0) = \left(e_i, \frac{\partial g}{\partial x_i}(0)\right) \in T_0(\partial\Omega) = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\},$$

sodass

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(0) = 0.$$

Also gilt  $\text{grad } g(0) = 0$ . □

**Lemma 5.11** *Es seien  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine offene, beschränkte Menge mit  $C^k$ -Rand ( $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ ) und  $0 = \xi \in \partial\Omega$ . Dann existieren eine orthogonale Matrix  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und eine Zahl  $\varepsilon > 0$  so, dass*

$$M^T T_\xi(\partial\Omega) = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$$

und

$$te_n \notin M^T \overline{\Omega}$$

für alle  $t \in (0, \varepsilon)$  gelten, wobei  $e_n$  der  $n$ -te Standardbasisvektor des  $\mathbb{R}^n$  ist. Ferner erfüllt die beschränkte, offene Menge  $M^T \Omega \subset \mathbb{R}^n$  die Voraussetzungen von Lemma 5.9.

Beweis: Nach Bemerkung 1.3 ist der Tangentialraum  $T_0(\partial\Omega)$  von  $\partial\Omega$  im Punkt 0 ein  $(n-1)$ -dimensionaler Untervektorraum des  $\mathbb{R}^n$ . Es sei  $(t_1, \dots, t_{n-1})$  eine Orthonormalbasis von  $T_0(\partial\Omega)$  und sei  $t_n = \nu_\Omega(0)$  der äußere Normalen-Einheitsvektor von  $\Omega$  in  $0 \in \partial\Omega$  (siehe Anhang). Dann ist die Matrix

$$M = (t_1 \ \dots \ t_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

mit den Spaltenvektoren  $t_1, \dots, t_n$  orthogonal. Es gilt

$$\begin{aligned} M^T T_0(\partial\Omega) &= \left\{ M^T \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i t_i \mid \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i M^T t_i \mid \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i \mid \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}. \end{aligned}$$

Andererseits ist nach Lemma 4 des Anhangs

$$M^T T_0(\partial\Omega) = T_0(M^T(\partial\Omega)) = T_0(\partial(M^T\Omega)).$$

Also erfüllt die beschränkte, offene Menge  $M^T\Omega \subset \mathbb{R}^n$  die Voraussetzungen von Lemma 5.9. Nach Lemma 4 des Anhangs ist

$$e_n = M^T t_n = \nu_{M^T\Omega}(0)$$

der äußere Normalen-Einheitsvektor von  $M^T\Omega$  in 0. Also gibt es ein  $\varepsilon > 0$  mit

$$te_n \notin M^T\overline{\Omega}$$

für alle  $t \in (0, \varepsilon)$ . □

**Satz 5.12** *Ist  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränkte, offene Menge mit  $C^2$ -Rand, so ist das Dirichlet-Problem für  $\Omega$  lösbar.*

Beweis: Es sei  $\xi \in \partial\Omega$ . Nach Satz 5.3 und Satz 5.6 reicht es zu zeigen, dass  $\Omega$  der äußeren Kugelbedingung in  $\xi$  genügt. Ohne Einschränkung sei  $\xi = 0$ . Andernfalls ersetzen wir  $\Omega$  durch  $\Omega - \xi = \{x - \xi \mid x \in \Omega\}$  und verwenden Lemma 5.7. Nach Lemma 5.11 gibt es eine orthogonale Matrix  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\varepsilon > 0$  so, dass

$$M^T T_\xi(\partial\Omega) = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \tag{5.7}$$

und

$$te_n \notin M^T\overline{\Omega} \tag{5.8}$$

für alle  $t \in (0, \varepsilon)$ . Können wir nun zeigen, dass  $M^T\Omega$  in  $\xi = 0 \in \partial(M^T\Omega)$  der äußeren Kugelbedingung genügt, so folgt aus Lemma 5.7, dass  $\Omega$  in  $\xi = 0 \in \partial\Omega$  auch die äußere Kugelbedingung erfüllt. Nach (5.7) ist  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$  der Tangentialraum von 0 bzgl.  $\partial(M^T\Omega) = M^T(\partial\Omega)$ . Lemma 5.9 zufolge existieren daher eine offene Nullumgebung  $V = V_1 \times V_2 \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$  und eine Funktion  $g \in C^2(V_1, \mathbb{R})$  so, dass

$$\partial(M^T\Omega) \cap V = \{(x, g(x)) \mid x \in V_1\}. \quad (5.9)$$

Für diese Funktion  $g \in C^2(V_1, \mathbb{R})$  gilt nach Korollar 5.10 zusätzlich  $\text{grad } g(0) = 0$  und nach Definition  $g(0) = 0$ . Wir schreiben wieder  $0' = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Wähle  $\delta > 0$  so, dass  $B_{2\delta}^{n-1}(0') \subset V_1$  gilt. Dann existiert nach Proposition 1.4 eine Konstante  $C > 0$  mit

$$|g(y)| \leq C\|y\|^2 \quad (5.10)$$

für alle  $y \in B_\delta^{n-1}(0')$ .

Wähle weiter  $R \in (0, \frac{1}{2C})$  so klein, dass

$$\overline{B}_R^n((0', R)) \subset B_\delta^{n-1}(0') \times V_2 \subset V_1 \times V_2. \quad (5.11)$$

Dann gilt nach Proposition 1.5, dass

$$\overline{B}_R^n((0', R)) \cap \left\{ x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid |x_n| \leq C\|x'\|^2 \right\} = \{0\} \quad (5.12)$$

ist, und wegen (5.10) und (5.12) folgt

$$|g(x_1, \dots, x_{n-1})| \leq C\|(x_1, \dots, x_{n-1})\|^2 < |x_n| \quad (5.13)$$

für alle  $(x_1, \dots, x_n) \in \overline{B}_R^n((0', R)) \setminus \{0\}$ .

Wir zeigen nun

$$\overline{B}_R^n((0', R)) \cap \overline{M^T\Omega} = \{0\}. \quad (5.14)$$

Gäbe es nämlich  $(x_1, \dots, x_n) \in (\overline{B}_R^n((0', R)) \cap \partial(M^T\Omega)) \setminus \{0\}$ , so folgte  $x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1})$  aus (5.9) und (5.11) und wegen (5.13) würde

$$|x_n| = |g(x_1, \dots, x_{n-1})| \leq C\|(x_1, \dots, x_{n-1})\|^2 < |x_n|$$

gelten, ein Widerspruch. Also gilt

$$\overline{B}_R^n((0', R)) \cap \partial(M^T\Omega) = \{0\}.$$

Nach (5.8) gibt es einen Punkt

$$0 \neq b \in \overline{B}_R^n((0', R)) \cap \mathbb{R}^n \setminus (M^T \overline{\Omega}).$$

Gäbe es einen Punkt  $a \in \overline{B}_R^n((0', R)) \cap M^T \Omega$ , so müsste ein  $t \in (0, 1)$  existieren mit

$$a + t(b - a) \in \partial(M^T \Omega) \cap \overline{B}_R^n((0', R)) = \{0\}.$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass  $\overline{B}_R^n((0', R)) \cap M^T \overline{\Omega} = \{0\}$  ist.

Also erfüllt  $M^T \Omega$  die äußere Kugelbedingung in  $\xi = 0$  und der Beweis ist abgeschlossen.  $\square$

Wir wollen im Folgenden ein Beispiel angeben, das zeigt, dass nicht jede beschränkte, offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  mit  $C^1$ -Rand die äußere Kugelbedingung in all ihren Randpunkten  $\xi \in \partial\Omega$  erfüllt. Wir orientieren uns an [3, S.5]. Für  $i \in \{1, \dots, n\}$  bezeichne  $e_i$  den  $i$ -ten Standardbasisvektor des  $\mathbb{R}^n$ .

**Beispiel 5.13** *Die Funktion*

$$\psi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} x^2 \log |x| & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist stetig differenzierbar mit  $\psi(((-1, 1) \setminus \{0\}) \subset [-1/2e, 0)$ . Wir zeigen, dass die Menge

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(x, y) \in (-1, 1) \times (-\infty, 0) \mid \psi(x) < y\} \\ &\quad \cup \left( \mathbb{R} \times [0, \infty) \cap B_{\sqrt{2}}^2(e_2) \right) \setminus \{(0, 0)\} \end{aligned}$$

offen und beschränkt ist, einen  $C^1$ -Rand besitzt und in ihrem Randpunkt  $0 \in \partial\Omega$  die äußere Kugelbedingung nicht erfüllt.

Wegen

$$\Omega \subset [-1, 1] \times \left[-\frac{1}{2e}, 0\right] \cup B_{\sqrt{2}}^2(e_2)$$

ist  $\Omega$  beschränkt. Sei weiter  $t \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ . Bemerke, dass wegen  $\psi(t) < 0$  der Punkt  $(t, 0) \in \mathbb{R}^2$  in der offenen Menge

$$M = \{(x, y) \in (-1, 1) \times \mathbb{R} \mid \psi(x) < y\}$$



liegt. Wähle nun  $\varepsilon > 0$  so klein, dass  $B_\varepsilon((t, 0)) \subset M \cap B_{\sqrt{2}}(e_2)$ . Dann folgt

$$B_\varepsilon((t, 0)) = \left( B_\varepsilon((t, 0)) \cap \mathbb{R} \times [0, \infty) \right) \cup \left( B_\varepsilon((t, 0)) \cap \mathbb{R} \times (-\infty, 0) \right) \subset \Omega.$$

Also ist

$$\Omega = \{(x, y) \in (-1, 1) \times (-\infty, 0) \mid \psi(x) < y\} \cup (\mathbb{R} \times (0, \infty) \cap B_{\sqrt{2}}(e_2)) \cup \{(t, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \neq t \in (-1, 1)\}$$

offen.

Wir zeigen als Nächstes, dass  $\Omega$  einen  $C^1$ -Rand besitzt. Es gilt

$$\partial\Omega = \{(x, \psi(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1]\} \cup \{(x, y) \in \partial B_{\sqrt{2}}(e_2) \mid y > 0\}.$$

Da  $B_{\sqrt{2}}(e_2)$  einen  $C^1$ -Rand besitzt, genügt es die Bedingungen aus Definition 1.2 für Punkte  $(y, \psi(x)) \in \partial\Omega$  ( $x \in [-1, 1]$ ) nachzuprüfen. Ist  $|x| < 1$ , so wähle  $\varepsilon > 0$  so klein, dass  $\varepsilon < 1 - |x|$  ist und

$$B_\varepsilon(x, \psi(x)) \cap \mathbb{R} \times [0, \infty) \subset B_{\sqrt{2}}(e_2).$$

Dann genügt die Abbildung

$$B_\varepsilon(x, \psi(x)) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto \psi(x) - y$$

den Bedingungen aus Definition 1.2. Sei nun  $x = 1$ . Der Fall  $x = -1$  kann analog behandelt werden. Dann ist die Funktion

$$f: [0, \sqrt{2}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} \psi(x) & \text{für } x < 1 \\ -\sqrt{2 - x^2} + 1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

stetig differenzierbar, denn

$$\lim_{x \uparrow 1} \psi(x) = 0 = f(1)$$

und

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(1+h)}{h} &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{\psi(1+h)}{h} \\
 &= \psi'(1) = 1 = \lim_{x \uparrow 1} \psi'(x) \\
 &= \frac{d}{dx} \left( -\sqrt{2-x^2} + 1 \right) \Big|_{x=1} \\
 &= \lim_{x \downarrow 1} f'(x) \\
 &= \lim_{h \uparrow 0} \frac{f(1+h)}{h}.
 \end{aligned}$$

Somit ist die Funktion

$$(0, \sqrt{2}) \times \left(-\frac{1}{2e}, 1\right) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto f(x) - y$$

stetig partiell differenzierbar und genügt den Bedingungen aus Definition 1.2.

Nehmen wir an,  $\Omega$  würde in  $0 \in \partial\Omega$  der äußeren Kugelbedingung genügen, d.h. es gäbe  $r > 0$  und  $z \in \mathbb{R}^2$  so, dass  $\overline{B_r(z)} \cap \overline{\Omega} = \{0\}$ . Dann gilt  $z = (0, -r)$ , denn sonst wäre

$$B_r(z) \cap (\mathbb{R} \times (0, \infty) \cap B_{\sqrt{2}}(e_2)) \neq \emptyset$$

und somit  $B_r(z) \cap \Omega \neq \emptyset$ , ein Widerspruch. Weiter stimmt der Graph der stetig differenzierbaren Funktion

$$h: (-r, r) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sqrt{r^2 - x^2} - r$$

mit der Menge  $\partial B_r(z) \cap (\mathbb{R} \times (-r, \infty)) \subset \partial B_r(z)$  überein. Nach Voraussetzung gilt insbesondere

$$h(x) < \psi(x)$$

für alle  $x \in (-r, r) \cap (-1, 1) \setminus \{0\}$ . Beachtet man  $h(0) = \psi(0) = 0$  und dass es  $\varepsilon > 0$  gibt mit

$$\psi'(x) > h'(x) \quad \text{bzw.} \quad \psi'(y) < h'(y)$$

für alle  $x \in (-\varepsilon, 0)$  bzw.  $y \in (0, \varepsilon)$ , so ergibt sich ein Widerspruch. Also genügt  $\Omega$  in  $0 \in \partial\Omega$  der äußeren Kugelbedingung nicht.

Um zu garantieren, dass eine beschränkte, offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  die äußere Kugelbedingung in all ihren Randpunkten  $\xi \in \partial\Omega$  erfüllt, reicht es nicht – wie in Beispiel 5.13 gezeigt – zu fordern, dass  $\Omega$  einen  $C^1$ -Rand hat. Die äußere Kugelbedingung kann also für Mengen mit  $C^1$ -Rand kein Kriterium dafür sein, ob  $\Omega$  in einem Randpunkt  $\xi \in \partial\Omega$  eine Barriere hat. Wir werden daher im weiteren Verlauf eine allgemeinere geometrische Bedingung an den Rand  $\partial\Omega$  stellen, die für alle Mengen  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  mit  $C^1$ -Rand und allgemeinere Mengen erfüllt ist, die so genannte *äußere Kugelbedingung*. Hierfür brauchen wir jedoch zuerst folgende Definitionen:

**Definition 5.14** *Wir nennen die offene Teilmenge*

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$$

des  $\mathbb{R}^n$  den **oberen Halbraum**.

**Definition 5.15** *Es seien  $a \in \mathbb{R}^n, \alpha > 0, 0 < h \leq \infty$  und  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine orthogonale Matrix. Für einen Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  schreiben wir  $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ . Dann bezeichnen wir eine Menge der Form*

$$\mathcal{C}_{(a,M,\alpha,h)} = a + M\mathcal{K}_{(\alpha,h)} \subset \mathbb{R}^n,$$

wobei

$$\mathcal{K}_{(\alpha,h)} = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{H}_n \mid \|x'\| < \alpha x_n \text{ und } x_n < h\},$$

als einen **Kegel mit Scheitelpunkt  $a$  und Höhe  $h$** .

Den Abschluss von  $\mathcal{C}_{(a,M,\alpha,h)}$  nennen wir einen abgeschlossenen Kegel mit Scheitelpunkt  $a$  und Höhe  $h$  und schreiben  $\overline{\mathcal{C}}_{(a,M,\alpha,h)}$  für diese Menge. Im Fall  $h = \infty$  schreiben wir vereinfachend  $\mathcal{C}_{(a,M,\alpha)}$  bzw.  $\mathcal{K}_\alpha$  und für  $\overline{\mathcal{C}}_{(0,E_n,\alpha,h)}$ , wobei  $E_n$  die  $n$ -dimensionale Einheitsmatrix bezeichne, auch  $\overline{\mathcal{K}}_{(\alpha,h)}$ .

**Bemerkung 5.16** *Es gilt*

$$\partial\mathcal{K}_\alpha = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty) \mid \|x'\| = \alpha x_n\}.$$

**Lemma 5.17** *Es seien  $\varepsilon > 0$  und  $\alpha \in (0, 1)$ . Dann gilt*

$$\mathcal{K}_{(\alpha,h)} \subset B_\varepsilon^n(0) \subset \mathbb{R}^n$$

für alle  $h \in (0, \varepsilon(1 - \alpha))$ .

Beweis: Es seien  $h \in (0, \varepsilon(1 - \alpha))$  und  $x = (x', x_n) \in \mathcal{K}_{(\alpha, h)}$ . Es gilt  $0 < x_n < \varepsilon$ . Andernfalls würde nämlich  $x \notin \mathcal{K}_{(\alpha, h)}$  gelten. Aus der Dreiecksungleichung folgt dann

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \|x'\| + |x_n| \\ &< \alpha x_n + h \\ &< \alpha \varepsilon + \varepsilon(1 - \alpha) \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

also  $x \in B_\varepsilon^n(0)$ . □

Im Rest des Kapitels sei  $\alpha > 0$  eine positive reelle Zahl. Im Folgenden benötigen wir nachstehendes Maximumprinzip für die Menge  $\Omega = B_1^n(0) \setminus \overline{\mathcal{K}}_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ :

**Lemma 5.18** *Es sei  $\Omega = B_1^n(0) \setminus \overline{\mathcal{K}}_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ . Weiterhin seien  $u: \overline{\Omega} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $u|_\Omega$  beschränkt und harmonisch. Existiert ein  $M \in \mathbb{R}$  so, dass  $u(\xi) \leq M$  für alle  $\xi \in \partial\Omega \setminus \{0\}$  ist, dann gilt auch  $u(x) \leq M$  für alle  $x \in \Omega$ .*

Beweis: Für Dimension  $n > 2$  und  $\varepsilon > 0$  definieren wir die Funktion

$$v_\varepsilon: \overline{\Omega} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto u(x) - M - \varepsilon \|x\|^{2-n}.$$

Da  $u$  auf  $\overline{\Omega} \setminus \{0\}$  stetig ist, ist  $v_\varepsilon$  stetig. Wie in Beispiel 2.3 gezeigt, ist die Funktion  $\|\cdot\|^{2-n}$  harmonisch auf  $\Omega$ . Wegen  $u|_\Omega \in \text{Harm}(\Omega)$  gilt daher auch  $v_\varepsilon|_\Omega \in \text{Harm}(\Omega)$ . Sei nun  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\Omega$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \xi_0 \in \partial\Omega \setminus \{0\}$ . Da  $v_\varepsilon$  stetig auf  $\overline{\Omega} \setminus \{0\}$  ist, gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_\varepsilon(a_k) = v_\varepsilon(\xi_0) = u(\xi_0) - M - \varepsilon \|\xi_0\|^{2-n} \leq -\varepsilon \|\xi_0\|^{2-n} \leq -\varepsilon,$$

wobei in der ersten Ungleichung  $u|_{\partial\Omega \setminus \{0\}} \leq M$  eingegangen ist. Damit gilt auch  $\limsup_{k \rightarrow \infty} v_\varepsilon(a_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} v_\varepsilon(a_k) \leq -\varepsilon$ . Ist  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\Omega$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ , so ist  $\lim_{k \rightarrow \infty} v_\varepsilon(a_k) = -\infty \leq -\varepsilon$ , da  $u$  auf  $\Omega$  nach Voraussetzung beschränkt ist. Korollar 2.18 zufolge gilt dann

$$u(x) - M - \varepsilon \|x\|^{2-n} \leq -\varepsilon$$

für alle  $x \in \Omega$ . Durch den Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt nun wie behauptet  $u(x) \leq M$  für alle  $x \in \Omega$ .

Für Dimension  $n = 2$  können wir analog argumentieren. Für  $\varepsilon > 0$  ist die Funktion

$$w_\varepsilon: \bar{\Omega} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto u(x) - M + \varepsilon \log \|x\|$$

stetig und Beispiel 2.3 zeigt, dass  $w_\varepsilon|_\Omega \in \text{Harm}(\Omega)$ . Wie im Fall  $n > 2$  sei  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge mit Grenzwert  $\xi_0 \in \partial\Omega \setminus \{0\}$ . Dann folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_\varepsilon(a_k) = v_\varepsilon(\xi_0) = u(\xi_0) - M + \varepsilon \log \|\xi_0\| \leq \varepsilon \log \|\xi_0\| \leq 0,$$

wobei in der vorletzten Ungleichung  $u|_{\partial\Omega \setminus \{0\}} \leq M$  und in der letzten  $\xi_0 \in \partial\Omega$  eingegangen sind. Es gilt nun auch  $\limsup_{k \rightarrow \infty} v_\varepsilon(a_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} v_\varepsilon(a_k) \leq \varepsilon$  und da die entsprechende Abschätzung auch für Folgen  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\Omega$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$  gilt, folgt wie im ersten Fall die Behauptung.  $\square$

**Lemma 5.19** *Es sei  $\Omega = B_1^n(0) \setminus \bar{\mathcal{K}}_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ . Dann erfüllt  $\Omega$  in jedem Randpunkt  $\xi \in \partial\Omega \setminus \{0\}$  die äußere Kugelbedingung.*

Beweis: Es gilt

$$\partial\Omega = (\partial B_1^n(0) \setminus \mathcal{K}_\alpha) \dot{\cup} (\partial\mathcal{K}_\alpha \cap B_1^n(0)).$$

Die Menge  $B_1^n(0)$  ist beschränkt, offen und konvex. Im Beweis von Korollar 5.8 wurde gezeigt, dass es zu jedem  $v \in \partial B_1^n(0)$  eine Kugel  $B_{(v)} \subset \mathbb{R}^n$  gibt mit  $\bar{B}_{(v)} \cap \bar{B}_1^n(0) = \{v\}$ . Dann gilt für jedes  $v \in \partial B_1^n(0) \setminus \mathcal{K}_\alpha$  auch

$$\bar{B}_{(v)} \cap \bar{\Omega} = \bar{B}_{(v)} \cap \bar{B}_1^n(0) = \{v\}.$$

Es bleibt zu zeigen, dass  $\Omega$  in jedem Punkt aus  $\partial\mathcal{K}_\alpha \cap B_1^n(0) \setminus \{0\}$  der äußeren Kugelbedingung genügt. Hierzu setzen wir

$$x_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \quad \text{und} \quad x_n = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 1}}.$$

Dann liegt der Vektor  $x = x_1 e_1 + x_n e_n \in \text{Span}\{e_1, e_n\}$  in  $\partial\mathcal{K}_\alpha \cap \partial B_1^n(0)$ . Seien zunächst  $\lambda \in (0, 1)$  und  $v = \lambda x \in \partial\mathcal{K}_\alpha \cap B_1^n(0) \setminus \{0\} \subset \partial\Omega$ . Dann ist der Vektor  $y = -x_n e_1 + x_1 e_n$  orthogonal zu  $v$ . Wir setzen

$$w = v + \lambda x_1 x_n^{-1} y = (\lambda x_n + \lambda x_1^2 x_n^{-1}) e_n \in \mathcal{K}_\alpha,$$

$$m = v + \frac{1}{2}\lambda x_1 x_n^{-1} y \in \mathcal{K}_\alpha \quad \text{und} \quad \varepsilon = \left\| \frac{1}{2}\lambda x_1 x_n^{-1} y \right\|,$$

sodass  $v \in \partial B_\varepsilon^n(m)$ .

Es genügt nun  $\|w - z\| \geq 2\varepsilon$  für alle  $z \in \partial\mathcal{K}_\alpha$  zu zeigen, denn dann folgt aus

$$\overline{B}_\varepsilon^n(m) \setminus \{v\} \subset B_{2\varepsilon}^n(w) \subset \mathcal{K}_\alpha,$$

dass  $\overline{B}_\varepsilon^n(m) \cap \overline{\Omega} = \{v\}$  ist. Für einen Vektor  $z \in \text{Span}\{x\} \cap \partial\mathcal{K}_\alpha$  liefert der Satz des Pythagoras

$$\|w - z\|^2 = \|w - v\|^2 + \|v - z\|^2 \geq \|w - v\|^2 = (2\varepsilon)^2.$$

Ist  $z = (z', z_n) \in \partial\mathcal{K}_\alpha$  ( $z' \in \mathbb{R}^{n-1}, z_n \in \mathbb{R}$ ) beliebig, so ergänze  $b_1 = \|z'\|^{-1}z' \in \mathbb{R}^{n-1}$  zu einer Orthonormalbasis  $\{b_1, \dots, b_{n-1}\}$  von  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Dann ist die Matrix

$$N = (b_1 \ \dots \ b_{n-1})^T \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$$

mit den Zeilenvektoren  $b_1, \dots, b_{n-1}$  orthogonal mit  $Nb_1 = e_1$ . Weiterhin ist die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

ebenfalls orthogonal mit  $M\Omega = \Omega$  und

$$Mz = \|z'\|e_1 + z_n e_n \in \partial\mathcal{K}_\alpha \cap \text{Span}\{x\}.$$

Dann gilt

$$\|w - z\| = \|M(w - z)\| = \|w - Mz\| \geq 2\varepsilon.$$

Also erfüllt  $\Omega$  in jedem Punkt  $z \in \partial\Omega \setminus \{0\}$  die äußere Kugelbedingung.  $\square$

Im vorherigen Lemma haben wir gezeigt, dass die Menge  $\Omega = B_1^n(0) \setminus \overline{\mathcal{K}}_\alpha \subset \mathbb{R}^n$  in jedem Punkt  $\xi \in \partial\Omega \setminus \{0\}$  die äußere Kugelbedingung erfüllt und damit nach Satz 5.6 in jedem solchen Randpunkt  $\xi$  eine Barriere hat.

**Lemma 5.20** *Für  $\Omega = B_1^n(0) \setminus \overline{\mathcal{K}}_\alpha \subset \mathbb{R}^n$  definieren wir die Funktionen  $f: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \|x\|$  und  $u: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto P[f](x)$ . Dann ist  $-u$  eine Barrierefunktion für  $\Omega$  in 0.*

Beweis: Satz 4.7 zufolge ist  $u$  harmonisch auf  $\Omega$ . Nach Lemma 4.5 gilt  $0 \leq u(x) \leq 1$  für  $x \in \bar{\Omega}$ . Die äußere Kugelbedingung gilt in jedem Randpunkt  $\xi \in \partial\Omega \setminus \{0\}$ , d.h.  $\Omega$  hat in jedem Punkt  $\xi \in \partial\Omega \setminus \{0\}$  eine Barriere. Aus Satz 5.2 folgt nun, dass  $u$  auf  $\bar{\Omega} \setminus \{0\}$  stetig ist und dass  $u$  strikt positiv auf  $\bar{\Omega} \setminus \{0\}$  ist. Andernfalls gäbe es ein  $a \in \Omega$  mit  $u(a) = 0$ . Da  $\Omega$  zusammenhängend und  $u$  harmonisch auf  $\Omega$  ist, würde dann nach dem Maximumprinzip (Korollar 2.15) wegen  $0 \leq u(x) \leq 1$  für  $x \in \Omega$  auch  $u|_{\Omega} \equiv 0$  gelten. Dies steht aber im Widerspruch zu  $\lim_{y \rightarrow \xi} u(y) = \|\xi\| \neq 0$  für  $\xi \in \partial\Omega \setminus \{0\}$ . Also ist  $u$  strikt positiv auf  $\bar{\Omega} \setminus \{0\}$ .

Können wir nun noch die Stetigkeit von  $u$  in 0 begründen, so haben wir gezeigt, dass  $-u$  eine Barrierefunktion für  $\Omega$  in 0 ist. Nach Definition der Funktion  $u = P[f]$  gilt  $u(0) = 0$ . Daher genügt es

$$\limsup_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$$

zu zeigen. Sei hierfür  $r \in (0, 1)$ . Aufgrund der Stetigkeit von  $u$  auf  $\bar{\Omega} \setminus \{0\}$  gilt nach dem Maximumprinzip (Korollar 2.15)  $u(x) < 1$  für  $x \in \Omega$ . Da  $\partial B_r(0) \cap \bar{\Omega}$  als abgeschlossene Teilmenge des Kompaktums  $\partial B_r(0)$  wieder kompakt ist, gibt es  $x_0 \in \partial B_r(0) \cap \bar{\Omega}$  mit  $1 > u(x_0) = \|u\|_{\partial B_r(0) \cap \bar{\Omega}}$ . Wegen  $r\Omega = B_r(0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \bar{\mathcal{K}}_\alpha)$  ist

$$\begin{aligned} \partial(r\Omega) &\subset (\partial B_r(0) \cap \bar{\Omega}) \cup (\partial \bar{\mathcal{K}}_\alpha \cap B_r(0)) \\ &\subset (\partial B_r(0) \cap \bar{\Omega}) \cup (\partial\Omega \cap B_r(0)). \end{aligned}$$

Setze nun  $c = \max\{u(x_0), r\}$ , sodass  $u(x) \leq c$  für  $x \in \partial(r\Omega) \setminus \{0\}$  ist. Die Funktion

$$v_r: r\bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto u(x) - cu\left(\frac{x}{r}\right)$$

ist stetig auf  $r\bar{\Omega} \setminus \{0\}$  und wegen  $-1 \leq v_r(x) \leq 1$  für  $x \in r\bar{\Omega} \setminus \{0\}$  auch beschränkt. Sei  $x \in \partial(r\Omega) \setminus \{0\}$ . Dann ist  $\frac{x}{r} \in (\partial\Omega) \setminus \{0\}$  und daher  $u\left(\frac{x}{r}\right) = \left\|\frac{x}{r}\right\|$ . Ist  $x \in \partial B_r(0)$ , so ist  $\frac{x}{r} \in (\partial B_1(0)) \cap \partial\Omega$  und

$$u(x) \leq c = cu\left(\frac{x}{r}\right).$$

Ist  $x \in \partial\Omega \cap B_r(0)$ , so ist

$$u(x) = \|x\| = r\left\|\frac{x}{r}\right\| \leq cu\left(\frac{x}{r}\right).$$

Also ist  $v_r \leq 0$  auf  $\partial(r\Omega) \setminus \{0\}$  und nach Lemma 5.18 ist auch  $v_r \leq 0$  auf  $r\Omega$ . Nun folgt

$$\limsup_{x \rightarrow 0} u(x) \leq c \limsup_{x \rightarrow 0} u\left(\frac{x}{r}\right).$$

Aus

$$\limsup_{x \rightarrow 0} u\left(\frac{x}{r}\right) = \inf_{\delta > 0} \sup_{B_\delta(0) \cap \Omega} u\left(\frac{x}{r}\right)$$

und  $r^{-1}B_\delta(0) = B_{\delta/r}(0)$  folgt

$$\limsup_{x \rightarrow 0} u(x) \leq c \limsup_{x \rightarrow 0} u(x).$$

Da  $c < 1$  ist, folgt schließlich  $\limsup_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$  und damit ist die Stetigkeit von  $u$  gezeigt.  $\square$

Wir können nun eine Bedingung für die Existenz einer Barriere in einem Randpunkt  $\xi \in \partial\Omega$  angeben, die auf Mengen mit  $C^1$ -Rand und allgemeinere Mengen angewandt werden kann – die sogenannte *äußere Kegelbedingung*.

**Definition 5.21** *Es seien  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränkte, offene Menge und  $\xi \in \partial\Omega$  ein Randpunkt. Wir sagen, dass  $\Omega$  die **äußere Kegelbedingung** in  $\xi$  erfüllt, wenn  $\alpha > 0$ ,  $h > 0$  und eine orthogonale Matrix  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  existieren mit  $\overline{\mathcal{C}}_{(\xi, M, \alpha, h)} \cap \overline{\Omega} = \{\xi\}$ .*

**Satz 5.22** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränkte, offene Menge. Genügt  $\Omega$  der äußeren Kegelbedingung im Punkt  $\xi \in \partial\Omega$ , so besitzt  $\Omega$  eine Barriere in  $\xi$ .*

Beweis: Sei  $\xi \in \partial\Omega$  und sei  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{(\xi, M, \alpha, h)}$  ein Kegel mit  $\overline{\Omega} \cap \overline{\mathcal{C}} = \{\xi\}$ . Dann ist

$$\rho: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \rho(x) = \frac{1}{h}M^T(x - \xi) = \left(\frac{1}{h}M^T x\right) - \frac{1}{h}M^T \xi$$

eine Funktion wie in Lemma 2.21. Es ist  $\rho\mathcal{C} = \mathcal{K}_{(\alpha, 1)}$  und

$$\overline{\rho(\Omega)} \cap \overline{\mathcal{K}_{(\alpha, 1)}} = \rho(\overline{\Omega} \cap \overline{\mathcal{C}}) = \{0\} \subset \partial\Omega.$$

Insbesondere gilt  $\rho(\Omega) \cap B_1(0) \subset B_1(0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathcal{K}_\alpha})$ .

Ist  $u: \overline{\rho(\Omega)} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Barrierenfunktion für  $\rho(\Omega)$  in 0, so ist  $u \circ \rho: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$



nach Lemma 2.21 eine Barrierefunktion für  $\Omega$  in  $\xi$ . Also dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $\xi = 0$  ist und dass  $\bar{\Omega} \cap \bar{\mathcal{K}}_{(\alpha,1)} = \{0\}$ .

Sei  $U = B_1(0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \bar{\mathcal{K}}_\alpha)$  und sei  $-u: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$  die in Lemma 5.20 konstruierte Barrierefunktion für  $U$  in 0. Dann definiert

$$\tilde{u}: \bar{U} \cup (\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in \bar{U} \\ 1 & \text{für } x \notin B_1(0) \end{cases}$$

eine stetige Funktion. Es sind

$$\bar{\Omega} \subset \bar{U} \cup (\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)) \quad \text{und} \quad \Omega \cap \partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{\mathcal{K}}_\alpha$$

und  $-\tilde{u}|_\Omega$  ist subharmonisch. Wegen  $\Omega \cap B_1(0) \subset U$  und  $\tilde{u} \equiv 1$  auf  $\Omega \cap (\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}_1(0))$  genügt es zu begründen, dass  $-\tilde{u}$  die Mittelwertungleichung für Kugeln mit genügend kleinem Radius um Punkte  $a \in \Omega \cap \partial B_1(0)$  erfüllt. Sei  $a \in \Omega \cap \partial B_1(0)$ . Wähle  $r > 0$  mit  $\bar{B}_r(a) \subset \Omega \cap (\mathbb{R}^n \setminus \bar{\mathcal{K}}_\alpha)$ . Dann ist  $\tilde{u}|_{\partial B_r(a)} \leq 1$  und daher

$$(-\tilde{u})(a) = -1 \leq \frac{1}{\omega_n} \int_{\|\xi\|=1} (-\tilde{u})(a + r\xi) dS(\xi).$$

Also ist  $-\tilde{u}|_{\bar{\Omega}}$  eine Barrierefunktion für  $\Omega$  in  $\xi = 0$ . □

**Lemma 5.23** *Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränkte, offene Menge und  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine orthogonale Matrix. Erfüllt  $\Omega$  in  $\xi \in \partial\Omega$  die äußere Kegelbedingung, so erfüllt auch  $M\Omega + w$  in  $M\xi + w \in \partial(M\Omega + w)$  für jedes  $w \in \mathbb{R}^n$  die äußere Kegelbedingung.*

Beweis: Es seien  $\xi \in \partial\Omega$ ,  $w \in \mathbb{R}^n$ ,  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  orthogonal und  $\mathcal{C}_{(a,N,\alpha,h)} \subset \mathbb{R}^n$  ( $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $h > 0$ ) ein Kegel mit Scheitelpunkt  $a$  und Höhe  $h$  derart, dass

$$\bar{\mathcal{C}}_{(a,N,\alpha,h)} \cap \bar{\Omega} = \{\xi\}$$

gilt. Da

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \longmapsto Mx + w$$

ein Homöomorphismus ist mit

$$\|f(x)\| \leq \|x\| + \|w\|$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ , ist  $f(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränkte, offene Menge mit  $f(\xi) \in f(\partial\Omega) = \partial f(\Omega)$ . Da  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  orthogonal ist, gilt  $M\mathcal{C}_{(0,N,\alpha,h)} = \mathcal{C}_{(0,MN,\alpha,h)}$  und damit auch

$$\begin{aligned} f(\bar{\mathcal{C}}_{(a,N,\alpha,h)}) &= M(\bar{\mathcal{C}}_{(0,N,\alpha,h)} + a) + w \\ &= \bar{\mathcal{C}}_{(0,MN,\alpha,h)} + (Ma + w) \\ &= \bar{\mathcal{C}}_{(Ma+w,MN,\alpha,h)} \\ &\subset \mathbb{R}^n \setminus f(\Omega). \end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{C}}_{(Ma+w,MN,\alpha,h)} \cap \overline{f(\Omega)} &= f(\bar{\mathcal{C}}_{(a,N,\alpha,h)}) \cap f(\bar{\Omega}) \\ &= f(\bar{\mathcal{C}}_{(a,N,\alpha,h)} \cap \bar{\Omega}) \\ &= \{f(\xi)\}. \end{aligned}$$

□

Im Folgenden zeigen wir, dass Mengen mit  $C^1$ -Rand die äußere Kegelbedingung in jedem ihrer Randpunkte erfüllen. Hierbei gehen wir analog zum Beweis von Satz 5.12 vor. Zuerst bemerken wir jedoch, dass für eine Konstante  $C > 0$  und  $n \geq 2$  für alle  $\alpha \in (0, \frac{1}{C})$  die Identität

$$\bar{\mathcal{K}}_\alpha \cap \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid |x_n| \leq C\|x'\|\} = \{0\}$$

gilt. Dies sieht man so: Ist  $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$  mit  $x' \neq 0$  und  $|x_n| \leq C\|x'\|$ , so folgt  $|x_n| < \frac{1}{\alpha}\|x'\|$ . Also ist  $x \notin \bar{\mathcal{K}}_\alpha$ .

**Satz 5.24** *Ist  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränkte, offene Menge mit  $C^1$ -Rand, so ist das Dirichlet-Problem für  $\Omega$  lösbar.*

Beweis: Es sei  $\xi \in \partial\Omega$ . Nach Satz 5.3 und Satz 5.22 genügt es zu zeigen, dass  $\Omega$  in  $\xi$  der äußeren Kegelbedingung genügt. Ohne Einschränkung können wir  $\xi = 0$  annehmen. Denn ansonsten betrachten wir die Menge  $\Omega - \xi$  und verwenden Lemma 5.23. Nach Lemma 5.11 gibt es eine orthogonale Matrix  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\varepsilon > 0$  so, dass

$$M^T T_\xi(\partial\Omega) = \mathbb{R}^n \times \{0\} \tag{5.15}$$

und

$$te_n \notin M^T\overline{\Omega} \quad (5.16)$$

für alle  $t \in (0, \varepsilon)$  gelten. Können wir nun zeigen, dass  $M^T\Omega$  in  $\xi = 0 \in \partial(M^T\Omega)$  der äußeren Kegelbedingung genügt, so folgt aus Lemma 5.23, dass  $\Omega$  in  $\xi = 0 \in \partial\Omega$  auch die äußere Kegelbedingung erfüllt. Nach (5.15) ist  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$  der Tangentialraum von  $\partial(M^T\Omega) = M^T(\partial\Omega)$  in 0. Lemma 5.9 zufolge existieren daher eine offene Nullumgebung  $V = V_1 \times V_2 \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$  und eine Funktion  $g \in C^1(V_1, \mathbb{R})$  so, dass

$$\partial(M^T\Omega) \cap V = \{(x, g(x)) \mid x \in V_1\}. \quad (5.17)$$

Für diese Funktion  $g \in C^1(V_1, \mathbb{R})$  gilt nach Korollar 5.10 zusätzlich  $\text{grad} g(0) = 0$  und nach Definition  $g(0) = 0$ . Wir schreiben wieder  $0' = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Wähle  $\delta > 0$  so, dass  $B_{2\delta}^{n-1}(0') \subset V_1$  gilt. Dann existiert nach Proposition 1.4 eine Konstante  $C > 0$  mit

$$|g(y)| \leq C\|y\| \quad (5.18)$$

für alle  $y \in B_\delta^{n-1}(0')$ . Es sei nun  $\alpha \in (0, \min\{\frac{1}{C}, 1\})$  und es sei  $\varepsilon > 0$  so klein, dass

$$\overline{B}_\varepsilon^n(0) \subset B_\delta^{n-1}(0') \times V_2 \subset V_1 \times V_2. \quad (5.19)$$

Für  $h > 0$  gilt dann

$$\overline{\mathcal{K}}_{(\alpha, h)} \cap \left\{ x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid |x_n| \leq C\|x'\| \right\} = \{0\}. \quad (5.20)$$

Lemma 5.17 zufolge gilt für  $h < \varepsilon(1 - \alpha)$  die Inklusion

$$\overline{\mathcal{K}}_{(\alpha, h)} \subset \overline{B}_\varepsilon^n(0) \subset V. \quad (5.21)$$

Wegen (5.18) und (5.21) folgt

$$|g(x_1, \dots, x_{n-1})| \leq C\|(x_1, \dots, x_{n-1})\| < x_n \quad (5.22)$$

für alle  $(x_1, \dots, x_n) \in \overline{\mathcal{K}}_{(\alpha, h)} \setminus \{0\}$ .

Wir zeigen nun

$$\overline{\mathcal{K}}_{(\alpha, h)} \cap \overline{M^T\Omega} = \{0\}. \quad (5.23)$$

Gäbe es nämlich  $(x_1, \dots, x_n) \in (\overline{\mathcal{K}}_{(\alpha, h)} \cap \partial(M^T\Omega)) \setminus \{0\}$ , so folgte  $x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1})$  aus (5.17) und (5.21) und wegen (5.22) würde

$$|x_n| = |g(x_1, \dots, x_{n-1})| \leq C\|(x_1, \dots, x_{n-1})\| < |x_n|$$

gelten, ein Widerspruch. Also gilt

$$\overline{\mathcal{K}}_{(\alpha, h)} \cap \partial(M^T\Omega) = \{0\}.$$

Nach (5.16) gibt es einen Punkt

$$0 \neq b \in \overline{\mathcal{K}}_{(\alpha, h)} \cap \mathbb{R}^n \setminus (M^T\overline{\Omega}).$$

Gäbe es einen Punkt  $a \in \overline{\mathcal{K}}_{(\alpha, h)} \cap M^T\Omega$ , so müsste ein  $t \in (0, 1)$  existieren mit

$$a + t(b - a) \in \partial(M^T\Omega) \cap \overline{\mathcal{K}}_{(\alpha, h)} = \{0\}.$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass  $\overline{\mathcal{K}}_{(\alpha, h)} \cap M^T\overline{\Omega} = \{0\}$  ist.

Also erfüllt  $M^T\Omega$  die äußere Kegelbedingung in  $\xi = 0$  und der Beweis ist abgeschlossen.  $\square$

# Anhang

**Lemma 1** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränkte, offene Menge mit  $C^k$ -Rand ( $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ ). Dann gilt

(i)  $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$  ist ein Kompaktum mit glattem Rand,

(ii)  $\partial\bar{\Omega} = \partial\Omega$  und

(iii)  $\Omega = \text{Int}(\bar{\Omega})$ .

Beweis: Die Inklusion  $\partial\bar{\Omega} \subset \partial\Omega$  gilt für jede Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Sei  $\xi \in \partial\Omega$  und sei  $\varphi \in C^k(U, \mathbb{R})$  zu  $\xi$  so gewählt wie in Definition 1.2. Durch Verkleinern von  $U$  kann man erreichen, dass  $\text{grad } \varphi(x) \neq 0$  für alle  $x \in U$  ist. Definitionsgemäß ist

$$\begin{aligned} \{x \in U \mid \varphi(x) \leq 0\} &= \{x \in U \mid \varphi(x) < 0\} \cup \{x \in U \mid \varphi(x) = 0\} \\ &= (\Omega \cap U) \cup (\partial\Omega \cap U) \\ &= \bar{\Omega} \cap U. \end{aligned}$$

Also ist  $\bar{\Omega}$  ein Kompaktum mit glattem Rand. Wäre  $\xi \notin \partial\bar{\Omega}$ , so könnte man durch weiteres Verkleinern von  $U$  erreichen, dass  $U \subset \bar{\Omega}$  ist. Aber dann wäre

$$\varphi(\xi) = 0 \geq \varphi$$

auf  $U$  und damit  $\text{grad } \varphi(\xi) = 0$ , im Widerspruch zu den Voraussetzungen. Also sind (i) und (ii) gezeigt. Mit Teil (ii) folgt schließlich auch

$$\text{Int}(\bar{\Omega}) = \bar{\Omega} \setminus \partial\bar{\Omega} = \bar{\Omega} \setminus \partial\Omega = \Omega.$$

□

**Bemerkung 2** Ist  $A \subset \mathbb{R}^n$  ein Kompaktum mit glattem Rand, so folgt mit [6, Lemma 10.6], dass  $A = \overline{\text{Int}(A)}$  ist. Also gilt

$$\partial A = \overline{\partial \text{Int}(A)} \subset \partial \text{Int}(A) \subset \partial A.$$

Dabei gilt die letzte Inklusion für jede Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Also ist  $\partial \text{Int}(A) = \partial A$  und mit den übrigen Teilen von Lemma 10.6 in [6] folgt, dass  $\text{Int}(A) \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränkte, offene Menge mit  $C^1$ -Rand ist.

Der Beweis des folgenden Satzes kann [6, Satz 10.8] entnommen werden.

**Satz 3** Ist  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränkte, offene Menge mit  $C^k$ -Rand, so gibt es zu jedem Punkt  $\xi \in \partial\Omega = \partial\overline{\Omega}$  nach [6, Satz 10.8] einen eindeutig bestimmten Vektor  $\nu_\Omega(\xi) \in \mathbb{R}^n$  mit

(i)  $\nu_\Omega(\xi) \in N_\xi(\partial\Omega)$  und

(ii) es gibt ein  $\varepsilon > 0$  mit  $\xi + t\nu_\Omega(\xi) \notin \overline{\Omega}$  für alle  $t \in (0, \varepsilon)$ .

Wir bezeichnen diesen Vektor auch als äußeren Normalen-Einheitsvektor von  $\Omega$  in  $\xi \in \partial\Omega$ .

Geht aus dem aktuellen Kontext eindeutig hervor, bezüglich welcher Menge  $\nu_\Omega(\xi)$  der äußere Normalen-Einheitsvektor von  $\Omega$  in  $\xi$  ist, so schreiben wir vereinfachend  $\nu_\Omega(\xi) = \nu(\xi)$ .

Die Gültigkeit des nachstehenden Lemmas kann man leicht nachrechnen.

**Lemma 4** Seien  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $p$ -dimensionale  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit ( $1 \leq p \leq n-1$ ),  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränkte, offene Menge mit  $C^k$ -Rand und  $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Vektorraumisomorphismus. Dann gilt

(a)  $\rho M \subset \mathbb{R}^n$  ist eine  $p$ -dimensionale  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit mit

$$T_{\rho(a)}(\rho M) = \rho T_a(M)$$

für alle  $a \in M$ . Ist  $\rho$  isometrisch, so gilt auch

$$N_{\rho(a)}(\rho M) = \rho N_a(M)$$

für alle  $a \in M$ .

---

(b)  $\rho\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ist eine beschränkte, offene Menge mit  $C^k$ -Rand und

$$T_{\rho(a)}(\partial(\rho\Omega)) = \rho T_a(\partial\Omega)$$

für alle  $a \in \partial\Omega$ . Ist  $\rho$  isometrisch, so gilt außerdem für alle  $a \in \partial\Omega$

$$N_{\rho(a)}(\partial(\rho\Omega)) = \rho N_a(\partial\Omega)$$

und

$$\nu_{\rho\Omega}(\rho a) = \rho \nu_{\Omega}(a).$$





# Literaturverzeichnis

- [1] AXLER, S. ; BOURDON, P. ; RAMEY, W.: *Harmonic Function Theory*. Springer, New York, 2001
- [2] BREZIS, H. ; BROWDER, F.: *Partial Differential Equations in the 20th Century*. Advances in Mathematics 135, pp 76-144, 1998
- [3] CESARONI, A.: *Introduzione alle equazioni alle derivate parziali*. Vorlesungsskript, Universität Padua, Italien. [www.math.unipd.it/~ancona/pdf/notes/perron\\_cesaroni.pdf](http://www.math.unipd.it/~ancona/pdf/notes/perron_cesaroni.pdf); [Stand 18.07.2016]
- [4] COHN, D. L.: *Measure Theory*. Springer, New York, 2013
- [5] ESCHMEIER, J.: *Analysis 2*. Vorlesungsskript, Universität des Saarlandes, 2014
- [6] ESCHMEIER, J.: *Analysis 3*. Vorlesungsskript, Universität des Saarlandes, 2015
- [7] FORSTER, O.: *Analysis 3*. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2012
- [8] FORSTER, O.: *Analysis 2*. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2013
- [9] GILBARG, D.: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, Berlin, 1977
- [10] JOHN, F.: *Partial Differential Equations*. Springer, New York, 1978
- [11] RUDIN, W.: *Functional Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1991
- [12] TSOGTGEREL, G.: *The Dirichlet Problem*. Abstract, McGill University, Kanada. [www.math.mcgill.ca/gantumur/math580f13/dirichlet.pdf](http://www.math.mcgill.ca/gantumur/math580f13/dirichlet.pdf); [Stand 25.08.2016]

- [13] WEIL, A.: *Œuvres Scientifiques - Collected Papers*. Springer, New York, 1979