Transitive Algebra Conjecture

Bachelorarbeit

Manuel Kany
Auf der Leh 28
66271 Kleinblittersdorf

Betreuer:
Prof. Dr. Jörg Eschmeier

Universität des Saarlandes, Sommersemester 2017

Fakultät 6 - Mathematik und Informatik

Saarbrücken, 1. August 2017

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich die Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.
Die mit der vorliegenden Arbeit eingereichte elektronische Version stimmt mit der Schriftlichen überein.

Saarbrücken, 1. August 2017

Manuel Kany

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei meiner Familie, meinen Kommilitonen und Freunden für die Unterstützung während meines Studiums bedanken.
Auch möchte ich mich bei Prof. Dr. Jörg Eschmeier für das interessante und lehrreiche Thema, sowie die hervorragende Betreuung während der ganzen Arbeit bedanken.
Besonders bedanken möchte ich mich bei Sebastian Langendörfer für sein großes Engagement und seine tatkräftige Unterstützung durch die ganze Arbeit hinweg.
Außerdem möchte ich mich an dieser Stelle bei Daniel Krämer bedanken, bei dem ich immer auf ein offenes Ohr gestoßen bin.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Grundlagen **3**

2.1 Unbeschränkte Operatoren 3

2.1.1 Unbeschränkte Operatoren auf Banachräumen 3

2.1.2 Unbeschränkte Operatoren auf Hilberträumen 4

2.2 Eigenschaften von Kommutanten 7

2.3 Fixpunktsätze 9

2.4 Der Rieszsche Zerlegungssatz 11

3 Die Ergebnisse von Arveson **15**

3.1 Transitivität und Charakterisierungen 15

3.2 Werkzeuge der Transitive Algebra Conjecture 18

4 Transitive Algebra Conjecture und Anwendungen **31**

4.1 Teillösungen für bestimmte Klassen von Operatoralgebren 31

4.2 Anwendung für das Invariant Subspace Problem 39

5 Katalytische Algebra im Drury-Arveson Raum **43**

Literatur **49**

1 Einleitung

In einer Arbeit von 1967 (vgl.[2]) beschäftigte sich Arveson mit einem Problem, dessen positive Lösung implizieren würde, dass für einen komplexen Banachraum X mit $\dim(X) = \infty$ jeder stetig lineare Operator $T \in \mathcal{L}(X) \setminus \mathbb{C}1_X$ einen nicht trivialen hyperinvarianten Untervektorraum hat, also die Menge

$$\mathrm{Hyp}(T) = \{M \subset X \text{ abgeschlossener Untervektorraum; } AM \subset M \text{ für alle } A \in (T)'\}$$

nicht nur aus den trivialen Untervektorräumen von X besteht (vgl. Satz 3.4). Dabei bezeichnet $(T)'$ den Kommutanten von T.
Arveson nannte eine Unteralgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ *n-transitiv* für ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, wenn für je n linear unabhängige Elemente $x_1, \dots, x_n \in X$ und beliebige Elemente $y_1, \dots, y_n \in X$ eine Folge $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ existiert, sodass

$$\lim_{j\to\infty} A_j x_k = y_k$$

für $k = 1, \dots, n$ gilt.
Dabei nannte Arveson eine 1-transitive Algebra einfach *transitiv*.
Wir definieren

$$\mathrm{Lat}(\mathcal{A}) = \{M \subset X \text{ abgeschlossener Untervektorraum; } AM \subset M \text{ für alle } A \in \mathcal{A}\}.$$

Arveson bemerkte unter anderem, dass $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ genau dann transitiv ist, wenn $\mathrm{Lat}(\mathcal{A})$ trivial ist, und dass $\mathcal{A}$ genau dann n-transitiv ist für alle $n \geq 1$, wenn $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ dicht in der starken Operatortopologie ist (vgl. Bemerkung 3.2). Ist $T \in \mathcal{L}(X) \setminus \mathbb{C}1_X$ ein Operator ohne nicht triviale hyperinvariante Untervektorräume, so ist $\mathcal{A} = (T)' \subset \mathcal{L}(X)$ eine transitive Algebras, die nicht SOT-dicht in $\mathcal{L}(X)$ ist (vgl. Lemma 2.7 und Proposition 2.9). Könnte man also zeigen, dass aus der Transitivität einer Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ die n-Transitivität für alle $n \geq 1$ folgt, so hätte man gezeigt, dass jeder Operator $T \in \mathcal{L}(X) \setminus \mathbb{C}1_X$

einen nicht trivialen hyperinvarianten Untervektorraum besitzt.
Die *„Transitive Algebra Conjecture "* ist nun die Frage, ob jede transitive Unteralgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ schon n-transitiv ist für alle $n \geq 1$.
Die Transisitve Algebra Conjecture ist bis heute offen, jedoch wurde sie bereits für spezielle Klassen von Unteralgebren $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ gelöst. Mit einigen ausgewählten Klassen solcher Unteralgebren beschäftigen wir uns in Kapitel 4. So zeigten etwa E. Nordgran, H. Radjavi und P.Rosenthal im Jahr 1969, dass eine transitive Operatoralgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$, die einen Operator $0 \neq F \in \mathcal{F}(X)$ endlischen Ranges enthält, schon n-transitiv ist für alle $n \geq 1$ (vgl. Satz 4.2). Dieses Ergebnis werden wir benutzen, um ein Ergebnis von V. Lomonosov aus dem Jahr 1973 zu zeigen (vgl. Satz 4.6). So ist sogar eine tranistive Operatoralgebra, die einen kompakten Operator $0 \neq K \in \mathcal{K}(X)$ enthält, n-transitiv ist für alle $n \geq 1$.
Als direktes Korollar hieraus ergibt sich der Satz von Lomonosov (vgl. Satz 4.7). Dieser besagt, dass für einen Operator $T \in \mathcal{L}(X) \backslash \mathbb{C}1_X$, dessen Kommutant $(T)'$ einen kompakten Operator $0 \neq K \in \mathcal{K}(X)$ enthält, einen nicht trivialen hyperinvarianten Untervektorraum besitzt.
Darauf aufbauend sehen wir im zweiten Teil von Kapitel 4, dass jeder Operator $T \in \mathcal{L}(X) \setminus \mathbb{C}1_X$, für den ein kompakter Operator $0 \neq K \in \mathcal{K}(X)$ existiert mit $\dim \operatorname{Bild}(TK - KT) \leq 1$, einen nicht trivialen hyperinvarianten Untervektorraum hat (vgl. Satz 4.10). Dies wurde zuerst von H.W. Kim, C. Pearcy und A. Shields im Jahr 1975 gezeigt.
In Kapitel 5 werden wir eine Anwendung auf dem Drury-Arveson Raum $H(\mathcal{B})$ geben. Wir verwenden die Ideen für den verallgemeinerten Hardy-Raum aus [5] und übertragen sie auf abgeschlossene Untervektorräume des Drury-Arveson Raumes.
Ist H ein unendlich dimensionaler separabler Hilbertraum, so nennen wir eine Unteralgebra $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}(H)$ *katalytisch*, falls jede transitive Unteralgebra $\mathcal{A}$ von $\mathcal{L}(H)$, die $\mathcal{B}$ enthält, n-transitiv ist für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Wir beweisen als Hauptresultat dieses Kapitels, dass für einen abgeschlossenenen Untervektorraum $\{0\} \neq M \subset H(\mathbb{B})$ des Drury-Arveson Raumes, der invariant unter den Einschränkungen aller Multiplikatoren von $H(\mathcal{B})$ ist, die Algebra $\mathcal{M}(H(\mathbb{B}))|_M$ katalytisch für $\mathcal{L}(M)$ ist.

2 Grundlagen

2.1 Unbeschränkte Operatoren

In diesem Abschnitt werden wir uns einige Ergebnisse zu unbeschränkten Operatoren erarbeiten (vgl. [8] § 19 und [2] Kapitel 2). Dabei werden sich unbeschränkte Operatoren als wichtiges Hilsmittel zur Charakterisierung transitiver Algebren herausstellen.

2.1.1 Unbeschränkte Operatoren auf Banachräumen

Seien $(X, \|\cdot\|)$ ein komplexer Banachraum. Für $n \geq 2$ versehe X^n mit der Norm $\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|$. Dadurch wird X^n zu einem Banachraum.
Sei weiter $D_T \subset X$ ein Untervektorraum von X. Eine lineare Abbildung $T : D_T \to X$ nennt man *beschränkt*, falls ein $c > 0$ existiert mit $\|Tx\| \leq c\|x\|$ für alle $x \in D_T$. Ansonsten heißt T *unbeschränkt*. Bekanntlich ist T genau dann stetig, wenn T beschränkt ist. Man nennt T *dicht definiert*, falls $\overline{D_T} = X$ gilt.
Sind $S : D_S \to X$ und $T : D_T \to X$ lineare Abbildungen definiert auf Untervektorräumen $D_S, D_T \subset X$, so schreiben wir $T \subset S$, falls $D_T \subset D_S$ und $S = T$ auf D_T gelten.

Definition 2.1. Seien $D_T \subset X$ ein Untervektorraum, $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ eine Unteralgebra und $T : D_T \to X$ eine lineare Abbildung. Der *Graph* von T ist die Menge

$$G(T) = \{(x, Tx) \in X^2;\ x \in D_T\}.$$

Man nennt T *abgeschlossen*, wenn $G(T) \subset X^2$ abgeschlossen ist und *abschließbar*, wenn eine abgeschlossene lineare Abbildung S existiert, sodass $T \subset S$ gilt.

Proposition 2.2. Seien $D_T \subset X$ ein Untervektorraum und $T : D_T \to X$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) T ist abschließbar.

(ii) Für $x \in X$ folgt aus $(0,x) \in \overline{G(T)}$ schon $x = 0$.

(iii) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D_T mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und $Tx_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$, so folgt $y = 0$.

Beweis. Die Implikation $(i) \Rightarrow (ii)$ und die Äquivalenz $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ sind offensichtlich. Wir zeigen also $(ii) \Rightarrow (i)$. Sei dazu vorausgesetzt, dass aus $(0,x) \in \overline{G(T)}$ schon $x = 0$ folgt.

Wir suchen nun eine abgeschlossene Abbildung S, für die $T \subset S$ gilt. Setze dazu

$$D_S = \{x \in X;\ \text{es gibt ein } y \in X \text{ mit } (x,y) \in \overline{G(T)}\}.$$

Da $\overline{G(T)} \subset X^2$ ein Untervektorraum ist, ist auch $D_S \subset X$ ein Untervektorraum.

Wir zeigen, dass die Relation $\overline{G(T)} \subset X \times X$ der Graph einer Abbildung ist, dann kann man die Abbildung $S : D_S \to X$ einfach durch $Sx = y$ für $(x,y) \in \overline{G(T)}$ definieren.

Seien dazu $(x,y_1),(x,y_2) \in \overline{G(T)}$. Da $\overline{G(T)}$ ein Untervektorraum von X^2 ist folgt

$$(0, y_1 - y_2) = (x, y_1) - (x, y_2) \in \overline{G(T)}.$$

Nach Voraussetzung gilt damit schon $y_1 = y_2$.

Die Linearität für S ist offensichtlich erfüllt, denn für $\alpha \in C$ und $x, \tilde{x} \in D_S$ gilt

$$\alpha(x, Sx) + (\tilde{x}, S\tilde{x}) = (\alpha x + \tilde{x}, \alpha Sx + S\tilde{x}) \in \overline{G(T)}$$

Daraus folgt $S(\alpha x + \tilde{x}) = \alpha Sx + S\tilde{x}$.

Offensichtlich ist $G(S) = \overline{G(T)} \subset X^2$ abgeschlossen und damit ist $T \subset S$ abschließbar. □

Bemerkung 2.3. Im Beweis zu dieser Proposition ist deutlich geworden, dass für eine abschließbare lineare Abbildung $T : D_T \to X$ eine kleinste abgeschlossene Abbildung S existiert, sodass $T \subset S$ erfüllt ist. Dies ist gerade die Abbildung mit Graph $G(S) = \overline{G(T)}$. Bezeichne diese kleinste Abbildung im Folgenden mit $\overline{T}$.

2.1.2 Unbeschränkte Operatoren auf Hilberträumen

Sei im Folgenden Unterkapitel immer $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein komplexer Hilbertraum.

Auch für unbeschränkte Operatoren kann man einen adjungierten Operator definieren. Dies wird in der folgenden Proposition und Definition geschehen.

Proposition 2.4. Sei D_T ein dichter Untervektorraum von H und sei $T : D_T \to H$ ein linearer Operator. Setze

$$D_{T^*} = \{y \in H;\ \text{es existiert ein } y^* \in H \text{ mit } \langle Tx, y\rangle = \langle x, y^*\rangle \text{ für alle } x \in D_T\}.$$

(i) Für jedes $y \in D_{T^*}$ ist das passende $y^* \in H$ mit $\langle Tx, y\rangle = \langle x, y^*\rangle$ für alle $x \in D_T$ eindeutig.

Beweis. Sind $y \in D_{T^*}$ und $y^*, y^{**} \in H$ mit $\langle x, y^*\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, y^{**}\rangle$ für alle $x \in D_T$, so erhalten wir $y^* - y^{**} \in {D_T}^\perp = \{0\}$ und damit $y^* = y^{**}$. □

(ii) Die Menge D_{T^*} ist offensichtlich ein Untervektorraum von H und die Abbildung

$$T^* : D_{T^*} \to H,\ y \mapsto y*$$

ist linear. Es gilt $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ für alle $x \in D_T$ und alle $y \in D_{T^*}$.

Beweis. Seien $\alpha \in \mathbb{C}$ und $y, \tilde{y} \in D_{T^*}$. Für y und $\tilde{y}$ existieren Elmente $y^*, \tilde{y}^* \in H$ mit $\langle Tx, y\rangle = \langle x, y^*\rangle$ und $\langle Tx, \tilde{y}\rangle = \langle x, \tilde{y}^*\rangle$ für alle $x \in D_T$.

Daraus folgt $\langle Tx, \alpha y + \tilde{y}\rangle = \langle x, \alpha y^* + \tilde{y}^*\rangle$ für alle $x \in D_T$. Mit Teil (i) erhalten wir damit $(\alpha y + \tilde{y})^* = \alpha y^* + \tilde{y}^*$, also die Linearität von T^*. □

(iii) Für $y \in H$ gilt genau dann $y \in D_{T^*}$, wenn das Funktional

$$D_T \to H,\ x \mapsto \langle Tx, y\rangle$$

stetig ist.

Beweis. Sei zuerst $y \in D_{T^*}$. Aus $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ für alle $x \in D_T$ und der Stetigkeit des Skalarprodukts in der ersten Komponente folgt die Behauptung.

Sei nun die Abbildung $D_T \to H,\ x \mapsto \langle Tx, y\rangle$ stetig für ein $y \in H$. Definiere die Abbildung S_y durch

$$S_y : H \to H,\ x \mapsto \lim_{n\to\infty} \langle Tx_n, y\rangle,$$

für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D_T mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

Wir zeigen zunächst, dass die Abbildung wohldefiniert ist. Da $D_T \subset H$ dicht ist, gibt es zu $x \in H$ eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D_T mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ und $\lim_{n\to\infty}\langle Tx_n, y\rangle$ existiert wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts.

Sind $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in D_T mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ und $\tilde{x}_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, so ergibt sich $\lim_{n\to\infty}\|x_n - \tilde{x}_n\| = 0$. Mit der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung erhalten wir die Abschätzung

$$|\langle Tx_n - T\tilde{x}_n, y\rangle| \leq \|y\|\|T\|\|x_n - \tilde{x}_n\|.$$

und damit die Wohldefiniertheit von S_y.

Die Abbildung S_y ist stetig auf D_T nach Voraussetzung. Daher existiert ein $c > 0$ mit $\|Sx\| \leq c\|x\|$ für alle $x \in D_T$. Damit ergibt sich für $x \in H$ und eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D_T mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ aus der Stetigkeit der Norm auf H die Abschätzung

$$\|S_y x\| = \lim_{n\to\infty}\|S_y x_n\| \leq \lim_{n\to\infty} c\|x_n\| = c\|x\|.$$

Dies impliziert die Stetigkeit von S_y auf ganz H.

Nach dem Satz von Riesz existiert nun ein $y^* \in H$ mit $S_y = \langle\cdot, y^*\rangle$. Es gilt also $\langle Tx, y\rangle = S_y(x) = \langle x, y^*\rangle$ für alle $x \in D_T$ und daraus folgt $y \in D_{T^*}$. $\square$

(iv) Im Fall $T \in \mathcal{L}(H)$ ergibt sich T^* wie gewohnt.

Definition 2.5. Die Abbildung $T^* : D_{T^*} \to H$ aus Proposition 2.4 nennen wir den zu T *adjungierten Operator*.

Wir schreiben $H \oplus H$ für den Vektorraum $H \times H$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{H\oplus H} : (H \times H) \times (H \times H) \to \mathbb{C}, \langle(x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle_{H\oplus H} = \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle.$$

Dann ist $H \oplus H$ wieder ein Hilbertraum.

Proposition 2.6. Sei $T : D_T \subset H \to H$ ein dicht definierter lineare Operator. In diesem Fall ist der adjungierte Operator $T^* : D_{T^*} \to H$ abgeschlossen.

Beweis. Definiere die Abbildung i auf $H \oplus H$ durch

$$i : H \oplus H \to H \oplus H,\ i(x, y) = (-y, x).$$

Offensichtich ist i ein isometrischer Vektorraumisomorphismus, also unitär.
Wir zeigen, dass $G(T^*) = (i(G(T))^\perp$ gilt. Es ist $(y,z) \in (i(G(T))^\perp$ äquivalent zu

$$\langle -Tx, y\rangle + \langle x, z\rangle = \langle (-Tx, x), (y,z)\rangle_{H\oplus H} = 0$$

für alle $x \in D_T$. Das bedeutet, dass $(y,z) \in (i(G(T))^\perp$ genau dann erfüllt ist, wenn $\langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle$ für alle $x \in D_T$ gilt. Dies ist aber nach Proposition 2.4 dazu äquivalent, dass $y \in D_{T^*}$ gilt mit $T^*y = z$. □

2.2 Eigenschaften von Kommutanten

Sei X ein Banachraum. Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}(X)$ die Algebra der stetig linearen Operatoren auf X. Für $T \in \mathcal{L}(X)$ sei $(T)' = \{S \in \mathcal{L}(X);\ ST = TS\}$ der Kommutant von T.

Lemma 2.7. Für $T \in \mathcal{L}(X)$ ist der Kommutant $(T)'$ von T abgeschlossen in der starken Operatortopologie.

Beweis. Sei $S \in \overline{(T)'}^{\mathrm{SOT}}$ und $(S_i)_{i\in I}$ ein Netz in $(T)'$ mit $\mathrm{SOT} - \lim_i S_i = S$. Für $x \in X$ gilt dann mit der Stetigkeit von T

$$STx = \lim_i S_iTx = \lim_i TS_ix = TSx.$$

Dies zeigt, dass $ST = TS$ für alle $S \in \overline{(T)'}^{\mathrm{SOT}}$ gilt und damit die Abgeschlossenheit von $(T)'$ in der starken Operatortopologie. □

Ist D_T ein Untervektorraum von X, so nennen wir eine lineare Abbildung $T : D_T \to X$ *skalare Abbildung*, falls ein $\lambda \in \mathbb{C}$ existiert, sodass $T = \lambda 1_{D_T}$ gilt. Dabei schreiben wir 1_{D_T} für die Abbildung $1_{D_T} : D_T \to X$, $x \mapsto x$.

Lemma 2.8. Sei D_T ein Untervektorraum von X und $T : D_T \to X$ eine lineare Abbildung. Es gibt genau dann ein Tupel (x, Tx) mit linear unabhängigen Komponenten x und Tx, wenn T keine skalare Abbildung ist.

Beweis. Ist $(x, Tx) \in G(T)$ mit linear unabhängigen Komponenten, so gilt $Tx \neq \lambda x$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und damit auch $T \neq \lambda 1_{D_T}$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.

Für die Rückrichtung zeigen wir die Kontraposition. Sei also $G(T)$ der Graph einer linearen Abbildung $T : D_T \to X$, sodass x und Tx für alle $x \in D_T$ linear abhängig sind. Für $x \in D_T$ existieren damit $\lambda_1^x, \lambda_2^x \in \mathbb{C}$ mit $\lambda_1^x \neq 0$ oder $\lambda_2^x \neq 0$, sodass $\lambda_1^x x + \lambda_2^x Tx = 0$ gilt.

Ist $\lambda_2^x = 0$, so ist $\lambda_1^x \neq 0$ und aus der Identität $0 + \lambda_1^x x = 0$ folgt $x = 0$. Das bedeutet aber für alle $x \in D_T \setminus \{0\}$, dass $\lambda_2^x \neq 0$ und $Tx = \lambda_1^x / \lambda_2^x x$ gilt. Setze $\lambda_x = \lambda_1^x / \lambda_2^x$ für alle $x \in D_T \setminus \{0\}$.

Für $\dim(D_T) \in \{0, 1\}$ ist offensichtlich $T = \lambda 1_{D_T}$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ erfüllt. Sei also $\dim(D_T) \geq 2$ und $(\mathrm{e}_j)_{j \in J}$ eine Basis von D_T. Für zwei verschiedene Basiselemente e_j und e_i gilt dann

$$\lambda_{\mathrm{e}_j} \mathrm{e}_j + \lambda_{\mathrm{e}_i} \mathrm{e}_i = T(\mathrm{e}_j + \mathrm{e}_i) = \lambda_{\mathrm{e}_j + \mathrm{e}_i} (\mathrm{e}_j + \mathrm{e}_i).$$

Dies ist äquivalent zu

$$(\lambda_{\mathrm{e}_j} - \lambda_{\mathrm{e}_j + \mathrm{e}_i}) \mathrm{e}_j + (\lambda_{\mathrm{e}_i} - \lambda_{\mathrm{e}_j + \mathrm{e}_i}) \mathrm{e}_i = 0.$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der beiden Basisvektoren folgt nun $\lambda_{\mathrm{e}_j} = \lambda_{\mathrm{e}_i}$. Für $\lambda = \lambda_{\mathrm{e}_j}$ für ein $j \in J$ folgt dann schon $\lambda = \lambda_{\mathrm{e}_i}$ für alle $i \in J$. Da eine lineare Abbildung eindeutig durch die Bilder ihrer Basislemente festgelegt ist, gilt $T = \lambda 1_{D_T}$. □

Proposition 2.9. Für einen Operator $T \in \mathcal{L}(X) \setminus \mathbb{C}1_X$ ist $(T)'$ eine echte Teilmenge von $\mathcal{L}(X)$.

Beweis. Da $T \in \mathcal{L}(X) \setminus \mathbb{C}1_X$ gilt existiert nach Lemma 2.8 ein $y \in X \setminus \{0\}$, sodass y und Ty linear unabhängig sind. Setze das stetig lineare Funktional

$$\tilde{f} : \mathrm{LH}\{y, Ty\} \to \mathbb{C},\ \alpha y + \beta Ty \mapsto \alpha.$$

mit Hahn Banach zu einem Funktional f auf X fort. Definiere nun

$$F : X \to X,\ x \mapsto f(x)y.$$

Dann ist offensichtlich $F \in \mathcal{L}(X)$ und es gelten $FT(y) = 0$ sowie $TF(y) = Ty \neq 0$, da y und Ty linear unabhängig sind. Also gilt $F \notin (T)'$. □

2.3 Fixpunktsätze

Wir werden in diesem Abschnitt den Fixpunktsatz von Schauder beweisen, der uns hilfreich bei der Entwicklungen von Teillösungen der Transitive Algebra Conjecture sein wird. Dabei gehen wir wie in [4] Kapitel 13 vor.

Satz 2.10 (Brouwer)**.** Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte, konvexe Menge. Jede stetige Funktion $f : K \to K$ hat einen Fixpunkt, das heißt es existiert ein $x \in K$ mit $f(x) = x$.

Einen Beweis hierzu findet man etwa in [3] Kapitel 3.
Um den Fixpunktsatz von Brouwer auf normierte Räume zu übertragen, brauchen wir folgendes kleines Lemma.

Lemma 2.11. Sei Y ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und für $r \geq 1$ seien $y_1, \dots, y_r \in Y$ paarweise verschieden. Dann ist die konvexe Hülle $C(\{y_1, \dots, y_r\})$ der Elemente $y_1, \dots, y_r$ homöomorph zu einer konvexen kompakten Menge im $\mathbb{R}^n$ für ein $n \geq 1$.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $C(\{y_1, \dots, y_r\})$ in Y kompakt ist. Sei dazu

$$B = \{(t_1, \dots, t_r);\ \sum_{i=1}^{r} t_i = 1\} \cap \prod_{i=1}^{r} [0, 1] \subset \mathbb{R}^r.$$

Mit der bezüglich der Relativtopologie von $\mathbb{R}^r$ stetigen Abbildung

$$f : B \to Y,\ (t_i)_{i=1}^r \mapsto \sum_{i=1}^{r} t_i y_i$$

gilt dann bekanntlich $f(B) = C(\{y_1, \dots, y_r\})$. Da $B \subset \mathbb{R}^r$ kompakt ist, ist auch $f(B) = C(\{y_1, \dots, y_r\}) \subset Y$ kompakt.
Sei $M = \mathrm{LH}\{y_1, \dots, y_r\}$ und $n = \dim_{\mathbb{R}}(M)$. Dann existiert ein Vektorraumisomorphismus $\Phi : M \to \mathbb{R}^n$. Dieser Vektorraumisomorphismus ist stetig mit stetiger Umkehrabbildung und induziert einen Homöomorphismus

$$\tilde{\Phi} : C(\{y_1, \dots, y_r\}) \to D,\ y \mapsto \Phi(y)$$

auf eine konvexe kompakte Menge D im $\mathbb{R}^n$. $\square$

Korollar 2.12 (Schauder)**.** Sei Y ein normierter Raum. Ist $B \subset Y$ konvex und $K \subset B$ kompakt, so hat jede stetige Funktion $f : B \to K$ einen Fixpunkt.

Beweis. Wir begründen zunächst, dass es reicht eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in B mit

$$\lim_{k\to\infty} \|f(x_k) - x_k\| = 0 \tag{2.1}$$

zu finden.

In diesem Fall ist $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in der kompakten Menge K. Damit existiert eine Teilfolge $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ so, dass die Folge $(f(x_{k_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $x \in K$ konvergiert. Für alle $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir die Abschätzung

$$\|x_{k_n} - x\| \leq \|x_{k_n} - f(x_{k_n})\| + \|f(x_{k_n}) - x\|.$$

Diese liefert mit Identität (2.1), dass $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ebenso Grenzwert x hat. Mit der Stetigkeit der Norm ergibt sich schließlich

$$\|f(x) - x\| = \lim_{n\to\infty} \|f(x_{k_n}) - x_{k_n}\| = 0.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Da K kompakt ist gibt es $k_1, \ldots, k_r \in K$ paarweise verschieden mit

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{r} \mathrm{B}_\varepsilon(k_i).$$

Wir definieren

$$\tilde{K} = \{\sum_{i=1}^{r} t_i k_i;\ t_1, \ldots, t_r \in [0,1] \text{ mit } \sum_{i=1}^{r} t_i = 1\} = \mathrm{C}(\{k_1, \ldots, k_r\}) \subset B. \tag{2.2}$$

Nach Lemma 2.11 ist $\tilde{K}$ homöomorph zu einer kompakten konvexen Menge im $\mathbb{R}^n$ für ein $n \geq 1$. Wir definieren für $i = 1, \ldots, r$ die Abbildung

$$f_i : K \to [0, \infty),\ x \mapsto \max(0, \varepsilon - \|x - k_i\|)$$

und weiter definieren wir die Abbildung

$$F : K \to \tilde{K},\ x \mapsto \sum_{i=1}^{r} \frac{f_i(x)}{\sum\limits_{j=1}^{r} f_j(x)} k_i.$$

Dann ist F wohldefiniert, denn für $x \in K$ existiert ein $i \in \{1, \dots, r\}$ mit $x \in \mathrm{B}_\varepsilon(k_i)$ und damit $f_i(x) > 0$. Außerdem gilt nach Identiät (2.2) auch $\mathrm{Bild}(F) \subset \tilde{K}$.
Als Maximum stetiger Funktionen sind alle f_i $(i = 1, \dots, r)$ und damit auch F stetig. Für alle $i = 1, \dots, r$ folgt aus $x \in K$ mit $\|k_i - x\| \geq \varepsilon$, dass $f_i(x) = 0$ gilt. So erhalten wir für alle $x \in K$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|F(x) - x\| &= \| \sum_{i=1}^{r} \frac{f_i(x)}{\sum\limits_{j=1}^{r} f_j(x)} k_i - x\| \\
&= \| \sum_{i=1}^{r} \frac{f_i(x)}{\sum\limits_{j=1}^{r} f_j(x)} (k_i - x)\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{r} \frac{f_i(x)}{\sum\limits_{j=1}^{r} f_j(x)} \|k_i - x\| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Nach Brouwers Fixpunktsatz (Satz 2.10) existiert für die Abbildung $T = F \circ f|_{\tilde{K}} : \tilde{K} \to \tilde{K}$ ein $x_\varepsilon \in \tilde{K} \subset B$ mit $x_\varepsilon = T(x_\varepsilon)$. Mit der Abschätzung von oben erhalten wir

$$\|f(x_\varepsilon) - x_\varepsilon\| = \|f(x_\varepsilon) - T(x_\varepsilon)\| = \|f(x_\varepsilon) - F(f(x_\varepsilon))\| < \varepsilon.$$

Dies liefert also eine Methode um eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus B mit $\lim\limits_{k\to\infty} \|f(x_k) - x_k\| = 0$ zu wählen. $\square$

2.4 Der Rieszsche Zerlegungssatz

In diesem Kapitel werden wir uns einen Beweis des Rieszschen Zerlegungssatz erarbeiten, dabei orientieren wir uns am Beweis aus [10].
Seien X wieder ein Banachraum und $\mathcal{L}(X)$ die stetig linearen Abbildungen auf X. Ist $A \in \mathcal{L}(X)$, so bezeichnen wir mit $\sigma(A)$ im Folgenden das Spektrum des Operators A

und mit $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ die Resolventenmenge von A. Mit $(A)''$ kennzeichnen wir den Bikommutanten von A, also die Menge

$$(A)'' = ((A'))' = \{T \in \mathcal{L}(X);\ BT = TB \text{ für alle } B \in (A)'\}.$$

Lemma 2.13. Ist $A \in \mathcal{L}(X)$ ein stetig linearer Operator und sind M_1, M_2 zwei komplementäre Unterräume mit $M_1, M_2 \notin \{\{0\}, X\}$, die invariant unter A sind, so erhält man für das Spektrum von A die Identiät

$$\sigma(A) = \sigma(A|_{M_1}) \cup \sigma(A|_{M_2}).$$

Beweis. Setze $A_1 = A|_{M_1}$ und $A_2 = A|_{M_2}$ Dann ist $A = A_1 \oplus A_2$, da M_1 und M_2 komplementäre Unterräume sind.
Es sei zuerst $\lambda \in \rho(A)$. Für $i = 1, 2$ ist offensichtlich $(\lambda 1_X - A)^{-1}|_{M_i}$ das Inverse zu A_i.
Sei umgekehrt $\lambda \in \rho(A_1) \cap \rho(A_2)$ und $x \in X$. Weiter seien $m \in M_1$ und $n \in M_2$ so, dass $x = m \oplus n$ gilt. Da M_1 und M_2 invariant unter A sind, gilt

$$\begin{aligned}
&((\lambda 1_{M_1} - A_1)^{-1} \oplus (\lambda 1_{M_2} - A_2)^{-1})(\lambda 1_X - A)x \\
=&((\lambda 1_{M_1} - A_1)^{-1} \oplus (\lambda 1_{M_2} - A_2)^{-1})((\lambda 1_{M_1} - A_1)m \oplus (\lambda 1_{M_2} - A_2)n) \\
=&(\lambda 1_{M_1} - A_1)^{-1}(\lambda 1_{M_1} - A_1)m \oplus (\lambda 1_{M_2} - A_2)^{-1}(\lambda 1_{M_2} - A_2)n \\
=&m \oplus n = x
\end{aligned}$$

Genauso erhält man, dass

$$(\lambda 1_X - A)((\lambda 1_{M_1} - A_1)^{-1} \oplus (\lambda 1_{M_2} - A_2)^{-1})x = x$$

gilt.
Damit ist $(\lambda 1_X - A)$ invertierbar in $\mathcal{L}(X)$ und es folgt $\lambda \in \rho(A)$. □

Notation. Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}^n$ sei im Folgenden $\mathcal{O}(U, \mathbb{C})$ den Vektorraum der holomorphen Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$ zusammen mit dem Halbnormsystem $(\|\cdot\|_{K_j})_{j\in\mathbb{N}}$, wobei $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine kompakte Ausschöpfung von U ist und wir

$$\|\cdot\|_{K_j} : \mathcal{O}(U, \mathbb{C}) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \sup_{z\in K_j} |f(z)|$$

setzen. Gilt $n = 1$ und $U \subset \mathbb{C}$, so schreiben wir für $\mathcal{O}(U, \mathbb{C})$ auch einfach $\mathcal{O}(U)$.

Satz 2.14 (Rieszscher Zerlegungssatz)**.** Existieren für ein $A \in \mathcal{L}(X)$ disjunkte abgeschlossene Mengen $\sigma_1 \neq \emptyset$ und $\sigma_2 \neq \emptyset$ in $\mathbb{C}$ mit $\sigma(A) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, so gibt es unter A invariante Untervektorräume $M_1, M_2 \notin \{\{0\}, X\}$ mit $X = M_1 \oplus M_2$, sodass $\sigma(A|_{M_1}) = \sigma_1$ und $\sigma(A|_{M_2}) = \sigma_2$ gilt.

Beweis. Das Spektrum $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$ ist kompakt. Damit sind σ_1 und σ_2 kompakt und es existieren offene disjunkte Mengen $U_1, U_2 \subset \mathbb{C}$ mit $\sigma_1 \subset U_1$ und $\sigma_2 \subset U_2$.
Definiere nun χ_1, χ_2 durch

$$\chi_1 : U_1 \cup U_2 \to \mathbb{C},\ \chi_1(z) = \begin{cases} 1, & \text{für } z \in U_1 \\ 0, & \text{für } z \in U_2 \end{cases},$$

$$\chi_2 : U_1 \cup U_2 \to \mathbb{C},\ \chi_2(z) = \begin{cases} 0, & \text{für } z \in U_1 \\ 1, & \text{für } z \in U_2 \end{cases}.$$

Da U_1 und U_2 disjunkt sind, gilt $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{O}(U_1 \cup U_2)$. Definiere nun $\chi_1(A) \in (A)''$ und $\chi_2(A) \in (A)''$ durch den holomorphen Funktionalkalkül.
Da der holomorphe Funktionalkalkül ein Algebrenhomomorphismus ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} \chi_1(A)^2 &= \chi_1(A), & \chi_2(A)^2 &= \chi_2(A), \\ \chi_1(A) + \chi_2(A) &= 1_X, & \chi_1(A)\chi_2(A) &= 0. \end{aligned}$$

Damit sind $\chi_1(A)$ und $\chi_2(A)$ komplementäre Projektionen, das heißt für $M_1 = \text{Bild}(\chi_1(A))$ und $M_2 = \text{Bild}(\chi_2(A))$ gilt $X = M_1 \bigoplus M_2$. Nach dem Spektralen Abbildungssatz gilt

$$\sigma(\chi_i(A)) = \chi_i(\sigma(A)) = \{0, 1\}$$

für $i = 1, 2$.
Damit ist $1_X - \chi_i(A)$ nicht invertierbar, also ist $\chi_i(A)$ auch nicht die Nullprojektion und damit M_i nicht der Nullraum für $i = 1, 2$. Außerdem ist M_i abgeschlossen als Bild einer Projektion und damit wieder ein Banachraum für $i = 1, 2$.
Wegen $\chi_i(A) \in (A)''$ kommutiert A mit der Projektion $\chi_i(A)$ für $i = 1, 2$. Das bedeutet aber, dass M_i ein invarianter Unterraum für A ist.

Setze nun $A_1 = A|_{M_1}$ und $A_2 = A|_{M_2}$. Wir müssen also noch zeigen, dass $\sigma(A_1) = \sigma_1$ und $\sigma(A_2) = \sigma_2$ gelten. Wir zeigen zu erst, dass $\sigma(A_1) \subset \sigma_1$ gilt.
Sei dazu $\mu \notin \sigma_1$ und setze $U = U_1 \cap \{\lambda\}^C$. Definiere nun die holomorphe Funktion f durch

$$f : U \cup U_2 \to \mathbb{C},\ f(z) = \begin{cases} \frac{1}{\mu - z}, & \text{für } z \in U \\ 0, & \text{für } z \in U_2 \end{cases}.$$

Definiere mit dem holomorphen Funktionalkalkül die Abbildung $f(A) \in \mathcal{L}(X)$ und die Projektion $\chi_1|_{U \cup U_2}(A) \in \mathcal{L}(X)$.
Wegen $(\mu - z) \cdot f(z) = \chi_1(z)$ für alle $z \in U \cup U_2$ und $\chi_1|_{U \cup U_2}(A) = \chi_1(A)$ folgt

$$f(A)(\mu 1_X - A) = (f \cdot (\mu - z))(A) = \chi_1(A) = P_{M_1},$$

beziehungsweise $(\mu 1_X - A)f(A) = \chi_1(A) = P_{M_1}$. Daraus ergibt sich aber sofort, dass $f(A)|_{M_1}$ das Inverses zu $\mu 1_{M_1} - A_1$ in $\mathcal{L}(M_1)$ ist. Damit ist also $\mu \notin \sigma(A_1)$ und es gilt $\sigma(A_1) \subset \sigma_1$. Man erhält mit der gleichen Argumentaition, dass $\sigma(A_2) \subset \sigma_2$ gilt. Die umgekehrten Inklusionen folgen wegen $\sigma_1 \cup \sigma_2 = \sigma(A) = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$ aus Lemma 2.13. $\square$

3 Die Ergebnisse von Arveson

In diesem Kapitel werden wir uns mit Charakterisierungen von Transitivtät beschäftigen und einen Zusammenhang zwischen der Transitive Algebra Conjecture und der Invariant Subspace Conjecture herstellen. Wir werden außerdem einige Ergebnisse aus [2] Kapitel 2 bereitstellen, die unsere wichtigsten Werkzeuge für die nächsten Kapitel sein werden. Sei im folgenden Kapitel immer X ein komplexer Banachraum mit Dimension $\dim(X) = \infty$ und $\mathcal{L}(X)$ die Algebra der stetig-linearen Operatoren auf X.

3.1 Transitivität und Charakterisierungen

Für einen Operator $T \in \mathcal{L}(X)$ und eine Unteralgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ definieren wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Lat}(T) &= \{M \subset X \text{ abgeschlossener Untervektorraum; } TM \subset M\} \\ \mathrm{Lat}(\mathcal{A}) &= \{M \subset X \text{ abgeschlossener Untervektorraum; } AM \subset M \text{ für alle } A \in \mathcal{A}\}. \end{aligned}$$

Als hyperinvariante Unterräume für einen Operator $T \in \mathcal{L}(X)$ bezeichnen wir Untervektorräume von X aus dem Mengensystem

$$\mathrm{Hyp}(T) = \{M \subset X \text{ abgeschlossener Untervektorraum; } AM \subset M \text{ für alle } A \in (T)'\}.$$

Definition 3.1. Sei $\mathcal{A}$ eine Unteralgebra von $\mathcal{L}(X)$ und sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ eine positive natürliche Zahl. Man nennt $\mathcal{A}$ *n-transitiv*, wenn für je n linear unabhängige Elemente $x_1, \ldots, x_n \in X$ und n beliebige Elemente $y_1, \ldots, y_n \in X$ eine Folge $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ existiert, sodass

$$\lim_{j\to\infty} A_j x_k = y_k$$

für $k = 1, \ldots, n$ gilt.
Eine 1-*transitive* Algebra nennt man auch einfach *transitiv*.

Bemerkung 3.2. (i) Eine Unteralgebra $\mathcal{A}$ von $\mathcal{L}(X)$ ist genau dann transitiv, wenn $\mathrm{Lat}(\mathcal{A}) = \{\{0\}, X\}$ gilt.

Beweis. Sei zuerst $\mathcal{A}$ transitiv und sei $\{0\} \neq M \subset X$ ein abgeschlossener $\mathcal{A}$-invarianter Untervektorraum. Für $y \in X$ und $0 \neq x \in M$ gibt es eine Folge $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ mit $A_j x \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} y$. Da M invariant unter $\mathcal{A}$ ist, ist $A_j x \in M$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Mit der Abgeschlossenheit von M folgt $y \in M$ und insgesamt $M = X$.

Sei nun $\mathcal{A}$ nicht transitiv. Dann gibt es ein Vektor $0 \neq x \in X$ und ein y aus X, sodass $y \notin \overline{\mathcal{A}x}$ gilt. Existiert ein $\tilde{A} \in \mathcal{A}$, sodass $x \notin \mathrm{Kern}(\tilde{A})$ ist, so ist $\overline{\mathcal{A}x}$ offensichtlich ein für $\mathcal{A}$ invarianter, abgeschlossener, nicht trivialer Unterraum von X. Ist dagegen $x \in \mathrm{Kern}(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$, so erfüllt $\mathrm{LH}\{x\}$ diese Eigenschaft. □

(ii) Eine Unteralgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ ist genau dann n-transitiv für jedes $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, wenn sie in $\mathcal{L}(X)$ dicht bezüglich der starken Operatortopologie ist.

Beweis. Sei zuerst $\mathcal{A}$ n-transitiv für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Seien $T \in \mathcal{L}(X)$ und U eine SOT- Umgebung von T. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit ohne Einschränkung linear unabhängigen Vektoren $x_1, \dots, x_m \in X$, sodass

$$T + U_{\|\cdot\|_{x_1},\dots,\|\cdot\|_{x_m},\varepsilon} = \{S \in \mathcal{L}(X);\ \max_{k=1,\dots,m} \|S - T\|_{x_k} \leq \varepsilon\} \subset U.$$

gilt.

Da $\mathcal{A}$ nach Vorraussetzung m-transitiv ist, gibt es ein $A \in \mathcal{A}$ mit

$$\|A(x_k) - T(x_k)\| \leq \varepsilon$$

für k=1,...,m. Damit ist $A \in U$.

Sei umgekehrt $\mathcal{A}$ SOT-dicht in $\mathcal{L}(X)$ und seien für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Vektoren $x_1, \dots, x_n \in X$ linear unabhängig, sowie $y_1, \dots, y_n \in X$. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es stetige Funktionale $f_j : X \to \mathbb{C}$ mit $f_j(x_i) = \delta_{i,j}$, für alle $i, j = 1, \dots, n$. Definiere

$$F : X \to X,\ x \mapsto \sum_{j=1}^{n} f_j(x) y_j.$$

Dann ist $F \in \mathcal{L}(X)$ und es gilt $F(x_i) = y_i$ für $i = 1, \dots, n$. Da $\mathcal{A}$ SOT-dicht ist gibt es für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $A_k \in \mathcal{A}$ mit $A_k \in F + U_{\|\cdot\|_{x_1}, \dots, \|\cdot\|_{x_n}, 1/2^k}$.

Für $j = 1, \dots, n$ folgt hieraus

$$\lim_{k \to \infty} A_k(x_j) = F(x_j) = y_j.$$

Also ist $\mathcal{A}$ n-transitiv für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. □

(iii) Ist $\mathcal{A}$ n-transitiv, so ist $\mathcal{A}$ auch k-transitiv für $k \in \{1, \dots, n\}$.

Beweis. Seien für $k \in \{1, \dots, n\}$ linear unabhängige Elemente $x_1, \dots x_k \in X$ und beliebige Elemente $y_1, \dots, y_k \in X$ gegeben. Da $\dim(X) = \infty$ gilt, gibt es Elemente $x_{k+1}, \dots, x_n \in X$, sodass $x_1, \dots x_k, x_{k+1}, \dots, x_n$ linear unabhängig sind. Wähle nun eine Folge $(A_j)_{j \in N}$ aus $\mathcal{A}$, sodass $A_j \overset{j \to \infty}{\longrightarrow} x_i = y_i$ für $i = 1, \dots, k$ und $A_j \overset{j \to \infty}{\longrightarrow} x_i = 0$ für $i = k+1, \dots, n$ gelten. Hieraus folgt, dass $\mathcal{A}$ k-transitiv ist. □

(iv) Ist $\mathcal{A}$ eine Unteralgebra von $\mathcal{L}(X)$, sodass $\overline{\mathcal{A}} \subset \mathcal{L}(X)$ n-transitiv ist für ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so ist auch $\mathcal{A}$ n-transitiv.

Beweis. Sei dazu $\overline{\mathcal{A}} \subset \mathcal{L}(X)$ eine n-transtive Unteralgebra für ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Seien weiterhin $x_1, \dots, x_n$ linear unabhängige Elemente aus X und seien $y_1, \dots, y_n \in X$. Da $\overline{\mathcal{A}}$ n-transitiv ist existiert eine Folge $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\overline{\mathcal{A}}$ mit

$$\lim_{k \to \infty} B_k x_i = y_i$$

für $i = 1, \dots, n$.

Zu $k \in \mathbb{N}$ existiert ein Operator $A_k \in \mathcal{A}$ mit $\|A_k - B_k\| < 1/2^k$. Für $i = 1, \dots, n$ erhält man

$$\begin{aligned} &\|A_k x_i - y_i\| \\ \leq &\|A_k x_i - B_k x_i\| + \|B_k x_i - y_i\| \\ \leq &\frac{\|x_i\|}{2^k} + \|B_k x_i - y_i\|. \end{aligned}$$

Für $i = 1, \dots, n$ erhalten wir damit $A_k x_i \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} y_i$. Also ist $\mathcal{A}$ auch n-transitiv. □

Satz 3.3. Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum mit $\dim(H) = \infty$. Ist $\mathcal{A}$ eine transitive Unteralgebra von $\mathcal{L}(H)$, so ist auch die Algebra $\mathcal{A}^* = \{A^*;\ A \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{L}(H)$ transitiv.

Beweis. Sei $M \in \mathrm{Lat}(\mathcal{A}^*)$. Damit ist $A^*y \in M$ für alle $A \in \mathcal{A}$ und $y \in M$. Ist $x \in M^\perp$ und $A \in \mathcal{A}$, so erhält man

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle = 0$$

für alle $y \in M$.
Daraus folgt $\mathcal{A}M^\perp \subset M^\perp$, also $M^\perp \in \mathrm{Lat}(\mathcal{A})$. Nach Voraussetzung ist $\mathcal{A}$ transitiv und deswegen gilt $\mathrm{Lat}(\mathcal{A}) = \{\{0\}, X\}$. So erhalten wir $M = M^{\perp\perp} \in \{\{0\}^\perp, X^\perp\} = \{\{0\}, X\}$. Damit ist $\mathcal{A}^*$ transitiv. □

Definition. Die Frage, ob jede transitive Unteralgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ schon n-transitiv für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist, nennen wir auch „*Transitive Algebra Conjecture*“.

Mit dem folgenden Satz schlagen wir die versprochene Brücke zu der Invariant Subspace Conjecture.

Satz 3.4. Folgt aus der Transitivität einer Unteralgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ schon, dass sie n-transitiv ist für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so erhalten wir für jeden Operator $T \in \mathcal{L}(X) \setminus \mathbb{C}1_X$, dass $\mathrm{Hyp}(T) \neq \{\{0\}, X\}$ gilt.

Beweis. Wir zeigen die Kontraposition. Sei also $T \in \mathcal{L}(X) \setminus \mathbb{C}1_X$, sodass der Kommutant $(T)'$ von T nur die invarianten abgeschlossenen Untervektorräume X und $\{0\}$ hat. Aus Bemerkung 3.2 (i) folgt dann sofort, dass $(T)'$ transitiv ist.
Es ist aber $(T)'$ nicht n-transitiv für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, denn sonst würde nach Bemerkung 3.2 Teil (ii) und Lemma 2.7 die Identität

$$(T)' = \overline{(T)'}^{\mathrm{SOT}} = \mathcal{L}(X).$$

gelten.
Nach Proposition 2.9 steht dies im Widerspruch zu $T \in \mathcal{L}(X) \setminus \mathbb{C}1_X$. □

3.2 Werkzeuge der Transitive Algebra Conjecture

Für $T \in \mathcal{L}(X)$ definieren wir $T^{(n)} \in \mathcal{L}(X^n)$ durch

$$T^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (Tx_1, \dots, Tx_n).$$

Für $x \in X$ mit $\|x\| = 1$ gilt $\|Tx\| = \|T^{(n)}(x, 0, \ldots, 0)\| \leq \|T^{(n)}\|$. Nach Definition der Operatornorm folgt daraus $\|T\| \leq \|T^{(n)}\|$. Ist umgekehrt $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ mit $\|(x_1, \ldots, x_n)\| = 1$, so folgt

$$\begin{aligned}\|T^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)\| &= \sum_{i=1}^{n} \|Tx_i\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \|T\|\|x_i\| \\ &= \|T\|.\end{aligned}$$

Und wieder aus der Definition der Operatornorm folgt $\|T^{(n)}\| \leq \|T\|$. Dies zeigt, dass die Abbildung $\mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X^n)$, $T \mapsto T^{(n)}$ ein isometrischer Monomorphismus ist. Für $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}(X)$ bezeichne $\mathcal{S}^{(n)}$ die Menge $\{S^{(n)};\ S \in \mathcal{S}\}$.

Definition 3.5. Für $n \geq 2$ nennen wir einen abgeschlossenen Untervektorraum $M \subset X^n$ dünn, wenn für jedes $(x_1, \ldots, x_n) \in M$ die Komponenten $x_1, \ldots, x_n$ linear abhängig sind.

Lemma 3.6. Sei $N \geq 2$ und sei $\mathcal{A}$ eine $(N-1)$-transitive Unteralgebra von $\mathcal{L}(X)$. Sei M ein dünner Untervektorraum von X^N, der invariant unter $\mathcal{A}^{(N)}$ ist. Dann gibts es $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}^N$ mit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \neq (0, \ldots, 0)$, sodass

$$M = \{(x_1, \ldots, x_N) \in X^N;\ \sum_{i=1}^{N} \lambda_{k,i} x_i = 0 \text{ für alle } k = 1, \ldots, r\}$$

gilt.

Beweis. Wir beweisen die Aussage mit vollständiger Induktion über N.

Sei $N = 2$. Falls $M \subset X \bigoplus \{0\}$ gilt, so sei $M_0 = \{x \in X;\ (x, 0) \in M\}$. Da M abgeschlossen und unter $\mathcal{A}^{(2)}$ invariant ist, sowie die Einbettung $X \to X^2$, $y \mapsto (y, 0)$ stetig ist, folgt, dass M_0 ein abgeschlossener $\mathcal{A}$-invarinater Unterraum von X ist.
Nach Voraussetzung ist $\mathcal{A}$ transitiv und damit ist $M_0 = \{0\}$ oder $M_0 = X$ nach Bemerkung 3.2 (i). Daher gilt $M = \{0\} \bigoplus \{0\}$ oder $M = X \bigoplus \{0\}$.
Etwa für $\lambda_1 = (1, 0) \in \mathbb{C}^2$ und $\lambda_2 = (0, 1 \in \mathbb{C}^2$ im ersten Fall beziehungsweise $\lambda = (0, 1) \in \mathbb{C}^2$ im zweiten Fall erhält man die Behauptung.
Die gleichen Argumente liefern die gewünschte Gestalt im Fall $M \subset \{0\} \bigoplus X$.

Nun können wir annehmen, dass $(x_1, x_2) \in M$ existieren mit $x_1, x_2 \neq 0$. Nach Voraussetzung ist M dünn, somit gibt es ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ mit $x_2 = \lambda x_1$. Es gilt also $(x_1, \lambda x_1) \in M$. Da M unter $\mathcal{A}^{(2)}$ invariant ist folgt für jedes $A \in \mathcal{A}$, dass

$$(Ax_1, \lambda A x_1) = A^{(2)}(x_1, \lambda x_1) \in M$$

gilt.

Da $\mathcal{A}$ transitiv ist erhalten wir $\overline{\mathcal{A}x_1} = X$ und mit der Abgeschlossenheit von M können wir daraus $\{(x, \lambda x);\ x \in X\} \subset M$ schließen.

Wir zeigen nun, dass bei der Inklusion im letzten Absatz sogar Gleichheit gilt. Angenommen es gäbe $(y_1, y_2) \in M$, mit $y_2 \neq \lambda y_1$. Da $\mathcal{A}$ transitiv ist gibt es auch eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ mit $A_n x_1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y_1$. Aus der Abgeschlossenheit von M und der Invarianz unter $\mathcal{A}^{(2)}$ würde also

$$\lim_{n\to\infty} A_n^{(2)}(x_1, \lambda x_1) = (y_1, \lambda y_1) \in M$$

folgen. Da M abgeschlossen unter Vektoraddition ist, würden wir $(0, y_2 - \lambda y_1) \in M$ erhalten, wobei $y_2 - \lambda y_1 \neq 0$ gilt. So wie im ersten Teil könnte man wegen der Transitivität von $\mathcal{A}$ nun $\{0\} \bigoplus X \subset M$ schließen. Wegen $\{(x, \lambda x);\ x \in X\} \subset M$ würde daraus

$$(y_2 - \lambda y_1, 0) = (y_2, \lambda y_2) - (\lambda y_1, \lambda^2 y_1) - (0, \lambda y_2 - \lambda^2 y_1) \in M$$

folgen und damit wieder $X \bigoplus \{0\} \subset M$. Aus den beiden letzten Inklusionen ergäbe sich $X^2 \subset M$. Da M dünn ist, erhielten wir $\dim(X) = 1$, ein Widerspruch. Damit war unserer Annahme falsch und wir erhalten

$$M = \{(x_1, x_2) \in X^2;\ \lambda x_1 - x_2 = 0\},$$

also die Behauptung für $N = 2$.

Sei nun $N > 2$ und die Aussage für $N - 1$ wahr. Ist $M = \{0\}$, so ist die Behauptung erfüllt für $\lambda_i = \mathrm{e}_i \in \mathbb{C}^N$, $i = 1, \dots, N$ (dabei seien e_i die N Einheitsvektoren in $\mathbb{C}^N$).

Es enthalte also M einen Punkt $(x_1, \dots, x_N) \neq 0$. Da M dünn ist sind $x_1, \dots, x_N$ linear abhängig. Seien ohne Einschränkung die ersten r Komponenten $x_1, \dots, x_r$ des Vektors $(x_1, \dots, x_N) \in M$ linear unabhängig für eine natürliche Zahl $1 \leq r < N$, sodass $\mathrm{LH}\{x_1, \dots, x_r\} = \mathrm{LH}\{x_1, \dots, x_N\}$ gilt. Für alle $j = r+1, \dots, N$ seien $c_j = (c_{k,j})_{k=1}^r \in \mathbb{C}^r$, sodass

$$x_j = \sum_{k=1}^{r} c_{k,j} x_k$$

gilt.
Außerdem setze $d_{r+1} = c_{1,r+1}$, $d_{r+2} = c_{1,r+2}$,..., $d_N = c_{1,N}$. Wir zeigen nun, dass

$$\{(x, 0, \dots, 0, d_{r+1}x, \dots, d_N x) \in X^N;\ x \in X\} \subset M. \tag{3.1}$$

gilt.
Seien dazu $y_1, \dots, y_r \in X$. Nach Voraussetzung und Bemerkung 3.2 (iii) ist $\mathcal{A}$ r-transitiv. Da $x_1, \dots, x_r$ linear unabhängig in X sind, gibt es eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ mit $A_n x_j \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} y_j$ für $j = 1, \dots, r$. Aufsderdem folgt für $r + 1 \leq j \leq N$, dass

$$\lim_{n\to\infty} A_n x_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{r} c_{k,j} A_n x_k = \sum_{k=1}^{r} c_{k,j} y_k.$$

gilt.
Da M abgeschlossen und invariant unter $\mathcal{A}^{(N)}$ ist, folgt damit

$$(y_1, y_2, \dots, y_r, \sum_{k=1}^{r} c_{k,r+1} y_k, \dots, \sum_{k=1}^{r} c_{k,N} y_k) \in M.$$

Wählt man $y_2 = \dots = y_r = 0$, so erhält man die Behauptung.
Nun setze $M_0 = \{(x_2, \dots, x_N) \in X^{N-1};\ (0, x_2, \dots, x_N) \in M\}$. Dann ist M_0 offensichtlich $\mathcal{A}^{(N-1)}$ invariant und als Urbild von M unter der stetigen Abbildung

$$X^{N-1} \to X^N,\ (x_2, \dots, x_N) \mapsto (0, x_2, \dots, x_N)$$

auch abgeschlossen.
Wir nehmen an, dass es ein Element in M_0 gibt, sodass die Komponenten $x_2, \dots, x_N$ linear unabhängig sind. Daraus würde sich sofort $M_0 = X^{N-1}$ ergeben, denn $\mathcal{A}$ ist $N-1$-transitiv. So erhielte man $\{0\} \bigoplus X \bigoplus \dots \bigoplus X \subset M$.
Wegen Inklusion (3.1) wäre dann $(x, 0, \dots, 0) \in M$ für ein $x \in X \setminus \{0\}$. Aus der Transitivität von $\mathcal{A}$ und $x \neq 0$ würde folgen, dass $X \bigoplus \{0\} \bigoplus \dots \bigoplus \{0\} \subset M$ gilt. Beides zusammen ergäbe $X^N \subset M$.

Da X aber unendlichdimensional ist, gibt es N linear unabhängige Elmente in M und damit ist $X^N \subset M$ ein Widerspruch zur Dünnheit von M. Dies zeigt, dass M_0 ein dünner Untervektorraum von X^{N-1} ist.

Wendet man nun die Induktionsvoraussetzung auf M_0 an, so erhält man für $k = 1, \dots, s$ Tupel

$$\lambda_k = (\lambda_{k,2}, \lambda_{k,3}, \dots, \lambda_{k,N}) \in \mathbb{C}^{N-1}$$

mit $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \neq (0, \dots, 0)$, sodass

$$M_0 = \{(x_2, \dots, x_N) \in X^{N-1};\ \sum_{i=2}^{N} \lambda_{k,i} x_i = 0 \text{ für alle } k = 1, \dots, s\}.$$

gilt.

Nun zeigen wir nur noch, dass

$$M = \{(x_1, \dots, x_N) \in X^N;\ \sum_{i=2}^{N} \lambda_{k,i} x_i - \sum_{i=r+1}^{N} \lambda_{k,i} d_i x_1 = 0 \text{ für alle } 1 \leq k \leq s\}.$$

gilt.

Ergänzen wir λ_k um die Komponente $-\sum_{i=r+1}^{N} \lambda_{k,i} d_i \in \mathbb{C}$ für $k = 1, \dots, s$, so beendet dies den Beweis.

Sei zunächst $(x_1, \dots, x_N) \in M$. Aus Inklusion (3.1) folgt dann

$$(x_1, 0, \dots, 0, d_{r+1} x_1, \dots, d_N x_1) \in M.$$

Durch Subtraktion der beiden Vektoren erhält man, dass

$$(0, x_2, \dots, x_r, x_{r+1} - d_{r+1} x_1, \dots, x_N - d_N x_1) \in M$$

gilt.

Damit ist $(x_2, \dots, x_r, x_{r+1} - d_{r+1} x_1, \dots, x_N - d_N x_1) \in M_0$ und man erhält für $k = 1, \dots, s$ wie gewünscht

$$\sum_{i=2}^{N} \lambda_{k,i} x_i - \sum_{i=r+1}^{N} \lambda_{k,i} d_i x_1 = \sum_{i=2}^{r} \lambda_{k,i} x_i + \sum_{i=r+1}^{N} \lambda_{k,i} (x_i - d_i x_1) = 0. \tag{3.2}$$

Sei nun umgekehrt $(x_1, \dots, x_N) \in X^N$, sodass Identität (3.2) erfüllt ist. Es folgt direkt, dass

$$(x_2, \dots, x_r, x_{r+1} - d_{r+1}x_1, \dots, x_N - d_N x_1) \in M_0$$

und damit

$$(0, x_2, \dots, x_r, x_{r+1} - d_{r+1}x_1, \dots, x_N - d_N x_1) \in M.$$

gilt.
Wieder mit Inklusion (3.1) ist auch $(x_1, 0, \dots, 0, d_{r+1}x_1, \dots, d_N x_1) \in M$. Durch Addition der beiden letzten Vektoren folgt damit $(x_1, \dots, x_N) \in M$. □

Definition 3.7. Sei $D_T \subset X$ ein Untervektorraum, $\mathcal{A}$ eine Unteralgebra von $\mathcal{L}(X)$ und $T : D_T \to X$ eine lineare Abbildung. Wir sagen, dass T mit $\mathcal{A}$ *kommutiert*, wenn für jedes $A \in \mathcal{A}$ schon $AD_T \subset D_T$ und $AT = TA$ auf D_T gelten (wir schreiben dafür auch $AT \subset TA$).

Bemerkung 3.8. Ist $\mathcal{A}$ eine Unteralgebra von $\mathcal{L}(X)$ und $T : D_T \to X$ eine lineare Abbildung definiert auf einem Untervektorraum $D_T \subset X$, so kommutiert T genau dann mit $\mathcal{A}$, wenn $G(T) \subset X^2$ ein unter $\mathcal{A}^{(2)}$ invarianter Untervektorraum ist.

Beweis. Es gelte zu erst $AT \subset TA$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Für alle $x \in D_T$ und alle $A \in \mathcal{A}$ ist nach Voraussetzung $Ax \in D_T$ und damit gilt

$$A^{(2)}(x, Tx) = (Ax, ATx) = (Ax, TAx) \in G(T).$$

Also ist $G(T)$ ein $\mathcal{A}^{(2)}$-invarianter Untervektorraum von X^2.
Ist umgekehrt $G(T) \subset X^2$ ein invarianter Untervektorraum von $\mathcal{A}^{(2)}$, so erhalten wir für alle $x \in D_T$ und alle $A \in \mathcal{A}$

$$A^{(2)}(x, Tx) = (Ax, ATx) \in G(T).$$

Damit ist $Ax \in D_T$ für alle $A \in \mathcal{A}$ und aus $(Ax, ATx) \in G(T)$ folgt, dass $TAx = ATx$ für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt. Damit ist $AT \subset TA$ für alle $A \in \mathcal{A}$. □

Proposition 3.9. Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum mit $\dim(H) = \infty$ und $T : H \supset D_T \to H$ ein dicht definierter linearer Operator. Ist $\mathcal{A}$ eine Unteralgebra von $\mathcal{L}(H)$ und kommutiert T mit $\mathcal{A}$, dann kommutiert $T^* : D_{T^*} \to H$ mit $\mathcal{A}^* = \{A^*;\ A \in \mathcal{A}\}$.

Beweis. Sei $A \in \mathcal{A}$ und $y \in D_{T^*}$. Für alle $x \in D_T$ gilt $Ax \in D_T$ und wir erhalten damit, dass

$$\langle Tx, A^*y\rangle = \langle ATx, y\rangle = \langle TAx, y\rangle = \langle Ax, T^*y\rangle = \langle x, A^*T^*y\rangle$$

für alle $x \in D_T$ gilt.
Daraus folgt $A^*y \in D_{T^*}$ und $T^*A^*y = A^*T^*y$, also die Kommutativität von T^* mit $\mathcal{A}^*$. □

Satz 3.10. Für $N \geq 1$ sei $\mathcal{A}$ eine N-transitive Unteralgebra von $\mathcal{L}(X)$. Ist M ein abgeschlossener Untervektorraum von X^{N+1}, der unter $\mathcal{A}^{(N+1)}$ invariant ist, dann hat M eine der folgenden Gestalten:

(i) $M = X^{N+1}$.

(ii) Es gibt $\lambda_1, \dots \lambda_r \in \mathbb{C}^{N+1}$ mit $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \neq (0, \dots, 0)$, sodass

$$M = \{(x_1, \dots, x_{N+1}) \in X^{N+1};\ \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_{k,i} x_i = 0,\ \text{für } k = 1, \dots, N+1\}$$

gilt.

(iii) Es existiert ein dichter Untervektorraum $D \subset X$ und lineare Abbildungen $T_2, \dots, T_{N+1} : D \to X$, die mit $\mathcal{A}$ kommutieren, sodass

$$M = \{(x, T_2x, \dots, T_{N+1}x) \in X^{N+1};\ x \in D\}$$

gilt.

Beweis. Ist M dünn, so hat M nach Lemma 3.6 die Gestalt (ii).
Es enthalte im Folgenden also M einen Punkt $(u_1, \dots, u_{N+1})$ dessen Koordinaten $u_1, \dots, u_{N+1}$ linear unabhängig sind. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1. Es gibt Vektoren $y_2, \dots, y_{N+1} \in X$ mit $(y_2, \dots, y_{N+1}) \neq (0, \dots, 0)$, sodass

$$(0, y_2, \dots, y_{N+1}) \in M$$

gilt.

Wähle eine maximal linear unabhängige Teilmenge von $\{y_2, \dots, y_{N+1}\}$. Es bezeichne ohne Einschränkung $\{y_2, \dots, y_r\}$ diese Menge für $2 \leq r \leq N+1$.

Für $r+1 \leq j \leq N+1$ gibt es nun Skalare $\mu_{j,k} \in \mathbb{C}$ $(2 \leq k \leq r)$, sodass $y_j = \sum_{k=2}^{r} \mu_{j,k} y_k$ gilt. Da $\mathcal{A}$ N-transitiv ist, $r-1 \leq N$ gilt und $y_2, \dots, y_r$ linear unabhängig in X sind, gibt es eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ mit $A_n y_j \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u_j$ für alle $j = 2 \dots r$. Für $r+1 \leq j \leq N+1$ folgt daraus

$$\lim_{n\to\infty} A_n y_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{r} \mu_{j,k} A_n y_k = \sum_{k=2}^{r} \mu_{j,k} u_k.$$

Damit erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} A_n^{(N+1)}(0, y_2, \dots, y_{N+1}) = (0, u_2, \dots, u_r, \sum_{k=2}^{r} \mu_{r+1,k} u_k, \dots, \sum_{k=2}^{r} \mu_{N+1,k} u_k). \tag{3.3}$$

Da M abgeschlossen und unter $\mathcal{A}^{(N+1)}$ invariant ist, ist der Vektor aus (3.3) ein Element von M. Man kann ihn nun von $(u_1, u_2, \dots, u_{N+1})$ subtrahieren und erhält

$$(u_1, 0, \dots, 0, u_{r+1} - \sum_{k=2}^{r} \mu_{r+1,k} u_k, \dots, u_{N+1} - \sum_{k=2}^{r} \mu_{N+1,k} u_k) \in M. \tag{3.4}$$

Die nicht-Null-Einträge des Vektors aus (3.4) sind linear unabhängig. Denn seien $c_1, c_{r+1}, \dots, c_{N+1} \in \mathbb{C}$ Skalare mit

$$c_1 u_1 + c_{r+1}(u_{r+1} - \sum_{k=2}^{r} \mu_{r+1,k} u_k) + \dots + c_{N+1}(u_{N+1} - \sum_{k=2}^{r} \mu_{N+1,k} u_k) = 0.$$

Dies ist äquivalent zu

$$c_1 u_1 + c_{r+1} u_{r+1} + \dots + c_{N+1} u_{N+1} - (\sum_{j=r+1}^{N+1} c_j \mu_{j,2}) u_2 - \dots - (\sum_{j=r+1}^{N+1} c_j \mu_{j,r}) u_r = 0.$$

Aus der linearen Unabhängigkeit von $u_1, \dots, u_{N+1}$ folgt nun, dass $c_1 = c_{r+1} = \dots = c_{N+1} = 0$ sind.

Nach Voraussetzung ist M abgeschlossen und invariant unter $\mathcal{A}^{(N+1)}$. Aus der linearen Unabhängigkeit der $N-r+2$ nicht-Null-Einträge in (3.4) und der $(N-r+2)$-Transitivität von $\mathcal{A}$ ($r \geq 2$) folgt, dass die abgeschlossene Bahn des Vektors aus (3.4) unter $\mathcal{A}^{(N+1)}$ in M enthalten ist, sprich

$$\{(x_1, 0, \ldots, 0, x_{r+1}, \ldots, x_{N+1});\ x_i \in X\} \subset M. \tag{3.5}$$

Damit ist insbesondere $(u_1, 0, \ldots, 0, u_{r+1}, \ldots, u_{N+1}) \in M$. Da M abgeschlossen unter Vektoraddition ist folgt

$$\begin{aligned} &(u_1, u_2, \ldots, u_{N+1}) - (u_1, 0, \ldots, 0, u_{r+1}, \ldots, u_{N+1}) \\ =&(0, u_2, \ldots, u_r, 0, \ldots, 0) \in M. \end{aligned}$$

Mit den gleichen Argumenten wie zuvor, folgt aus der $(r-1)$-Transitivität von $\mathcal{A}$ ($r \leq N+1$) die Inklusion

$$\{(0, x_2, \ldots, x_r, 0 \ldots, 0);\ x_i \in X\} \subset M. \tag{3.6}$$

Da M abgeschlossen unter Vektoraddition ist, ergibt sich aus (3.5) und (3.6) die Inklusion $X^{N+1} \subset M$. Dies liefert gerade die Gestalt aus (i).

Fall 2. Es gelte nun für $y_2, \ldots, y_{N+1} \in X$, dass aus $(y_2, \ldots, y_{N+1}) \neq (0, \ldots, 0)$ schon $(0, y_2, \ldots, y_{N+1}) \notin M$ folgt. Beziehungsweise es gelte die hierzu äquivalente Kontraposition, sind $(0, y_2, \ldots, y_{N+1}) \in M$ für $y_2, \ldots, y_{N+1} \in X$, so gilt schon $y_2 = \cdots = y_{N+1} = 0$. Wir definieren nun

$$\pi : X^{N+1} \to X,\ (x_1, \ldots, x_{N+1}) \mapsto x_1$$

und für $k = 2, \ldots, N+1$ definiere

$$\pi_k : X^{N+1} \to X^2,\ (x_1, \ldots, x_{N+1}) \mapsto (x_1, x_k).$$

Wir erhalten $\pi\mathcal{A}^{(N+1)} = \mathcal{A}\pi$ und $\pi_k\mathcal{A}^{(N+1)} = \mathcal{A}^{(2)}\pi_k$ für $k = 2, \ldots, N+1$.

Für den lineare Unterraum $D := \pi(M)$ gilt wegen der Invarianz von M unter $\mathcal{A}^{(N+1)}$ damit $\mathcal{A}D \subset D$ und auch $\mathcal{A}\overline{D} \subset \overline{D}$, da alle Elemente aus $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ stetig sind. Aus Bemerkung 3.2 (i) folgt daher, dass entweder $D = \{0\}$, oder $D \subset X$ dicht ist.

Ist $D = \{0\}$, so gilt $x_1 = 0$ für alle $(x_1, x_2, \ldots, x_{N+1}) \in M$. Damit sind aber die Komponenten der Elemente von M immer linear abhängig und M ist dünn. Dieser Fall führt zu Gestalt (ii), wie wir bereits gesehen haben.

Wir können nun also annehmen, dass D dicht in X ist. Für $k = 2, \ldots, N+1$ folgt aus $\pi_k A^{(n+1)} = A^{(2)} \pi_k$ für alle $A \in \mathcal{A}$ und der Invarianz von M unter $\mathcal{A}^{(N+1)}$, dass $\pi_k(M)$ ein für $\mathcal{A}^{(2)}$ invarianter Untervektorraum von X^2 ist. Ist $(0, x_k) \in \pi_k(M)$ mit $x_k \in X$, so existieren $x_j \in X$ für $j \neq k$, sodass

$$(0, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_{N+1}) \in M$$

gilt.

Nach Voraussetzung ist damit $x_2, \ldots, x_{N+1} = 0$, also insbesondere auch $x_k = 0$. Zusammenfassend gilt also $(0, x) \in \pi_k(M)$ impliziert $x = 0$ für $k = 2, \ldots, N+1$.

Aus dem Beweis zu Proposition 2.2 folgt für $k = 2, \ldots, N+1$, dass $\pi_k(M)$ der Graph einer linearen Abbildung ist. Diese linearen Abbildungen sind auf $D = \pi(M)$ definiert. Seien nun $T_k : D \to X$ die Abbildungen, sodass $G(T_k) = \pi_k(M)$ für $k = 2, \ldots, N+1$ gilt.Nach Bemerkung 3.8 kommutieren für $k = 2, \ldots, N+1$ die Abbildungen T_k mit $\mathcal{A}$, da ihre Graphen $G(T_k) = \pi_k(M)$ für $k = 2, \ldots, N+1$ unter $\mathcal{A}^{(2)}$ invariante Untervektorräume von X^2 sind.

Ist $(x_1, \ldots, x_{N+1}) \in M$, so ist damit $x_k = T_k(x_1)$ $(k = 2, \ldots, N+1)$. Damit gilt für den dichten Untervektorraum D von X und die auf D definierten, mit $\mathcal{A}$ kommutierenden linearen Abbildung T_k, $k = 2, \ldots, N+1$ die Identiät

$$M = \{(x, T_2 x, \ldots, T_{N+1} x) \in X^{N+1};\ x \in D\}.$$

Also entspricht in diesem Fall M der Gestalt in (iii). □

Korollar 3.11. Sei $\mathcal{A}$ eine transitive Unteralgebra von $\mathcal{L}(X)$. Die Algebra $\mathcal{A}$ ist genau dann nicht 2-transitiv, wenn eine abgeschlossene dicht definierte nicht skalare lineare Abbildung $T : X \supset D_T \to X$ existiert, die mit $\mathcal{A}$ kommutiert.

Beweis. Es existiere zu erst eine abgeschlossene nicht skalare dicht definierete lineare Abbildung $T : X \supset D_T \to X$, die mit $\mathcal{A}$ kommutiert.

Angenommen $\mathcal{A}$ ist 2-transitiv. Da T nicht skalar ist, existiert nach Lemma 2.8 ein $y \in D_T$, sodass y und $T(y)$ linear unabhängig sind. Aus der 2-Transitivität von $\mathcal{A}$ folgt, dass die Menge $\{(Ay, ATy) \in X^2;\ A \in \mathcal{A}\}$ in X^2 dicht liegt. Da $\mathcal{A}$ mit T kommutiert erhalten wir für alle $A \in \mathcal{A}$

$$(Ay, ATy) = (Ay, TAy) \in G(T)$$

also $\{(Ay, ATy) \in X^2;\ A \in \mathcal{A}\} \subset G(T)$. Mit der Abgeschlossenheit von $G(T)$ folgt daraus $X^2 = G(T)$. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass $G(T)$ der Graph einer linearen Abbildung ist und damit können Punkte der Form $(0, x)$ mit $x \neq 0$ kein Element von $G(T)$ sein. Also war unsere Annahme falsch und $\mathcal{A}$ ist nicht 2-transitiv.

Sei umgekehrt $\mathcal{A}$ nicht 2-transitiv. Es existieren also linear unabhängige Elemente $x_0, y_0 \in X$, sodass die Menge $M_0 = \{(Ax_0, Ay_0);\ A \in \mathcal{A}\}$ nicht dicht in X^2 ist. Sei M der Abschluss von M_0 in X^2. Offensichtlich ist M ein unter $\mathcal{A}^{(2)}$ invarianter Untervektorraum von X.

Wäre M dünn, so würde wegen der Transitivität von $\mathcal{A}$ aus Lemma 3.6 folgen, dass Skalare $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ existieren mit $(\lambda_1, \lambda_2) \neq 0$, sodass für alle $A \in \mathcal{A}$ die Identität

$$\lambda_1 Ax_0 + \lambda_2 Ay_0 = A(\lambda_1 x_0 + \lambda_2 y_0) = 0$$

gilt.

Daraus würde insbesondere folgen, dass $\overline{\mathcal{A}(\lambda_1 x_0 + \lambda_2 y_0)} = \{0\}$ ist. Nun ist aber $\mathcal{A}$ transitiv nach Voraussetzung ud so müsste $\lambda_1 x_0 + \lambda_2 y_0 = 0$ sein, ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von x_0 und y_0.

Es ist also weder M dünn, noch gilt $M = X^2$. Da M nun aber invariant unter $\mathcal{A}^{(2)}$ und $\mathcal{A}$ transitiv ist, folgt aus Satz 3.10, dass M die Gestalt aus (iii) bestitzt. Damit existiert eine dicht definierte lineare Abbildung $T : D \to X$, die mit $\mathcal{A}$ kommutiert, sodass $M = G(T)$ gilt. Außerdem ist T abgeschlossen, da M abgeschlossen ist und T ist keine skalare Abbildung, denn sonst wäre M dünn. □

Definition 3.12. Sei $N \geq 2$ und sei $\mathcal{A}$ eine Unteralgebra von $\mathcal{L}(X)$. Ein unter $\mathcal{A}^{(N)}$ invarianter abgeschlossener Untervektorraum M von X^N nennt man *invarianter Graphenunterraum für* $\mathcal{A}^{(N)}$, falls lineare Abbildungen $T_2, \dots, T_N$ existieren, die auf einem dichten Untervektorraum $D \subset X$ definiert sind und mit $\mathcal{A}$ kommutieren, sodass

$$M = \{(x, T_2 x, \dots, T_N x);\ x \in D\} \subset X^N$$

gilt.

Die Abbildungen $T_2, \dots, T_N$ nennen wir die *Graphenabbildungen* von M.

Bemerkung 3.13. Für den Fall $N = 2$ entsprechen die invarianten Graphenunterräume $M \subset X^2$ gerade den Graphen der abgeschlossenen dicht definierten linearen Abbildungen, die mit $\mathcal{A}$ kommutieren.

Korollar 3.14. Sei $N \geq 2$ und sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ eine N-transitive, aber nicht $N+1$-transitive Unteralgebra. Dann existiert ein invarinater Graphenunterraum $M \subset X^{N+1}$ für $\mathcal{A}^{(N+1)}$, sodass für die Graphenbbildungen $T_2, \ldots, T_{N+1}$ mit

$$M = \{(x, T_2 x, \ldots, T_{N+1} x);\ x \in D\} \subset X^{N+1}$$

keines der T_i abschließbar ist für $i = 2, \ldots, N+1$.

Beweis. Sei für $N \geq 2$ die Unteralgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ N-transitiv, aber nicht $N+1$-transitiv, dann gibt es linear unabhängige Vektoren $x_1, \ldots, x_{N+1} \in X$, sodass der Untervektorraum

$$\{(Ax_1, \ldots, Ax_{N+1});\ A \in \mathcal{A}\} \subset X^{N+1} \tag{3.7}$$

nicht dicht ist. Sei M der Abschluss der Menge aus (3.7).
Wir zeigen zu erst, dass M nicht dünn ist. Angenommen M ist dünn. Da M offensichtlich $\mathcal{A}^{(N+1)}$-invariant ist und die Algebra $\mathcal{A}$ N-transitiv ist würden nach Lemma 3.6 Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_{N+1} \in \mathbb{C}$ existieren, sodass

$$\sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i A x_i = 0$$

für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt.
Aus der Transitivität von $\mathcal{A}$ würde $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \ldots \lambda_{N+1} x_{N+1} = 0$ folgen, dies bedeutete aber ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $x_1, \ldots, x_{N+1} \in X$. Damit ist M nicht dünn.
Da M ein $\mathcal{A}^{(N+1)}$-invarianter abgeschlossener Unterraum von X^{N+1} ist, aber weder M dünn ist noch $M = X^{N+1}$ gilt, folgt aus Satz 3.10, dass M die Gestalt unter (iii) hat.
Das bedeutet, dass lineare Abbildungen $T_2, \ldots, T_{N+1}$ existieren, die auf einem dichten linearen Unterraum D von X definiert sind und mit $\mathcal{A}$ kommutieren, sodass

$$M = \{(x, T_2 x, \ldots, T_{N+1} x) \in X^{N+1}; x \in D\}$$

gilt.

Also ist M ein invarianter Graphenunterraum für $\mathcal{A}^{(N+1)}$.
Es bleibt zu zeigen, dass keines der T_j abschließbar ist für $j = 2, \ldots, N+1$. Angenommen es gäbe ein $i \in \{2, \ldots, N+1\}$, sodass $T_i : D \to X$ abschließbar ist. Sei $\overline{T_i}$ die kleinste abgeschlossene Abbildung mit $T_i \subset \overline{T}_i$ aus Bemerkung 2.3. Wegen $G(T_i) \subset G(\overline{T_i})$ wäre auch $\overline{T}_i$ dicht definiert. Da dann $\mathcal{A}^{(2)}G(T_i) \subset G(T_i)$ beziehungsweise $\mathcal{A}^{(2)}\overline{G(T_i)} \subset \overline{G(T_i)}$ und $G(\overline{T}_i) = \overline{G(T_i)}$ gelten würde, würde aus Bemerkung 3.8 folgen, dass $\overline{T_i}$ mit $\mathcal{A}$ kommutiert. Nach Voraussetzung ist $\mathcal{A}$ wenigstens 2-transitiv, damit würde nach Korollar 3.11 für $\overline{T}_i$ ein Skalar $\lambda_i \in \mathbb{C}$ existiert, sodass $\overline{T_i} = \lambda_i 1$ auf dem Definitionsbereich $D_{\overline{T_i}}$ von $\overline{T_i}$ gilt. Es würde also insbesondere $T_i = \lambda_i 1$ auf D gelten. Das bedeutet aber, dass in M die Komponenten 1 und i linear abhängig sind und damit alle Komponenten von M. Demnach wäre M dünn, ein Widerspruch. $\square$

Wir können nun mit unseren neugewonnenen Erkentnissen leicht die Voraussetzungen aus Satz 3.4 abschwächen.

Korollar 3.15. Ist jede transitive Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ schon 2-transitiv, so erhalten wir für jeden Operator $T \in \mathcal{L}(X) \setminus \mathbb{C}1_X$, dass $\mathrm{Hyp}(T) \neq \{\{0\}, X\}$ gilt.

Beweis. Wir zeigen wieder die Kontraposition. Hat $T \in \mathcal{L}(X) \setminus \mathbb{C}1_X$ nur die trivialen hyperinvarianten Unterräume X und $\{0\}$, so ist $(T)'$ transitiv nach Bemerkung 3.2 (i). Es ist $(T)'$ nicht 2-transitiv, sonst wäre nach Korollar 3.11 die einzigen abgeschlossenen dicht definierten linearen Operatoren, die mit $(T)'$ kommutieren skalare Abbildungen. Da wegen der Stetigkeit von T offensichtlich $G(T)$ abgeschlossen ist, bedeutet dies ein Widerspruch zu $T \in \mathcal{L}(X) \setminus \mathbb{C}1_X$. $\square$

4 Transitive Algebra Conjecture und Anwendungen

Wir werden in diesem Kapitel zwei Fälle betrachten, in denen die Transitive Algebra Conjecture im positiven Sinne beantwortbar ist. Ist ein unendlichdimesionaler Banachraum X gegeben und enthält eine transitive Operatoralgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ einen Operator $F \in \mathcal{F}(X)$ endlichen Rangs, der nicht der Null-Operator ist oder einen kompakten nicht-Null-Operator $K \in \mathcal{K}(X)$, so ist $\mathcal{A}$ schon n-transitiv für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Dabei benutzen wir im Wesentlichen die Hilfsmittel zur Charakterisierung der 2-Transitivität und n-Transitivität für $n > 2$ aus Kapitel 3.2, um die Beweise für den Hilbertraum Fall aus [10] Kapitel 8 auf den Banachraum zu übertragen. Vergleiche auch [9] Kapitel V.
Als direktes Korollar dieser Ergebnisse erhalten wir den Satz von Lomonosov. Damit werden wir uns im zweiten Teil dieses Kapitels wieder der Invariant Subspace Conjecture widmen und einige schöne Ergebnisse aus [7] präsentieren.

4.1 Teillösungen für bestimmte Klassen von Operatoralgebren

Sei wieder X ein komplexer Banachraum mit $\dim(X) = \infty$ und es bezeichne $\mathcal{L}(X)$ wieder die Menge der stetig linearen Operatoren auf X. Wir bezeichnen mit $\mathcal{F}(X) \subset \mathcal{L}(X)$ die stetig linearen Operatoren endlichen Ranges und mit $\mathcal{K}(X) \subset \mathcal{L}(X)$ die kompakten stetig linearen Operatoren.

Lemma 4.1. Sei $\mathcal{A}$ eine transitive Unteralgebra von $\mathcal{L}(X)$. Hat für alle $N \geq 2$ jede Graphenabbildungen jedes invarianten Graphenunterraums für $\mathcal{A}^{(N)}$ einen Eigenwert, so ist $\mathcal{A}$ n-transitiv für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Beweis. Wir zeigen im ersten Schritt, dass für jedes $N \geq 2$ und jeden invarianten Graphenunterraum für $\mathcal{A}^{(N)}$ die zugehörigen Graphenabbildungen skalare Abbildungen sind.

Sei dazu $N \geq 2$ fest und

$$M = \{(x, T_2, \ldots, T_N x);\; x \in D\} \subset X^N$$

ein fester invarianter Graphenunterraum für $\mathcal{A}^{(N)}$.

Nach Voraussetzung existiert ein Element $0 \neq x_2 \in D$ und ein Skalar $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ mit $T_2 x_2 = \lambda_2 x_2$. Setze

$$D_2 = \{x \in D;\; T_2 x = \lambda_2 x\} \neq \{0\}.$$

Ist $x \in D_2 \subset D$, so gilt $T_2 A x = A T_2 x = \lambda_2 A x$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Also ist $D_2 \neq \{0\}$ ein unter $\mathcal{A}$ invarianter Untervektorraum von X. Da $\mathcal{A}$ nach Voraussetzung transitiv ist, ist D_2 nach Bemerkung 3.2 (i) dicht in X. Setze

$$M_2 = \{(x, \lambda_2 x, T_3 x, \ldots, T_N x);\; x \in D_2\}.$$

Da D_2 invariant unter $\mathcal{A}$ ist und $T_2, \ldots, T_N$ mit $\mathcal{A}$ kommutiert, kommutiert auch $T_2|_{D_2}, \ldots, T_N|_{D_N}$ mit $\mathcal{A}$. Also ist M_2 invariant unter $\mathcal{A}^{(N)}$.

Wir zeigen als nächstes, dass M_2 abgeschlossen ist. Sei dazu $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in D_2 und $(x, y_2, \ldots, y_N) \in X^N$ mit

$$\lim_{k \to \infty} (x_k, \lambda_2 x_k, T_3 x_k, \ldots, T_N x_k) = (x, y_2, \ldots, y_N).$$

Da M abgeschlossen ist folgt aus $D_2 \subset D$, dass $(x, y_2, \ldots, y_N) \in M$ gilt. Daraus erhalten wir $y_i = T_i x$ für $i = 2, \ldots, N$. Insbesondere gilt $T_2 x = y_2 = \lim_{k \to \infty} \lambda_2 x = \lambda_2 x$, also $x \in D_2$. Daraus folgt

$$(x, y_2, \ldots, y_N) = (x, \lambda_2 x, T_3 x, \ldots, T_N x) \in M_2.$$

Insgesamt ist also M_2 wieder ein invarianter Graphenunterraum für $\mathcal{A}^{(N)}$.

Nach Vorraussetzung hat die Graphenabbildung $T_3|_{D_2}$ einen Eigenwert $\lambda_3 \in \mathbb{C}$ und dazu einen Eigenvektor $0 \neq x_3 \in D_2$. Setze

$$D_3 = \{x \in D_2;\; T_3 x = \lambda_3 x\}.$$

Wegen $D_3 \neq \{0\}$ folgt wie zuvor aus der Kommutativität von $T_3|_{D_2}$ mit $\mathcal{A}$ und der

Transitivität von $\mathcal{A}$, dass D_3 ein dichter Untervektorraum von X ist, der unter $\mathcal{A}$ invariant ist. Setze

$$M_3 = \{(x, \lambda_2 x, \lambda_3 x, T_4 x, \dots T_N x);\ x \in D_3\}.$$

Wie zuvor zeigt man, dass M_3 ein invarianter Graphenunterraum für $\mathcal{A}^{(N)}$ ist.

Induktiv erhält man nach endlich vielen Schritten einen in X dichten Untervektorraum $D_N \subset D$ mit $T_i|_{D_N} = \lambda_i 1_{D_N}$ für $i = 2, \dots, N$, der unter $\mathcal{A}$ invariant ist und einen in X^N abgeschlossenen unter $\mathcal{A}^{(N)}$ invarianten Untervektorraum

$$M_N = \{(x, \lambda_2 x, \dots, \lambda_N x);\ x \in D_N\} \subset M,$$

wobei $\lambda_2, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C}$ Sakalare sind.

Es ist nur noch zu zeigen, dass $M_N = M$ gilt. Sei dazu $y \in X$. Da $D_N \subset X$ dicht ist, existiert eine Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in D_N mit $y_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} y$. Aus der Abgeschlossenheit von M_N folgern wir

$$\lim_{k\to\infty} (y_k, \lambda_2 y_k, \dots, \lambda_N y_k) = (y, \lambda_2 y, \dots, \lambda_N y) \in M_N$$

und damit auch $y \in D_N$. Mit $D_N \subset D$ erhält man $D_N = D = X$, also auch

$$T_i = T_i|_{D_N} = \lambda_i 1_{D_N} = \lambda_i 1_D$$

für $i = 2, \dots, N$. Damit ist die Behaptung gezeigt.

Im zweiten Schritt zeigen wir, dass $\mathcal{A}$ n-transitiv ist für alle $n \geq 2$.

Sei dazu $D \subset X$ dicht und $T : D \to X$ eine abgeschlossene lineare Abbildung, die mit $\mathcal{A}$ kommutiert. Nach Bemerkung 3.13 und 3.8 ist der Graph $G(T)$ ein invarianter Graphenunterraum für $\mathcal{A}^{(2)}$ und so folgt aus dem ersten Teil des Beweises, dass ein Skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ existiert mit $T = \lambda 1_D$. Aus Korollar 3.11 folgt damit die 2-Transitivität von $\mathcal{A}$.

Sei $N > 2$ und M ein invarianter Graphenunterraum für $\mathcal{A}^{(N)}$. Für die Graphenabbildungen $T_i : D \to X$ $(i = 2, \dots, N)$ existieren nach dem ersten Teil des Beweises Skalare $\lambda_2, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C}$, sodass $T_i = \lambda_i 1_D$ für alle $i = 2, \dots, N$ gilt. Für $i = 2, \dots, N$ erhalten wir wegen $\overline{D} = X$ die Identität

$$\overline{G(T_i)} = \overline{\{(x, \lambda_i x);\ x \in D\}} = \{(x, \lambda_i x);\ x \in X\}$$

Der Vektorraum M ist abgeschlossen und so folgt

$$M = \overline{M} = \{(x, \lambda_2 x, \ldots, \lambda_N x);\ x \in X\},$$

also $D = X$ und damit auch $G(T_i) = \overline{G(T_i)}$ für $i = 2, \ldots, N$.

Aus Korollar 3.14 und der 2-Transitität von $\mathcal{A}$ folgt induktiv, dass $\mathcal{A}$ n-transitiv für alle $n > 2$ ist. $\square$

Satz 4.2. Sei $\mathcal{A}$ eine transitive Unteralgebra von $\mathcal{L}(X)$. Gilt $\mathcal{A} \cap \mathcal{F}(X) \neq \{0\}$, so ist $\mathcal{A}$ n-transitiv für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Beweis. Wir wollen Lemma 4.1 benutzen, um die Aussage zu zeigen. Seien also $N \geq 2$ und dazu

$$M = \{(x, T_2 x, \ldots, T_N x);\ x \in D\}$$

ein invarianter Graphenunterraum für $\mathcal{A}^{(N)}$. Außerdem gelte $F \in \mathcal{A}$ für einen Operator $F \in \mathcal{F}(X) \setminus \{0\}$.

Wir zeigen zuerst dass $\text{Bild}(F) \subset D$ gilt. Sei $y = F(x)$ für ein $x \in X$. Der Unterrvektorraum D ist dicht in X, also gibt es eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in D mit $x_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} x$. Da D unter $\mathcal{A}$ invariant ist, folgt $F(x_k) \in D$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Damit ist $(F(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D \cap \text{Bild}(F)$. Der Unterraum$D \cap \text{Bild}(F) \subset \text{Bild}(F)$ ist endlich dimensional, also auch abgeschlossen in X, so erhalten wir mit der Stetigkeit von F, dass

$$y = F(x) = \lim_{k\to\infty} F(x_k) \in D \cap \text{Bild}(F) \subset D$$

gilt. Dies zeigt insgesamt $\text{Bild}(F) \subset D$.

Da T_i für $i = 2, \ldots N$ mit $\mathcal{A}$ kommutiert folgt daraus insbesondere $FT_i = T_i F$ auf D für $i = 2, \ldots, N$. Da $D \subset X$ dicht ist, existiert für $y \in \text{Bild}(F)$ eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in D mit $F(x_k) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} y$. Wegen $\dim(\text{Bild}(F)) < \infty$ ist $T_i|_{\text{Bild}(F)}$ für $i = 2, \ldots, N$ ein stetiger

Operator. Wir erhalten

$$\begin{aligned} T_i y &= (T_i|_{\mathrm{Bild}(F)})(\lim_{k\to\infty} Fx_k) \\ &= \lim_{k\to\infty} (T_i|_{\mathrm{Bild}(F)})Fx_k \\ &= \lim_{k\to\infty} FT_i x_k \in \mathrm{Bild}(F) \end{aligned}$$

für $i = 2, \dots N$.
Nach Voraussetzung ist $\mathrm{Bild}(F) \neq \{0\}$ ein endlich dimensionaler komplexer Vektorraum. Für $i = 2, \dots, N$ hat damit die lineare Abbildung

$$T_i|_{\mathrm{Bild}(F)} : \mathrm{Bild}(F) \to \mathrm{Bild}(F), \;\; x \mapsto T_i x$$

einen Eigenwert, der auch ein Eigenwert von T_i ist. Mit Lemma 4.1 folgt die Behauptung. $\square$

Das nächste Ergebnis wird ein Hauptwerkzeug in den folgenden Untersuchungen transitiver Algebren sein. Es ist unter dem Lemma von Lomonosov bekannt.

Lemma 4.3. Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ eine transitive Unteralgebra. Dann existiert für jeden kompakten Operator $0 \neq K \in \mathcal{L}(X)$ ein Operator $A \in \mathcal{A}$ und ein Vektor $x \in X \setminus \{0\}$, sodass $KAx = x$ gilt.

Beweis. Sei $0 \neq K \in \mathcal{L}(X)$ ein kompakter Operator. Es gelte ohne Einschränkung $\|K\| = 1$, sonst ersetze K durch $K/\|K\|$. Sei $y \in X$ so, dass $\|Ky\| > 2$ gilt. Es sei

$$B_1(y) = \{x \in X; \;\; \|y - x\| < 1\}$$

die offene Kugel um y mit Radius 1. Für $x \in B_1(y)$ gilt dann $\|Kx - Ky\| \leq 1$. Mit der umgekehrten Dreiecksungleichung folgt daraus

$$\|Kx\| \geq |\|Kx - Ky\| - \|Ky\|| > 1.$$

Aus dieser Abschätzung folgt $0 \notin \overline{K(B_1(y))} =: D$. Da K kompakt und linear ist, ist $D \subset X$ kompakt und konvex.
Mit der Transitivität von $\mathcal{A}$ können wir $\overline{\mathcal{A}x} = X$ für alle $x \in X \setminus \{0\}$ schließen. Da $B_1(y)$ in X offen ist gibt, es also für alle $x \in X \setminus \{0\}$ ein $A_x \in \mathcal{A}$ mit $A_x x \in B_1(y)$. Insbesondere

ergibt dies $x \in A_x^{-1}(B_1(y))$ für alle $x \in D$. Da D kompakt ist, existieren $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, sodass

$$D \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i^{-1}(B_1(y)).$$

gilt.

Definiere nun die Abbildung $r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $r(t) = \max(0, 1-t)$. Dann ist r eine stetige Abbildung mit $r^{-1}(\{0\}) = [1, \infty)$. Definiere weiter

$$f : D \to B_1(y),\ f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{r(\|A_i x - y\|)}{\sum\limits_{j=1}^{n} r(\|A_j x - y\|)} A_i x.$$

Wir zeigen zunächst, dass f wohldefiniert ist. Ist $x \in D$, so gibt es ein $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $A_j x \in B_1(y)$ und damit $r(\|A_j x - y\|) > 0$.

Nun müssen wir noch die Inklusion Bild$(f) \subset B_1(y)$ zeigen. Ist $\|A_j x - y\| \geq 1$ für ein $j \in \{1, \dots, n\}$, so folgt $r(\|A_j x - y\|) = 0$. Damit können wir für $x \in D$ und $j = 1, \dots, n$ schließen, dass

$$r(\|A_j x - y\|)\|A_i x - y\| \leq r(\|A_j x - y\|) \tag{4.1}$$

gilt.

Für $x \in D$ und $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $A_j x \in B_1(y)$ ist die Ungleichung aus (4.1) sogar strikt. Für alle $x \in D$ folgt daraus

$$\begin{aligned} \|f(x) - y\| &= \| \sum_{i=1}^{n} \frac{r(\|A_i x - y\|)}{\sum\limits_{j=1}^{n} r(\|A_j x - y\|)} A_i x - y\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{r(\|A_i x - y\|)}{\sum\limits_{j=1}^{n} r(\|A_j x - y\|)} \|A_i x - y\| < 1. \end{aligned}$$

und damit letztendlich die Wohldefiniertheit von f.

Als Verkettung stetiger Funktionen ist f und damit auch $F = K \circ f : D \to D$ stetig.

Nach dem Fixpunktsatz von Schauder (Korollar 2.12) existiert ein $x \in D$ mit $F(x) = x$.

Definiert man nun

$$A = \sum_{i=1}^{n} \frac{r(\|A_i x - y\|)}{\sum\limits_{j=1}^{n} r(\|A_j x - y\|)} A_i,$$

so ist $A \in \mathcal{A}$ mit $KAx = F(x) = x$. $\square$

Lemma 4.4. Sei $0 \neq K \in \mathcal{K}(X)$ und sei $0 \neq \lambda \in \sigma(K)$. Dann existieren beschränkte offene Mengen $U_1, U_2 \subset \mathbb{C}$ mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, sodass $\lambda \in U_1$ und $\sigma(K) \setminus \{\lambda\} \subset U_2$ gelten. Weiter kann man U_1 und U_2 so wählen, dass für $C = \overline{U_1 \cup U_2}$ die Menge $\mathbb{C} \setminus C$ zusammenhängend ist und eine stetige Funktion $\chi : C \to \mathbb{C}$ mit $\chi|_{U_1 \cup U_2} \in \mathcal{O}(\mathrm{Int}(C))$ und $\chi|_{U_1} \equiv 1$ sowie $\chi|_{U_2} \equiv 0$ existiert.

Beweis. Sei $0 \neq K \in \mathcal{K}(X)$ und sei $0 \neq \lambda \in \sigma(K)$. Es ist $0 \in \sigma(K)$ der einzige Häufungspunkt des Spektrums. Damit ist $\sigma(K) \cap D_{|\lambda|/2}(0)^C$ endlich, sei etwa $\sigma(K) \cap D_{|\lambda|/2}(0)^C = \{\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
Da $\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_n$ isolierte Punkte von $\sigma(K)$ sind existieren $\varepsilon_\lambda > 0$ und $\varepsilon_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ so, dass die Abschlüsse der Kreisscheiben $D_{\varepsilon_\lambda}(\lambda)$ und $D_{\varepsilon_i}(\mu_i)$ paarweise disjunkt sind. Außerdem kann man ε_λ und ε_i so klein wählen, dass für die $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $|\mu_i| > |\lambda|/2$ die abgeschlossenen Kreise $\overline{D}_{|\lambda|/2}(0)$, $\overline{D}_{\varepsilon_\lambda}(\lambda)$ und $\overline{D}_{\varepsilon_i}(\mu_i)$ paarweise disjunkt sind.
Definiere nun $U_1 = D_{|\lambda|/2}(0) \cup \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_{\varepsilon_i}(\mu_i)$ und $U_2 = D_{\varepsilon_\lambda}(\lambda)$. Damit ist $C = \overline{U_1 \cup U_2} \subset \mathbb{C}$ eine kompakte Menge mit

$$C = \overline{D}_{|\lambda|/2}(0) \cup \overline{D}_{\varepsilon_\lambda}(\lambda) \cup \bigcup_{i=1}^{n} \overline{D}_{\varepsilon_i}(\mu_i).$$

Daraus ergibt sich insbesondere, dass $\mathrm{Int}(C) = U_1 \cup U_2$ gilt. Außerdem gilt nach Wahl von ε_λ und der ε_i $(i = 1, \ldots, n)$, dass $\mathbb{C} \setminus C$ zusammenhängend ist.
Definiere nun die Funktion χ durch

$$\chi : \overline{U_1 \cup U_2} \to \mathbb{C}, \ \chi(z) = \begin{cases} 1, & \text{für } z \in \overline{U}_1 \\ 0, & \text{für } z \in \overline{U}_2 \end{cases}$$

Da $\overline{U}_1$ und $\overline{U}_2$ nach Konstruktion disjunkt sind, ist χ auf C stetig und da $\mathrm{Int}(C) = U_1 \cup U_2$ gilt, ist $\chi|_{U_1 \cup U_2} \in \mathcal{O}(\mathrm{Int}(C))$. $\square$

Satz 4.5. (Mergelyan) Es sei K kompakt in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{C} \setminus K$ zusammenhängend. Ferner sei f stetig auf K und holomorph auf $\operatorname{Int}(K)$. Dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein Polynom $P \in \mathbb{C}[z]$, sodass

$$|f(z) - P(z)| < \varepsilon$$

für alle $z \in K$ gilt.

Ein Beweis findet sich in [6] Kapitel III §2.

Satz 4.6. Ist $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ eine transitive Algebra mit $\mathcal{K}(X) \cap \mathcal{A} \neq \{0\}$, so ist $\mathcal{A}$ n-transitiv für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Beweis. Sei also $\mathcal{A}$ eine transitive Unteralgebra von $\mathcal{L}(X)$ und $K \in \mathcal{K}(X) \cap \mathcal{A} \setminus \{0\}$. Nach dem Lemma von Lomonosov (Lemma 4.3) gibt es ein $A \in \mathcal{A}$ und ein $0 \neq x \in X$ mit $KAx = x$. Daraus folgt $1 \in \sigma(KA)$.
Da mit K auch wieder KA kompakt ist, erhält man mit Lemma 4.4 offene, disjunkte Mengen $U_1, U_2 \subset \mathbb{C}$ so, dass $1 \in U_1$ und $\sigma(KA) \setminus \{1\} \subset U_2$ gelten, $C = \overline{U_1 \cup U_2}$ kompakt ist, $\mathbb{C} \setminus C$ zusammenhängend ist und $\operatorname{Int}(C) = U_1 \cup U_2$ gilt. Darüber hinaus erhält man eine auf $\operatorname{Int}(C)$ holomorphe Funktion χ mit $\chi|_{U_1} \equiv 1$ und $\chi|_{U_2} \equiv 0$, die auf C stetig fortsetzbar ist.
Defniere nun $\chi(KA)$ mit Hilfe des holomorphen Funktionalkalküls. Betrachtet man den Beweis des Rieszschen Zerlegungssatz (Satz 2.14), so können wir folgendes schließen. Der Operator $\chi(KA)$ ist eine Projektion mit unter KA invariantem nicht trivialem Bild $M = \operatorname{Bild}(\chi(KA))$. Außerdem gilt $\sigma(KA|_M) = \{1\}$ und darüber hinaus ist M als Bild einer Projektion ein abgeschlossener Untervektorraum von X, also wieder ein Banachraum.
Für die Normeinheitskugel $B_1^M(0)$ in M und die Normeinheitskugel $B_1(0)$ in X gilt

$$KA|_M(B_1^M(0)) = KA(B_1(0) \cap M) \subset \overline{KA(B_1(0))}^X \cap M. \tag{4.2}$$

Da M abgeschlossen ist steht auf der rechten Seite der Inklusionskette in (4.2) eine in M kompakte Menge. Somit ist $KA|_M \in \mathcal{L}(M)$ kompakt. Wegen $0 \notin \{1\} = \sigma(KA|_M)$ folgt, dass M endlich dimensional ist. Also ist $\chi(KA)$ ein Operator endlichen Ranges.
Nach dem Satz von Mergelyan (Satz 4.5) existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein Polynom P_n mit

$$|\chi(z) - P_n(z)| < \frac{1}{2^n}$$

für alle $z \in C$.
Insbesondere folgt also für jede kompakte Menge $K \subset U_1 \cup U_2$, dass $|\chi(z) - P_n(z)| < 1/2^n$ für alle $z \in K$ gilt. Das bedeutet, dass die Folge $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{O}(U_1 \cup U_2)$ gegen χ konvergiert. Da der holomorphe Funktionalkalkül stetig ist, folgt damit, dass $(P_n(KA))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}(X)$ gegen $\chi(KA)$ konvergiert. Damit enthält $\overline{\mathcal{A}}$ den Operator $0 \neq \chi(KA) \in \mathcal{F}(X)$. Mit $\overline{\mathcal{A}}$ ist auch $\overline{\mathcal{A}}$ eine transitive Algebra. Nach Satz 4.2 ist damit $\overline{\mathcal{A}}$ n-transitiv für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und nach Bemerkung 3.2 (iv) gilt dies auch für $\mathcal{A}$. $\square$

4.2 Anwendung für das Invariant Subspace Problem

Es sei wie im letzten Abschnitt X ein komplexer Banachraum mit $\dim(X) = \infty$.

Korollar 4.7 (Satz von Lomonosov)**.** Sei $T \in \mathcal{L}(X) \setminus \mathbb{C}1_X$. Gilt $K \in (T)'$ für einen kompakten Operator $0 \neq K \in \mathcal{K}(X)$, so folgt $\mathrm{Hyp}(T) \neq \{\{0\}, X\}$.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $K \in (T)'$ für einen kompakten Operator $K \neq 0$. Angenommen es würde $\mathrm{Hyp}(T) = \{\{0\}, X\}$ gelten. Dann wäre $(T)'$ transitiv nach Bemerkung 3.2 (i) und nach Satz 4.6 auch n-transitiv für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Nach Bemerkung 3.2 (ii) ist damit $(T)'$ SOT-dicht in $\mathcal{L}(X)$. Da $(T)'$ SOT-abgeschlossen ist, folgt daraus $(T)' = \mathcal{L}(X)$. Dies ist aber nach Proposition 2.9 ein Widerspruch zu $T \in \mathcal{L}(X) \setminus \mathbb{C}1_X$. $\square$

Wir wollen uns nun mit unseren Erkenntnissen über transitive Algebren ein schönes Korollar für invariante Teilräume erarbeiten.

Lemma 4.8. Sei $T \in \mathcal{L}(X) \setminus \mathbb{C}1_X$ und sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert für T. Für den nicht trivialen Eigenraum $\mathrm{Eig}(T, \lambda)$ von T zu λ gilt $\mathrm{Eig}(T, \lambda) \in \mathrm{Hyp}(T)$.

Beweis. Zunächst ist $\mathrm{Eig}(T, \lambda) = \mathrm{Kern}(T - \lambda 1_X) \subset X$ abgeschlossen. Wegen $T \in \mathcal{L}(X) \setminus \mathbb{C}1_X$ ist $\mathrm{Eig}(T, \lambda)$ nicht trivial. Für alle $S \in (T)'$ und $x \in \mathrm{Eig}(T, \lambda)$ erhält man

$$(T - \lambda 1_X)Sx = S(T - \lambda 1_X)x = 0,$$

also $Sx \in \mathrm{Eig}(T, \lambda)$. Damit ist $\mathrm{Eig}(T, \lambda)$ invariant unter $(T)'$ und es gilt $\mathrm{Eig}(T, \lambda) \in \mathrm{Hyp}(T)$. $\square$

Satz 4.9. Seien $S, T \in \mathcal{L}(X)$ mit $\dim(\mathrm{Bild}(TS - ST)) = 1$. Weiterhin gelte $\mathrm{Kern}(S) \neq \{0\}$, als auch $X/\overline{\mathrm{Bild}(S)} \neq \{0\}$ und diese beiden Räume seien endlichdimensional. Dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{C}$, sodass der Operator $T - \lambda 1_X$ einen nicht trivialen Kern hat, oder das Bild des Operators nicht dicht in X ist. Insbesondere hat damit also $T - \lambda 1_X$ einen nicht trivialen hyperinvarianten Untervektorraum.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $\dim(\mathrm{Bild}(TS - ST)) = 1$ und daraus ergibt sich $T \notin \mathbb{C}1_X$. Sei $0 \neq x_0 \in \mathrm{Kern}(S)$. Definiere

$$M = \mathrm{LH}(T^n x_0;\ n \in \mathbb{N}).$$

Offensichtlich ist M ein unter T invarianter Untervektorraum von X.

Sei zuerst $\dim(M) \in \mathbb{N}$. Ist $M = \{0\}$, so hat T den Eigenwert 0. Gilt $\dim(M) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so hat

$$T|_M : M \to M,\ x \mapsto Tx$$

auf dem endlichdimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum M einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ und damit auch T. Mit Lemma 4.8 folgt in beiden Fällen die Behauptung.

Sei nun $\dim(M) = \infty$. Nach Voraussetzung gilt $\dim(\mathrm{Kern}(S)) < \infty$ und damit erhält man $M \not\subset \mathrm{Kern}(S)$. Sei $n_0 \geq 1$ minimal mit $ST^{n_0}x_0 \neq 0$. Für den Operator $R = TS - ST$ gilt damit

$$RT^{n_0-1}x_0 = TST^{n_0-1}x_0 - ST^{n_0}x_0 = -ST^{n_0}x_0 \neq 0.$$

Da $\mathrm{Bild}(R)$ Dimension 1 hat, folgt $\mathrm{Bild}(R) \subset \mathrm{Bild}(S)$. Aus $TS = R + ST$ folgt damit, dass $\mathrm{Bild}(S)$ und damit auch $Y = \overline{\mathrm{Bild}(S)}$ ein für T invarianter Untervektorraum ist.

Für den zu T adjungierten Operator $T' \in \mathcal{L}(X')$ folgt damit $T'y'(y) = y'(Ty) = 0$ für alle $y' \in Y^\perp$ und alle $y \in Y$. Man erhält $T'Y^\perp \subset Y^\perp$. Nach Voraussetzung gilt $\dim(X/Y) < \infty$, so erhalten wir $\dim(Y^\perp) = \dim((X/Y)') = \dim(X/Y) < \infty$. Damit hat die Abbildung

$$T'|_{Y^\perp} : Y^\perp \to Y^\perp,\ y' \mapsto T'(y')$$

einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ und dieser ist auch ein Eigenwert von T'. Es folgt

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{Bild}(T-\lambda 1_X)}^{\perp} &= [\mathrm{Bild}(T-\lambda 1_X)]^{\perp} \\ &= \mathrm{Kern}((T-\lambda 1_X)') \\ &= \mathrm{Kern}(T'-\lambda 1_{X'}) \neq \{0\}.\end{aligned}$$

Damit kann $\mathrm{Bild}(T-\lambda 1_X)$ nicht dicht in X sein.
Sei für den Zusatz $z = (T-\lambda 1_X)y \in \mathrm{Bild}(T-\lambda 1_X)$. Dann gilt

$$Tz = T(T-\lambda 1_X)y = (T-\lambda 1_X)Ty.$$

Also ist $\mathrm{Bild}(T-\lambda 1_X)$ invariant unter T und damit gilt

$$\overline{\mathrm{Bild}(T-\lambda 1_X)} \in \mathrm{Hyp}(T) \setminus \{\{0\}, X\}.$$

□

Satz 4.10. Sei $T \in \mathcal{L}(X) \setminus \mathbb{C}1_X$. Weiter sei $0 \neq K \in \mathcal{L}(X)$ ein kompakter Operator mit $\dim \mathrm{Bild}(TK-KT) \leq 1$. Dann hat T einen nicht trivialen hyperinvarianten Untervektorraum.

Beweis. Wir nehmen an, dass $\mathrm{Hyp}(T) = \{\{0\}, X\}$ gilt. Aus Bemerkung 3.2 folgt damit die Transitivität von $(T)'$. Nach dem Lemma von Lommonosov (Lemma 4.3) existiert zu dem kompakten Operator $0 \neq K$ ein Operator $0 \neq S \in (T)'$ und ein Element $0 \neq x \in X$ mit $KSx = x$, also gilt $1 \in \sigma(KS)$ und somit ist $KS - 1_X$ ein Fredholmoperator. Setze $R = TK - KT$, dann erhalten wir $T(KS) - (KS)T = RS$.
Ist $RS = 0$, so kommutiert T mit dem kompakten Operator $0 \neq KS$ und es gilt $KS \in (T)'$. Dann existiert nach dem Satz von Lomonosov (Korollar 4.7) ein nicht trivialer hyperinvarianter Untervektorraum für T.
Ist $RS \neq 0$, so liefert die Voraussetung wegen $\mathrm{Bild}(RS) \subset \mathrm{Bild}(R)$, dass $\dim(\mathrm{Bild}(RS)) = 1$ gilt. Außerdem gilt

$$T(KS - 1_X) - (KS - 1_X)T = RS.$$

Da $KS - 1_X$ ein Fredholmoperator ist, ist $\mathrm{Kern}(KS - 1_X)$ endlichdimensional, außerdem ist $\operatorname{Bild}(KS - 1_X) \subset X$ abgeschlossen und es gilt

$$\dim {}^{X}\!/_{\operatorname{Bild}(KS-1_X)} = \dim {}^{X}\!/_{\overline{\operatorname{Bild}(KS-1_X)}} < \infty.$$

Nun hat T nach Satz 4.9 einen nicht trivialen hyperinvarinaten Untervektorraum. $\square$

5 Katalytische Algebra im Drury-Arveson Raum

Definition 5.1. Sei H ein separabler Hilbertraum mit $\dim(H) = \infty$. Man nennt eine Unteralgebra $\mathcal{B}$ von $\mathcal{L}(H)$ *katalytisch*, falls jede transitive Unteralgebra $\mathcal{A}$ von $\mathcal{L}(H)$, die $\mathcal{B}$ enthält, n-transitiv ist für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Wir wollen im Folgenden eine Klasse katalytischer Algebren auf invarianten Unterräumen des Drury-Arveson Raumes beschreiben. Dabei verwenden wir ein Resultat aus [1] um einen Satz von Douglas und Xu aus [5] auf abgeschlossene Unterräume des Drury-Arveson Raumes zu übertragen.
Zunächst wollen wir den Drury-Arveson-Raum aber erst einmal einführen. Ich möchte an dieser Stelle auf Beweise verzichten und auf Kapitel 1 in [11] verweisen.

Notation. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 1$.

(i) Sei $\mathbb{B} = \mathbb{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n;\ \|z\| = (\sum_{i=1}^n |z_i|^2)^{1/2} < 1\}$ die Normeinheitskugel in $\mathbb{C}^n$.

(ii) Sei $\mathbb{C}^{\mathbb{B}} = \{f : \mathbb{B} \to \mathbb{C} \text{ Funktion}\}$.

(iii) Für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ setze $\gamma_\alpha = |\alpha|!/\alpha!$, wobei $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ und $\alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!$ sei.

(iv) Es sei $z^\alpha = \prod_{i=1}^n z_i^{\alpha_i}$ für $z \in \mathbb{C}^n$.

Wir bezeichnen mit $l^2(\gamma)$ den Hilbertraum

$$l^2(\gamma) = \{a = (a_\alpha);\ a_\alpha \in \mathbb{C} \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ und } \|a\|^2 = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} (|a_\alpha|^2/\gamma_\alpha) < \infty\}$$

mit dem Skalarprodukt $\langle (a_\alpha), (b_\alpha) \rangle_{l^2(\gamma)} = \sum\limits_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{a_\alpha \overline{b}_\alpha}{\gamma_\alpha}$.

Man kann zeigen, dass die Abbildung $\rho : l^2(\gamma) \to \mathcal{O}(\mathbb{B}, \mathbb{C}),\ (a_\alpha) \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$ wohldefiniert, injektiv und linear ist.

Definiere nun den Drury-Arveson Raum als den Hilbertraum $H(\mathbb{B}) = \mathrm{Bild}(\rho)$ mit dem Skalarprodukt $\langle \rho((a_\alpha)), \rho((b_\alpha)) \rangle = \langle (a_\alpha), (b_\alpha) \rangle_{l^2(\gamma)}$. Es ist $H(\mathbb{B}) \subset \mathbb{C}^{\mathbb{B}}$ ein funktionaler Hilbertraum mit dem reproduzierendem Kern

$$K : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{C},\ K(z, w) = \frac{1}{1 - \langle z, w \rangle_{\mathbb{C}^n}}.$$

Für $z \in \mathbb{B}$ ist $k_z = K(\cdot, z) \in H(\mathbb{B})$ die eindeutig bestimmte Funktion mit $f(z) = \langle f, k_z \rangle$ für alle $f \in H(\mathbb{B})$.

Proposition 5.2. Sei $n \geq 1$. Setze

$$M = \{(x_\alpha) \in l^2(\gamma);\ x_\alpha \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ und } x_\alpha = 0 \text{ für fast alle } \alpha \in \mathbb{N}^n\}.$$

Dann ist $M \subset l^2(\gamma)$ dicht. Insbesondere sind damit $l^2(\gamma)$ und $H(\mathbb{B})$ separabel.

Beweis. Sei $(a_\alpha) \in l^2(\gamma)$. Sei weiter $\varepsilon > 0$. Nach dem Cauchy-Kriterium für Summierbarkeit existiert eine endliche Menge $N \subset \mathbb{N}^n$, sodass

$$\sum_{\alpha \in K \setminus N} \frac{|a_\alpha|^2}{\gamma_\alpha} < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle endlichen Mengen $K \subset \mathbb{N}^n$ mit $N \subset K$ gilt.

Für alle $\alpha \in N$ existiert ein $\tilde{x}_\alpha \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ mit

$$|\tilde{x}_\alpha - a_\alpha|^2 < \frac{\varepsilon \gamma_\alpha}{2\#(N)}.$$

Definiere nun $(x_\alpha) \in M$ durch $x_\alpha = \begin{cases} \tilde{x}_\alpha, & \text{für } \alpha \in N \\ 0, & \text{für } \alpha \in \mathbb{N} \setminus N \end{cases}$.

Für alle endlichen Mengen $K \subset \mathbb{N}^n$ mit $N \subset K$ gilt dann

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha \in K} \frac{|x_\alpha - a_\alpha|^2}{\gamma_\alpha} \\ &= \sum_{\alpha \in K \setminus N} \frac{|x_\alpha - a_\alpha|^2}{\gamma_\alpha} + \sum_{\alpha \in N} \frac{|x_\alpha - a_\alpha|^2}{\gamma_\alpha} \\ &\le \sum_{\alpha \in K \setminus N} \frac{|a_\alpha|^2}{\gamma_\alpha} + \sum_{\alpha \in N} \frac{\frac{\varepsilon \gamma_\alpha}{2\#(N)}}{\gamma_\alpha} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich $\|(x_\alpha) - (a_\alpha)\|_{l^2(\gamma)} < \varepsilon$ und die Behauptung ist bewiesen. $\square$

Lemma 5.3. Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ ein funktionaler Hilbertraum auf einer Menge X mit reproduzierendem Kern K. Ist $f \in H$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in H, die gegen f konvergiert, dann konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch punktweise in $\mathbb{C}$ gegen f für alle $x \in X$.

Beweis. Sei $f \in H$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in H mit $f_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} f$. Für $x \in X$ gilt

$$|f(x) - f_n(x)| = |\langle f - f, k_x \rangle_H| \le \|f - f_n\|_H \|k_x\|_H$$

und daraus folgt die Behauptung. $\square$

Wir bezeichnen mit $\mathcal{M}(H(\mathbb{B})) = \{\varphi \in \mathbb{C}^{\mathbb{B}};\ \varphi f \in H(\mathbb{B}) \text{ für alle } f \in H(\mathbb{B})\}$ die Algebra aller Multiplikatoren auf $H(\mathbb{B})$. Für $\varphi \in \mathcal{M}(H(\mathbb{B}))$ sei $T_\varphi \in \mathcal{L}(H(\mathbb{B}))$ definiert durch $T_\varphi : H(\mathbb{B}) \to H(\mathbb{B}),\ f \mapsto \varphi f$. Außerdem schreiben wir der Einfachheit halber wieder $\mathcal{M}(H(\mathbb{B}))$ für die Algebra aller Operatoren T_φ mit $\varphi \in \mathcal{M}(H(\mathbb{B}))$.

Satz 5.4. Für $f \in H(\mathbb{B})$ existieren Multiplikatoren $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(H(\mathbb{B}))$, sodass für die Nullstenmenge $Z(\psi) = \emptyset$ gilt und $f = \varphi/\psi$ ist.

Ein Beweis hierfür findet sich in [1] (Kapitel 3).

Proposition 5.5. Sei $\{0\} \neq M \subset H(\mathbb{B})$ ein abgeschlossener Untervektorraum, der invariant unter den Multiplikatoren $\mathcal{M}(H(\mathbb{B}))$ ist. Sei

$$Z(M) = \{z \in \mathbb{B};\ f(z) = 0 \text{ für alle } f \in M\}$$

und $U = \mathbb{B} \setminus Z(M)$. Dann ist M wieder ein funktionaler Hilbertraum und es gilt:

Ist $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(M)$ eine Operatoralgebra mit

$$\mathcal{M}(H(\mathbb{B}))|_M = \{T_\varphi|_M;\ T_\varphi \in \mathcal{M}(H(\mathbb{B}))\} \subset \mathcal{A}$$

und ist $T : M \supset D_T \to M$ ein dicht definierter linearer Opearator, der mit $\mathcal{A}$ vertauscht, dann existiert eine Funktion $h : U \to \mathbb{C}$ mit $Tf(z) = h(z)f(z)$ für alle $f \in D_T$ und alle $z \in U$. Insbesondere ist dann T abschließbar.

Beweis. Seien $f, g \in D_T$. Es existieren nach Satz 5.4 Funktionen $\varphi_f, \psi_f, \varphi_g, \psi_g \in \mathcal{M}(H(\mathbb{B}))$ mit Nullstellenmengen $Z(\psi_f) = \emptyset = Z(\psi_g)$, sodass $f = \varphi_f/\psi_f$ und $g = \varphi_g/\psi_g$ gilt. Da T nach Voraussetzung mit den Operatoren aus $\mathcal{M}(H(\mathbb{B}))|_M$ vertauscht, erhalten wir

$$\begin{aligned}(Tf)\varphi_g\psi_f &= T(T_{\varphi_g}T_{\psi_f}f)\\ &= T(\varphi_f\varphi_g)\\ &= T(T_{\varphi_f}T_{\psi_g}g) = (Tg)\varphi_f\psi g.\end{aligned}$$

Damit gilt für $z \in U$ und $f, g \in D_T$ mit $f(z) \neq 0 \neq g(z)$ die Identität $Tf(z)/f(z) = Tg(z)/g(z)$.
Definiere nun die Funktion h durch $h : U \to \mathbb{C}$, $h(z) = Tf(z)/f(z)$ für ein $f \in D_T$ mit $f(z) \neq 0$. Die Wohldefiniertheit dieser Abbildung folgt aus der Definition von $U = \mathbb{B} \setminus Z(M)$, dem ersten Teil des Beweises und der Beobachtung, dass nach Lemma 5.3 $Z(D_T) = Z(\overline{D}_T) = Z(M)$ gilt.
Seien $f \in D_T \setminus \{0\}$ und $z \in U$ mit $f(z) = 0$. Nach Definition von U existiert ein $\tilde{g} \in M$ mit $\tilde{g}(z) \neq 0$. Da $\overline{D}_T = M$ gilt und Konvergenz in M nach Lemma 5.3 punktweise Konvergenz impliziert, existiert also ein $g \in D_T$ mit $g(z) \neq 0$. Nach dem ersten Teil des Beweises gilt $(Tf)g = (Tg)f$, also insbesondere auch $(Tf)(z)g(z) = (Tg)(z)f(z) = 0$ und dies impliziert $(Tf)(z) = 0$.
Daraus folgt für alle $f \in D_T$ und $z \in U$ die Identität $(Tf)(z) = h(z)f(z)$
Wir zeigen nun noch, dass T abschließbar ist. Sei dazu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D_T und $g \in M$ mit $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und $Tf_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$. Für $z \in U$ gilt

$$g(z) = \lim_{n\to\infty} Tf_n(z) = \lim_{n\to\infty} h(z)f_n(z) = 0,$$

da Konvergenz in M punktweise Konvergenz impliziert nach Lemma 5.3.
Für $z \notin U$ gilt $f(z) = 0$ für alle $f \in M$, also insbesondere $g(z) = 0$. Daraus folgt insgesamt

$g = 0$ und Proposition 2.2 liefert die Abschließbarkeit von T. □

Lemma 5.6. Es gelten die Voraussetzungen aus Proposition 5.5. Dann gilt $k_z \in D_{T^*}$ für alle $z \in U$, dabei bezeichne D_{T^*} den Definitionsbereich des zu T adjungierten Operator. Ist $h : U \to \mathbb{C}$ wie in 5.5 die Funktion mit $h(z)f(z) = Tf(z)$ für alle $f \in D_T \subset M$ und alle $z \in U$, so gilt $T^*k_z = \overline{h(z)}k_z$ für alle $z \in U$.

Beweis. Sei $z \in U$, dann gilt für alle $f \in D_T$ die Identität

$$\langle Tf, k_z\rangle = Tf(z) = h(z)f(z) = h(z)\langle f, k_z\rangle = \langle f, \overline{h(z)}k_z\rangle.$$

Aus Proposition 2.4 folgt damit $k_z \in D_{T^*}$ und $T^*k_z = \overline{h(z)}k_z$ für alle $z \in U$. □

Satz 5.7. Sei wieder $\{0\} \neq M \subset H(\mathbb{B})$ ein abgeschlossener Untervektorraum, der invariant unter $\mathcal{M}(H(\mathbb{B}))|_M$ ist mit $\mathcal{M}(H(\mathbb{B}))|_M = \{T_\varphi|_M;\ T_\varphi \in \mathcal{M}(H(\mathbb{B}))\}$. Dann ist $\mathcal{M}(H(\mathbb{B}))|_M$ eine katalytische Unteralgebra von $\mathcal{L}(M)$.

Beweis. Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(M)$ eine transitive Algebra, die $\mathcal{M}(H(\mathbb{B}))|_M$ enthält. Sei weiter $T : M \supset D_T \to M$ ein dicht definierter linearer Operator, der mit $\mathcal{A}$ kommutiert. Nach Proposition 5.5 ist damit T abschließbar und es existiert eine Funktion $h : U \to \mathbb{C}$ mit $Tf(z) = h(z)f(z)$ für alle $f \in D_T$ und alle $z \in U = \mathbb{B}\setminus\{w \in \mathbb{B};\ g(w) = 0 \text{ für alle } g \in M\}$. Dabei gilt $U \neq \emptyset$ wegen $M \neq \{0\}$.
Nach Lemma 5.6 gilt $k_z \in D_{T^*}$ und $T^*k_z = \overline{h(z)}k_z$ für alle $z \in U$. Da T mit $\mathcal{A}$ kommutiert, kommutiert T^* mit $\mathcal{A}^*$ nach Proposition 3.9. Mit diesen beiden Eigenschaften für T^* erhalten wir

$$\overline{h(z)}A^*k_z = A^*\overline{h(z)}k_z = A^*T^*k_z = T^*A^*k_z$$

für alle $z \in U$ und $A^* \in \mathcal{A}^*$.
Sei $w \in U$ beliebig aber fest. Der letzte Abschnitt hat gezeigt, dass der Untervektorraum $D = \{f \in D_{T^*};\ T^*f = \overline{h(w)}f\}$ nicht der Nullraum und D invariant unter $\mathcal{A}^*$ ist. Nach Satz 3.3 ist $\mathcal{A}^*$ transitiv und damit D dicht in M. T ist ein dicht definierter linearer Operator, also ist T^* nach 2.6 ein abgeschlossener linearer Operator. Daraus ergeben sich für den Operator $T^*|_D : D \to M$ mit der Dichtheit von D in M die Inklusionen

$$\{(f, \overline{h(w)}f);\ f \in M\} = \overline{G(T^*|_D)} \subset G(T^*).$$

Dies zeigt $T^* = \overline{h(w)}1_M$.
Aus $\langle Tf, g\rangle = \langle f, T^*g\rangle = \langle f, \overline{h(w)}g\rangle$ für alle $f \in D_T$ und alle $g \in D_{T^*} = M$ folgt $T = h(w)1_{D_T}$. Aus Korollar 3.11 folgt damit, dass $\mathcal{A}$ 2-transitiv ist.
Aus Proposition 5.5 folgt, dass jeder dicht definierte lineare Operator, der mit $\mathcal{A}$ vertauscht abschließbar ist. Mit Korollar 3.14 folgt damit also auch die n-Transitivität von $\mathcal{A}$ für jedes $n > 2$. Damit ist die Unteralgebra $\mathcal{M}(H(\mathbb{B}))|_M$ von $\mathcal{L}(M)$ katalytisch. $\square$

Literaturverzeichnis

[1] A. Aleman, M. Hartz, J. E. McCarthy, and S. Richter, *The Smirnov class for spaces with the complete Pick property*, ArXiv e-prints (January 2017), available at `1701.07476`.

[2] William B. Arveson, *A density theorem for operator algebras*, Duke Math. J. **34** (1967), 635–647.

[3] Robert F. Brown, *A topological introduction to nonlinear analysis*, Birkhäuser, Boston, 2004.

[4] H. Dales, A. Pietro, J. Eschmeier, K. Laursen, and G. Willis, *Introduction to Banach algebras, operators, and harmonic analysis*, Cambridge University Press Cambridge, 2003.

[5] R. G. Douglas and A. Xu, *Transitivity and bundle shifts*, Contemp. Math. (2015), 287–297. MR3309359.

[6] D. Gaier, *Vorlesungen über Approximation im Komplexen*, Birkhäuser, Basel, 1980.

[7] H. W. Kim, Carl Pearcy, and A. L. Shields, *Rank-one commutators and hyperinvariant subspaces.*, Michigan Math. J. **22** (1976), 193–194.

[8] R. Meise and D. Vogt, *Einführung in die Funktionalanalysis*, Vieweg und Teubner, Braunschweig, 2013.

[9] C.M. Pearcy, *Topics in operator theory*, Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 1974.

[10] H. Radjavi and P. Rosenthal, *Invariant subspaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1973.

[11] Dominik Schillo, *Die von Neumannsche Ungleichung*, Bachelorarbeit, Universität des Saarlandes, 2012.