Universität des Saarlandes
Fakultät 6 - Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät I
Fachrichtung: Mathematik

# Randwerte von Poisson - Integralen über der Einheitskugel im $\mathbb{C}^n$

## Bachelorarbeit

Zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science

vorgelegt von

Daniel Kraemer

nach einem Thema von

Prof. Dr. Jörg Eschmeier

Saarbrücken, November 2012

Hiermit versichere ich an Eides Statt durch meine eigene Unterschrift, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Saarbrücken, den 6. November 2012

# Inhaltsverzeichnis

# Einleitung

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts fand Hermann Amandus Schwarz unter Verwendung des Poissonintegrals eine alternative Lösung zum Dirichlet Problem. Dieses, nach dem deutschen Mathematiker Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet benannte Problem, ist ein bekanntes Problem aus dem 19. Jahrhundert, welches sich wie folgt formulieren lässt.

Zu gegebener offener Menge $\Omega \in \mathbb{R}^n$, deren Rand nichtleer ist, und einer stetigen Funktion $f \in C(\partial\Omega)$ sucht man eine stetige Fortsetzung von $f$ auf den Abschluss von $\Omega$, welche auf $\Omega$ harmonisch ist. Im Falle der komplexen Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ bildet das Poisson-Integral

$$P[f](z) = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1-|z|^2}{|1-z\overline{\zeta}|} d\sigma(\zeta)\,, \qquad (z \in \mathbb{D},\ f \in C(\partial\mathbb{D}))$$

die eindeutig bestimmte, stetige Fortsetzung von $f$ auf die kompakte Einheitskreisscheibe $\overline{\mathbb{D}}$, die auf dem Inneren harmonisch ist. Hierbei sei $\sigma = (\frac{1}{2\pi}\lambda_2|_{[-\pi,\pi]})^\alpha$ das Bildmaß des zweidimensionalen Lebesguemaßes auf $[-\pi,\pi]$ bezüglich der durch $t \mapsto e^{it}$ definierten Funktion $\alpha\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$. Wir wollen dieses Problem im Folgenden nicht näher betrachten, es gibt uns lediglich den Anlass Poisson-Integrale von einem anderen Standpunkt aus zu betrachten. Einen Überblick über das Dirichlet Problem findet man in [4]. Weitere historische Anmerkungen findet man in [5].

In dieser Arbeit lassen wir die Forderung nach der Stetigkeit der Funktion $f$ fallen und werden allgemein das Randverhalten von Poissonintegralen von Funktionen $f \in \mathcal{L}^1(\partial\mathbb{D},\sigma)$ untersuchen. Hierbei betrachten wir den allgemeineren Fall im $n$-dimensionalen komplexen Raum $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, dass heißt wir definieren das Poisson-Integral auf der offenen Einheitskugel $\mathbb{B} \subset \mathbb{C}^n$ als parameterabhängiges Integral über der Sphäre $\partial\mathbb{B}$ bezüglich dem Oberflächenmaß $\sigma$ auf $\partial\mathbb{B}$. Letzteres behandeln wir im ersten Kapitel dieser Arbeit. Speziell werden wir es mit dem $2n$-dimensionalen Lebesguemaß in Beziehung setzen und einige für spätere Abschnitte wichtige Integralidentitäten herleiten. Im zweiten Teil dieses Kapitels erinnern wir an einige Resultate zur Automorphismengruppe Aut $(\mathbb{B})$ der biholomorphen Abbildungen $\mathbb{B} \to \mathbb{B}$.

Mit Hilfe dieser Ergebnisse werden wir im zweiten Kapitel die Identität

$$f|_{\mathbb{B}} = P[f]$$

für Funktionen $f$ aus der Ball-Algebra $A\,(\mathbb{B})$ zeigen.

Es folgt des Hauptthema dieser Arbeit, die Untersuchung des Randverhaltens von Poisson-Integralen von Funktionen $f \in \mathcal{L}^1(\partial\mathbb{B}, \sigma)$. Genauer untersuchen wir, ob für eine Folge $(z_k)_{k\geq 1}$ aus $\mathbb{B}$, die gegen einen Punkt $\zeta$ auf dem Rand von $\mathbb{B}$ konvergiert auch der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} P[f](z_k)$ existiert. Unter gewissen Einschränkungen an die Folge $(z_k)_{k\geq 1}$ zeigte Adam Korányi im Jahr 1969, dass dieser Grenzwert in $\sigma$-fast allen Punkten aus $\partial\mathbb{B}$ existiert. Korányi formulierte sein Ergebnis in [6, Theorem 4] folgendermaßen (mit $\mathscr{B} = \partial\mathbb{B}$):

> *„Let $f \in L^p(\mathscr{B})$ $(p \geq 1)$ and let $F$ be its Poisson integral.*
> *Then $F$ converges to $f$ admissibly almost everywhere.“*

In den letzten beiden Abschnitten dieser Arbeit wird diese Aussage erklärt und bewiesen für den Fall $p = 1$. Hierzu beweisen wir eine Version der Hardy-Littlewood'schen Ungleichung für Maximalfunktionen um damit anschließend Ableitungen komplexer Borelmaße bezüglich dem Oberflächenmaß $\sigma$ zu bestimmen. Unter Verwendung dieser Resultate werden wir obige Aussage sinngemäß auch für Poisson-Integrale von regulären, komplexen Borelmaßen auf $\partial\mathbb{B}$ zeigen. Ist $\mu$ ein solches Maß, so stimmt der Grenzwert des Poissonintegrals in $\mu$-fast allen Punkten $\zeta \in \partial\mathbb{B}$ mit der Ableitung des Maßes $\mu$ bezüglich dem Oberflächenmaß im Punkt $\zeta$ überein.

Wir folgen in der gesamten Arbeit dem Argument Walter Rudins, welches er in seinem Buch 'Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$'([7]) darlegt. Speziell umfasst die vorliegende Arbeit Ergebnisse aus den Abschnitten 1.1 bis 1.4, 2.1, 2.2, 3.1 bis 3.3 und aus den ersten vier Abschnitten des fünften Kapitels obigen Buches.

Zum Abschluss dieser Einleitung möchte ich die Gelegenheit nutzen und ein paar Worte des Dankes aussprechen. Als erstes möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Eschmeier für die Vergabe des lehrreichen und interessanten Themas, die hervorragende Betreuung und die zahlreichen Anregungen während der Entstehung dieser Arbeit bedanken. Mein Dank gilt außerdem Herrn Dipl.-Math. Kevin Everard für die Hilfestellung bei einigen Fragen und allen Kommilitonen, die mir in den letzten Monaten mit Rat zur Seite standen. Ein besonderer Dank gilt meiner Familie, die mich im Verlaufe meines bisherigen Studiums auf vielfältige Weise unterstützt und entlastet hat, sodass besonders die vorliegende Arbeit in ihrer jetzigen Form entstehen konnte.

Saarbrücken, im November 2012

# 1 Vorbemerkungen

In diesem Kapitel präsentieren wir einige allgemeine Resultate, derer wir uns im Hauptteil dieser Arbeit bedienen werden um Poisson-Integrale zu untersuchen.

## 1.1 Das Oberflächenmaß auf der Sphäre

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst einige Beziehungen des mehrdimensionalen Lebesguemaßes zum Oberflächenmaß auf der entsprechenden Einheitskugel im $\mathbb{C}^n$ darlegen. Hierbei sei $n$ stets eine positive, natürliche Zahl. Mit $\lambda_n$ bezeichnen wir das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$ und

$$\nu_n = \frac{n!}{\pi^n}\lambda_{2n} \tag{1.1}$$

sei das Lebesguemaß auf $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ für das $\nu_n(\mathbb{B}_n) = 1$ gilt, wobei

$$\mathbb{B}_n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z| < 1\}$$

die Einheitskugel in $\mathbb{C}^n$ sei. Im speziellen Fall $n = 1$ schreiben wir $\mathbb{D}$ an der Stelle von $\mathbb{B}_1$. Ferner schreiben wir $B_r(w) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |w - z| < r\}$ für die Kugel um $w \in \mathbb{C}^n$ mit Radius $r > 0$. Desweiteren sei $\sigma_n$ das normierte Oberflächenmaß auf $S_n = \partial\mathbb{B}_n$. Dieses auf $S_n$ definierte Maß ist rotationsinvariant in folgendem Sinne:

**1.1 Bemerkung** (Rotationsinvarianz von $\sigma$)**.** *Sei $O(2n)$ die Menge aller Isometrien $\mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$. Dann gilt*

$$\sigma(\rho A) = \sigma(A)$$

*für jede Borelmenge $A \subset S$ und alle $\rho \in O(2n)$.*

Man kann zeigen, dass $\sigma$ das einzige normierte, positive Borelmaß Maß auf $S_n$ ist, das diese Eigenschaft besitzt. Zur Vereinfachung der Notation werden wir auch $\nu$ statt $\nu_n$ beziehungsweise $\sigma$ statt $\sigma_n$ schreiben, sofern die Dimension aus dem Zusammenhang klar hervorgeht. Gleiches gilt für $\mathbb{B}_n$ beziehungsweise $S_n$. Im Folgenden bezeichnen wir mit $\mathcal{U} \subset O(2n)$ die Menge aller unitären Operatoren $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ und mit $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ sei die Menge aller bezüglich dem Maß $\mu$ integrierbaren Funktionen $f\colon X \to \mathbb{C}$ bezeichnet.

Ist $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{C}^n, \nu)$, so ist die Polarkoordinatenformel

$$\int_{\mathbb{C}^n} f(z) d\nu(z) = 2n \int_0^\infty r^{2n-1} \int_S f(r\zeta) d\sigma(\zeta)\, dr \tag{1.2}$$

bekannt.

Im folgenden sei $P$ die orthogonale Projektion von $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}$ auf $\mathbb{C}^k$. Ist $X$ ein Hausdorffscher topologischer Raum, so seien $M(X)$ die Menge der regulären, komplexen Borelmaße auf $X$ und $M^+(X)$ die Menge der regulären, positiven Borelmaße auf $X$.

**1.2 Lemma.** *Es seien $1 \leq k < n$ und $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{B}_k, \nu_k)$. Dann ist $(f \circ P) \in \mathcal{L}^1(S, \sigma)$ und es gilt*

$$\int_S (f \circ P)(\zeta)\, d\sigma(\zeta) = \binom{n-1}{k} \int_{\mathbb{B}_k} (1 - |w|^2)^{n-k-1} f(w)\, d\nu_k(w)\,. \tag{1.3}$$

*Hierbei sei $f \circ P$ trivial fortgesetzt auf S.*

*Beweis.* Sei $1 \leq k < n$. Wir zeigen die Aussage im ersten Schritt für stetige Funktionen $f \colon \mathbb{B}_k \to \mathbb{C}$ mit kompaktem Träger. Sei $f$ eine solche Funktion, deren Träger noch komplett in $r_0 B_k = \{z \in B_k |\; |z| < r_0\}$ für ein $r_0 < 1$ liegt. Durch triviales Fortsetzen wird $f$ zu einer stetigen Funktion auf ganz $\mathbb{C}^k$, deren Träger in $r_0\mathbb{B}_k$ enthalten ist. Insbesondere ist $f \circ P \colon r\mathbb{B}_n \to \mathbb{C}$ als beschränkt messbare Funktion integrierbar bezüglich dem endlichen Maß $\nu_n|_{r\mathbb{B}_n}$ für jede positive Zahl $r > 0$. Somit ist die Funktion

$$I : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad r \longmapsto \int_{rB_n} (f \circ P)(z)\, d\nu_n(z)$$

wohldefiniert und Formel (1.2) liefert

$$\begin{aligned} I(r) &= \int_{\mathbb{C}^n} ((f \circ P) \cdot \chi_{rB_n})(z)\, d\nu_n(z) \\ &= 2n \int_0^\infty t^{2n-1} \int_S ((f \circ P) \cdot \chi_{rB_n})(t\zeta)\, d\sigma(\zeta)\, dt \\ &= 2n \int_0^r t^{2n-1} \int_S (f \circ P)(t\zeta)\, d\sigma(\zeta)\, dt. \end{aligned}$$

Die durch die Formel $F(t, \zeta) = (f \circ P)(t\zeta)$ definierte Funktion $[0, \infty) \times S \longrightarrow \mathbb{R}$ ist offenbar stetig und daher ist $F(t, \cdot)$ beschränkt auf der kompakten Menge S für jedes $t \in [0, \infty)$. Hieraus und aus der Endlichkeit des Maßes $\sigma$ folgt $F(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(S, \sigma)$ für jedes $t \in [0, \infty)$. Da die Funktionen $|F(t, \cdot)|$ gleichmäßig in allen $t \in [0, \infty)$ majorisiert werden durch eine Konstante, folgt aus der Endlichkeit des Maßes $\sigma$ auch, dass die Integrale $\int_S (f \circ P)(t\zeta)\, d\sigma(\zeta)$ stetig von dem Parameter $t$ abhängen (siehe etwa Satz A.1). Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefert somit

$$\frac{dI}{dr}(1) = 2n \int_S (f \circ P)(\zeta)\, d\sigma(\zeta)\,. \tag{1.4}$$

Andererseits gilt dem Satz von Fubini zufolge

$$\begin{aligned} I(r) &= \frac{n!}{\pi^n} \int_{rB_n} (f \circ P)(z)\, d\lambda_{2n}(z) \\ &= \frac{n\,(n-1)\cdot \ldots \cdot (k+1)}{\pi^{n-k}} \int_{r\mathbb{B}_k} \int_{B_v} (f \circ P)(v,w)\, d\lambda_{2(n-k)}(w)\, d\nu_k(v) \end{aligned} \tag{1.5}$$

wobei $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $v = (z_1, \ldots, z_k)$, $w = (z_{k+1}, \ldots, z_n)$ und $B_v = \{w \in \mathbb{C}^{n-k} |\, |w| < \sqrt{r^2 - |v|^2}\}$. In beiden Schritt in (1.5) wurde (1.1) verwendet. Offenbar ist $(f \circ P)(v,w) = f(v)$ für alle $(v,w) \in \mathbb{C}^n$ und daher ist das innere Integral in (1.5) für jedes $v \in r\mathbb{B}_k$ das Lebesguemaß der Kugel $B_v \subset \mathbb{C}^{n-k}$ bis auf den Faktor $f(v)$. Eine weitere Rechnung liefert schließlich für $r > r_0$

$$I(r) = \binom{n}{k} \int_{\mathbb{B}_k} \left(r^2 - |v|^2\right)^{n-k} f(v)\, d\nu_k(v)\,, \tag{1.6}$$

wobei wir wegen $\mathrm{supp}(f) \subset r_0\mathbb{B}_k$ in (1.6) über $\mathbb{B}_k$ anstatt $r\mathbb{B}_k$ integrieren können. Nun ist die durch die Formel $g(t,w) = \left(t^2 - |w|^2\right)^{n-k} f(w)$ definierte Funktion $[0,\infty) \times \mathbb{B}_k \longrightarrow \mathbb{R}$ offenbar an jeder Stelle $(t_0, w_0) \in [0,\infty) \times \mathbb{B}_k$ bezüglich $t$ partiell differenzierbar mit Ableitung

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t,w) = 2t\,(n-k)\left(t^2 - |w|^2\right)^{n-k-1} f(w).$$

Für jedes feste $w \in \mathbb{B}_k$ ist $\frac{\partial g}{\partial t}(\cdot, w)$ offenbar stetig und für jeden Punkt $t_0 \in [0,\infty)$ gilt

$$|\frac{\partial g}{\partial t}(t,w)| \leq 2(t_0+1)(n-k)(t_0^2 + 2t_0 + 2)^{n-k-1}|f(w)|$$

für alle $w \in \mathbb{B}_k$ und alle $t \in (t_0-1, t_0+1) \cap [0,\infty)$. Ferner gilt $g(t,\cdot) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{B}_k, \nu_k)$ für jedes $t \in [1,\infty)$. Der Bemerkung zu Satz A.2 in Anhang A zufolge ist also die rechte Seite von Gleichung (1.6) bezüglich $r$ differenzierbar und daher folgt

$$\frac{dI}{dr}(1) = 2\binom{n}{k}(n-k) \int_{\mathbb{B}_k} \left(1 - |w|^2\right)^{n-k-1} f(w)\, d\nu_k(w)\,. \tag{1.7}$$

Der Vergleich von (1.4) und (1.7) liefert zuletzt

$$\begin{aligned} \int_S (f \circ P)(\zeta)\, d\sigma(\zeta) &= \binom{n}{k} \frac{(n-k)}{n} \int_{\mathbb{B}_k} \left(1 - |w|^2\right)^{n-k-1} f(w)\, d\nu_k(w) \\ &= \binom{n-1}{k} \int_{\mathbb{B}_k} (1 - |w|^2)^{n-k-1} f(w)\, d\nu_k(w)\,. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Hiermit ist die Behauptung für alle $f \in C_c(\mathbb{B}_k)$ gezeigt. Im allgemeinen Fall bemerken wir zunächst, dass die Projektion

$$P\colon S_n \longrightarrow \overline{\mathbb{B}}_k, \qquad (z', z'') \longmapsto z'$$

als stetige Funktion Borel-messbar ist. Sei $\sigma^P \in M^+(\overline{\mathbb{B}}_k)$ das Bildmaß von $\sigma$ unter P. Wegen

$$\sigma^P(S_k) = \sigma(P^{-1}(S_k)) = \sigma(S_k \times \{0\}) = 0$$

erhält man für $f \in C_c(\mathbb{B}_k)$ mit Hilfe der Transformationsformel für Bildmaße

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}_k} f(z)\, d(\sigma^P|_{\mathbb{B}_k})(z) &= \int_{\overline{\mathbb{B}}_k} f(z)\, d\sigma^P(z)\\ &= \int_{S_n} (f \circ P)(\zeta) d\sigma(\zeta)\\ &= \int_{\mathbb{B}_k} f(z')\, d(\tbinom{n-1}{k}(1-|z'|^2)^{n-k-1}\nu_k)(z')\,.\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die bereits gezeigte Identität (1.8) verwendet. Da die beiden Maße $\sigma^P|_{\mathbb{B}_k}$ und $\binom{n-1}{k}(1-|z'|^2)^{n-k-1}\nu_k$ nach Proposition B.5 aus Anhang B reguläre Maße auf dem lokalkompakten Hausdorffraum $\mathbb{B}_k$ sind, folgt aus dem Eindeutigkeitsteil des Rieszschen Darstellungssatzes B.6 aus Anhang B, dass die beiden Maße gleich sind. Ist nun $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{B}_k, \nu_k)$, so ist $\binom{n-1}{k}(1-|z'|^2)^{n-k-1} f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{B}_k, \nu_k)$ und daher

$$f \in \mathcal{L}^1\Big(\mathbb{B}_k, \tbinom{n-1}{k}(1-|z'|^2)^{n-k-1}\nu_k\Big) = \mathcal{L}^1\big(\mathbb{B}_k, \sigma^P|_{\mathbb{B}_k}\big) \cong \mathcal{L}^1\big(\overline{\mathbb{B}}_k, \sigma^P\big)\,.$$

Hierbei ist die letzte Isomorphie durch triviales Fortsetzen gegeben. Damit ist nach der Transformationsformel für Bildmaße auch $f \circ P \in \mathcal{L}^1(S_n, \sigma)$ und man erhält

$$\begin{aligned}\int_{S_n} (f \circ P)(\zeta) d\sigma(\zeta) &= \int_{\overline{\mathbb{B}}_k} f(z)\, d\sigma^P(z)\\ &= \int_{\mathbb{B}_k} f(z)\, d(\sigma^P|_{\mathbb{B}_k})(z)\\ &= \int_{\mathbb{B}_k} f\, d\Big(\tbinom{n-1}{k}(1-|z'|^2)^{n-k-1}\nu_k\Big)\\ &= \binom{n-1}{k} \int_{\mathbb{B}_k} (1-|z'|^2)^{n-k-1} f(z') d\nu_k\big(z'\big)\,.\end{aligned}$$

Somit ist alles gezeigt.

$\square$

Als direkte Folgerung aus Lemma 1.2 erhalten wir:

**1.3 Korollar.** *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{D}, \nu_1)$ eine Funktion in einer komplexen Variablen. Dann gilt für jedes $\eta \in S_n = S$*

$$\int_S f(\langle \zeta, \eta \rangle)\, d\sigma(\zeta) = \frac{n-1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r^2)^{n-2} f(re^{i\theta}) r dr d\theta. \tag{1.9}$$

*Beweis.* Wähle eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ so, dass $U\eta = e_1$. Aus der Rotationsinvarianz des Maßes $\sigma$ und Lemma 1.2, wobei in diesem Fall $P = \langle \cdot, e_1 \rangle$ die orthogonale Projektion $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ auf die erste Variable sei, ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_S f(\langle \zeta, \eta \rangle)\, d\sigma(\zeta) &= \int_S f(\langle U\zeta, U\eta \rangle)\, d\sigma(\zeta) \\
&= \int_S f(\langle \zeta, e_1 \rangle)\, d\sigma(\zeta) \\
&= \binom{n-1}{1} \int_{\mathbb{D}} \left(1 - |w|^2\right)^{n-2} f(w)\, d\nu_1(w) \\
&= \frac{n-1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \left(1 - |w|^2\right)^{n-2} f(w)\, d\lambda_2(w)\,.
\end{aligned}$$

Schreiben wir $w$ in Polarkoordinaten, so folgt die Behauptung.

□

Mit Hilfe von Lemma 1.2 können wir abschließend noch zwei weitere Integralidentitäten folgern, die wir im Laufe der Arbeit verwenden werden.

**1.4 Lemma.** *Es sei $f \in \mathcal{L}^1(S_n, \sigma_n)$. Dann gilt*

$$\int_{S_n} f(\zeta)\, d\sigma_n(\zeta) = \int_{S_n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}\zeta)\, d\theta\, d\sigma_n(\zeta)\,. \tag{1.10}$$

*Ist $n > 1$, so gilt außerdem*

$$\int_{S_n} f(\zeta)\, d\sigma_n(\zeta) = \int_{\mathbb{B}_{n-1}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta', e^{i\theta}\sqrt{1-|\zeta'|^2}))\, d\theta\, d\nu_{n-1}(\zeta')\,. \tag{1.11}$$

*Beweis.* Wir zeigen zuerst Formel (1.11). Seien dazu $n > 1$ und $f \in \mathcal{L}^1(S_n, \sigma_n)$. Wir schreiben wieder $\sigma = \sigma_n$ und $S = S_n$. Für jedes $\theta \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung

$$U_\theta \colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n, \qquad (z', z_n) \longmapsto (z', e^{i\theta} z_n)$$

unitär. Also gilt für $\theta \in \mathbb{R}$

$$\int_S f(\zeta', e^{i\theta}\zeta_n) d\sigma(\zeta) = \int_S (f \circ U_\theta)(\zeta) d\sigma(\zeta) = \int_S f(\zeta) d\sigma(\zeta)\,. \tag{1.12}$$

Proposition B.1 aus Anhang B zufolge ist die Funktion

$$F\colon [-\pi,\pi]\times S \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad (\theta,\zeta)\longmapsto f(\zeta', e^{i\theta}\zeta_n)$$

$\mathcal{B}([-\pi,\pi]\times S)=\mathcal{B}([-\pi,\pi])\times\mathcal{B}(S)$-messbar. Gleichung (1.12) mit $|f|$ statt $f$ liefert

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_S |f(\zeta', e^{i\theta}\zeta_n)|d\sigma(\zeta)\,d\theta = 2\pi\int_S |f(\zeta)|d\sigma(\zeta) < \infty$$

und daher ist nach dem Satz von Fubini $F\in\mathcal{L}^1([-\pi,\pi]\times S, m\times\sigma)$. Hierbei sei $m=\lambda_1|_{[-\pi,\pi]}$. Außerdem ist die Menge

$$N=\{\zeta\in S \mid F(\cdot,\zeta) \text{ ist nicht } m\text{-integrabel}\}\in\mathcal{B}(S)$$

eine $\sigma$-Nullmenge, die Funktion

$$I\colon S\longrightarrow\mathbb{C},\qquad I(\zeta)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(\cdot,\zeta)\,d\theta & ;\zeta\in S\setminus N\\ 0 & ;\text{sonst}\end{cases}$$

ist $\sigma$-integrabel und es gilt

$$\begin{aligned}\int_S I(\zeta)d\sigma(\zeta) &= \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]\times S}F(\theta,\zeta)\,d(m\times\sigma)(\theta,\zeta)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_S f(\zeta', e^{i\theta}\zeta_n)d\sigma(\zeta)\,d\theta \\ &= \int_S f(\zeta)d\sigma(\zeta)\,.\end{aligned} \tag{1.13}$$

Im letzten Schritt wurde wieder Gleichung (1.12) verwendet. Für festes $\zeta'\in\overline{\mathbb{B}}_{n-1}$ sei nun $S_{\zeta'}=\{z\in\mathbb{C}\mid(\zeta',z)\in S\}$. Offensichtlich ist

$$S_{\zeta'}=\{e^{it}\sqrt{1-|\zeta'|^2}\mid t\in\mathbb{R}\}.$$

Da die durch $\theta\mapsto f(\zeta', e^{i\theta}\sqrt{1-|\zeta'|^2})$ definierte Funktion $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ Borel-messbar und $2\pi$-periodisch ist, ist für festes $\zeta'\in\overline{\mathbb{B}}_{n-1}$ die Integrierbarkeit und der Wert des Integrals der Funktionen

$$[-\pi,\pi]\longrightarrow\mathbb{C},\qquad \theta\longmapsto f(\zeta', e^{i\theta}\zeta_n)$$

unabhängig von $\zeta_n\in S_{\zeta'}$. Also definiert

$$g\colon\overline{\mathbb{B}}_{n-1}\longrightarrow\mathbb{C},\qquad \zeta'\longmapsto I(\zeta',\sqrt{1-|\zeta'|^2})$$

eine messbare Funktion so, dass für alle $(\zeta',\zeta_n)\in S$ gilt

$$(g\circ P)(\zeta',\zeta_n)=g(\zeta')=I(\zeta',\sqrt{1-|\zeta'|^2})=I(\zeta',\zeta_n).$$

Hierbei sei $P\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1}$ die Projektion auf die ersten $(n-1)$-Koordinaten. Da $I$ $\sigma$-integrabel ist und $g \circ P = I$ gilt, folgt wie im letzten Teil des Beweises von Lemma 1.2 (mit $k = n-1$), dass $g|_{\mathbb{B}_{n-1}} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{B}_{n-1}, \nu_{n-1})$ ist und dass

$$\int_S (g \circ P)(\zeta) d\sigma(\zeta) = \int_{\mathbb{B}_{n-1}} g(z) d\nu_{n-1}(z)\,.$$

Hieraus erhält man nun zusammen mit (1.13) die gewünschte Formel

$$\begin{aligned}
\int_S f(\zeta) d\sigma(\zeta) &= \int_S I(\zeta) d\sigma(\zeta) \\
&= \int_S (g \circ P)(\zeta) d\sigma(\zeta) \\
&= \int_{\mathbb{B}_{n-1}} g(\zeta) d\nu_{n-1}(\zeta) \\
&= \int_{\mathbb{B}_{n-1}} I(\zeta', \sqrt{1-|\zeta'|^2}) d\nu_{n-1}\big(\zeta'\big) \\
&= \int_{\mathbb{B}_{n-1}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta', e^{i\theta}\sqrt{1-|\zeta'|^2})\, d\theta\, d\nu_{n-1}\big(\zeta'\big)\,.
\end{aligned}$$

Beachte, dass das letzte innere Integral als Null zu lesen ist für alle $z' \in \mathbb{B}_{n-1}$, für die der Integrand nicht in $\mathcal{L}^1([-\pi,\pi], m)$ liegt. Damit ist die Formel (1.11) gezeigt.

Sei wieder $f \in \mathcal{L}^1(S, \sigma)$ gegeben. Indem man die Invarianz von $\sigma$ unter den unitären Abbildungen

$$V_\theta\colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n, \qquad z \longmapsto e^{i\theta} z \qquad\qquad (\theta \in \mathbb{R})$$

benutzt, erhält man genau wie im Beweis von Formel (1.11) die Identität

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_S |f(e^{i\theta}\zeta)| d\sigma(\zeta)\, d\theta = 2\pi \int_S |f(\zeta)| d\sigma(\zeta)\,.$$

Wie oben liefert die Anwendung des Satzes von Fubini die $(m \times \sigma)$-Integrabilität der Funktion

$$G\colon [-\pi,\pi] \times S \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad (\theta, \zeta) \longmapsto f(e^{i\theta}\zeta)$$

und die Gültigkeit der Formel

$$\int_S \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}\zeta)\, d\theta\, d\sigma(\zeta) = 2\pi \int_S f(\zeta) d\sigma(\zeta) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_S f(e^{i\theta}\zeta) d\sigma(\zeta)\, d\theta\,.$$

Auch hier existiert das innere Integral auf der linken Seite für $\sigma$-fast alle $\zeta \in S$. Für die übrigen $\zeta$ ist das innere Integral als Null zu lesen.

$\square$

Setzt man in Lemma 1.4 $f$ als stetige Abbildung auf $S$ voraus, so existieren die inneren Integrale in beiden Formeln für jedes $\zeta \in S$ beziehungsweise jedes $\zeta' \in \mathbb{B}_{n-1}$.

## 1.2 Automorphismen von $\mathbb{B}$

In dieser Arbeit werden holomorphe Funktionen $\Omega \longrightarrow \mathbb{C}^n$, $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen, eine tragende Rolle spielen. Aus diesem Grund werden wir in diesem Abschnitt zunächst grundlegende Eigenschaften solcher Abbildungen formulieren und die nötige Notation einführen, um anschließend biholomorphe Abbildungen $\mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ - auch Automorphismen von $\mathbb{B}$ genannt - angeben und untersuchen zu können. Diese Gruppe der Automorphismen werden wir mit $\operatorname{Aut}(\mathbb{B})$ bezeichnen. Die Bezeichnung dieser Menge als Gruppe wird im laufe des Kapitels gerechtfertigt werden.

Wir beginnen mit einem Resultat über die Determinante einer komplexen Matrix.

**1.5 Lemma.** *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine komplexe Matrix mit Einträgen $a_{jk} = b_{jk} + ic_{jk}$, wobei $b_{jk}, c_{jk} \in \mathbb{R}$ für $j,k = 1,\dots,n$ sind. Setzen wir $B = (b_{jk})_{1\leq j,k\leq n}$ und $C = (c_{jk})_{1\leq j,k\leq n}$ und betrachten die reelle Matrix*

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n},$$

*so gilt* $\det \widetilde{A} = |\det_{\mathbb{C}} A|^2$.

*Beweis.* Seien $A$ und $\widetilde{A}$ wie oben beschrieben. Durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen beziehungsweise Rechenregeln für die Determinante von Blockmatrizen folgt

$$\begin{aligned}
\det \widetilde{A} &= \det \left(\begin{array}{c|c} B & -C \\ \hline C & B \end{array}\right) \\
&= \det_{\mathbb{C}} \left(\begin{array}{c|c} B+iC & iB-C \\ \hline C & B \end{array}\right) \\
&= \det_{\mathbb{C}} \left(\begin{array}{c|c} B+iC & 0 \\ \hline C & B-iC \end{array}\right) \\
&= \det_{\mathbb{C}}(B+iC)\det_{\mathbb{C}}(\overline{B+iC}) \\
&= \det_{\mathbb{C}}(B+iC)\overline{\det_{\mathbb{C}}(B+iC)} \\
&= |\det_{\mathbb{C}}(B+iC)|^2 \\
&= |\det_{\mathbb{C}} A|^2
\end{aligned}$$

□

Wir identifizieren wie üblich $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ vermöge der Abbildung

$$\mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{C}^n, \qquad (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \longmapsto (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n).$$

Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, so bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(\Omega)$ die Menge aller holomorphen Funktionen $\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Ist $f \in \mathrm{C}^1(\Omega)$, so schreiben wir $\mathrm{D}_j f$ beziehungsweise $\overline{\mathrm{D}}_j f$ für die partiellen Pompeiu-Wirtinger-Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z_j} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)\\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)\end{aligned}$$

von $f$ nach $z_j$ $(1 \leq j \leq n)$. Ist $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, so gilt

$$\mathrm{D}_j\, f(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z + he_j) - f(z)}{h}$$

für $z \in \Omega$ und $j = 1, \ldots, n$. Ist $f \in \mathrm{C}^1(\Omega)$ stetig partiell differenzierbar als Funktion der reellen Variablen $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, so ist $f$ holomorph genau dann, wenn $\overline{\mathrm{D}}_j f(z) = 0$ ist für alle $z \in \Omega$ und $j = 1, \ldots, n$. Für $m \in \mathbb{N}$ sei mit $\mathrm{D}_j^m$ die m-te partielle Pompeiu-Wirtinger-Ableitung nach $z_j$ bezeichnet. Ist $w \in \Omega$ und $B_r(w) \subset \Omega$, $r > 0$, eine Kugel und ist $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, so existieren alle komplexen partiellen Ableitungen $\mathrm{D}^\alpha f = \mathrm{D}_1^{\alpha_1} \mathrm{D}_2^{\alpha_2} \ldots \mathrm{D}_n^{\alpha_n} f$ $(\alpha \in \mathbb{N})$ auf $\Omega$, es gilt

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{(\mathrm{D}^\alpha f)(w)}{\alpha!}\,(z - w)^\alpha \tag{1.14}$$

für alle $z \in B_r(w)$ und die Reihe konvergiert auf $B_r(w)$ kompakt gleichmäßig. Ist F eine Funktion $\Omega \longrightarrow \mathbb{C}^n$ mit holomorphen Komponentenfunktionen $f_1, \ldots, f_n$, so nennen wir F holomorph. Ihre Ableitung in einem Punkt $z \in \Omega$ ist definitionsgemäß die $(n \times n)$-Matrix mit Einträgen $a_{jk} = (\mathrm{D}_k\, f_j)(z)$ für $j, k = 1, \ldots, n$, die wir mit $\mathrm{DF}(z)$ bezeichnen.

Schreiben wir die Komponentenfunktionen als $f_j = u_j + iv_j$, so können wir F als Funktion in den Variablen $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ mit Werten im $\mathbb{R}^{2n}$ auffassen. Da alle Komponentenfunktionen $f_j$ holomorph sind, ist F auf $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ total differenzierbar. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen liefern weiter

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_k f_j &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} - i\frac{\partial f}{\partial y_k}\right)\\ &= \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - i\frac{\partial u_j}{\partial y_k}\\ &= \frac{\partial v_j}{\partial y_k} + i\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\end{aligned}$$

für $j, k = 1, \ldots, n$.
Setzen wir $B = (\partial u_j / \partial x_k)_{1 \leq j,k \leq n}$ und $C = (\partial v_j / \partial x_k)_{1 \leq j,k \leq n}$, so hat die reelle Jakobi-Matrix $\mathrm{D}_{\mathbb{R}}\mathrm{F}$ von F die Form

$$\mathrm{D}_{\mathbb{R}}\mathrm{F} = \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}.$$

Insgesamt liefert Lemma 1.5 für $z \in \Omega$ also

$$\det \mathrm{D}_{\mathbb{R}}\mathrm{F}(z) = |\det \mathrm{DF}(z)|^2. \tag{1.15}$$

Wir werden dieses Ergebnis am Ende dieses Abschnitts verwenden, um die Determinante der Jakobi-Matrix einer Abbildung $\psi \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{B})$ im Punkt $\psi^{-1}\,(0)$ zu bestimmen. An dieser Stelle wollen wir noch die Mittelwerteigenschaft holomorpher Funktionen aus $\mathcal{L}^1(\mathbb{B}, \nu)$ und zwei allgemeine Resultate von Henri Cartan zu vektorwertigen holomorphen Funktionen präsentieren.

**1.6 Lemma** (Mittelwerteigenschaft für $\mathcal{O}(\mathbb{B})$)**.** *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{B}, \nu)$ eine holomorphe Funktion $\mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{B}$. Dann gilt*

$$f\,(z) = r^{-2n} \int_{B_r(z)} f(w) d\nu(w)$$

*für jedes $r < 1 - |z|$.*

*Beweis.* Fixiere $z \in \mathbb{B}$ und $r < 1 - |z|$. Sei $\zeta \in S$. Auf jeder Kreisscheibe $r'\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ um den Nullpunkt mit $r < r' < 1 - |z|$ ist die durch $\lambda \longmapsto f\,(z + \lambda\zeta)$ definierte Funktion holomorph. Sie ist daher stetig auf $r\overline{\mathbb{D}}$ und harmonisch auf $r\mathbb{D}$. Die eindimensionale Mittelwerteigenschaft für harmonische Funktionen liefert demnach

$$f\,(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z + re^{i\theta}\zeta)\, d\theta\,.$$

Integrieren wir diese Gleichung über $\zeta \in S$ bezüglich des Maßes $\sigma$, so gilt nach Formel (1.10) in Lemma 1.4

$$f(z) = \int_S f(z + r\zeta) d\sigma(\zeta)\,.$$

Für jedes $t \in [0, 1]$ erhalten wir hieraus

$$2nt^{2n-1} f\,(z) = 2nt^{2n-1} \int_S f(z + rt\zeta) d\sigma(\zeta)$$

und Integration über [0,1] liefert zusammen mit Formel (1.2) angewendet auf die Funktion $v \mapsto f(z + rv)\chi_{\mathbb{B}}(v)$ die Identität

$$f\,(z) = 2n \int_0^1 t^{2n-1} \int_S f(z + rt\zeta) d\sigma(\zeta)\, dt = \int_{\mathbb{B}} f(z + rv) d\nu(v)\,.$$

Substituiert man nun $w = z + rv$, so gilt schließlich

$$f(z) = r^{-2n} \int_{B_r(z)} f(w) d\nu(w) \tag{1.16}$$

und der Beweis ist abgeschlossen.

$\square$

Im Folgenden sei mit $I$ die Einheitsmatrix in $\mathbb{C}^{n\times n}$ bezeichnet.

**1.7 Satz** (Eindeutigkeitssatz von Cartan)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein beschränkes Gebiet mit $0 \in \Omega$ und $F$ eine holomorphe Funktion $\Omega \longrightarrow \Omega$ mit $F(0) = 0$ und $\mathrm{D}\,F(0) = I$. Dann gilt schon $F = id_\Omega$.*

Wir verzichten an dieser Stelle auf die Ausführung des aufwändigen Beweises dieses Satzes. Ein ausführlicher Beweis wird im Vorlesungsskript [3, Satz 2.16] von Prof. Eschmeier zur Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher gegeben. Eine etwas allgemeinere Version wird in [7, Satz 2.1.1] gezeigt. Wir beweisen stattdessen eine Folgerung aus diesem Satz.

**1.8 Korollar.** *Es seien $\Omega_1$ und $\Omega_2$ Gebiete in $\mathbb{C}^n$, die den Nullpunkt enthalten und zusätzlich kreisförmig sind, dass heißt für jedes $z_i \in \Omega_i$ $(i = 1, 2)$ und jedes $\theta \in \mathbb{R}$ gilt auch $e^{i\theta} z_i \in \Omega_i$. Ist $F$ eine biholomorphe Abbildung $\Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ mit $F(0) = 0$ und ist $\Omega_1$ beschränkt, so ist $F$ eine lineare Transformation.*

*Beweis.* Sei F eine Abbildung mit den obigen Eigenschaften. Dann ist offenbar $\mathrm{D}(\mathrm{F}^{-1} \circ \mathrm{F})(0) = I$ und daher $\mathrm{D}(\mathrm{F}^{-1})(0) = (\mathrm{D}\,\mathrm{F}(0))^{-1}$. Für $\theta \in \mathbb{R}$ ist die durch

$$\mathrm{H}(z) = \mathrm{F}^{-1}(e^{-i\theta}\mathrm{F}(e^{i\theta} z))$$

definierte Funktion $\Omega_1 \longrightarrow \Omega_1$ wohldefiniert, da $\Omega_1$ und $\Omega_2$ kreisförmig sind. Da F biholomorph ist, ist H auch holomorph und erfüllt insbesondere $\mathrm{H}(0) = 0$ und $\mathrm{DH}(0) = I$. Somit erfüllt H alle Voraussetzungen des Cartanschen Eindeutigkeitssatzes und desshalb ist $\mathrm{H}(z) = z$ für alle $z \in \Omega_1$. Durch Anwendung von F auf diese Gleichung und anschließende Multiplikation mit dem Faktor $e^{i\theta}$ erhalten wir

$$\mathrm{F}(e^{i\theta} z) = e^{i\theta}\mathrm{F}(z) \tag{1.17}$$

für $z \in \Omega_1, \theta \in \mathbb{R}$. Entwickeln wir nun F um 0 in ihre Potenzreihe, so hat F die Darstellung

$$\mathrm{F}(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{F}_k(z)$$

mit Abbildungen $\mathrm{F}_k : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, deren Komponentenfunktionen homogene Polynome $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ vom Grad k sind (siehe etwa [3, Satz 2.15]). Wegen Gleichung (1.17) und der Eindeutigkeit der homogenen Entwicklung von F im

Nullpunkt muss aber schon $F_k \equiv 0$ für alle $k \geq 2$ gelten, sodass F eine lineare Transformation ist.

$\square$

Wir kommen nun zur Automorphismengruppe $\operatorname{Aut}(\mathbb{B})$. Für $z_0 \in \mathbb{B}$ geben wir zunächst eine biholomorphe Funktion $\varphi_{z_0} : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ an, die 0 und $z_0$ vertauscht, das heißt sie erfüllt $\varphi_{z_0}(z_0) = 0$ und $\varphi_{z_0}(0) = z_0$.

Hierzu sei für $z_0 \neq 0$

$$P_{z_0} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathrm{LH}\{z_0\}, \qquad w \longmapsto \frac{\langle w, z_0\rangle}{\langle z_0, z_0\rangle} z_0$$

die orthogonale Projektion von $\mathbb{C}^n$ auf den von $z_0$ erzeugten Unterraum $\mathrm{LH}\{z_0\} \subset \mathbb{C}^n$. Ist $z_0 = 0$, so setzen wir $P_{z_0}(w) = 0$ für $w \in \mathbb{B}$. Weiter definiere $s_{z_0} = (1 - |z_0|^2)^{1/2}$ und $Q_{z_0} = id_{\mathbb{C}^n} - P_{z_0}$. Für $w \in \{z \in \mathbb{C}^n \mid \langle z, z_0\rangle \neq 1\}$ sei

$$\varphi_{z_0}(w) = \frac{z_0 - P_{z_0}(w) - s_{z_0} Q_{z_0}(w)}{1 - \langle w, z_0\rangle}. \tag{1.18}$$

Aus der Voraussetzung $|z_0| < 1$ schließen wir $\overline{\mathbb{B}} \subset \{z \in \mathbb{C}^n \mid \langle z, z_0\rangle \neq 1\}$ und erhalten folgendes Resultat.

**1.9 Lemma.** *Für $z_0 \in \mathbb{B}$ ist die Funktion*

$$\varphi_{z_0} : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}, \qquad w \longmapsto \varphi_{z_0}(w)$$

*ein wohldefinierter Automorphismus von $\mathbb{B}$ mit folgenden Eigenschaften:*

*(i)* $\varphi_{z_0}(0) = z_0$ *und* $\varphi_{z_0}(z_0) = 0$,

*(ii)* $\mathrm{D}\,\varphi_{z_0}(0) = -s_{z_0}^2 P_{z_0} - s_{z_0} Q_{z_0}$ *und* $\mathrm{D}\,\varphi_{z_0}(z_0) = -P_{z_0}/s_{z_0}^2 - Q_{z_0}/s_{z_0}$,

*(iii)* $\varphi_{z_0}$ *ist eine Involution, dass heißt* $(\varphi_{z_0})^{-1} = \varphi_{z_0}$.

*Beweis.* Sei $z_0 \in \mathbb{B}$. Zur Vereinfachung der Notation setze $P = P_{z_0}$, $Q = Q_{z_0}$ und $s = s_{z_0}$ und schreibe $Pz$ für $P(z)$ beziehungsweise $Qz$ für $Q(z)$. Wie zeigen zuerst, dass $\varphi_{z_0}$ wohldefiniert ist. Man rechnet leicht nach, dass $\langle z_0 - Pz, sQz\rangle = -\langle sQz, z_0 - Pz\rangle = 0$ ist für $z \in \mathbb{B}$. Hiermit folgt

$$\begin{aligned} 1 - |\varphi_{z_0}(z)|^2 &= 1 - \langle \varphi_{z_0}(z), \varphi_{z_0}(z)\rangle \\ &= 1 - \frac{|z_0 - Pz|^2 + s^2|Qz|^2}{(1 - \langle z, z_0\rangle)(1 - \langle z_0, z\rangle)}. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Beachten wir die Beziehungen $|Pz|^2 = \langle Pz, z\rangle = \langle z, Pz\rangle$, $|Qz|^2 = \langle Qz, z\rangle = \langle z, Qz\rangle$ und $\langle z, z_0\rangle\langle z_0, z\rangle = |z_0|^2\langle Pz, z\rangle$, so ergibt sich aus Gleichung (1.19) weiter

$$
\begin{aligned}
1-|\varphi_{z_0}(z)|^2 &= \frac{1-\langle z_0,z_0\rangle-\langle z,z\rangle+\langle z_0,z_0\rangle\langle z,z\rangle}{|1-\langle z,z_0\rangle|^2} \\
&= \frac{\left(1-|z_0|^2\right)\left(1-|z|^2\right)}{|1-\langle z,z_0\rangle|^2}.
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

Aus dieser Gleichung entnehmen wir direkt, dass $|\varphi_{z_0}(z)|<1$ genau dann gilt, wenn $|z|<1$ ist. Also ist $\varphi_{z_0}$ eine wohldefinierte Abbildung $\mathbb{B}\longrightarrow\mathbb{B}$. Dass $\varphi_{z_0}$ holomorph ist, folgt genau wie (i) aus der Definition von $\varphi_{z_0}$. Für (ii) entwickeln wir die Funktion $\varphi_{z_0}$ im Punkt 0 in ihre Potenzreihe. Hierzu bemerken wir, dass $|\langle z,z_0\rangle|<1$ für $z\in\mathbb{B}$ gilt. Wir erhalten also

$$
\begin{aligned}
\varphi_{z_0}(z) &= (z_0-Pz-sQz)\sum_{k=0}^{\infty}\langle z,z_0\rangle^k \\
&= \varphi_{z_0}(0)+|z_0|^2Pz-(P+sQ)\,z+R\,(z)\,,
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$

wobei $R\,(z)=-\langle z,z_0\rangle\,(P+sQ)\,z+(z_0-Pz-sQz)\sum_{k=2}^{\infty}\langle z,z_0\rangle^k$ ist und wegen $|\langle z,z_0\rangle\,(P+sQ)\,z|\leq(1+|s|)\,|z_0||z|^2$ können wir (1.21) in der Form

$$
\varphi_{z_0}(z)=\varphi_{z_0}(0)+|z_0|^2Pz-(P+sQ)\,z+O(|z|^2)
$$

schreiben. Für die Koordinatenfunktionen $R_i$ von $R$ gilt also mit einer geeigneten Konstante $c>0$

$$
|R_i(z)|\leq c|z|^2
$$

für alle $z\in\mathbb{B}$. Somit ist für $j=1,\dots,n$

$$
\left|\frac{R_i(te_j)-R_i(0)}{t}\right|=\frac{|R_i(te_j)|}{|t|}\leq c|t|\xrightarrow{t\to0}0.
$$

Dies zeigt, dass $\mathrm{D}\,R(0)=(\frac{\partial R_i}{\partial z_j}(0))_{1\leq i,j\leq n}=0$. Schließlich berechnen wir hiermit

$$
\lim_{t\to0}\frac{\varphi_{z_0}(te_j)-\varphi_{z_0}(0)}{t}=|z_0|^2Pe_j-(P+sQ)e_j
$$

und erkennen, dass $\mathrm{D}\,\varphi_{z_0}(0)$ die darstellende Matrix von $-s^2P-sQ$ ist. Um $\mathrm{D}\,\varphi_{z_0}(z_0)$ zu bestimmen, bemerken wir

$$
\begin{aligned}
\varphi_{z_0}(z_0+h) &= \frac{z_0-Pz_0-Ph-sQz_0-sQh}{1-|z_0|^2-\langle h,z_0\rangle} \\
&= \frac{-Ph-sQh}{s^2-\langle h,z_0\rangle}
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

und berechnen

$$
\lim_{t\to0}\frac{\varphi_{z_0}(z_0+te_j)-\varphi_{z_0}(z_0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{-Pe_j-sQe_j}{s^2-t\langle e_j,z_0\rangle}=-\frac{Pe_j}{s^2}-\frac{Qe_j}{s}.
$$

Also ist $\mathrm{D}\,\varphi_{z_0}(z_0)$ die darstellende Matrix der Abbildung $-s^{-2}P - s^{-1}Q$. Es bleibt (iii) zu zeigen. Da $\varphi_{z_0}$ holomorph ist, ist die durch $\psi = \varphi_{z_0} \circ \varphi_{z_0}$ definierte Abbildung $\mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ ebenfalls holomorph mit $\psi(0) = 0$. Aus (ii) und den Identitäten $P^2 = P$, $Q^2 = Q$, $QP = PQ = 0$ folgt weiter

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\,\psi(0) &= \mathrm{D}\,\varphi_{z_0}(z_0)\,\mathrm{D}\,\varphi_{z_0}(0)\\ &= P^2 + sQP + s^{-1}PQ + Q^2\\ &= P + Q\\ &= I.\end{aligned}$$

Dem Eindeutigkeitssatz von Cartan zufolge ist also $\psi(z) = z$ für alle $z \in \mathbb{B}$. Schließlich folgt hieraus nun $(\varphi_{z_0})^{-1} = \varphi_{z_0}$. Somit ist $\varphi_{z_0} \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{B})$ gezeigt. □

Das folgende Ergebnis zeigt, dass die Abbildungen $\varphi_z$ mit $z \in \mathbb{B}$ bis auf Rotationen alle Automorphismen der Einheitskugel sind.

**1.10 Lemma.** *Sind $\psi \in Aut(\mathbb{B})$ und $z_0 = \psi^{-1}(0)$, so gibt es eine eindeutige unitäre Abbildung $U \in \mathcal{U}$, sodass sich $\psi$ in der Form $\psi = U\varphi_{z_0}$ darstellen lässt.*

*Beweis.* Seien $\psi \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{B})$ und $z_0 = \psi^{-1}(0)$. Offenbar ist $\psi \circ \varphi_{z_0} \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{B})$ mit $(\psi \circ \varphi_{z_0})(0) = 0$. Da $\mathbb{B}$ ein kreisförmiges, beschänktes Gebiet ist, ist $\psi \circ \varphi_{z_0}$ Korollar 1.8 zufolge eine lineare Transformation. Da die unitären Transformationen die einzigen linearen Transformationen sind, die $\mathbb{B}$ auf $\mathbb{B}$ abbilden, gibt es ein $U \in \mathcal{U}$ mit $\psi \circ \varphi_{z_0} = U$. Mit Hilfe der Identität $(\varphi_{z_0})^{-1} = \varphi_{z_0}$ aus Lemma 1.9 ergibt sich $\psi = U\varphi_{z_0}$. Die Eindeutigkeit der Abbildung $U$ ist offensichtlich. □

Offenbar ist die Verkettung $\psi_1 \circ \psi_2$ zweier Automorphismen $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{B})$ wieder ein Automorphismus von $\mathbb{B}$. Die Menge $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{B})$ bildet also zusammen mit der Kompositionsoperation $\circ$ eine Gruppe. An dieser Stelle können wir dem Beweis von Lemma 1.9 noch folgendes Resultat entnehmen:

**1.11 Proposition.** *Es sei $\psi \in Aut(\mathbb{B})$. Setzen wir $v = \psi^{-1}(0)$, so gilt*

$$1 - \langle \psi(z)\,, \psi(w) \rangle = \frac{(1 - \langle v, v\rangle)\,(1 - \langle z, w\rangle)}{(1 - \langle z, v\rangle)\,(1 - \langle v, w\rangle)}$$

*für alle $z, w \in \mathbb{B}$.*

*Beweis.* Seien $\psi \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{B})$ und $v = \psi^{-1}(0)$. Nach Lemma 1.10 gibt es ein eindeutiges $U \in \mathcal{U}$, sodass $\psi = U\varphi_v$ gilt. Beachten wir, dass

$$\langle U\varphi_v(z)\,, U\varphi_v(w)\rangle = \langle \varphi_v(z)\,, \varphi_v(w)\rangle$$

für $z, w \in \mathbb{B}$ gilt, so erhalten wir entsprechend zu Gleichung (1.19) aus dem Beweis von Lemma 1.9 unter Beachtung, dass $\langle v - P_v z, s_v Q_v w\rangle = -\langle s_v Q_v z, v - P_v w\rangle = 0$ ist

$$1 - \langle \psi(z)\,, \psi(w)\rangle = 1 - \frac{\langle v - P_v z, v - P_v w\rangle + s_v^2 \langle Q_v z, Q_v w\rangle}{(1 - \langle z, v\rangle)\,(1 - \langle v, w\rangle)}.$$

Hieraus erhalten wir wie im Beweis von Lemma 1.9 das Analogon zu Gleichung (1.20) und dies ist die Behauptung.

□

Abschließend können wir für einen beliebigen Punkt $z \in \mathbb{B}$ die Determinante $\det(\mathrm{D}_{\mathbb{R}}\, \psi)(z)$ abhängig von $z$ und $\psi \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{B})$ angeben.

**1.12 Lemma.** *Sei $\psi \in Aut(\mathbb{B})$. Dann gilt für $z \in \mathbb{B}$*

$$\det(\mathrm{D}_{\mathbb{R}}\, \psi)(z) = \left(\frac{1 - |\psi^{-1}(0)|^2}{|1 - \langle z, \psi^{-1}(0)\rangle|^2}\right)^{n+1}.$$

*Beweis.* Seien $\psi \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{B})$ und $z \in \mathbb{B}$. Setzen wir $w = \psi(z)$, so ist die Abbildung $\varphi_w \circ \psi \circ \varphi_z$ ein Automorphismus $\mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ mit $(\varphi_w \circ \psi \circ \varphi_z)(0) = \varphi_w(\psi(z)) = 0$. Wie im Beweis von Lemma 1.10 liefert die Anwendung von Korollar 1.8 auf die Abbildung $\varphi_w \circ \psi \circ \varphi_z$ die Linearität jener Funktion und folglich ist $\varphi_w \circ \psi \circ \varphi_z$ auch unitär. Es gibt also ein $U \in \mathcal{U}$ mit $\varphi_w \circ \psi \circ \varphi_z = U$. Da $\varphi_w$ und $\varphi_z$ Lemma 1.9 (iii) zufolge Involutionen sind folgt wiederum die Identität

$$\psi = \varphi_w U \varphi_z.$$

Bilden wir nun die Ableitung von $\psi$ im Punkt z, so liefert die Kettenregel unter Berücksichtigung, dass $\mathrm{D}\, U(v) = U$ für alle $v \in \mathbb{B}$ gilt,

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\,\psi(z) &= \mathrm{D}\,\varphi_w(U\varphi_z(z)) \cdot \mathrm{D}\,U(\varphi_z(z)) \cdot \mathrm{D}\,\varphi_z(z) \\ &= \mathrm{D}\,\varphi_w(0) \cdot \mathrm{D}\,U(0) \cdot \mathrm{D}\,\varphi_z(z) \\ &= \mathrm{D}\,\varphi_w(0) \cdot U \cdot \mathrm{D}\,\varphi_z(z)\,. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Wir bestimmen nun $\det \mathrm{D}_{\mathbb{R}}\, \varphi_w(0)$. Hierfür ergänzen wir $\{w\}$ zu einer Orthogonalbasis $\{w, w_2, \ldots, w_n\}$ des $\mathbb{C}^n$. Wegen $P_w w = w$ ist aus Lemma 1.9 (ii) ersichtlich, dass $-s^2$ ein Eigenwert von $\mathrm{D}\,\varphi_w(0)$ mit Eigenvektor $w$ ist. Hierbei ist $s = \sqrt{1 - |w|^2}$. Aus der Orthogonalität der Basisvektoren sehen wir weiter $Pw_i = 0$ und eine einfache Rechnung liefert $\mathrm{D}\,\varphi_w(0)\, w_i = -sw_i$ für $2 \leq i \leq n$. Somit ist $-s$ ebenfalls ein Eigenwert von $\mathrm{D}\,\varphi_{z_0}(0)$ mit Eigenvektoren $w_2, \ldots, w_n$. Die Determinante von $\mathrm{D}\,\varphi_w(0)$ ist gleich der Determinante der darstellenden Matrix bezüglich der Basis $\{w, w_2, \ldots, w_n\}$ und daher gilt $\det \mathrm{D}\, \varphi_w(0) = (-1)^n\, s^{n+1}$. Mit Hilfe der Identität (1.15) berechnen wir

$$\begin{aligned} \det \mathrm{D}_{\mathbb{R}}\, \varphi_w(0) &= |\det \mathrm{D}\, \varphi_w(0)|^2 \\ &= |(-1)^n\, s^{n+1}|^2 \\ &= \left(1 - |w|^2\right)^{n+1} . \end{aligned} \tag{1.24}$$

Verfahren wir nun analog, um $\det \mathrm{D}\, \varphi_z(z)$ zu bestimmen, so ist aus der, ebenfalls in Lemma 1.9 (ii) berechneten, Identität $\mathrm{D}\, \varphi_{z_0}(z_0) = -P_{z_0}/s^2 - Q_{z_0}/s$ (wobei $s = \sqrt{1 - |z_0|^2}$) ersichtlich, dass $-s^{-2}$ und $-s^{-1}$ die Eigenwerte von $\mathrm{D}\, \varphi_{z_0}(z_0)$ sind mit $\dim \mathrm{Eig}\left(\mathrm{D}\, \varphi_{z_0}(z_0)\, , -s^{-2}\right) = 1$ und $\dim \mathrm{Eig}\left(\mathrm{D}\, \varphi_{z_0}(z_0)\, , -s^{-1}\right) = n - 1$. Wieder berechnen wir mit Hilfe von Gleichung (1.15)

$$\det \mathrm{D}_{\mathbb{R}}\, \varphi_z(z) = \left(1 - |z|^2\right)^{-n-1} . \tag{1.25}$$

Mit Proposition 1.11, wobei wir w = z setzen, und unter Berücksichtigung, dass $\det_{\mathbb{R}} U = 1$ gilt, liefert (1.23) zusammen mit (1.24) und (1.25) schließlich

$$\begin{aligned} \det \mathrm{D}_{\mathbb{R}}\, \psi(z) &= \det \mathrm{D}_{\mathbb{R}}\, \varphi_w(0) \det U \det \mathrm{D}_{\mathbb{R}}\, \varphi_z(z) \\ &= \left( \frac{1 - |\psi(z)|^2}{1 - |z|^2} \right)^{n+1} \\ &= \left( \frac{\left(1 - |\psi^{-1}(0)|^2\right)\left(1 - |z|^2\right)}{(1 - |z|^2)\, |1 - \langle z, \psi^{-1}(0) \rangle|^2} \right)^{n+1} \\ &= \left( \frac{1 - |\psi^{-1}(0)|^2}{|1 - \langle z, \psi^{-1}(0) \rangle|^2} \right)^{n+1} . \end{aligned}$$

□

# 2 Poisson-Integrale über der Einheitskugel

Wir werden im Folgenden das Poisson-Integral über der Einheitskugel im $\mathbb{C}^n$ einführen und uns genauer mit seinen Eigenschaften beschäftigen. Im ersten Abschnitt präsentieren wir die Cauchysche Integralformel für Funktionen aus der Ball-Algebra $A(\mathbb{B}) = \{f \in C(\overline{\mathbb{B}}) \mid f|_{\mathbb{B}} \in \mathcal{O}(\mathbb{B})\}$. Mit diesem Ergebnis sind wir anschließend in der Lage, eine nützliche Eigenschaft des Poisson-Integrals von Funktionen aus $A(\mathbb{B})$ zu folgern. Unter Zuhilfenahme der im zweiten Abschnitt erarbeiteten Ergebnisse über Maximalfunktionen wenden wir uns im letzten Teil dieses Kapitels dem Hauptthema dieser Arbeit, den sogenannten Korányi-Limiten, zu.

## 2.1 Die Cauchysche Integralformel auf $\mathbb{B}$

Wir beginnen mit der Definition des Poissonkerns.

**2.1 Definition.** *Die Funktion*

$$P : \mathbb{B} \times S \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (z, \zeta) \longmapsto \frac{\left(1 - |z|^2\right)^n}{|1 - \langle z, \zeta\rangle|^{2n}}$$

*heißt* ***Poissonkern über*** $\mathbb{B}$.

Offenbar ist $P$ eine positive und stetige Funktion. Man sieht auch leicht, dass $P(z, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{B}, \mu)$ für jedes $\mu \in M(S)$ und jedes $z \in \mathbb{B}$ gilt.

**2.2 Lemma.** *Der Poissonkern besitzt folgende Eigenschaften:*

*(i) Für jedes $\mu \in M(S)$ und jedes $z \in \mathbb{B}$ ist $P(z, \cdot) \in L^1(\mu)$ .*

*(ii) Für jedes $\zeta_0 \in S$ und jedes $\delta > 0$ gilt*

$$\lim_{z \to \zeta_0} \sup_{\zeta \in A} P(z, \zeta) = 0,$$

*wobei $A = \{\zeta \in S \mid |\zeta - \zeta_0| \geq \delta\}$ sei.*

*(iii) Für $\eta, \zeta \in S$ und $r \in [0, 1)$ gilt $P(r\eta, \zeta) = P(r\zeta, \eta)$.*

*Beweis.* Teil (i) folgt direkt, da die Funktion $P(z,\cdot)$ für festes $z \in \mathbb{B}$ stetig und beschränkt ist. Zum Beweis von (ii) fixieren wir $\zeta_0 \in S$ und $\delta > 0$. Setze

$$m = \inf\{|1 - \langle\zeta_0, \zeta\rangle| \mid \zeta \in A\}.$$

Da die Menge $A = \{\zeta \in S \mid |\zeta - \zeta_0| \geq \delta\}$ kompakt ist und da stetige, reellwertige Funktionen auf Kompakta ihr Minimum annehmen, gibt es ein $\zeta \in A$ mit

$$m = |1 - \langle\zeta_0, \zeta\rangle|.$$

Wäre $m = 0$, so gäbe es wegen $1 = |\langle\zeta_0, \zeta\rangle| \leq |\zeta_0||\zeta| = 1$ ein $t \in \mathbb{R}$ mit $\zeta_0 = e^{it}\zeta$. Dann wäre aber $1 = \langle\zeta, \zeta_0\rangle = e^{it}$ und daher $\zeta_0 = \zeta$ im Widerspruch zur Definition von $A$. Also ist $m > 0$.
Für $z \in \mathbb{B}$, wobei ohne Einschränkung $|z - \zeta_0| < m$ gelte, und $\zeta \in A$ ist

$$|\langle\zeta_0 - z, \zeta\rangle| \leq |\zeta_0 - z| < m \leq |1 - \langle\zeta_0, \zeta\rangle|$$

und daher

$$\begin{aligned} P(z,\zeta) &= \frac{((1-|z|)(1+|z|))^n}{|1 - \langle\zeta_0, \zeta\rangle + \langle\zeta_0 - z, \zeta\rangle|^{2n}} \\ &\leq \frac{2^n|\zeta_0 - z|^n}{(|1 - \langle\zeta_0, \zeta\rangle| - |\langle\zeta_0 - z, \zeta\rangle|)^{2n}} \\ &\leq \frac{2^n|\zeta_0 - z|^n}{(m - |\zeta_0 - z|)^{2n}} \xrightarrow{z \to \zeta_0} 0. \end{aligned}$$

Damit folgt (ii). Für (iii) seien $\eta, \zeta \in S$ und $r \in [0,1)$.
Es gilt

$$\begin{aligned} P(r\eta,\zeta) &= \frac{\left(1 - |r\eta|^2\right)^n}{|1 - \langle r\eta, \zeta\rangle|^{2n}} \\ &= \frac{\left(1 - |r\zeta|^2\right)^n}{|1 - r\overline{\langle\zeta, \eta\rangle}|^{2n}} \\ &= \frac{\left(1 - |r\zeta|^2\right)^n}{|1 - \langle r\zeta, \eta\rangle|^{2n}} \\ &= P(r\zeta, \eta). \end{aligned}$$

□

Somit können wir nun das Poisson-Integral über $\mathbb{B}$ definieren.

**2.3 Definition.** *Für $f \in \mathcal{L}^1(S,\sigma)$ und $\mu \in M(S)$ nennt man die Funktionen*

$$P[f] : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad z \longmapsto \int_S P(z,\zeta)\, f(\zeta)\, d\sigma(\zeta)\,, \tag{2.1}$$

$$P[\mu] : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad z \longmapsto \int_S P(z,\zeta)\, d\mu(\zeta) \tag{2.2}$$

*das* ***Poisson-Integral von $f$ beziehungsweise*** *$\mu$.*

Ist $z_0 \in \mathbb{B}$ so wissen wir nach Lemma 2.2(i) bereits, dass die Abbildung $P(z_0, \cdot)$ für jedes $\mu \in M(S)$ in $L^1(S, \mu)$ liegt. Betrachten wir die Umgebung $U = \{z \in \mathbb{B} \mid |z - z_0| < \frac{1-|z_0|}{2}\}$ des Punktes $z_0$, so gilt für jedes $z \in U$

$$|z| < \tfrac{1}{2}(1 + |z_0|) \leq 1$$

und daher $1 - |z| > \frac{1-|z_0|}{2}$ und

$$|P(z, \zeta)| \leq \frac{\left(1 - |z|^2\right)^n}{(1 - |z|)^{2n}} = \frac{(1 + |z|)^n}{(1 - |z|)^n} \leq \frac{2^{2n}}{(1 - |z_0|)^n}, \quad \zeta \in S.$$

Somit ist das Poisson-Integral des Maßes $\mu$ Satz A.1 zufolge stetig. Betrachten wir nun für $f \in L^1(S, \sigma)$ das durch die Formel $\sigma_f(A) = \int_A f(\zeta)\, d\sigma(\zeta)$ auf der Borelschen $\sigma$-Algebra von $S$ definierte Maß, so sehen wir die Gleichheit $P[f] = P[\sigma_f]$ und folglich ist auch $P[f]$ stetig.

Als Hauptergebnis dieses Abschnitts wollen wir nun zeigen, dass das Poisson-Integral Funktionen aus der Ball-Algebra reproduziert, das heißt für jedes $f \in A(\mathbb{B})$ gilt $f|_{\mathbb{B}} = P[f]$. Wir werden diese Eigenschaft hierzu im ersten Schritt für den Bergman-Kern herleiten.

**2.4 Definition.** *Die Funktion*

$$K : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad (z, w) \longmapsto (1 - \langle z, w \rangle)^{-n-1} \tag{2.3}$$

*heißt* ***Bergman-Kern über*** *$\mathbb{B}$.*

Wir sehen sofort, dass der Bergmankern $K(z, w)$ holomorph in $z$ bei festem $w \in \mathbb{B}$ und antiholomorph in $w$ bei festem $z \in \mathbb{B}$ ist und dass $K(z, w) = \overline{K(w, z)}$ gilt. Für festes $z_0 \in \mathbb{B}$ gilt weiter $|K(z_0, w)| \leq (1 - |z_0|)^{-n-1}$ sodass wir in Analogie zum Poisson-Integral das Bergman-Integral für ein $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{B}, \nu)$ durch

$$K[f] : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad z \longmapsto \int_{\mathbb{B}} K(z, w)\, f(w)\, d\nu(w) \tag{2.4}$$

definieren können.

**2.5 Lemma.** *Für jedes $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{B}, \nu)$ ist das Bergman-Integral $K[f]$ holomorph.*

*Beweis.* Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{B}, \nu)$. Dann ist $K(z, \cdot)\, f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{B}, \nu)$ für $z \in \mathbb{B}$ und $K(\cdot, w)\, f(w) \in \mathcal{O}(\mathbb{B})$ für $w \in \mathbb{B}$.
Für $z_0 \in \mathbb{B}$ und $z \in \{v \in \mathbb{B} \mid |v - z_0| < (1 - |z_0|)/2\}$ ist $1 - |z| \geq (1 - |z_0|)/2$

und daher

$$\begin{aligned}|K(z,w)\,f(w)| &= \frac{|f(w)|}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+1}} \\ &\leq \frac{|f(w)|}{(1-|z|)^{n+1}} \\ &\leq \frac{2^{n+1}|f(w)|}{(1-|z_0|)^{n+1}}\end{aligned}$$

Nach Satz A.4 ist $K[f]$ partiell holomorph und damit holomorph.

□

Wir können nun zeigen, dass das Bergman-Integral holomorphe Funktionen aus $\mathcal{L}^1(\mathbb{B},\nu)$ reproduziert.

**2.6 Lemma.** *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{B},\nu)$ holomorph. Dann ist $f = K[f]$.*

*Beweis.* Seien $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{B},\nu)$ holomorph und $a \in \mathbb{B}$. Wir betrachten die Abbildung

$$g : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto \frac{K(a,a)}{K(z,a)} f(z)\,,$$

welche wegen

$$|g(z)| = \left|\frac{1-\langle z,a\rangle}{1-|a|^2}\right|^{n+1} |f(z)| \leq (1-|a|)^{-n-1}\,|f(z)|$$

in $\mathcal{L}^1(\mathbb{B},\nu)$ liegt. Nach der Transformationsformel ist $(g\circ\varphi_a)|\det \mathrm{D}_{\mathbb{R}}\,\varphi_a| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{B},\nu)$. Da $|\det \mathrm{D}_{\mathbb{R}}\,\varphi_a|\colon \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ messbar ist und da man aus Lemma 1.12 durch eine einfache Abschätzung eine Konstante $c > 0$ mit

$$c \leq |\det \mathrm{D}_{\mathbb{R}}\,\varphi_a|$$

auf $\mathbb{B}$ erhält, ist auch $g\circ\varphi_a \in \mathcal{L}^1(\mathbb{B},\nu)$. Da $K(\cdot,a)$ und $f$ holomorph sind, ist auch $g$ holomorph und weil $\varphi_a$ nach Lemma 1.9 holomorph ist, gilt dies auch für $g\circ\varphi_a$. Insgesamt ist $g\circ\varphi_a \in \mathcal{L}^1(\mathbb{B},\nu)\cap\mathcal{O}(\mathbb{B})$. Lemma 1.6 mit $z=0$ angewendet auf die Abbildung $g\circ\varphi_a$ liefert durch Übergang zum Grenzwert $r \uparrow 1$

$$(g\circ\varphi_a)(0) = \int_{\mathbb{B}} (g\circ\varphi_a)(u)\,d\nu(u)\,. \tag{2.5}$$

Substituieren wir $u = \varphi_a(w)$ in (2.5), so erhalten wir

$$f(a) = g(a) = (g\circ\varphi_a)(0) = \int_{\mathbb{B}} g(w)\,|det\,(\mathrm{D}_{\mathbb{R}}\,\varphi_a)\,(w)|d\nu(w)\,. \tag{2.6}$$

Mit Lemma 1.12 folgt

$$\det\left(\mathrm{D}_{\mathbb{R}}\,\varphi_a\right)(w) = \left(\frac{1-|a|^2}{|1-\langle w,a\rangle|^2}\right)^{n+1} = \frac{K(a,w)\,K(w,a)}{K(a,a)}. \tag{2.7}$$

Setzen wir (2.7) in (2.6) ein und beachten wir die Definition von $g$, so erhalten wir $f(a) = K[f](a)$.

$\square$

Mit Hilfe des letzten Ergebnisses können wir nun im nächsten Schritt die Cauchysche Integralformel auf der Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$ auf die Einheitskugel $\mathbb{B} \subset \mathbb{C}^n$ verallgemeinern. Diese Formel wird es uns ermöglichen zu zeigen, dass das Poisson-Integral Funktionen aus der Ball-Algebra reproduziert. Wir führen zuerst den Cauchy-Kern ein.

**2.7 Definition.** *Die Funktion*

$$C : (\overline{\mathbb{B}} \times S) \setminus M \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad (z,\zeta) \longmapsto (1-\langle z,\zeta\rangle)^{-n}, \tag{2.8}$$

*wobei* $M = \{(z,\zeta) \in \overline{\mathbb{B}} \times S \mid \langle z,\zeta\rangle = 1\}$ *sei, heißt* ***Cauchy-Kern über*** $\mathbb{B}$.

Der Cauchy-Kern ist offenbar holomorph in $z \in \mathbb{B}$ bei jedem festen $\zeta \in S$. Für festes $z \in \mathbb{B}$ ist die Abbildung $C(z,\cdot)$ als stetige Funktion auf $S$ beschränkt messbar und daher über $S$ integrierbar bezüglich jedem Maß $\mu \in M(S)$. Wir können also genau wie beim Poissonkern für $f \in \mathcal{L}^1(S,\sigma)$ beziehungsweise $\mu \in M(S)$ die Cauchy-Integrale

$$C[f] : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto \int_S C(z,\zeta)\,f(\zeta)\,d\sigma(\zeta) \tag{2.9}$$

beziehungsweise

$$C[\mu] : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto \int_S C(z,\zeta)\,d\mu(\zeta) \tag{2.10}$$

definieren. Wie beim Bergman-Integral kann man zeigen, dass $C[f]$ und $C[\mu]$ auf $\mathbb{B}$ holomorph sind. Wir können den Poissonkern in Termen des Cauchykerns ausdrücken, wie die folgende Proposition zeigt.

**2.8 Proposition.** *Für* $z \in \mathbb{B}$ *und* $\zeta \in S$ *gilt*

$$P(z,\zeta) = \frac{C(z,\zeta)\,C(\zeta,z)}{C(z,z)}.$$

*Beweis.* Seien $z \in \mathbb{B}$ und $\zeta \in S$. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{C(z,\zeta)\,C(\zeta,z)}{C(z,z)} &= \frac{\left(1-|z|^2\right)^n}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^n\,(1-\langle \zeta,z\rangle)^n}\\ &= \frac{\left(1-|z|^2\right)^n}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^n\,(1-\overline{\langle z,\zeta\rangle})^n}\\ &= \frac{\left(1-|z|^2\right)^n}{|1-\langle z,\zeta\rangle|^{2n}}\\ &= P\,(z,\zeta)\end{aligned}$$

□

Das nächste Lemma zeigt, dass das Cauchyintegral mit unitären Abbildungen $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ kommutiert.

**2.9 Lemma.** *Seien $U \in \mathcal{U}$ eine unitäre Abbildung und $f \in \mathcal{L}^1(S,\sigma)$, dann gilt*

$$C[f\circ U] = C[f]\circ U.$$

*Beweis.* Seien $U \in \mathcal{U}$ und $f \in \mathcal{L}^1(S,\sigma)$. Wir bemerken dass $C\big(z,U^{-1}\zeta\big) = C(Uz,\zeta)$ ist. Hieraus und aus der Rotationsinvarianz des Maßes $\sigma$ folgt für $z \in \mathbb{B}$

$$\begin{aligned}C[f\circ U]\,(z) &= \int_S C(z,\zeta)\,f(U\zeta)\,d\sigma(\zeta)\\ &= \int_S C(Uz,\zeta)\,f(\zeta)\,d\sigma(\zeta)\\ &= (C[f]\circ U)(z)\,.\end{aligned}$$

□

Wir zeigen nun die Cauchysche Integralformel für Funktionen aus der Ball-Algebra $A\,(\mathbb{B})$.

**2.10 Satz** (Die Cauchysche Integralformel auf $\mathbb{B}$)**.** *Sei $f \in A\,(\mathbb{B})$. Dann gilt*

$$f(z) = \int_S \frac{f(\zeta)}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^n}\,d\sigma(\zeta)$$

*für jedes $z \in \mathbb{B}$.*

*Beweis.* Seien $f \in A(\mathbb{B})$ und $z \in \mathbb{B}$. Benutzen wir die Definition des Cauchyintegrals, so besagt die Cauchysche Integralformel, dass $f|_{\mathbb{B}} = C[f]$. Wir betrachten zuerst den Fall $n = 1$. Es seien $z \in \mathbb{D} = \mathbb{B}_1$ und $|z| < r < 1$. Als stetige Funktion auf dem Kompaktum $\overline{\mathbb{D}}$ ist $f$ beschränkt messbar und daher $f \in \mathcal{L}^1(S_1, \sigma_1)$. Nach Voraussetzung ist die durch die Vorschrift $v \mapsto f(rv)$ definierte Abbildung auf einer echten offenen Obermenge von $\overline{\mathbb{D}}$ holomorph und daher gilt wegen der gewöhnlichen Cauchyschen Integralformel

$$\begin{aligned} f(rz) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S_1} \frac{f(r\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(re^{it})}{1 - ze^{-it}}\, d\lambda_1(t), \end{aligned} \tag{2.11}$$

hierbei ist das erste Integral als Kurvenintegral zu lesen.
Schreiben wir $\left(\lambda_1|_{[-\pi,\pi]}\right)^{\alpha}$ für das Bildmaß von $\lambda_1|_{[-\pi,\pi]}$ unter der durch $t \mapsto e^{it}$ definierten Borel-messbaren Abbildung $\alpha\colon [-\pi, \pi] \to S_1$, so gilt

$$\sigma_1 = \tfrac{1}{2\pi} \left(\lambda_1|_{[-\pi,\pi]}\right)^{\alpha}.$$

Daher folgt aus (2.11) mit Hilfe der Transformationsformel für Bildmaße

$$f(rz) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(re^{it})}{1 - z\overline{e^{it}}}\, d\lambda_1(t) = \int_{S_1} \frac{f(r\zeta)}{1 - z\overline{\zeta}}\, d\sigma_1(\zeta)\,. \tag{2.12}$$

Als stetige Funktion auf der kompakten Menge $\overline{\mathbb{D}}$ ist $f$ schon gleichmäßig stetig und somit erhält man aus (2.12) durch den Grenzübergang $r \uparrow 1$ die Behauptung.

Sei $n > 1$ und $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{B}$. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $z_n = 0$ ist. Denn ist die Aussage für alle $z \in \mathbb{B}$ mit $z_n = 0$ schon gezeigt, so wählen wir eine unitäre Abbildung $U \in \mathcal{U}$ so, dass $Uz = (v, 0)$ gilt für ein $v \in \mathbb{C}^{n-1}$ mit $|v| < 1$. Lemma 2.9 liefert somit

$$\begin{aligned} C[f](z) &= C[f]\big(U^{-1}(v,0)\big) \\ &= C\big[f \circ U^{-1}\big](v,0) \\ &= f\big(U^{-1}(v,0)\big) \\ &= f(z)\,. \end{aligned}$$

Schreibe also $z = (z', 0)$ mit $z' = (z_1, \ldots, z_{n-1})$. Gleichermaßen werden wir $u \in \mathbb{C}^n$ in der Form $u = (u', u_n)$ schreiben, wobei $u' = (u_1, \ldots, u_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ und $u_n \in \mathbb{C}$ sind. Da $|z| < 1$ ist, ist die durch die Formel $g(w) = C(z, w)\, f(w)$ definierte Funktion $\overline{\mathbb{B}} \longrightarrow \mathbb{C}$ wohldefiniert und für jedes $\zeta = (\zeta', \zeta_n) \in S$ ist die Abbildung $\overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}, u \mapsto g(\zeta', u\zeta_n)$ stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$ und holomorph auf $\mathbb{D}$. Somit liefert der Fall $n = 1$

$$g\big(\zeta', 0\big) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\zeta', e^{i\theta}\zeta_n)\, d\theta \tag{2.13}$$

Da $g|_S$ stetig ist, folgt mit Formel (1.11) aus Lemma 1.4, dass

$$\int_{\mathbb{B}_{n-1}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\zeta', e^{i\theta}\zeta_n)\, d\theta\, d\nu_{n-1}\big(\zeta'\big) = \int_S g(\zeta)\, d\sigma(\zeta) = C[f](z)\,. \qquad (2.14)$$

Dabei ist auf der linken Seite $\zeta_n = \sqrt{1-|\zeta'|}$ für jedes $\zeta' \in \mathbb{B}_{n-1}$. Weiter bemerken wir, dass $C(z,w) = K(z',w')$ für jedes $w \in \overline{\mathbb{B}}$ gilt, wobei K der Bergman-Kern in $\mathbb{B}_{n-1}$ sei. Satz 2.6 liefert für die linke Seite von Gleichung (2.13) schließlich

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}_{n-1}} g\big(\zeta',0\big)\, d\nu_{n-1}\big(\zeta'\big) &= \int_{\mathbb{B}_{n-1}} K\big(z',\zeta'\big)\, f\big(\zeta',0\big)\, d\nu_{n-1}\big(\zeta'\big) \\ &= f\big(z',0\big) \\ &= f(z)\,.\end{aligned} \qquad (2.15)$$

Die Formeln (2.14) und (2.15) liefern nun die Behauptung.

□

Als direkte Folgerung aus dem letzten Ergebnis erhalten wir:

**2.11 Satz.** *Sei $f \in A(\mathbb{B})$. Dann gilt $f(z) = P[f](z)$ für jedes $z \in \mathbb{B}$.*

*Beweis.* Seien $f \in A(\mathbb{B})$ und $z \in \mathbb{B}$. Wegen $|z| < 1$ ist $C(\cdot, z) \in A(\mathbb{B})$ und daher ist die durch die Formel $g(w) = (C(w,z)\,/C(z,z))f(w)$ deinierte Funktion $\overline{\mathbb{B}} \longrightarrow \mathbb{C}$ ebenfalls in $A(\mathbb{B})$ enthalten. Weiter gilt offenbar $g(z) = f(z)$. Wenden wir nun die Cauchysche Integralformel auf g an, so erhalten wir zusammen mit Proposition 2.8

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_S C(z,\zeta)\, g(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \\ &= \int_S \frac{C(z,\zeta)\, C(\zeta,z)}{C(z,z)} f(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \\ &= \int_S P\,(z,\zeta)\, f(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \\ &= P[f](z)\,. \end{aligned}$$

□

Hieraus ergibt sich abschließend:

**2.12 Korollar.** *Es sei $0 \le r < 1$. Dann gilt*

$$\int_S P\,(r\eta,\zeta)\, d\sigma(\zeta) = 1$$

*für jedes feste $\eta \in S$ und*

$$\int_S P(r\eta, \zeta)\, d\sigma(\eta) = 1$$

*für jedes feste $\zeta \in S$.*

*Proof.* Sei $0 \leq r < 1$. Offenbar ist die konstante Funktion $f \equiv 1$ Element der Menge $A(\mathbb{B})$. Für festes $\eta \in S$ liefert die Anwendung von Satz 2.11 auf die Funktion $f$ an der Stelle $z = r\eta$

$$1 = f(r\eta) = \int_S P(r\eta, \zeta)\, d\sigma(\zeta)\,.$$

Weiter liefert Lemma 2.2(iii) zusammen mit obiger Gleichung

$$1 = \int_S P(r\eta, \zeta)\, d\sigma(\zeta) = \int_S P(r\zeta, \eta)\, d\sigma(\zeta)\,.$$

Damit ist alles gezeigt.

□

## 2.2 Maximalfunktionen

Die Maximalfunktion $M_\mu$ bezüglich eines Maßes $\mu \in M(S)$ ist eine nach unten halbstetige Funktion $S \longrightarrow [0,\infty]$. Wir werden sie im zweiten Teil dieses Abschnitts definieren und im Anschluss daran Maximalfunktionen für Funktionen $\mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{C}$ einführen. Im folgenden definieren wir zunächst eine Metrik auf $S$, welche für die Definition der Funktion $M_\mu$ benötigt wird.

**2.13 Lemma.** *Für die durch*

$$d\colon \overline{\mathbb{B}} \times \overline{\mathbb{B}} \longrightarrow [0,\infty) \quad , \quad (u,v) \longmapsto |1-\langle u,v\rangle|^{\frac{1}{2}}$$

*definierte Abbildung und für $u,v,w \in \overline{\mathbb{B}}$, $U \in \mathcal{U}$ gilt:*

*(i)* $0 \le d(u,v) \le \sqrt{2}$,

*(ii)* $d(u,v) = d(v,u)$,

*(iii)* $d(Uu,Uv) = d(u,v)$,

*(iv)* $d(u,v) \le d(u,w) + d(w,v)$,

*(v)* $d|_{S\times S}$ *definiert eine Metrik, die die übliche Topologie (Relativtopologie von $\mathbb{C}^n$) auf $S$ induziert. Für $\zeta,\eta \in S$ gilt*

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|\zeta-\eta| \le d(\zeta,\eta) \le |\zeta-\eta|^{1/2}.$$

*Beweis.* Die Punkte (ii) und (iii) folgen direkt aus der Definition der Funktion $d$, und die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung liefert

$$0 \le |1-\langle u,v\rangle| \le 1 + |u||v| \le 2$$

für $u,v \in \overline{\mathbb{B}}$, sodass (i) gezeigt ist. Seien nun $u,v,w \in \overline{\mathbb{B}}$ mit Komponenten $u_i,v_i,w_i \in \mathbb{C}, i=1,\dots,n$. Um (iv) zu zeigen, können wir wegen Punkt (iii) ohne Beschränkung der Allgemeinheit annhemen, dass $w = re_1$ ist für ein $r \in [0,1]$, denn sonst wählen wir $U \in \mathcal{U}$ mit $Uw = |w|e_1$ und es folgt

$$d(u,v) = d(Uu,Uv) \le d(Uu,Uw) + d(Uw,Uv) = d(u,w) + d(w,v).$$

Es bleibt also

$$|1-\langle u,v\rangle| \le (|1-ru_1|^{\frac{1}{2}} + |1-rv_1|^{\frac{1}{2}})^2 \tag{2.16}$$

zu zeigen. Schreiben wir $u' = u - u_1e_1$ beziehungsweise $v' = v - v_1e_1$, so gilt der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung zufolge

$$\begin{aligned} |1-\langle u,v\rangle| &= |1-\langle u'+u_1e_1, v'+v_1e_1\rangle| \\ &= |1-u_1\overline{v}_1 + \langle u',v'\rangle| \\ &\le |1-u_1\overline{v}_1| + |u'||v'|. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Wir wollen nun die Ungleichung $|r - \overline{v}_1| \leq |1 - r\overline{v}_1|$ einsehen. Für $r\overline{v}_1 = 1$ ist $r = 1 = \overline{v}_1$ und die Ungleichung ist klar. Auch für $r = 1$ ist nichts zu zeigen. Ist $r \in [0, 1)$ so ist aus der Funktionentheorie wohlbekannt, dass $|r - z| \leq |1 - rz|$ für alle $z \in \overline{\mathbb{D}}$ gilt. Also gilt die gewünschte Ungleichung. Mit Hilfe dieser Ungleichung gilt außerdem

$$\begin{aligned} |1 - u_1\overline{v}_1| &= |1 - ru_1 + u_1(r - \overline{v}_1)| \\ &\leq |1 - ru_1| + |r - \overline{v}_1| \\ &\leq |1 - ru_1| + |1 - r\overline{v}_1| \\ &= |1 - ru_1| + |1 - rv_1| \end{aligned} \tag{2.18}$$

und aus $|u|^2 = u_1\overline{u}_1 + |u'|^2 \leq 1$ folgt

$$\begin{aligned} |u'|^2 &\leq 1 - |u_1|^2 \\ &\leq 1 - |ru_1|^2 \\ &= (1 - |ru_1|)(1 + |ru_1|) \\ &\leq 2(1 - |ru_1|) \\ &\leq 2|1 - ru_1|. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Eine analoge Rechnung liefert $|v'|^2 \leq 2|1 - rv_1|$. Mit (2.18) und (2.19) erhält man aus (2.17)

$$\begin{aligned} |1 - \langle u, v\rangle| &\leq |1 - ru_1| + |1 - rv_1| + 2|1 - ru_1|^{\frac{1}{2}}|1 - rv_1|^{\frac{1}{2}} \\ &= (|1 - ru_1|^{\frac{1}{2}} + |1 - rv_1|^{\frac{1}{2}})^2. \end{aligned}$$

Somit erfüllt $d$ die Dreiecksungleichung. Sind $\zeta, \eta \in S$, so sieht man leicht, dass $d(\zeta, \eta) = 0$ ist genau dann, wenn $\zeta = \eta$ gilt. Somit definiert $d|_{S \times S}$ eine Metrik auf S. Es ist zu beachten, dass $d$ keine Metrik auf $\overline{\mathbb{B}}$ definiert, denn für $w \in \mathbb{B}$ gilt $d(w, w) = (1 - |w|^2)^{1/2} > 0$. Es bleibt zu zeigen, dass $d$ die übliche Topologie auf S induziert. Hierfür seien $\tau$ die übliche Topologie auf $S$ und $\tau_d$ die von $d$ induzierte Topologie auf $S$. Für alle $\zeta, \eta \in S$ gilt

$$\begin{aligned} |\zeta - \eta| &= (1 - \langle \zeta, \eta\rangle - \langle \eta, \zeta\rangle + 1)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (|1 - \langle \zeta, \eta\rangle| + |1 - \langle \eta, \zeta\rangle|)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2}\, d(\zeta, \eta) \end{aligned}$$

und daher ist $\tau \subset \tau_d$. Andererseits liefert die Abschätzung

$$d(\zeta, \eta) = |\langle \zeta, \zeta\rangle - \langle \zeta, \eta\rangle|^{\frac{1}{2}} \leq |\zeta - \eta|^{\frac{1}{2}}$$

für $\zeta, \eta \in S$ die umgekehrte Inklusion, sodass $\tau = \tau_d$. Somit ist alles gezeigt.

$\square$

Im Folgenden schreiben wir wieder $d$, wenn wir von der Metrik $d|_{S\times S}$ sprechen. Mit $\mathrm{K}_\varepsilon(\zeta) = \{\eta \in S \mid d(\eta,\zeta) < \varepsilon\}$ bezeichnen wir die Kugel bezüglich $d$ um den Punkt $\zeta \in S$ mit Radius $\varepsilon > 0$. Wegen Punkt (i) aus Lemma 2.13 gilt offenbar $\mathrm{K}_\varepsilon(\zeta) = S$ für jedes $\varepsilon > \sqrt{2}$. Ist $U \in \mathcal{U}$, so folgt aus Punkt (iii) aus Lemma 2.13 unmittelbar

$$U\,\mathrm{K}_\varepsilon(\zeta) = \mathrm{K}_\varepsilon(U\zeta). \tag{2.20}$$

Das folgende Ergebnis wird bei der Untersuchung von Maximalfunktionen von Poisson-Integralen am Ende dieses Abschnitts äußerst hilfreich sein.

**2.14 Lemma.** *Schreiben wir $e_1 = (1,0,\dots)$ für den ersten Einheitsvektor in $\mathbb{C}^n$, so gilt*

$$\sup_{\varepsilon>0} \frac{\sigma_1(K_\varepsilon(e_1))}{\varepsilon^2} = \frac{1}{2}, \qquad \inf_{\varepsilon\in(0,\sqrt{2}]} \frac{\sigma_1(K_\varepsilon(e_1))}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\pi}$$

*für $n = 1$ und*

$$\sup_{\varepsilon>0} \frac{\sigma_n(K_\varepsilon(e_1))}{\varepsilon^{2n}} < \infty, \qquad \inf_{\varepsilon\in(0,\sqrt{2}]} \frac{\sigma_n(K_\varepsilon(e_1))}{\varepsilon^{2n}} = \frac{1}{2^n}$$

*für $n > 1$.*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst den Fall n = 1. In diesem Fall ist $e_1 = 1$. Ist $\varepsilon > \sqrt{2}$, so folgt $\sigma(\mathrm{K}_\varepsilon(1)) = \sigma(S) = 1$ und daher gilt

$$\frac{\sigma(\mathrm{K}_\varepsilon(1))}{\varepsilon^2} \leq \frac{1}{2}$$

für alle $\varepsilon > \sqrt{2}$. Sei nun $\varepsilon \in (0,\sqrt{2}]$. Man sieht leicht, dass $\mathrm{K}_\varepsilon(1) = \{\zeta \in S \mid |1-\zeta| < \varepsilon^2\}$ die euklidische Kugel um 1 mit Radius $\varepsilon^2$ ist. Abhängig von $\varepsilon$ gibt es $\theta = \theta(\varepsilon) \in (0,\pi)$ mit

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 &= \sin^2(\theta) + (1-\cos(\theta))^2 \\ &= 2(1-\cos(\theta)) \\ &= 2(1-(\cos^2(\tfrac{\theta}{2}) - \sin^2(\tfrac{\theta}{2}))) \\ &= 4\sin^2(\tfrac{\theta}{2}) \end{aligned}$$

gilt. Hieraus folgt mit dem Satz von Pythagoras

$$\frac{\sigma(\mathrm{K}_\varepsilon(1))}{\varepsilon^2} = \frac{2\theta}{2\pi\varepsilon^2} = \frac{\theta}{\pi\varepsilon^2} = \frac{\theta}{2\pi\sin(\frac{\theta}{2})}. \tag{2.21}$$

Die rechte Seite von Gleichung (2.21) ist monoton wachsend in $\theta \in (0, \pi]$ und daher ist die linke Seite jener Gleichung monoton wachsend in $\varepsilon \in (0, \sqrt{2}]$. Insgesamt folgt also

$$\begin{aligned}\inf_{\varepsilon \in (0,\sqrt{2}]} \frac{\sigma_1(\mathrm{K}_\varepsilon(1))}{\varepsilon^2} &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sigma_1(\mathrm{K}_\varepsilon(1))}{\varepsilon^2} \\ &= \lim_{\theta \to 0} \frac{\theta}{2\pi \sin(\frac{\theta}{2})} \\ &= \frac{1}{\pi}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\sup_{\varepsilon > 0} \frac{\sigma_1(\mathrm{K}_\varepsilon(1))}{\varepsilon^2} &= \lim_{\varepsilon \to \sqrt{2}} \frac{\sigma_1(\mathrm{K}_\varepsilon(1))}{\varepsilon^2} \\ &= \lim_{\theta \to \pi} \frac{\theta}{2\pi \sin(\frac{\theta}{2})} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Sei nun $n > 1$. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ und jedes $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in S$ gilt offenbar $\chi_{\mathrm{K}_\varepsilon(e_1)}(\zeta) = \chi_{\mathrm{B}_{\varepsilon^2}(1)}(\zeta_1)$, wobei $\mathrm{B}_{\varepsilon^2}(1) = \{\eta \in \mathbb{D} \mid |1 - \eta| < \varepsilon^2\}$ ist. Diese Identität und eine Anwendung von Korollar 1.3 - mit $\eta = e_1$ - auf die Funktion $\chi_{\mathrm{B}_{\varepsilon^2}(1)}$ liefern

$$\begin{aligned}\sigma(\mathrm{K}_\varepsilon(e_1)) &= \int_S \chi_{\mathrm{B}_{\varepsilon^2}(1)}(\zeta_1) d\sigma(\zeta) \\ &= \int_S \chi_{\mathrm{B}_{\varepsilon^2}(1)}(\langle \zeta, e_1 \rangle) d\sigma(\zeta) \\ &= \frac{n-1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - r^2)^{n-2} \chi_{\mathrm{B}_{\varepsilon^2}(1)}(re^{i\theta}) r \, d\theta \, dr \\ &= \frac{n-1}{\pi} \int_{E_\varepsilon} (1 - |z|^2)^{n-2} d\lambda_2(z)\,,\end{aligned} \tag{2.22}$$

wobei $E_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \text{ und } |1 - z| < \varepsilon^2\} = \mathrm{B}_{\varepsilon^2}(1)$ ist. Man prüft leicht, dass die durch die Formel $F(z) = \varepsilon^2/(1 - z)$, $z \in E_\varepsilon$, definierte Funktion ein Diffeomorphismus $E_\varepsilon \longrightarrow F(E_\varepsilon)$ ist mit Umkehrabbildung $F^{-1}(w) = 1 - \varepsilon^2/w$ und $\det \mathrm{D}_{\mathbb{R}} F^{-1}(w) = \varepsilon^4/|w|^4$. Substituiert man in der rechten Seite von Gleichung (2.22) $w = F(z)$ und schreibt $w = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so folgt durch eine weitere Rechnung

$$\begin{aligned}\sigma(\mathrm{K}_\varepsilon(e_1)) &= \frac{n-1}{\pi}\int_{F(E_\varepsilon)}(1-|1-\varepsilon^2/w|^2)^{n-2}(\varepsilon/|w|)^4 d\lambda_2(w)\\ &= \frac{n-1}{\pi}\int_{F(E_\varepsilon)}(2x-\varepsilon^2)^{n-2}(\varepsilon/|w|)^{2(n-2)}(\varepsilon/|w|)^4 d\lambda_2(w)\\ &= \frac{(n-1)\varepsilon^{2n}}{\pi}\int_{F(E_\varepsilon)}(2x-\varepsilon^2)^{n-2}|w|^{-2n}d\lambda_2(w)\end{aligned}$$

und somit

$$\frac{\sigma(\mathrm{K}_\varepsilon(e_1))}{\varepsilon^{2n}} = \frac{n-1}{\pi}\int_{F(E_\varepsilon)}(2x-\varepsilon^2)^{n-2}|w|^{-2n}d\lambda_2(w)\,. \tag{2.23}$$

Für das Bild von $F$ gilt

$$\begin{aligned}F(E_\varepsilon) &= \{w \in \mathbb{C}^* \mid |1-\varepsilon^2/w| < 1 \text{ und } |1-(1-\varepsilon^2/w)| < \varepsilon^2\}\\ &= \{w \in \mathbb{C} \mid |w-\varepsilon^2| < |w| \text{ und } |w| > 1\}\\ &= \{w \in \mathbb{C} \mid 2\,Re\,w > \varepsilon^2 \text{ und } |w| > 1\}.\end{aligned}$$

Man erkennt hieraus, dass für $\delta, \gamma > 0$ mit $\delta < \gamma$ offenbar die Inklusion $F(E_\gamma) \subset F(E_\delta)$ gilt und daher ist

$$\begin{aligned}\int_{F(E_\gamma)}(2x-\gamma^2)^{n-2}|w|^{-2n}\,d\lambda_2(w) &\le \int_{F(E_\gamma)}(2x-\delta^2)^{n-2}|w|^{-2n}\,d\lambda_2(w)\\ &\le \int_{F(E_\delta)}(2x-\delta^2)^{n-2}|w|^{-2n}\,d\lambda_2(w)\,.\end{aligned}$$

Es folgt

$$\inf_{\varepsilon\in(0,\sqrt{2}]}\frac{\sigma(\mathrm{K}_\varepsilon(e_1))}{\varepsilon^{2n}} = \frac{1}{2^n}.$$

Andersherum betrachtet bilden die durch die Formeln

$$f_k(w) = (2x-\varepsilon_k^2)^{n-2}|w|^{-2n}\chi_{F(E_{\varepsilon_k})}(w)$$

definierten messbaren Funktionen $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ wegen der obigen Ausführungen für jede streng monoton fallende Nullfolge $(\varepsilon_k)_{k\ge 1}$ eine punktweise monoton wachsende Folge von Funktionen. Dem Satz von der monotonen Konvergenz zufolge gilt also

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{C}}(2x-\varepsilon_k^2)^{n-2}|w|^{-2n}\chi_{F(E_{\varepsilon_k})}(w)d\lambda_2(w) = 2^{n-2}\int_E x^{n-2}|w|^{-2n}d\lambda_2(w)$$

für jede streng monoton fallende Nullfolge $(\varepsilon_k)_{k\geq 1}$, wobei

$$E = \{w = x + iy \in \mathbb{C} \mid x > 0 \text{ und } |w| > 1\}$$

sei. Aus dieser Argumentation und Gleichung (2.23) folgt nun

$$\begin{aligned}\sup_{\varepsilon>0} \frac{\sigma(\mathrm{K}_\varepsilon(e_1))}{\varepsilon^{2n}} &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\sigma(\mathrm{K}_\varepsilon(e_1))}{\varepsilon^{2n}} \\ &= \frac{2^{n-2}(n-1)}{\pi} \int_E x^{n-2}|w|^{-2n} d\lambda_2(w)\,.\end{aligned} \tag{2.24}$$

Schreiben wir $w$ in Polarkoordinaten, so erhalten wir aus (2.24) für $\sup_{\varepsilon>0} \sigma(\mathrm{K}_\varepsilon(e_1))/\varepsilon^{2n}$ die explizite Darstellung

$$\begin{aligned}\sup_{\varepsilon>0} \frac{\sigma(\mathrm{K}_\varepsilon(e_1))}{\varepsilon^{2n}} &= \frac{2^{n-2}(n-1)}{\pi} \int_1^\infty \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (r\cos\theta)^{n-2} r^{-2n} r\, d\theta\, dr \\ &= \frac{2^{n-2}(n-1)}{\pi} \int_1^\infty r^{-n-1}\, dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\theta)^{n-2}\, d\theta \\ &= \frac{2^{n-2}(n-1)}{\pi n} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\theta)^{n-2}\, d\theta \\ &< \infty.\end{aligned}$$

□

Da $\mathrm{K}_\varepsilon(e_1) = S$ ist für alle $\varepsilon > \sqrt{2}$, folgt aus Lemma 2.14 unmittelbar

$$\begin{aligned}\sup_{\varepsilon>0} \frac{\sigma_n(\mathrm{K}_{3\varepsilon}(e_1))}{\sigma_n(\mathrm{K}_\varepsilon(e_1))} &= \sup_{0<\varepsilon\leq\sqrt{2}} \frac{\sigma_n(\mathrm{K}_{3\varepsilon}(e_1))}{\sigma_n(\mathrm{K}_\varepsilon(e_1))} \\ &= 3^{2n} \sup_{0<\varepsilon\leq\sqrt{2}} \frac{\sigma_n(\mathrm{K}_{3\varepsilon}(e_1))\varepsilon^{2n}}{(3\varepsilon)^{2n}\sigma_n(\mathrm{K}_\varepsilon(e_1))} \\ &\leq 3^{2n} \sup_{0<\varepsilon\leq\sqrt{2}} \frac{\sigma_n(\mathrm{K}_{3\varepsilon}(e_1))}{(3\varepsilon)^{2n}} \cdot \inf_{0<\varepsilon\leq\sqrt{2}} \frac{\sigma_n(\mathrm{K}_\varepsilon(e_1))}{\varepsilon^{2n}} \\ &< \infty\end{aligned} \tag{2.25}$$

für alle $n \geq 1$. Man beachte, dass die erste Identität in (2.25) wegen

$$\frac{\sigma_n(\mathrm{K}_{3\sqrt{2}}(e_1))}{\sigma_n(\mathrm{K}_{\sqrt{2}}(e_1))} = \frac{1}{\sigma_n(S \setminus \{-e_1\})} = 1$$

gilt. Diese Betrachtung liefert folgende Version des Überdeckungssatzes von Vitali.

**2.15 Lemma.** *Sei $E$ die Vereinigung eines endlichen Systems $M$ von Kugeln $K_r(\zeta) \subseteq S$, $r > 0, \zeta \in S$. Dann gibt es eine Menge $D$ aus paarweise disjunkten Kugeln $K_{r_i}(\zeta_i)$ $(1 \leq i \leq m)$ aus $M$ mit*

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} K_{3r_i}(\zeta_i)$$

*und*

$$\sigma(E) \leq A \sum_{i=1}^{n} \sigma(K_{r_i}(\zeta_i)).$$

*Hierbei ist $A = \sup_{r>0} \sigma(K_{3r}(e_1))/\sigma(K_r(e_1)) < \infty$.*

*Beweis.* Sei $M = \{K_i = \mathrm{K}_{r_i}(\zeta_i) \mid i = 1, \dots, s\}$ ein endliches System von Kugeln und $E = \bigcup_{i=1}^{s} K_i$. Wir können annehmen, dass $r_i \geq r_{i+1}$ gilt für $i = 1, \dots, s-1$.

Setze $i_1 = 1$ und verfahre induktiv wie folgt:
Sind die Indizes $1 \leq i_1 < \dots < i_k < s$ mit $K_{i_j} \cap K_{i_l} = \phi$ für alle $j \neq l \in \{1, \dots, k\}$ schon gewählt, so setze

$$i_{k+1} = \min\{j \in \{1, \dots, s\} \mid j > i_k \text{ und } K_j \cap (K_{i_1} \cup \dots \cup K_{i_k}) = \phi\},$$

sofern ein solches Minimum existiert. Ansonsten breche ab. Da die Menge $M$ endlich ist, bricht das Verfahren im $m$-ten Schritt für ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq s$ ab. Wir definieren $D = \{K_{i_1}, \dots, K_{i_m}\}$, sodass $D \subseteq M$ eine Menge paarweise disjunkter Kugeln ist. Für jede Kugel $K_i \in M$ gibt es einen Index $j \in \{i_1, \dots, i_m\}$ so, dass $K_i \cap K_j \neq \phi$ und $j \leq i$, denn sonst wäre $i_{k_0} < i < i_{k_0+1}$ für $k_0 = \max\{l \in \{1, \dots, m\} \mid 1 \leq i_l \leq i\}$ im Widerspruch zu obiger Konstruktion der Menge $D$.

Sind nun, für $i, j$ wie oben, $\zeta \in K_i$ und $\eta \in K_i \cap K_j$, so gilt wegen $j \leq i$ offenbar $d(\zeta, \eta) < 2r_i \leq 2r_j$ und daher $d(\zeta, \zeta_j) \leq d(\zeta, \eta) + d(\eta, \zeta_j) < 3r_j$. Hieraus folgt $K_i \subset \mathrm{K}_{3r_j}(\zeta_j)$ und somit erhält man

$$E \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \mathrm{K}_{3r_{i_j}}(\zeta_{i_j}).$$

Wählt man für jedes $j \in \{1, \dots, m\}$ ein $U_j \in \mathcal{U}$ so, dass $U_j \zeta_{i_j} = e_1$ und beachtet man Gleichung (2.20), so gilt schließlich

$$\begin{aligned}\sigma(E) &\leq \sum_{j=1}^{m} \sigma(\mathrm{K}_{3r_{i_j}}(\zeta_{i_j})) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \frac{\sigma(\mathrm{K}_{3r_{i_j}}(\zeta_{i_j}))}{\sigma(K_{i_j})} \sigma(K_{i_j}) \\ &\leq A \sum_{j=1}^{m} \sigma(K_{i_j}).\end{aligned}$$

□

Wir definieren nun, was man unter einer Maximalfunktion bezüglich eines Maßes $\mu \in M(S)$ versteht.

**2.16 Definition.** *Sei $\mu \in M(S)$ und sei $|\mu|$ die Variation des Maßes $\mu$. Die Funktion*

$$M_\mu \colon S \longrightarrow [0, \infty], \qquad \zeta \longmapsto \sup_{\varepsilon > 0} \frac{|\mu|(K_\varepsilon(\zeta))}{\sigma(K_\varepsilon(\zeta))}$$

*heißt **Maximalfunktion zum Maß** $\mu$.*

Unter Beachtung von (2.20) und der Rotationsinvarianz von $\sigma$ ist

$$M_\mu(\zeta) = \sup_{\varepsilon > 0} |\mu|(\mathrm{K}_\varepsilon(\zeta)) / \sigma(\mathrm{K}_\varepsilon(e_1)). \tag{2.26}$$

Wir hätten $M_\mu$ also auch durch die Formel (2.26) definieren können. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass das Supremum in der Definition der Maximalfunktion zum Maß $\mu$ nicht endlich sein muss. Wir rechtfertigen nun mit dem Beweis der folgenden Proposition eine bereits zu Anfang des Abschnitts aufgestellte Behauptung.

**2.17 Proposition.** *Für jedes $\mu \in M(S)$ ist $M_\mu$ nach unten halbstetig.*

*Beweis.* Es sei $\mu \in M(S)$. Es genügt zu zeigen, dass die durch $\zeta \longmapsto |\mu|(\mathrm{K}_\varepsilon(\zeta))$ definierte Abbildung $h_\varepsilon \colon S \longrightarrow [0, \infty]$ für jedes $\varepsilon > 0$ nach unten halbstetig ist, denn dann ist $(h_\varepsilon / \sigma(\mathrm{K}_\varepsilon(e_1)))_{\varepsilon > 0}$ eine Familie nach unten halbstetiger Funktionen und somit ist $M_\mu$ als punktweise gebildetes Supremum obiger Familie wieder nach unten halbstetig. Sei also $\varepsilon > 0$. Weiter seien $\zeta_0 \in S$ und $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $|\mu|(\mathrm{K}_\varepsilon(\zeta_0)) > t_0$. Da $|\mu|$ ein reguläres Maß ist, gibt es eine kompakte Menge $K \subset \mathrm{K}_\varepsilon(\zeta_0)$ so, dass $|\mu|(K) > t_0$ gilt. Aus der Kompaktheit von $K$ und der Stetigkeit der Abbildung $d(\cdot, \zeta_0)$ folgt sofort $\sup_{\zeta \in K} d(\zeta, \zeta_0) < \varepsilon$. Bezeichnen wir mit $\varepsilon_K$ dieses Supremum, dann gilt für $\zeta \in S$ mit $d(\zeta, \zeta_0) < \varepsilon - \varepsilon_K$ und $\eta \in K$

$$d(\zeta, \eta) \leq d(\zeta, \zeta_0) + d(\zeta_0, \eta) < \varepsilon - \varepsilon_K + \varepsilon_K = \varepsilon,$$

das heißt $K \subset \mathrm{K}_\varepsilon(\zeta)$. Also gilt für alle $\zeta \in \mathrm{K}_{\varepsilon-\varepsilon_K}(\zeta_0)$

$$|\mu|(\mathrm{K}_\varepsilon(\zeta)) \geq |\mu|(K) > t_0,$$

sodass die Menge $\{\zeta \in S \mid \ |\mu|(\mathrm{K}_\varepsilon(\zeta)) > t_0\}$ offen und daher insgesamt $M_\mu$ nach unten halbstetig ist. □

Im nächsten Lemma wollen wir für $t > 0$ eine obere Schranke für den Ausdruck $\sigma(\{\zeta \in S \mid \ M_\mu(\zeta) > t\})$ angeben. Hierbei taucht erneut die Konstante $A$, wie sie in Lemma 2.15 definiert ist, auf. Bemerkenswert ist, dass diese Schranke weiter nur noch von der Norm $\|\mu\| = |\mu|(S)$ und der Zahl $t$ abhängt. Es handelt sich hierbei um die in der Einleitung dieser Arbeit erwähnte Ungleichung für Maximalfunktionen von Maßen von Hardy und Littlewood.

**2.18 Lemma.** *Sei $\mu \in M(S)$. Dann gilt*

$$\sigma(\{\zeta \in S \mid \ M_\mu(\zeta) > t\}) \leq A\frac{\|\mu\|}{t}$$

*für alle $t > 0$.*

*Beweis.* Seien $\mu \in M(S)$ und $t > 0$. Proposition 2.17 zufolge ist die Menge $U_t = \{\zeta \in S \mid \ M_\mu(\zeta) > t\}$ offen. Da $\sigma$ regulär ist, genügt es, die Ungleichung

$$\sigma(C) \leq A\frac{\|\mu\|}{t} \tag{2.27}$$

für jede kompakte Menge $C \subset U_t$ zu zeigen.

Sei also $C \subset U_t$ kompakt. Aus der Definition von $M_\mu$ folgt für jedes $\zeta \in C$ die Existenz einer Kugel $K_\zeta = \mathrm{K}_\varepsilon(\zeta)$, $\varepsilon > 0$, mit

$$|\mu|(K_\zeta) > t\sigma(K_\zeta) \tag{2.28}$$

Da $C$ kompakt ist, gibt es $\zeta_1, \ldots, \zeta_r \in S$ so, dass $C \subseteq \bigcup_{i=1}^r K_{\zeta_i}$. Die Anwendung von Lemma 2.15 auf die Menge $M = \{K_{\zeta_i} \mid i = 1, \ldots, r\}$ liefert $m \leq r$ paarweise disjunkte Kugeln $\mathrm{K}_{\varepsilon_1}(\eta_1), \ldots, \mathrm{K}_{\varepsilon_m}(\eta_m) \in M$ mit $C \subset \bigcup_{i=1}^m \mathrm{K}_{3\varepsilon_i}(\eta_i)$. Wegen Ungleichung (2.28) gilt

$$\begin{aligned}
\sigma(C) &\leq A\sum_{i=1}^m \sigma(\mathrm{K}_{\varepsilon_i}(\eta_i)) \\
&\leq A\sum_{i=1}^m \frac{|\mu|(\mathrm{K}_{\varepsilon_i}(\eta_i))}{t} \\
&= At^{-1}\,|\mu|(\textstyle\bigcup_{i=1}^m \mathrm{K}_{\varepsilon_i}(\eta_i)) \\
&\leq A\frac{\|\mu\|}{t},
\end{aligned}$$

sodass (2.27) gezeigt ist.

□

Das letzte Ergebnis wird im nächsten Abschnitt bei der Untersuchung von Ableitungen von Maßen Anwendung finden.

Die Maximalfunktion $M_\alpha F$ zu einer Abbildung $F\colon \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{C}$ wird über die Supremumsnorm von F auf einer von der Konstanten $\alpha > 1$ abhängigen Menge definiert. Wir wollen zuerst diese Mengen einführen. Sie werden auch bei der Definition der Korányi-Limiten im nächsten Abschnitt verwendet. Für $\alpha > 0$ und $\zeta \in S$ setze

$$D_\alpha(\zeta) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |1 - \langle z, \zeta\rangle| < \tfrac{\alpha}{2}(1 - |z|^2)\}.$$

Man erkennt direkt, dass $D_\alpha(\zeta) \subset \mathbb{B}$ ist für jede Wahl von $\zeta \in S$ und $\alpha > 0$. Ist $U \in \mathcal{U}$, so sieht man der Definition von $D_\alpha(\zeta)$ außerdem direkt die Eigenschaft

$$U\, D_\alpha(\zeta) = D_\alpha(U\zeta) \tag{2.29}$$

an. Die Abschätzung $|1 - \langle z, \zeta\rangle| \geq 1 - |z| \geq \frac{1}{2}(1 - |z|^2)$ zeigt $D_\alpha(\zeta) = \phi$ für jedes $\alpha \leq 1$ und daher können wir uns auf den Fall $\alpha > 1$ beschränken. Wir können nun die oben angesprochenen Maximalfunktionen definieren.

**2.19 Definition.** *Sei $F$ eine Funktion $\mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{C}$. Für $\alpha > 1$ heißt die Abbildung*

$$M_\alpha F\colon S \longrightarrow [0, \infty], \qquad \zeta \longmapsto \sup_{z \in D_\alpha(\zeta)} |F(z)|$$

*die **Maximalfunktion zu** $F$ **bezüglich** $\alpha$.*

Auch diese Maximalfunktion ist nach unten halbstetig.

**2.20 Proposition.** *Es seien $F$ eine Funktion $\mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{C}$ und $\alpha > 1$. Dann ist die Maximalfunktion $M_\alpha F$ nach unten halbstetig.*

*Beweis.* Seien $t \in \mathbb{R}$ und $\zeta \in S$ mit $M_\alpha F(\zeta) > t$. Dann gibt es ein $z \in D_\alpha(\zeta)$ mit $|F(z)| > t$. Anhand der Definition von $D_\alpha(\zeta)$ sieht man leicht, dass die Menge $M = \{\eta \in S \mid z \in D_\alpha(\eta)\}$ offen ist. Demnach existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass $\mathrm{K}_\varepsilon(\zeta) \subset M$ gilt. Für jedes $\eta \in \mathrm{K}_\varepsilon(\zeta)$ ist also $z \in D_\alpha(\eta)$ und daher ist $M_\alpha F(\eta) > t$. Somit haben wir gezeigt, dass die Menge $\{\eta \in S \mid M_\alpha F(\eta) > t\}$ offen und damit $M_\alpha F$ nach unten halbstetig ist. □

Bevor wir zum Hauptergebnis dieses Abschnitts kommen, notieren wir noch eine elementare Proposition, die den Beweis des folgenden Satzes vereinfacht.

**2.21 Proposition.** *Für $\eta, \zeta \in S$ und $z \in D_\alpha(\zeta)$ gilt*

$$|1 - \langle \zeta, \eta\rangle| < 4\alpha |1 - \langle z, \eta\rangle|$$

*und*

$$P(z, \eta) < \frac{(32\alpha^2(1 - |z|))^n}{|1 - \langle \zeta, \eta\rangle|^{2n}}. \tag{2.30}$$

*Beweis.* Es seien $\eta, \zeta \in S$ und $z \in D_\alpha(\zeta)$. Es gilt

$$\begin{aligned} |1 - \langle z, \zeta \rangle| &< \tfrac{\alpha}{2}(1 - |z|^2) \\ &\le \alpha(1 - |z|) \\ &\le \alpha|1 - \langle z, \eta \rangle| \end{aligned}$$

und daher ist $d(z, \zeta) < \sqrt{\alpha}\, d(z, \eta)$. Hieraus folgt weiter

$$d(\zeta, \eta) \le d(\zeta, z) + d(z, \eta) < (1 + \sqrt{\alpha})\, d(z, \eta)$$

und schließlich

$$|1 - \langle \zeta, \eta \rangle| < 4\alpha|1 - \langle z, \eta \rangle|. \tag{2.31}$$

Für die Abschätzung des Poissonkerns verwenden wir Ungleichung (2.31) und berechnen

$$\begin{aligned} P\,(z, \eta) &= \frac{(1 - |z|^2)^n}{|1 - \langle z, \eta \rangle|^{2n}} \\ &< \frac{(2(1 - |z|))^n}{(4\alpha)^{-2n}|1 - \langle \zeta, \eta \rangle|^{2n}} \\ &= \frac{(32\alpha^2(1 - |z|))^n}{|1 - \langle \zeta, \eta \rangle|^{2n}}. \end{aligned}$$

□

Wir wollen abschließend ein Theorem von Adam Korányi aus dem Jahre 1969 präsentieren.

**2.22 Satz.** *Zu jeder Zahl $\alpha > 1$ gibt es eine, nur von $\alpha$ abhängige, Konstante $A_\alpha < \infty$, sodass die Ungleichung*

$$M_\alpha P[\mu](\zeta) \le A_\alpha\, M_\mu(\zeta)$$

*für alle $\zeta \in S$ und jedes Maß $\mu \in M(S)$ gilt.*

*Beweis.* Seien $\alpha > 1$ und $\mu \in M(S)$. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\mu$ ein positives Maß ist, denn sonst gilt wegen den offensichtlichen Beziehungen $M_\mu = M_{|\mu|}$ und $|P[\mu](z)| \le P[|\mu|](z)$, $z \in \mathbb{B}$, auch

$$\begin{aligned} M_\alpha P[\mu](\eta) &\le M_\alpha P[|\mu|](\eta) \\ &\le A_\alpha\, M_{|\mu|}(\eta) \\ &= A_\alpha\, M_\mu(\eta) \end{aligned}$$

für alle $\eta \in S$. Desweiteren genügt es, die Ungleichung für den Fall $\zeta = e_1$ zu zeigen, denn andernfalls wählen wir $U \in \mathcal{U}$ so, dass $Ue_1 = \zeta$. Dann gilt unter Verwendung von (2.29)

$$\begin{aligned} M_\alpha P[\mu](\zeta) &= \sup_{z \in D_\alpha(\zeta)} |P[\mu](z)| \\ &= \sup_{z \in UD_\alpha(e_1)} |P[\mu](z)| \\ &= \sup_{z \in D_\alpha(e_1)} |P[\mu](Uz)| \\ &= \sup_{z \in D_\alpha(e_1)} |P[\mu^{U^{-1}}](z)| \\ &= M_\alpha P[\mu^{U^{-1}}](e_1) \\ &\leq A_\alpha \, M_{\mu^{U^{-1}}}(e_1) \\ &= A_\alpha \sup_{\varepsilon > 0} \mu^{U^{-1}}(\mathrm{K}_\varepsilon(e_1))/\sigma(\mathrm{K}_\varepsilon(e_1)) \\ &= A_\alpha \, M_\mu(\zeta) \end{aligned}$$

und somit ist die Ungleichung für alle $\zeta \in S$ gezeigt. Im letzten Schritt obiger Rechnung wurde insbesondere (2.20) verwendet.

Sei also $\zeta = e_1$ und $\mu$ ein positives Maß. Nach Lemma 2.14 gibt es eine Konstante $A_0 < \infty$ so, dass

$$\sigma(\mathrm{K}_\varepsilon(e_1)) \leq A_0 \varepsilon^{2n} \tag{2.32}$$

für alle $\varepsilon > 0$ gilt. Fixiere $z \in D_\alpha(e_1)$ und setze $r = |z|$ und $t = 8\alpha(1 - r)$. Wegen $t > 0$ gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $2^{k_0} t > 2$. Die durch

$$V_0 = \{\eta \in S \mid |1 - \eta_1| < t\} = \mathrm{K}_{\sqrt{t}}(e_1)$$

beziehungsweise

$$V_k = \{\eta \in S \mid 2^{k-1} t \leq |1 - \eta_1| < 2^k t\}, \quad k = 1, \ldots, k_0$$

definierten Mengen $V_i \subset S$, $i = 0, \ldots, k_0$, bilden eine disjunkte Überdeckung von $S$, denn es gilt $2^{k_0} t > 2$ und $|1 - \eta_1| \leq 2$ für alle $\eta \in S$ Mit Hilfe dieser Überdeckung können wir $P[\mu](z)$ in die Summe

$$P[\mu](z) = \int_{V_0} P(z, \eta)\, d\mu(\eta) + \sum_{k=1}^{k_0} \int_{V_k} P(z, \eta)\, d\mu(\eta)$$

zerlegen. Wir schätzen zuerst das Integral über $V_0$ ab. Hierzu beachten wir, dass für jedes $\eta \in S$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} P(z,\eta) &\le \frac{(1-r^2)^n}{(1-r)^{2n}} \\ &= \frac{(1+r)^n}{(1-r)^n} \\ &\le 2^n(1-r)^{-n} \end{aligned}$$

gilt. Da $\mu$ positiv ist, erhält man hieraus zusammen mit Ungleichung (2.32)

$$\begin{aligned} \int_{V_0} P(z,\eta)\, d\mu(\eta) &\le 2^n(1-r)^{-n}\, \mu(V_0) \\ &= 2^n(1-r)^{-n} \frac{\mu(V_0)}{\sigma(V_0)} \sigma(V_0) \\ &\le 2^n(1-r)^{-n} A_0 t^n\, M_\mu(e_1) \\ &= \left(\frac{2t}{1-r}\right)^n A_0\, M_\mu(e_1). \end{aligned}$$

Die Definition von $t$ liefert schließlich die Abschätzung

$$\int_{V_0} P(z,\eta)\, d\mu(\eta) \le (16\alpha)^n A_0\, M_\mu(e_1). \tag{2.33}$$

Wir widmen uns nun den Integralen über $V_k$ für $k = 1, \ldots, k_0$. Die Ungleichung (2.30) aus Proposition 2.21 mit $\zeta = e_1$ liefert

$$\begin{aligned} P(z,\eta) &< \frac{(32\alpha^2(1-r))^n}{|1-\eta_1|^{2n}} \\ &= \frac{(4\alpha t)^n}{|1-\eta_1|^{2n}} \\ &\le \frac{(4\alpha t)^n}{(2^{k-1}t)^{2n}} \\ &= \left(\frac{16\alpha}{4^k t}\right)^n \end{aligned} \tag{2.34}$$

für jedes $\eta \in V_k$ und $k = 1, \ldots, k_0$. Berücksichtigt man $V_k \subseteq \mathrm{K}_{\sqrt{2^k t}}(e_1)$, so folgt mit (2.34)

$$\begin{aligned}\int_{V_k} P(z,\eta)\, d\mu(\eta) &\leq \left(\frac{16\alpha}{4^k t}\right)^n \mu(V_k) \\ &\leq \left(\frac{16\alpha}{4^k t}\right)^n \frac{\mu(\mathrm{K}_{\sqrt{2^k t}}(e_1))}{\sigma(\mathrm{K}_{\sqrt{2^k t}}(e_1))} \sigma(\mathrm{K}_{\sqrt{2^k t}}(e_1)) \\ &\leq \left(\frac{16\alpha}{4^k t}\right)^n M_\mu(e_1)(2^k t)^n A_0 \\ &= (16\alpha)^n A_0 2^{-nk} M_\mu(e_1).\end{aligned} \tag{2.35}$$

Bei der letzten Abschätzung wurde Ungleichung (2.32) mit $\varepsilon = \sqrt{2^k t}$ verwendet. Aus den Abschätzungen (2.33) und (2.35) ergibt sich nun

$$\begin{aligned}P[\mu](z) &\leq (16\alpha)^n A_0\, M_\mu(e_1) + \sum_{k=1}^{k_0} (16\alpha)^n A_0 2^{-nk}\, M_\mu(e_1) \\ &= (1 + \sum_{k=1}^{k_0} 2^{-nk})(16\alpha)^n A_0\, M_\mu(e_1) \\ &\leq 2(16\alpha)^n A_0\, M_\mu(e_1)\end{aligned}$$

für alle $z \in D_\alpha(e_1)$. Die Behauptung folgt aus der letzten Ungleichung, wenn man $A_\alpha = 2(16\alpha)^n A_0$ setzt.

$\square$

Aus dem Beweis ist ersichtlich, dass die Konstante $A_\alpha$ nicht ideal ist. Für die folgenden Betrachtungen genügt die Existenz einer Konstante $A_\alpha$ wie in Lemma 2.22.

## 2.3 Korányi-Limiten Poissonscher Interale

Im letzten Abschnitt hatten wir für $\alpha > 1$ und $\zeta \in S$ die Gebiete $D_\alpha(\zeta)$ eingeführt. Wir halten zunächst fest, was wir damit meinen, dass eine Funktion $F\colon \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{C}$ den Korányi-Limes $\lambda \in \mathbb{C}$ im Punkt $\zeta \in S$ besitzt.

**2.23 Definition.** *Seien $F\colon \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion und $\zeta \in S$. Wir sagen $F$ hat den Korányi-Limes $\lambda \in \mathbb{C}$ im Punkt $\zeta$ und schreiben*

$$\operatorname*{K-lim}_{z\to\zeta} F(z) = \lambda,$$

*wenn die folgende Aussage wahr ist:*

> *Für jede Zahl $\alpha > 0$ und jede gegen $\zeta$ konvergente Folge $(z_i)_{i\geq 1}$ in $D_\alpha(\zeta)$ konvergiert $F(z_i)$ gegen $\lambda$ für $i \longrightarrow \infty$.*

Mit Hilfe der in den vorigen Abschnitten geleisteten Vorarbeit sind wir nun in der Lage uns mit den Randwerten eines Poisson-Integrals zu einem Maß $\mu \in M(S)$ zu befassen. Es wird sich zeigen, dass ein solches Poisson-Integral in fast jedem Punkt $\zeta \in M(S)$ einen Korányi-Limes besitzt. Wir können diesen Grenzwert auch angeben. Es handelt sich um die Ableitung des Maßes $\mu$ im Punkt $\zeta \in S$. Um diese Aussage zu präzisieren, befassen wir uns zunächst mit Ableitungen von Maßen. Als erstes beweisen wir zwei Hilfsresultate.

**2.24 Lemma.** *Für $f \in \mathcal{L}^1(S,\sigma)$ sei $T_f\colon S \longrightarrow [0,\infty]$ definiert durch*

$$T_f(\zeta) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sup_{0<\delta\leq\varepsilon} \frac{1}{\sigma(K_\delta(\zeta))} \int_{K_\delta(\zeta)} |f(\eta) - f(\zeta)| d\sigma(\eta)\,.$$

*Sind $f, f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1(S,\sigma)$ und $g \in C(S)$ so gilt:*

*(i)* $T_{f_1+f_2}(\zeta) \leq T_{f_1}(\zeta) + T_{f_2}(\zeta)$,

*(ii)* $T_f(\zeta) \leq |f(\zeta)| + M_{\sigma_f}(\zeta)$,

*(iii)* $T_g(\zeta) = 0$

*für alle $\zeta \in S$.*

*Beweis.* Seien $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1(S,\sigma)$, $\zeta, \eta \in S$ und $\varepsilon > 0$. (i) folgt aus der Positivität des Maßes $\sigma$ und der Ungleichung $|(f_1+f_2)(\eta)-(f_1+f_2)(\zeta)| \leq |f_1(\eta)-f_1(\zeta)|+|f_2(\eta) - f_2(\zeta)|$. Ist $0 < \delta \leq \varepsilon$, so gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sigma(\mathrm{K}_\delta(\zeta))} \int_{\mathrm{K}_\delta(\zeta)} |f(\eta) - f(\zeta)| d\sigma(\eta) &\leq \frac{1}{\sigma(\mathrm{K}_\delta(\zeta))} \int_{\mathrm{K}_\delta(\zeta)} |f(\eta)| d\sigma(\eta) + |f(\zeta)| \\ &= \frac{\sigma_{|f|}(\mathrm{K}_\delta(\zeta))}{\sigma(\mathrm{K}_\delta(\zeta))} + |f(\zeta)| \\ &= \frac{|\sigma_f|(\mathrm{K}_\delta(\zeta))}{\sigma(\mathrm{K}_\delta(\zeta))} + |f(\zeta)| \\ &\leq M_{\sigma_f}(\zeta) + |f(\zeta)|\end{aligned}$$

und daher
$$T_f(\zeta) \le M_{\sigma_f}(\zeta) + |f(\zeta)|,$$
sodass (ii) gezeigt ist. Für (iii) seien $g \in C(S)$, $\zeta \in S$ und $\varepsilon > 0$. Da $d$ die übliche Topologie auf $S$ induziert, ist auch $g\colon (S,d) \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. Wir wählen $\delta > 0$ so, dass
$$|g(\eta) - g(\zeta)| < \varepsilon$$
für alle $\eta \in S$ mit $d(\eta,\zeta) < \delta$ ist. Hiermit gilt
$$\frac{1}{\sigma(\mathrm{K}_\gamma(\zeta))} \int_{\mathrm{K}_\gamma(\zeta)} |g(\eta) - g(\zeta)| d\sigma(\eta) \le \varepsilon$$
für alle $0 < \gamma < \delta$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt (iii). □

Aus dem letzten Lemma können wir das folgende Resultat folgern.

**2.25 Lemma.** *Sei $f \in \mathcal{L}^1(S,\sigma)$. Dann gibt es eine $\sigma$-Nullmenge $N \subset S$ so, dass*
$$\lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\sigma(K_\delta(\zeta))} \int_{K_\delta(\zeta)} |f(\eta) - f(\zeta)| d\sigma(\eta) = 0 \tag{2.36}$$
*ist für alle $\zeta \in S \setminus N$.*

*Beweis.* Seien $f \in \mathcal{L}^1(S,\sigma)$ und $\varepsilon > 0$. Ist $T_f$ wie in Lemma 2.24 definiert, so reicht es zu zeigen, dass $T_f(\zeta) = 0$ ist für $\sigma$-fast alle $\zeta \in S$. Da $C(S)$ in $\mathcal{L}^1(S,\sigma)$ dicht liegt, gibt es $h \in C(S)$ so, dass $\|f - h\|_1 < \varepsilon$ ist. Setzen wir $g = f - h$, so gilt offenbar $g \in \mathcal{L}^1(S,\sigma)$ mit $\|g\|_1 < \varepsilon$. Aus der Stetigkeit der Funktion $h$ folgt mit Lemma 2.24
$$T_f(\zeta) \le T_g(\zeta) + T_h(\zeta) \le |g(\zeta)| + M_{\sigma_g}(\zeta) \tag{2.37}$$
für alle $\zeta \in S$.
Für $t \in (0,\infty)$ setzen wir
$$A_t = \{\zeta \in S \mid T_f(\zeta) > t\}$$
und
$$E_t = \{\zeta \in S \mid |g(\zeta)| > t/2\} \cup \{\zeta \in S \mid M_{\sigma_g}(\zeta) > t/2\}.$$
Wegen (2.37) gilt offenbar $A_t \subset E_t$. Aus der Tschebyscheffschen Ungleichung und Lemma 2.18 folgt weiter
$$\begin{aligned}\sigma(E_t) &\le \sigma(\{\zeta \in S \mid |g(\zeta)| > t/2\}) + \sigma(\{\zeta \in S \mid M_{\sigma_g}(\zeta) > t/2\}) \\ &\le \tfrac{2}{t}\|g\|_1 + \tfrac{2}{t}A\|\sigma_g\|\end{aligned}$$
und aus $\|\sigma_g\| = \|g\|_1 < \varepsilon$ ergibt sich schließlich
$$\sigma(E_t) \le \tfrac{2}{t}(1 + A)\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben war, ist $A_t$ also in messbaren Mengen $M_k \in \mathcal{B}(S)$, $k \geq 1$, mit $\sigma(M_k) < 1/k$ enthalten. Es ist $\bigcap_{k\geq 1} M_k \in \mathcal{B}(S)$ offenbar eine $\sigma$-Nullmenge mit

$$A_t \subset \bigcap_{k\geq 1} M_k.$$

Die obige Konstruktion liefert also für jedes $k \geq 1$ eine $\sigma$-Nulmenge $N_k \in \mathcal{B}(S)$ mit $A_{1/k} \subset N_k$. Somit ist $N = \bigcup_{k\geq 1} N_k$ als abzählbare Vereinigung von $\sigma$-Nullmengen ebenfalls eine $\sigma$-Nullmenge. Man sieht, dass $S \backslash N \subset (\bigcup_{k\geq 1} A_{1/k})^c$ ist und insgesamt gilt also $T_f(\zeta) = 0$ für jedes $\zeta \in S \backslash N$, sodass die Behauptung gezeigt ist.

□

Diejenigen Punkte $\zeta \in S$, für die Gleichung (2.36) aus Lemma 2.25 gilt, nennt man Lebesgue-Punkte für $f$. Das letzte Resultat liefert unmittelbar folgendes Korollar:

**2.26 Korollar.** *Sei $f \in \mathcal{L}^1(S, \sigma)$. Dann gilt*

$$f(\zeta) = \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\sigma(K_\delta(\zeta))} \int_{K_\delta(\zeta)} f(\eta) d\sigma(\eta)$$

*für $\sigma$-fast alle $\zeta \in S$.*

*Beweis.* Für $f \in \mathcal{L}^1(S, \sigma)$ wähle $N \subset S$ wie in Lemma 2.25. Ist $\zeta \in S \setminus N$, so gilt

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left| f(\zeta) - \frac{1}{\sigma(\mathrm{K}_\delta(\zeta))} \int_{\mathrm{K}_\delta(\zeta)} f(\eta) d\sigma(\eta) \right| \\
&= \left| \frac{1}{\sigma(\mathrm{K}_\delta(\zeta))} \int_{\mathrm{K}_\delta(\zeta)} f(\zeta) - f(\eta) d\sigma(\eta) \right| \\
&\leq \frac{1}{\sigma(\mathrm{K}_\delta(\zeta))} \int_{\mathrm{K}_\delta(\zeta)} |f(\zeta) - f(\eta)| d\sigma(\eta) \\
&\xrightarrow{\delta \downarrow 0} 0.
\end{aligned}$$

□

Wir definieren im folgenden, was wir unter der Ableitung eines Maßes $\mu \in M(S)$ bezüglich $\sigma$ verstehen.

**2.27 Definition.** *Ist $\mu \in M(S)$, so heißt der Grenzwert*

$$D_\mu(\zeta) = \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{\mu(K_\delta(\zeta))}{\sigma(K_\delta(\zeta))}$$

***die Ableitung von** $\mu$ **im Punkt** $\zeta \in S$, sofern dieser existiert.*

Wir werden sehen, dass diese Ableitung $\sigma$-fast überall existiert. Ist speziell $\mu \in M(S)$ singulär bezüglich $\sigma$(schreibe: $\mu \perp \sigma$), so ist $D_\mu$ fast überall 0. Wir rechtfertigen dies in folgendem Lemma.

**2.28 Lemma.** *Ist $\mu \in M(S)$ mit $\mu \perp \sigma$, so gibt es eine $\sigma$-Nullmenge $N \in \mathcal{B}(S)$ derart, dass*

$$D_\mu(\zeta) = 0$$

*ist für alle $\zeta \in S \setminus N$.*

*Beweis.* Sei $\mu \in M(S)$ mit $\mu \perp \sigma$. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\mu$ ein positives Maß ist. Ansonsten betrachte das positive Maß $|\mu|$ und beachte, dass

$$0 \leq \left| \frac{\mu(\mathrm{K}_\delta(\zeta))}{\sigma(\mathrm{K}_\delta(\zeta))} \right| \leq \frac{|\mu|(\mathrm{K}_\delta(\zeta))}{\sigma(\mathrm{K}_\delta(\zeta))}$$

für jedes $\delta > 0$ und jedes $\zeta \in S$ gilt. Es sei $\varepsilon > 0$. Da $\mu \perp \sigma$ ist, gibt es $M \in \mathcal{B}(S)$ mit $\mu(M^c) = 0$ und $\sigma(M) = 0$. Da $\mu$ regulär ist, gibt es Lemma B.4 zufolge eine kompakte Menge $K_\varepsilon \subset M$, die

$$\mu(K_\varepsilon) > \mu(M) - \varepsilon \tag{2.38}$$

erfüllt. Definiere positive Maße $\mu_1^\varepsilon, \mu_2^\varepsilon \in M(S)$ durch

$$\mu_1^\varepsilon(B) = \mu(B \cap K_\varepsilon)$$

beziehungsweise

$$\mu_2^\varepsilon = \mu(B \cap K_\varepsilon^c)$$

Es gilt $0 \leq \sigma(K_\varepsilon) \leq \sigma(M) = 0$, also $\sigma(K_\varepsilon) = 0$, und

$$\begin{aligned} \mu_2^\varepsilon(S) &= \mu(S \cap K_\varepsilon^c) \\ &= \mu(M \cap K_\varepsilon^c) + \underbrace{\mu(M^c \cap K_\varepsilon^c)}_{=0} \\ &= \mu(M) - \mu(K_\varepsilon) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist $\|\mu_2^\varepsilon\| < \varepsilon$. Für $\zeta \in S$ und jedes positive Maß $\nu \in M(S)$ definieren wir

$$\overline{D}_\nu(\zeta) = \lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{0<\gamma<\delta} \frac{\nu(\mathrm{K}_\gamma(\zeta))}{\sigma(\mathrm{K}_\gamma(\zeta))}$$

und bemerken $\overline{D}_\nu(\zeta) \leq M_\nu(\zeta)$.

Wir zeigen nun, das $\overline{D}_\mu$ $\sigma$-fast überall auf $S$ verschwindet. Damit ist der Beweis abgeschlossen. Für $\zeta \in S \setminus K_\varepsilon$ wähle $\delta_0 > 0$ so, dass $\mathrm{K}_{\delta_0}(\zeta) \subset K_\varepsilon^c$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\sup_{0<\gamma<\delta} \frac{\mu(\mathrm{K}_\gamma(\zeta))}{\sigma(\mathrm{K}_\gamma(\zeta))} &= \sup_{0<\gamma<\delta} \frac{\mu(\mathrm{K}_\gamma(\zeta) \cap K_\varepsilon) + \mu(\mathrm{K}_\gamma(\zeta) \cap K_\varepsilon^c)}{\sigma(\mathrm{K}_\gamma(\zeta))} \\ &= \sup_{0<\gamma<\delta} \frac{\mu_2^\varepsilon(\mathrm{K}_\gamma(\zeta))}{\sigma(\mathrm{K}_\gamma(\zeta))}\end{aligned}$$

für alle $0 < \delta < \delta_0$ und daher $\overline{D}_\mu(\zeta) = \overline{D}_{\mu_2^\varepsilon}(\zeta)$.
Setzen wir $A_t = \{\zeta \in S \mid \overline{D}_\mu(\zeta) > t\}$, $t > 0$, so folgt aus der obigen Argumentation

$$A_t \subset K_\varepsilon \cup \{\zeta \in S \mid M_{\mu_2^\varepsilon}(\zeta) > t\} = E_t.$$

Ähnlich zur Vorgehensweise im Beweis von Lemma 2.25 berechnet man

$$\begin{aligned}\sigma(E_t) &\leq \sigma(K_\varepsilon) + \sigma(\{\zeta \in S \mid M_{\mu_2^\varepsilon}(\zeta) > t\}) \\ &\leq At^{-1}\|\mu_2^\varepsilon\| \\ &< At^{-1}\varepsilon.\end{aligned}$$

Da $\varepsilon$ beliebig vorgegeben war, ist $A_t$ in messbaren Mengen $M_k \in \mathcal{B}(S)$ mit $\sigma(M_k) < 1/k$ enthalten. Für jedes $k \geq 1$ ist also $A_{1/k}$ enthalten in einer $\sigma$-Nullmenge $N_k \in \mathcal{B}(S)$. Insgesamt folgt

$$\overline{D}_\mu(\zeta) = 0$$

für alle $\zeta \in S \setminus (\bigcup_{k\geq 1} N_k)$. Somit ist alles gezeigt.

□

Den allgemeinen Fall erhalten wir durch Anwendung der Lemmata 2.25 und 2.28. Hierzu greifen wir auf den 'Lebesgueschen Zerlegungssatz' wie er in Satz B.2 in Anhang B formuliert ist, zurück.

**2.29 Korollar.** *Es sei $\mu \in M(S)$ ein Maß mit Lebesguezerlegung $\mu = \sigma_f + \mu_s$, wobei $f \in \mathcal{L}^1(S, \sigma)$ und $\mu_s \perp \sigma$ ist. Dann gibt es eine $\sigma$-Nullmenge $N \in \mathcal{B}(S)$ derart, dass*

$$D_\mu(\zeta) = f(\zeta)$$

*ist für alle $\zeta \in S \setminus N$.*

*Beweis.* Sei $\mu$ ein Maß wie in der Formulierung des Korollars. Dem Korollar zu Lemma 2.25 zufolge gibt es eine $\sigma$-Nullmenge $N_1 \in \mathcal{B}(S)$ so, dass

$$f(\zeta) = \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\sigma(\mathrm{K}_\delta(\zeta))} \int_{\mathrm{K}_\delta(\zeta)} f(\eta) d\sigma(\eta)$$

für alle $\zeta \in S \setminus N_1$ gilt. Weiter erfüllt das Maß $\mu_s$ alle Voraussetzungen von Lemma 2.28. Es gibt also eine weitere $\sigma$-Nullmenge $N_2 \in \mathcal{B}(S)$ mit

$$D_{\mu_s}(\zeta) = 0$$

für $\zeta \in S \setminus N_2$. Setzt man $N = N_1 \cup N_2$ so gilt für $\zeta \in S \setminus N$

$$\begin{aligned} D_\mu(\zeta) &= \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{\mu_s(\mathrm{K}_\delta(\zeta))}{\sigma(\mathrm{K}_\delta(\zeta))} + \frac{\sigma_f(\mathrm{K}_\delta(\zeta))}{\sigma(\mathrm{K}_\delta(\zeta))} \\ &= \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\sigma(\mathrm{K}_\delta(\zeta))} \int_{\mathrm{K}_\delta(\zeta)} f(\eta) d\sigma(\eta) \\ &= f(\zeta). \end{aligned}$$

□

Zum Abschluss dieses Kapitels zeigen wir nun, dass das Poisson-Integral $P[\mu]$ eines Maßes $\mu \in M(S)$ für $\sigma$-fast alle $\zeta \in S$ einen Korányi-Limes besitzt und dass dieser überein stimmt mit der Ableitung von $\mu$ im Punkt $\zeta$. Wie bei der Bestimmung der Ableitung eines Maßes zeigen wir die Aussage zuerst für Maße $\mu \in M(S)$, die zusätzliche Eigenschaften haben. Im Beweis des folgenden Satzes fließt insbesondere das Hauptergebnis des letzten Abschnitts, Satz 2.22, ein.

**2.30 Satz.** *Es seien $\mu \in M(S)$ ein positives Maß und $\zeta \in S$ mit der Eigenschaft $D_\mu(\zeta) = 0$. Dann gilt*

$$\operatorname*{K-lim}_{z \to \zeta} P[\mu](z) = 0.$$

*Beweis.* Es seien $\alpha > 1$ und $(z_k)_{k \geq 1}$ eine konvergente Folge in $D_\alpha(\zeta)$ mit Grenzwert $\zeta$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung gibt es ein $\delta_\varepsilon > 0$ so, dass

$$\frac{\mu(\mathrm{K}_\delta(\zeta))}{\sigma(\mathrm{K}_\delta(\zeta))} < \varepsilon \tag{2.39}$$

für alle $0 < \delta \leq \delta_\varepsilon$. Definiere positive Maße $\mu_1, \mu_2 \in M(S)$ durch

$$\mu_1(A) = \mu(A \cap \mathrm{K}_{\delta_\varepsilon}(\zeta))$$

beziehungsweise

$$\mu_2(A) = \mu_2(A \cap (\mathrm{K}_{\delta_\varepsilon}(\zeta))^c),$$

für $A \in \mathcal{B}(S)$, sodass $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Verwendet man Eigenschaft (ii) des Poissonkerns aus Lemma 2.2 und beachtet man die Ungleichung in Punkt (v) aus

Lemma 2.13, so gilt

$$\begin{aligned} P[\mu_2](z_k) &= \int_{(\mathrm{K}_{\delta_\varepsilon}(\zeta))^c} P(z_k,\eta)\, d\mu_2(\eta) \\ &\leq \sup_{\substack{\eta\in S \\ |\eta-\zeta|\geq \delta_\varepsilon^2}} P(z_k,\eta)\cdot \mu(\mathrm{K}_{\delta_\varepsilon}(\zeta)) \xrightarrow{k\to\infty} 0. \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir zusammen mit Satz 2.22

$$\begin{aligned} \limsup_{k\to\infty} P[\mu](z_k) &= \limsup_{k\to\infty} P[\mu_1](z_k) \\ &\leq M_\alpha P[\mu_1](\zeta) \\ &\leq A_\alpha\, M_{\mu_1}(\zeta) \\ &= A_\alpha \sup_{\delta>0} \frac{\mu_1(\mathrm{K}_\delta(\zeta))}{\sigma(\mathrm{K}_\delta(\zeta))} \\ &\leq A_\alpha \sup_{\delta>0} \frac{\mu(\mathrm{K}_\delta(\zeta)\cap \mathrm{K}_{\delta_\varepsilon}(\zeta))}{\sigma(\mathrm{K}_\delta(\zeta)\cap \mathrm{K}_{\delta_\varepsilon}(\zeta))} \\ &= A_\alpha \sup_{\delta\in(0,\delta_\varepsilon]} \frac{\mu(\mathrm{K}_\delta(\zeta))}{\sigma(\mathrm{K}_\delta(\zeta))} \\ &\leq A_\alpha \varepsilon. \end{aligned}$$

In der letzten Abschätzung wurde (2.39) verwendet. Damit gilt

$$\lim_{k\to\infty} P[\mu](z_k) = 0$$

und daher

$$\operatorname*{K-lim}_{z\to\zeta} P[\mu](z) = 0.$$

□

Die beiden letzten Ergebnisse sind Korollare aus Satz 2.30.

**2.31 Korollar.** *Sei $f\in\mathcal{L}^1(S,\sigma)$. Dann gilt*

$$\operatorname*{K-lim}_{z\to\zeta} P[f](z) = f(\zeta)$$

*für jeden Lebesgue-Punkt $\zeta\in S$ von $f$.*

*Beweis.* Es seien $f \in \mathcal{L}^1(S,\sigma)$ und $\zeta \in S$ ein Lebesgue-Punkt von $f$. Das durch $\mu = \sigma_{|f-f(\zeta)|}$ definierte Maß $\mu \in M(S)$ ist positiv und, da $\zeta$ ein Lebesgue-Punkt von $f$ ist, gilt

$$\begin{aligned} D_\mu(\zeta) &= \lim_{\delta\downarrow 0} \frac{\mu(\mathrm{K}_\delta(\zeta))}{\sigma(\mathrm{K}_\delta(\zeta))} \\ &= \lim_{\delta\downarrow 0} \frac{1}{\sigma(\mathrm{K}_\delta(\zeta))} \int_{\mathrm{K}_\delta(\zeta)} |f(\eta) - f(\zeta)| d\sigma(\eta) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Somit liefert Satz 2.30 angewendet auf $\mu$

$$\operatorname*{K-lim}_{z\to\zeta} P[\mu](z) = 0. \tag{2.40}$$

Verwenden wir für $z \in \mathbb{B}$ die Identität $\int_S P(z,\zeta)\, d\sigma(\zeta) = 1$, welche unmittelbar aus Satz 2.11 mit $f \equiv 1$ folgt, so gilt weiter

$$\begin{aligned} |P[f](z) - f(\zeta)| &\le \int_S P(z,\eta)\, |f(\eta) - f(\zeta)| d\sigma(\eta) \\ &= P[\sigma_{|f-f(\zeta)|}](z) \\ &= P[\mu](z) \end{aligned} \tag{2.41}$$

für jedes $z \in \mathbb{B}$. Mit (2.40) und (2.41) folgt nun die Behauptung.

□

**2.32 Korollar.** *Sei $\mu \in M(S)$ mit Lebesgue-Zerlegung $\mu = \sigma_f + \mu_s$, wobei $f \in \mathcal{L}^1(S,\sigma)$ und $\mu_s \perp \sigma$ seien. Dann gibt es eine $\sigma$-Nullmenge $N \in \mathcal{B}(S)$ so, dass*

$$\operatorname*{K-lim}_{z\to\zeta} P[\mu](z) = f(\zeta)$$

*ist für alle $\zeta \in S \setminus N$.*

*Beweis.* Sei $\mu$ wie im Korollar beschrieben. Da $\mu_s \perp \sigma$ ist auch $|\mu_s| \perp \sigma$. Zu $|\mu_s|$ gibt es nach Lemma 2.28 eine $\sigma$-Nullmenge $N_s \in \mathcal{B}(S)$ derart, dass $D_{|\mu_s|}(\zeta) = 0$ ist für alle $\zeta \in S \setminus N_s$. Es folgt mit Satz 2.30

$$\operatorname*{K-lim}_{z\to\zeta} P[|\mu_s|](z) = 0$$

für alle $\zeta \in S \setminus N_s$. Aus der Ungleichung $|P[\mu_s](z)| \le P[|\mu_s|](z)$, $z \in \mathbb{B}$, erhält man weiter

$$\operatorname*{K-lim}_{z\to\zeta} P[\mu_s](z) = 0$$

für alle $\zeta \in S \setminus N_s$. Lemma 2.25 zeigt, dass es eine $\sigma$-Nullmenge $N_f \in \mathcal{B}(S)$ gibt derart, dass jedes $\zeta \in S \setminus N_f$ Lebesgue-Punkt für f ist. Nach Korollar 2.31 gilt daher für $\zeta \in S \setminus N_f$

$$\operatorname*{K-lim}_{z \to \zeta} P[\sigma_f](z) = \operatorname*{K-lim}_{z \to \zeta} P[f](z) = f(\zeta).$$

Somit gilt die Behauptung für alle $\zeta \in N_s \cup N_f$.

□

Dem Beweis von Korollar 2.29 entnehmen wir noch, dass

$$D_\mu(\zeta) = f(\zeta) = \operatorname*{K-lim}_{z \to \zeta} P[\mu](z)$$

für jedes $\zeta \in N_s \cup N_f$ gilt. Hierbei seien die Mengen $N_s$ und $N_f$ wie im Beweis von Korollar 2.32 gewählt. Das letzte Korollar ist eine mögliche Formulierung von Korányi's Theorem 4 in [6].

In dieser Arbeit haben wir einen relativ speziellen Fall von Poisson-Integralen untersucht. Man kann Poisson-Integrale um einiges allgemeiner definieren als wir es hier getan haben (siehe hierzu etwa [8]). Interessant ist auch die Frage nach einer Charakterisierung derjenigen Metriken $d$(vergleiche Lemma 2.13), für die die Argumente in den Abschnitten 2.2 und 2.3 dieser Arbeit übertragbar sind. Besonders die Endlichkeit der Konstante $A$ wie sie in Lemma 2.15 definiert ist, ist für die dargelegte Argumentation entscheidend.

# Anhang A

## Parameterabhängige Integrale

Im Folgenden zitieren wir einige Sätze über parameterabhängige Integrale. Die Ergebnisse sind dem Buch [2] von Jürgen Elstrodt entnommen und sind im wesentlichen Folgerungen aus dem Satz von der majorisierte Konvergenz. Wir verzichten auf die Ausführung der Beweise und verweisen auf die Sätze IV.5.6, IV.5.7 und IV.5.8(in dieser Reihenfolge) aus dem Buch von Elstrodt. Für diesen Abschnitt sei $(X,\mathcal{U},\mu)$ ein Maßraum mit der auf $X$ definierten $\sigma$-Algebra $\mathcal{U}$ und dem Maß $\mu$.

**A.1 Satz (Stetige Abhängigkeit des Integrals von einem Parameter).** *Es seien $T$ ein metrischer Raum, $t_0 \in T$ und $f\colon T \times X \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

*(i)* *für alle $t \in T$ ist $f(t,\cdot) \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$,*

*(ii)* *für $\mu$-fast alle $x \in X$ ist die Funktion $f(\cdot,x) : T \to \mathbb{C}$ stetig im Punkt $t_0$,*

*(iii)* *es gibt eine Umgebung $U$ des Punktes $t_0$ und eine nichtnegative Funktion $g \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ so, dass für alle $t \in U$ die Ungleichung $|f(t,x)| \leq g(x)$ für $\mu$- fast alle $x \in X$ gilt.*

*Dann ist die durch*

$$F(t) = \int_X f(t,x)\,d\mu(x)$$

*definierte Funktion $F\colon T \to \mathbb{C}$ stetig im Punkt $t_0 \in T$.*

**A.2 Satz (Differentiation unter dem Integralzeichen).** *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in I$ und $f\colon I \times X \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit den Eigenschaften*

*(i)* *für alle $t \in I$ ist $f(t,\cdot) \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$,*

*(ii)* *die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial t}(t_0,x)$ existiert für alle $x \in X$,*

*(iii)* *es gibt eine Umgebung $U$ von $t_0$ und eine nicht-negative Funktion $g \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ derart, dass für alle $t \in U \cap I$ mit $t \neq t_0$ die Ungleichung*

$$\left| \frac{f(t,x) - f(t_0,x)}{t - t_0} \right| \leq g(x)$$

*für $\mu$-fast alle $x \in X$ gilt.*

*Dann ist die durch*

$$F(t) = \int_X f(t,x)\, d\mu(x)$$

*definierte Funktion* $F\colon I \to \mathbb{C}$ *im Punkt* $t_0$ *differenzierbar, die partielle Ableitung* $\frac{\partial f}{\partial t}(t_0,\cdot)$ *ist integrierbar und es gilt*

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t_0) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t_0,x)\, d\mu(x)\,.$$

**A.3 Bemerkung.** *Ersetzt man die Voraussetzungen (ii) und (iii) durch*

*(ii*)* *es existiert ein* $\varepsilon > 0$ *so, dass die partielle Ableitung* $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$, $x \in X$, *für alle* $t \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon) \cap I$ *existiert,*

*(iii*)* *es gibt eine nicht-negative Funktion* $g \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ *derart, dass für alle* $t \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon) \cap I$ *und alle* $x \in X$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \le g(x)$$

*gilt,*

*so bleibt die Aussage des Satzes erhalten.*

**A.4 Satz (Holomorphe Abhängigkeit des Integrals von einem komplexen Parameter).** *Sind* $G \subset \mathbb{C}$ *offen und* $f\colon G \times X \to \mathbb{C}$ *eine Funktion mit den Eigenschaften*

*(i)* $f(z,\cdot) \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ *für alle* $z \in G$,

*(ii)* *für alle* $x \in X$ *ist* $f(\cdot,x)\colon G \to \mathbb{C}$ *holomorph und*

*(iii)* *zu jeder kompakten Kreisscheibe* $K \subset G$ *gibt es eine nicht-negative Funktion* $g_K \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ *so, dass für alle* $z \in K$ *die Ungleichung* $|f(z,x)| \le g_K(x)$ *für* $\mu$*-fast alle* $x \in X$ *gilt,*

*so ist die durch*

$$F(z) = \int_X f(z,x)\, d\mu(x)$$

*definierte Funktion* $F\colon G \to \mathbb{C}$ *holomorph.*

# Anhang B

## Maßtheorie

In diesem Abschnitt geben wir einige allgemeine Resultate der Maßtheorie wieder. Als erstes formulieren wir den Lebesgueschen Zerlegungssatz für komplexe Maße bevor wir uns anschließend Maßen auf lokal-kompakten Hausdorffschen topologischen Räumen widmen. Im Folgenden sei stets $X$ ein lokal-kompakter Hausdorffscher topologischer Raum und $\mathcal{B}(X)$ die von den offenen Mengen von $X$ erzeugte $\sigma$-Algebra auf $X$, die Borelsche $\sigma$-Algebra auf $X$. Auf der Menge $\mathcal{B}(X)$ definierte Maße heißen Borelmaße. An dieser Stelle erinnern wir noch an ein Resultat zur Gestalt der borelschen $\sigma$-Algebra von Produktmaßen (siehe hierzu [1, Proposition 7.6.2]).

**B.1 Proposition.** *Es sei $Y$ ein lokal-kompakter Hausdorffraum. Besitzen $X$ als auch $Y$ abzählbare Basen ihrer Topologie, so ist $\mathcal{B}(X \times Y) = \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y)$.*

Der Beweis der folgenden Version des Zerlegungssatzes von Lebesgue kann in [1, Proposition 4.3.1] nachgelesen werden.

**B.2 Satz (Zerlegungssatz von Lebesgue).** *Sind $\mu\colon \mathcal{B}(X) \to [0, \infty]$ ein positives und $\nu\colon \mathcal{B}(X) \to \mathbb{C}$ ein komplexes Borelmaß, so gibt es eindeutig bestimmte komplexe Borelmaße $\nu_a$ und $\nu_s$ so, dass*

*(i) $\nu_a$ absolut stetig ist bezüglich $\mu$,*

*(ii) $\nu_s$ singulär ist bezüglich $\mu$ und*

*(iii) $\nu = \nu_a + \nu_s$*

*gilt. Die Zerlegung $\nu = \nu_a + \nu_s$ nennt man Lebesgue-Zerlegung. Hierbei bezeichnet man $\nu_a$ als absolut stetigen und $\nu_s$ als singulären Teil des Maßes $\nu$.*

Ist $\mu$ zusätzlich $\sigma$-endlich, das heißt, gibt es eine Folge $(A_k)_{k\geq 1}$ von Mengen aus $\mathcal{B}(X)$ mit $\mu(A_k) < \infty$ und $X = \bigcup_{k\geq 1} A_k$, so erhält man durch den Satz von Radon-Nikodym, wie er beispielsweise in [1, Theorem 4.2.3] formuliert ist, eine $\mu$-fast überall eindeutig bestimmte Funktion $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ derart, dass sich $\nu_a$ in der Form

$$\nu_a(A) = \int_A f(x)\, d\mu(x), \qquad A \in \mathcal{B}(X),$$

schreiben lässt. Aus diesem Grund schreibt man für $\nu_a$ auch $\mu_f$.

Wir wollen nun den Darstellungssatz von F.Riesz für Maße aus dem Jahre 1909 formulieren. Der Vollständigkeit halber halten wir zunächst noch einige Definitionen fest.

**B.3 Definition.** *Ein positives Borelmaß $\mu$ auf $X$ heißt regulär, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

*(i) Für jede kompakte Menge $K \subset X$ gilt $\mu(K) < \infty$.*

*(ii) Für jede Menge $A \in \mathcal{B}(X)$ gilt*

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid U \subset X \textit{ist offen und} A \subset U\}.$$

*(iii) Für jede offene Menge $U \subset X$ gilt*

$$\mu(U) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset X \textit{ist kompakt und} K \subset U\}.$$

Ist $\mu$ ein komplexes Borelmaß, so heißt $\mu$ regulär, falls $|\mu|$ regulär ist im Sinne obiger Definition. An dieser Stelle zitieren wir noch Proposition 7.2.6 aus [1], welche zeigt, dass Eigenschaft (iii) aus Definition B.3 nicht nur für offene Mengen $U \subset X$ gilt.

**B.4 Proposition.** *Sind $\mu$ ein reguläres Borelmaß und $A \in \mathcal{B}(X)$ eine Menge mit der Eigenschaft, dass eine Folge $(A_k)_{k\geq 1}$ von Mengen aus $\mathcal{B}(X)$ existiert mit $A = \bigcup_{k\geq 1} A_k$ und $\mu(A_k) < \infty$, so gilt*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset X \textit{ist kompakt und} K \subset A\}.$$

Bevor wir den Rieszschen Darstellungssatz für Maße formulieren, geben wir noch ein hinreichendes Kriterium für die Regularität eines Borelmaßes $\mu$ auf $X$ an. Ein Beweis dieses Resultats kann in [1, Proposition 7.2.3] nachgeschlagen werden.

**B.5 Proposition.** *Besitzt der lokal-kompakte Hausdorffraum $X$ eine abzählbare Basis und ist $\mu$ ein Borelmaß mit der Eigenschaft, dass $\mu|_K$ endlich ist für jede kompakte Menge $K \subset X$, so ist $\mu$ regulär.*

Es sei $C_c(X)$ die Menge aller stetigen Funktionen $f\colon X \longrightarrow \mathbb{C}$ mit kompaktem Träger.

**B.6 Satz (Rieszscher Darstellungssatz für Maße).** *Ist $\lambda\colon C_c(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ eine positive Linearform, dass heißt $\lambda(f) \in \mathbb{R}_0^+$ für alle $f \geq 0$, so existiert genau ein positives, reguläres Borelmaß $\mu\colon \mathcal{B}(X) \longrightarrow [0,\infty]$ mit*

$$\lambda(f) = \int_X f(x)\, d\mu(x)$$

*für alle $f \in C_c(X)$.*

Diese Version des Darstellungssatzes von F.Riesz für positive Linearformen auf $C_c(X)$ ist [2] entnommen und wird dort in VIII.2.5 bewiesen.

# Literaturverzeichnis


[1] Cohn, D. L.: *Measure Theory*. Birkhäuser, Boston, 1980.

[2] Elstrodt, J.: *Maß- und Integrationstheorie*. Springer-Verlag, Berlin, 2011.

[3] Eschmeier, J.: *Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher*. Vorlesungsskript, Universität des Saarlandes, 2010.

[4] Gårding, L.: *The Mathematical Intelligencer, Volume 2, Issue 1, pp 43-53, The Dirichlet Problem*. Springer-Verlag, March 1979.

[5] Jahnke, H. N.: *A History of Analysis*. American Mathematical Society, 2003.

[6] Korányi, A.: *Harmonic functions on Hermitian hyperbolic space*. Trans. Amer. Math. Soc 135, 507 - 516, 1969.

[7] Rudin, W.: *Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1980.

[8] Stein, E. M. und N. J. Weiss: *On the Convergence of Poisson Integrals*. Trans. Amer. Math. Soc 140, 35 - 54, 1969.