Universität des Saarlandes
Fakultät 6 - Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät I
Fachrichtung: Mathematik

Kompaktheit von Hankeloperatoren über dem Einheitspolyzylinder

Masterarbeit

Zur Erlangung des akademischen Grades
Master of Science

vorgelegt von

Daniel Kraemer

nach einem Thema von

Prof. Dr. Jörg Eschmeier

Saarbrücken, August 2014

Hiermit versichere ich an Eides Statt durch meine eigene Unterschrift, dass ich die vorliegende Masterarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Saarbrücken, den 27. August 2014

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Im Laufe des 20. Jahrhunderts hat sich die Theorie der Hankel- und Toeplitzoperatoren als nützliches Werkzeug in vielen Bereichen der Mathematik erwiesen. So spielen Hankeloperatoren beispielsweise in der Kontrolltheorie oder bei der Lösung verschiedener Interpolations - und Momentenprobleme eine wichtige Rolle. An dieser Stelle seien die Nevanlinna-Pick Interpolation und das Hamburger Momentenproblem genannt. Eine reichhaltige Übersicht über die Theorie der Hankeloperatoren und ihrer Anwendungen gibt das gleichnamige Buch [25] von V. Peller. Weitere Ausführungen zu Momentenproblemen finden sich in der von J. Shohat und J. Tamarkin vefassten Monographie [28].

Auf der anderen Seite sind Hankeloperatoren als mathematische Objekte für sich ebenfalls von andauerndem Interesse. Angefangen bei einem Resultat von L. Kronecker zur Charakterisierung der Hankeloperatoren endlichen Ranges zum Ende des 19. Jahrhunderts (siehe [25, Theorem 1.3.1]) konnten Z. Nehari und P. Hartman durch ihre Arbeiten [22] beziehungsweise [14] in den 1950er Jahren grundlegende Aussagen über die Operatornorm beziehungsweise Kompaktheit von Hankeloperatoren über dem Hardyraum

$$\mathrm{H}^2(\mathbb{T}) = \left\{ f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T}, \sigma) \mid \hat{f}(n) = 0 \text{ für alle } n < 0 \right\}$$

auf der Einheitskreislinie $\mathbb{T} \subset \mathbb{C}$ (hierbei bezeichne σ das Haarsche Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{T}$ und $\hat{f}(n)$ $(n \in \mathbb{N})$ den n-ten Fourierkoeffizienten von f) treffen. Hierbei ist der Hankeloperator H_φ mit Symbol $\varphi \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}, \sigma)$ die Kompression des Multiplikationsoperators

$$M_\varphi \colon \mathrm{H}^2(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathrm{L}^2(\mathbb{T}, \sigma), \qquad f \longmapsto \varphi f$$

auf das orthogonale Komplement $\mathrm{H}^2(\mathbb{T})^\perp$ von $\mathrm{H}^2(\mathbb{T})$, das heißt

$$H_\varphi \colon \mathrm{H}^2(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathrm{H}^2(\mathbb{T})^\perp, \qquad f \longmapsto (\mathrm{Id}|_{\mathrm{H}^2(\mathbb{T})} - P)\, M_\varphi(f),$$

wenn $P \colon \mathrm{L}^2(\mathbb{T}, \sigma) \longrightarrow \mathrm{H}^2(\mathbb{T})$ die orthogonale Projektion von $\mathrm{L}^2(\mathbb{T}, \sigma)$ auf den Hardyraum $\mathrm{H}^2(\mathbb{T})$ bezeichnet (Eine abstraktere Definition eines Hankeloperators über dem Hardyraum geben wir in Definition 2.1). Nehari zeigt in seiner im Jahre 1957 veröffentlichten Arbeit die Identität

$$\|H_\varphi\| = \inf \left\{ \|\varphi - \psi\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}, \sigma)} \mid \psi \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T}) \right\}.$$

Unter Rückgriff auf dieses Resultat charakterisierte Hartman im darauffolgenden Jahr in [14] diejenigen Symbole $\varphi \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}, \sigma)$, deren zugehöriger Hankeloperator H_φ kompakt ist. Er kam zu dem heute wohlbekannten Ergebnis

$$\big\{\varphi \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}, \sigma) \mid\ H_\varphi \text{ ist kompakt}\big\} = \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T}) + \mathrm{C}(\mathbb{T}),$$

wobei wir $\mathrm{C}(\mathbb{T})$ für die Menge der stetigen Funktionen $\mathbb{T} \to \mathbb{C}$ schreiben.

Wir befassen uns in der vorliegenden Arbeit mit einer entsprechenden Charakterisierung von Symbolen kompakter Hankeloperatoren auf dem Hardyraum über dem Einheitspolyzylinder beliebiger Dimension sowie einer sinngemäßen Übertragung dieser Ergebnisse auf den Fall von Hankeloperatoren über verallgemeinerten Bergmanräumen. Erst im Jahr 1993 konnten M. Cotlar und C. Sadosky eine, dem Resultat von Hartman entsprechende, Aussage für Hankeloperatoren $H\colon\ \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n) \to \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)^\perp$ $(n \geq 2)$ formulieren. Sie zeigten

$$\big\{\varphi \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}^n, \sigma) \mid\ H_\varphi \text{ ist kompakt}\big\} = \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T}^n) \tag{0.1}$$

in [7] oder äquivalent, dass es im Fall $n \geq 2$ keine von Null verschiedenen kompakten Hankeloperatoren auf $\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$ gibt. Dies ist ein großer Unterschied zur eindimensionalen Aussage von Hartman. Wir werden das Argument von C. Sadosky und M. Cotlar nicht näher erläutern, sondern uns auf einen alternativen Beweis ihrer Aussage von P. Ahern, E.H. Youssfi und K. Zhu aus der jüngeren Vergangenheit konzentrieren. In der 2009 erschienenen Arbeit [1] obiger Autoren untersuchen sie die Fourierentwicklung eines Symbols $\varphi \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}^n, \sigma)$, dessen Hankeloperator H_φ kompakt ist und zeigen so das Resultat von M. Cotlar und C. Sadosky erneut.

Bevor wir im zweiten Kapitel die Sätze von Nehari und Hartman, sowie das Argument von P. Ahern, E.H. Youssfi und K. Zhu behandeln, fassen wir im ersten Teil dieser Arbeit, der Monographie [26] von W. Rudin folgend, einige wohlbekannte Ergebnisse zur Theorie der Hardyräume über dem Einheitspolyzylinder $\mathbb{D}^n$ zusammen. Für $p \in (1, \infty]$ zeigen wir, dass ein klassisches Resultat über das radiale Randverhalten von Funktionen aus $\mathrm{H}^p(\mathbb{D})$ entsprechend auch im höherdimensionalen Fall $\mathrm{H}^p(\mathbb{D}^n)$ richtig bleibt und man folglich $\mathrm{H}^p(\mathbb{D}^n)$ isometrisch mit einem abgeschlossenen Unterraum von $\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^n, \sigma_n)$ (wobei σ_n das n-fache Produkt von σ sei) identifizieren kann. Hierfür benötigen wir einige Eigenschaften von Poisson-Integralen über $\mathbb{D}^n$, die wir in einem gesonderten Abschnitt zusammentragen. Der letzte Abschnitt in Kapitel 1 dient der Einführung verallgemeinerter Bergmanräume, die für Kapitel 3 dieser Arbeit vonnöten ist. In letzterem beschäftigen wir uns mit einer Arbeit von Trieu Le aus dem Jahre 2010, welche die Methoden und Ideen aus [1] aufgreift um eine, dem Resultat von P. Hartman beziehungsweise M. Cotlar und C. Sadosky entsprechende, Aussage für kompakte Hankeloperatoren über verallgemeinerten Bergmanräumen herzuleiten. Um dieses Ergebnis von T. Le näher zu erläutern, beschränken wir uns für den Augenblick auf den klassischen Bergmanraum. Hierfür sei $\lambda\colon \mathfrak{B}(\mathbb{D}^n) \to [0,\infty)$ das Lebesgue-Borelsche Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{D}^n$ und

$$\mathrm{A}^2_\lambda = \big\{[f] \in \mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n,\lambda) \mid f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}^n)\big\}$$

der übliche Bergmanraum. In [18] verifiziert T. Le, dass

$$\begin{aligned}&\big\{\varphi \in \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n) \mid H_\varphi \text{ ist kompakt}\big\}\\ &\qquad = \big\{h + g \mid h \in \mathrm{A}(\mathbb{D}^n), g \in \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n) \text{ mit } g|_{\partial\mathbb{D}^n} \equiv 0\big\}.\end{aligned} \tag{0.2}$$

wobei der Hankeloperator $H_\varphi \in \mathrm{L}(\mathrm{A}^2_\lambda, \mathrm{A}^{2\perp}_\lambda)$ mit Symbol $\varphi \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{D}^n,\lambda)$ vom Bergmanraum auf dessen orthogonales Komplement $\mathrm{A}^{2\perp}_\lambda$ durch

$$H_\varphi(f) = P_-(\varphi f) \qquad (f \in \mathrm{A}^2_\lambda)$$

definiert ist und $\mathrm{A}(\mathbb{D}^n)$ die Menge aller $f \in \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n)$ bezeichne, deren Einschränkung $f|_{\mathbb{D}^n}$ holomorph ist. Während der Beweis der Inklusion von rechts nach links in (0.2) durch ein vergleichsweise elementares Approximationsargument vollzogen werden kann, bedarf die Verifikation der umgekehrten Inklusion einer Reihe von Hilfsaussagen, die wir in den Abschnitten des dritten Kapitels formulieren und beweisen werden. In Abschnitt 3.1 zeigen wir, das $\mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n,\lambda)$ in die direkte Hilbertraumsumme $\bigoplus_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} \mathcal{H}_\alpha$ der abgeschlossenen Teilräume $\mathcal{H}_\alpha$ aller quasi-homogenen Funktionen vom Grad $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ (siehe Deinition 3.1) zerfällt. Im darauffolgenden Teil untersuchen wir quasi-homogene Funktionen $\varphi \in \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n)$, deren zugehörige Hankeloperatoren kompakt sind. Es stellt sich heraus, dass ein solches Symbol φ auf dem topologischen Rand $\partial\mathbb{D}^n$ von $\mathbb{D}^n$ im wesentlichen durch ein Polynom $p \in \mathbb{C}[z_1,\ldots,z_n]$ beschrieben werden kann. Abschnitt 3.3 enthält ein abstraktes Resultat aus dem Bereich der harmonischen Analysis (siehe etwa [16, I.2.2]) mit dessen Hilfe wir zeigen, dass die Cesàro-Mittelwerte von φ gleichmäßig auf $\overline{\mathbb{D}}^n$ gegen φ konvergieren. Mit diesen Werkzeugen folgern wir die Identität (0.2) im letzten Abschnitt sinngemäß für eine ganze Klasse geeigneter regulärer Borel-Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{D}^n$ (siehe Satz 3.25). Entscheidend ist hier die Beobachtung, dass für ein stetiges Symbol $\varphi \in \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n)$ mit kompaktem Hankeloperator H_φ die Projektionen φ_α $(\alpha \in \mathbb{Z}^n)$ von φ in die Teilräume $\mathcal{H}_\alpha$ ebenfalls kompakte Hankeloperatoren H_{φ_α} liefern.

Neben den Charakterisierungen der Symbole $\varphi \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{D}^n,\lambda)$ mit kompakten Hankeloperatoren $H_\varphi \in \mathrm{L}(\mathrm{A}^2_\lambda, \mathrm{A}^{2\perp}_\lambda)$ von K. Stroethoff [29] und D. C. Zheng [31] stellt das Resultat (0.2) von T. Le die geometrischen Eigenschaften des Symbols φ klar heraus, wenngleich seine Aussage nur für stetige Funktionen richtig ist. Letzteres bemerkt T. Le durch die Konstruktion eines, vom speziell betrachteten Borel-Maß auf $\mathbb{D}^n$ abhängigen, beschränkten, stetigen Symbols

$\varphi\colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$, dessen zugehöriger Hankeloperator kompakt ist, welches aber keine Zerlegung gemäß der, hier in Satz 3.25 formulierten Aussage besitzt.

An dieser Stelle möchte ich mich bei einigen Personen für ihre Unterstützung bedanken. Als erstes möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Eschmeier für die interessante und lehrreiche Themenvergabe, die ausgezeichnete Betreuung und die vielen fruchtbaren Unterhaltungen und Anregungen während des Schreibens dieser Arbeit bedanken. Desweiteren gilt mein Dank B.Sc. Dominik Schillo, B.Sc. Jonas Wahl und M.Sc. Sebastian Langendörfer für einige hilfreiche Diskussionen, sowie B.Sc. Elena Kreutzer für ein lehrreiches und gelungenes Masterseminar. Selbstverständlich gilt mein Dank auch allen anderen Studenten und Mitarbeitern der Fachrichtung Mathematik, die mir in den letzten Jahren mit Rat und Tat zur Seite standen. Zuletzt gilt ein besonderer Dank meiner Familie ohne deren vielfältige Unterstützung und Motivation mein Studium der Mathematik in den letzten fünf Jahren sowie insbesondere die Entstehung dieser Arbeit nicht möglich gewesen wäre.

Saarbrücken, im August 2014

1 Hardy- und Bergmanräume über dem Einheitspolyzylinder

In diesem einleitenden Kapitel präsentieren wir zunächst die für die späteren Abschnitte essenziellen Grundergebnisse. Wir legen im ersten Abschnitt grundlegende Bezeichnungen und Konventionen fest, bevor wir in den darauffolgenden Abschnitten an wichtige Ergebnisse zum Hardyraum über dem Einheitspolyzylinder erinnern und verallgemeinerte Bergmanräume definieren und ihre Eigenschaften behandeln.

1.1 Präliminarien

Im Folgenden sei $n \in \mathbb{N}^*$ eine beliebige von null verschiedene natürliche Zahl. In der gesamten Arbeit bezeichnen wir mit

$$\mathbb{D}^n = \big\{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_i| < 1, i = 1, \dots, n \big\}$$

den offenen Einheitspolyzylinder in $\mathbb{C}^n$, wobei $|z|$ der komplexe Betrag der Zahl $z \in \mathbb{C}$ sei. Weiter schreiben wir

$$\mathbb{T}^n = \big\{ \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n \mid |\zeta_i| = 1, i = 1, \dots, n \big\}$$

für den ausgezeichneten Rand des Einheitspolyzylinders $\mathbb{D}^n$. Allgemein schreiben wir

$$\mathrm{P}^n_r(z) = \big\{ w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n \mid |w_i - z_i| < r_i \text{ für } i = 1, \dots, n \big\}$$

für den Polyzylinder in $\mathbb{C}^n$ mit Mittelpunkt $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ und Multiradius $r = (r_1, \dots, r_n) \in [0, \infty)^n$. Zur Vereinfachung der Notation verwenden wir auch $\mathrm{P}^n_r(z) = \mathrm{P}^n_{(r,\dots,r)}(z)$ für $r \in [0, \infty)$ und $z \in \mathbb{C}^n$ und im Fall $n = 1$ setzen wir $\mathrm{D}_r(z) = \mathrm{P}^1_r(z)$. Für zwei Vektoren $z, w \in \mathbb{C}^n$ mit Komponentendarstellungen $z = (z_1, \dots, z_n)$ beziehungsweise $w = (w_1, \dots, w_n)$ schreiben wir zw für den Vektor $(z_1 w_1, \dots, z_n w_n)$ und setzen $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$.

Ist $(X, \mathfrak{U}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum, bestehend aus einer Menge X, einer σ-Algebra $\mathfrak{U}$ auf X und einem Maß $\mu \colon \mathfrak{U} \to [0, \infty]$ und $p \in [1, \infty)$, so bezeichnen wir mit

$$\mathcal{L}^p(X, \mu) = \big\{ f \colon X \to \mathbb{C} \mid f \text{ ist messbar und } |f|^p \text{ ist } \mu\text{-integrierbar} \big\}$$

den bezüglich

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p} = \left(\int_X |f(z)|^p \, d\mu(z) \right)^{1/p} \qquad (f \in \mathcal{L}^p(X,\mu))$$

halbnormierten $\mathcal{L}^p$-Raum. Im Fall, dass X ein topologischer Raum und $\mathfrak{U} = \mathfrak{B}(X)$ die σ-Algebra der borelschen Teilmengen von X ist, verwenden wir auch den Begriff „Borel-messbar" für messbare Funktionen $f\colon X \to \mathbb{C}$. Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{C}$ nennen wir wesentlich beschränkt, falls f messbar ist und eine μ-Nullmenge $N \in \mathfrak{U}$ existiert, sodass $f|_{X \setminus N}$ beschränkt ist. Dann nennen wir

$$\mathcal{L}^\infty(X,\mu) = \big\{ f\colon X \to \mathbb{C} \mid f \text{ ist wesentlich beschränkt} \big\}$$

den bezüglich

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} = \inf_{\substack{N \in \mathfrak{U} \\ \mu(N)=0}} \sup_{z \in X \setminus N} |f(z)| \qquad (f \in \mathcal{L}^\infty(X,\mu))$$

halbnormierten Raum der wesentlich beschränkten Funktionen auf X. Für $1 \leq p \leq \infty$ werden die Quotientenräume

$$\mathrm{L}^p(X,\mu) = \mathcal{L}^p(X,\mu)/\mathcal{N},$$

wobei

$$\mathcal{N} = \big\{ f\colon X \to \mathbb{C} \mid f \text{ ist messbar mit } f = 0 \ \mu\text{-fast überall} \big\},$$

durch die repräsentantenweise definierten Normen

$$\|[f]\|_{\mathrm{L}^p} = \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} \quad ([f] \in \mathrm{L}^p(X,\mu))$$

zu Banachräumen, den Lebesgue-Räumen. Aus dem konkreten Zusammenhang wir immer ersichtlich sein, bezüglich welchem Maßraum die Norm $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p}$ zu verstehen ist.

Bezeichnet $\lambda\colon \mathfrak{B}([-\pi,\pi]) \to [0,\infty]$ das Lebesgue-Borelmaß auf $[-\pi,\pi]$, so wird durch

$$\sigma(B) = \frac{1}{2\pi} \lambda\left(\big\{ t \in [-\pi,\pi] \mid e^{it} \in B \big\} \right) \qquad (B \in \mathfrak{B}(\mathbb{T}))$$

ein reguläres Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß, das normierte Haar-Maß auf dem Rand des Einheitskreises $\mathbb{T} \subset \mathbb{C}$ definiert. Wir schreiben $\sigma_n = \bigotimes_{k=1}^n \sigma$ für das n-fache Produktmaß von σ auf $\mathbb{T}^n$ und werden, sofern die Dimension n aus der jeweils betrachteten Situation klar hervorgeht, den Dimensionsindex n gelegentlich weglassen und wieder σ für σ_n schreiben. Dieses Maß ist translationsinvariant im folgenden Sinne:

1.1 Lemma. *Es seien $\zeta \in \mathbb{T}^n$ und $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{T}^n)$. Dann gilt*

$$\sigma_n(\zeta B) = \sigma_n(B),$$

wobei $\zeta B = \{\zeta\eta \in \mathbb{T}^n \mid \eta \in B\}$ sei.

Für $z = (z_1, \ldots, z_n) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ und $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ gelten die üblichen Bezeichnungen

$$z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{\alpha_n}$$

und

$$|\alpha| = |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|$$

sowie

$$\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!.$$

Um zu verdeutlichen, mit welcher Norm $\|\cdot\|$ wir einen $\mathbb{C}$-Vektorraum V versehen, verwenden wir im Verlauf der gesamten Arbeit die Notation $(V, \|\cdot\|)$. So bezeichnet etwa $(\mathrm{C}(K), \|\cdot\|_K)$ den Banachraum

$$\mathrm{C}(K) = \{f\colon K \to \mathbb{C} \mid f \text{ ist stetig}\}$$

der stetigen Funktionen auf einem kompakten hausdorffschen topologischen Raum K vermöge der Supremumsnorm

$$\|\cdot\|_K\colon\ \mathrm{C}(K) \longrightarrow [0, \infty), \qquad f \longmapsto \sup_{x \in K} |f(x)|\,.$$

Sind $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ komplexe Hilberträume, so bezeichne $\mathcal{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_n$ ihr Hilbertraumtensorprodukt.

1.2 Lemma. *Für $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ sei*

$$z^\alpha\colon \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \zeta \longmapsto \zeta^\alpha.$$

Dann bildet die Familie $(z^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ eine Orthonormalbasis von $\mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma)$.

Beweis. Die Familie $(z^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ bildet offenbar ein Orthonormalsystem in $\mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma)$. Es sei zunächst $n = 1$. Nach dem Satz von Stone-Weierstraß liegen die trigonometrischen Polynome

$$\Big\{ \sum_{k=-N}^{N} a_k z^k \in \mathrm{C}(\mathbb{T}) \mid N \in \mathbb{N}, a_k \in \mathbb{C} \text{ für } k \in \{-N, \ldots, N\} \Big\}$$

in $(\mathrm{C}(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{\mathbb{T}})$, und daher insbesondere in $(\mathrm{C}(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{\mathrm{L}^2})$, dicht. Da das Maß σ_1 regulär ist, liegt $\mathrm{C}(\mathbb{T})$ dicht in $(\mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma), \|\cdot\|_{\mathrm{L}^2})$ nach [27, Theorem 3.14]. Somit folgt die Behauptung im Fall $n = 1$. Ist $n > 1$ so gibt es nach [15, Example

2.6.11] einen isometrischen Isomorphismus $\Phi\colon\ \mathrm{L}^2(\mathbb{T},\sigma)\otimes\ldots\otimes\mathrm{L}^2(\mathbb{T},\sigma)\to\mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n,\sigma_n)$ mit

$$\Phi(f_1\otimes\ldots\otimes f_n)=f_1\ldots f_n \tag{1.1}$$

für alle $f_1,\ldots,f_n\in\mathrm{L}^2(\mathbb{T},\sigma)$. Da $(z^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis von $\mathrm{L}^2(\mathbb{T},\sigma)$ ist, ist die Familie $(z^{k_1}\otimes\ldots\otimes z^{k_n})_{k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}}$ nach [15, Theorem 2.6.4] eine Orthonormalbasis des Tensorprodukts $\mathrm{L}^2(\mathbb{T},\sigma)\otimes\ldots\otimes\mathrm{L}^2(\mathbb{T},\sigma)$ und da Φ isometrisch ist, folgt die Behauptung aus (1.1).

□

Ist $(V,\|\cdot\|_V)$ ein beliebiger normierter Raum, so schreiben wir $(V^*,\|\cdot\|)$ beziehungsweise einfach nur V^* für den topologischen Dualraum von V. Hierbei bezeichnet $\|\cdot\|$ stets die Operatornorm. Das folgende Ergebnis wird beispielsweise in [8, Satz VII.3.2] bewiesen.

1.3 Satz. *Die Banachräume $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}^n,\sigma)$ und $\big(\mathrm{L}^1(\mathbb{T}^n)\big)^*$ sind isometrisch ismomorph vermöge des durch*

$$\psi(f)(g)=\int_{\mathbb{T}^n}f(\zeta)g(\zeta)\,d\sigma(\zeta)\qquad(f\in\mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}^n,\sigma),g\in\mathrm{L}^1(\mathbb{T}^n))$$

definierten isometrischen Isomorphismus $\psi\colon\ \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}^n,\sigma)\to\big(\mathrm{L}^1(\mathbb{T}^n)\big)^*$.

Wählen wir zu $p\in[1,\infty]$ die Zahl $q\in[1,\infty]$ so, dass $1/p+1/q=1$ - hierbei ist $1/\infty$ als Null zu lesen -, so zeigt die Höldersche Ungleichung die Wohldefiniertheit der linearen Abbildung

$$\Phi_{pq}\colon\ \mathrm{L}^p(\mathbb{T}^n,\sigma)\times\mathrm{L}^q(\mathbb{T}^n,\sigma)\longrightarrow\mathbb{C},\qquad(f,g)\longmapsto\int_{\mathbb{T}^n}f(\zeta)g(\zeta)\,d\sigma(\zeta)\,.$$

Darüber hinaus bildet $(\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^n,\sigma),\mathrm{L}^q(\mathbb{T}^n,\sigma))$ eine duale Paarung vermöge der Abbildung Φ_{pq}. Die von der Halbnormfamilie $\big\{p_g\mid g\in\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^n,\sigma)\big\}$, wobei

$$p_g\colon\ \mathrm{L}^q(\mathbb{T}^n,\sigma)\longrightarrow[0,\infty),\qquad f\longmapsto|\Phi_{pq}(g,f)|$$

für $g\in\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^n,\sigma)$ sei, auf $\mathrm{L}^q(\mathbb{T}^n,\sigma)=(\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^n,\sigma))^*$ erzeugte lokalkonvexe Topologie - die schwach*-Topologie - bezeichnen wir als **w*-Topologie**. Um anzudeuten, dass ein Netz $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ zu einer Indexmenge A von Funktionen aus $\mathrm{L}^q(\mathbb{T}^n,\sigma)$ in der w*-Topologie gegen eine Funktion $f\in\mathrm{L}^q(\mathbb{T}^n,\sigma)$ konvergiert, verwenden wir die Schreibweise $\mathrm{w}^*\text{-}\lim_{\alpha\in A}f_\alpha=f$.

Zwei weitere Topologien dieser Art, werden im Verlauf der Arbeit verwendet werden. Die schwache Topologie auf einem normierten Raum X wird durch die Halbnormen

$$p_T\colon X\longrightarrow[0,\infty),\qquad x\longmapsto|T(x)|\qquad(T\in X^*)$$

induziert. Ist Y ein weiterer normierter Raum, so ist die schwache Operatortopologie auf der Menge $\mathrm{L}(X,Y)$ der beschränkten, linearen Operatoren $T\colon X \to Y$ durch die Halbnormen

$$p_{x,y^*}\colon \mathrm{L}(X,Y) \longrightarrow [0,\infty), T \longmapsto |y^*(Tx)| \qquad (x \in X, y^* \in Y^*)$$

gegeben. Konvergenz von Netzen bezüglich obiger Topologien deuten wir mit den Symbolen $\mathrm{w}\text{-}\lim$ für die schwache Topologie beziehungsweise $\mathrm{WOT}\text{-}\lim$ für die schwache Operatortopologie an. Wichtige Eigenschaften solcher lokalkonvexer Topologien werden in [30, Kapitel VIII] aufgezeigt.

1.2 Randwerte von Poisson-Integralen

Die im Folgenden präsentierten Ergebnisse über das Randverhalten von Poisson-Integralen über dem Einheitspolyzylinder $\mathbb{D}^n$ dienen uns als Werkzeug zur Verifikation eines wohlbekannten Resultats zum radialen Randverhalten von Funktionen aus den Hardyräumen über $\mathbb{D}^n$, welches wir im nächsten Abschnitt formulieren und beweisen werden. Wir orientieren uns auf den folgenden Seiten an der Monographie [26] von Walter Rudin zur Funktionentheorie über dem Einheitspolyzylinder sowie dem Vorlesungsskript [9] zur Theorie der Hardyräume über dem Einheitskreis in $\mathbb{C}$ von Jörg Eschmeier. Hierbei werden wir einige Resultate ohne Beweis zitieren und uns auf die Angabe geeigneter Quellen beschränken. Für den gesamten Paragraphen sei, wenn nicht näher spezifiziert, $n \in \mathbb{N}^*$.

1.4 Definition. *Eine stetige Funktion $u\colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$ heißt **n-harmonisch**, falls u in jeder Komponente harmonisch ist.*

1.5 Lemma. *Es seien $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und $u \in \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n)$ so, dass $u|_{\mathbb{D}^n}$ n-harmonisch ist. Dann ist die Funktion*

$$u_\zeta\colon \mathbb{D}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto u(\zeta, z)$$

für jedes feste $\zeta \in \overline{\mathbb{D}}$ $(n-1)$-harmonisch.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $n = 2$. Sind $\zeta_0 \in \overline{\mathbb{D}}$ und $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine gegen 1 konvergente Folge aus $[0, 1)$, so sind die Funktionen

$$\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto u(r_k\zeta_0, z) \qquad (k \in \mathbb{N})$$

harmonisch. Sie erfüllen also die eindimensionale Mittelwerteigenschaft, das heißt für $k \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{D}$ und $r > 0$ mit $\overline{\mathrm{D}_r(z)} \subset \mathbb{D}$ gilt

$$u(r_k\zeta_0, z) = \int_{\mathbb{T}} u(r_k\zeta_0, z + r\zeta)\, d\sigma(\zeta)\,.$$

Da die Funktionen

$$\mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \zeta \longmapsto u(r_k\zeta_0, z + r\zeta) \qquad (k \in \mathbb{N})$$

für $k \to \infty$ gleichmäßig auf $\mathbb{T}$ gegen

$$\mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \zeta \longmapsto u(\zeta_0, z + r\zeta)$$

konvergieren, folgt schließlich

$$\begin{aligned} u_{\zeta_0}(z) &= \lim_{k\to\infty} u(r_k\zeta_0, z) \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{T}} u(r_k\zeta_0, z + r\zeta)\, d\sigma(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{T}} u(\zeta_0, z + r\zeta)\, d\sigma(\zeta)\,. \end{aligned}$$

Also erfüllt die stetige Funktion u_{ζ_0} die eindimensionale Mittelwerteigenschaft und ist somit nach [27, Theorem 11.13] harmonisch.

$\square$

Der Poissonkern

$$\mathrm{P}_n\colon \mathbb{D}^n \times \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad ((z_1,\dots,z_n),(\zeta_1,\dots,\zeta_n)) \longmapsto \prod_{i=1}^{n} \frac{1-|z_i|^2}{|1-z_i\bar{\zeta}_i|^2}$$

ist eine stetige, positive Funktion mit der Eigenschaft, dass die Abbildung

$$\mathrm{P}_n(z,\cdot)\colon \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \zeta \longmapsto \mathrm{P}_n(z,\zeta)$$

für jedes feste $z \in \mathbb{D}^n$ als beschränkte, messbare Funktion σ-integrierbar ist.

1.6 Definition. *Für $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T}^n,\sigma)$ heißt das parameterabhängige Integral*

$$\mathrm{P}[f]\colon \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto \int_{\mathbb{T}^n} \mathrm{P}_n(z,\zeta) f(\zeta)\, d\sigma(\zeta)$$

*das **Poisson-Integral von f**.*

Wir führen nun einige Eigenschaften des Poisson-Integrals an. Sind $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T}^n,\sigma)$ und $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, so bezeichne

$$\hat{f}(\alpha) = \int_{\mathbb{T}^n} f(\zeta)\bar{\zeta}^{\alpha}\, d\sigma(\zeta)$$

den $\alpha-$ten Fourierkoeffizienten von f. Nach einem Satz über parameterabhängige Integrale ist das Poisson-Integral $\mathrm{P}[f]$ einer Funktion $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T}^n,\sigma)$ stetig.

1.7 Lemma. *Es sei $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T}^n,\sigma)$. Dann ist das Poisson-Integral $\mathrm{P}[f]$ von f n-harmonisch. Gilt zusätzlich $\hat{f}(\alpha) = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{N}^n$, so ist $\mathrm{P}[f]$ holomorph und besitzt die auf ganz $\mathbb{D}^n$ konvergente Potenzreihenentwicklung*

$$\mathrm{P}[f](z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \hat{f}(\alpha) z^{\alpha} \qquad (z \in \mathbb{D}^n).$$

Beweis. Für die erste Aussage können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T}^n,\sigma)$ reellwertig und nichtnegativ ist, denn sonst schreibe $f = \mathrm{Re}(f)^+ - \mathrm{Re}(f)^- + i(\mathrm{Im}(f)^+ - \mathrm{Im}(f)^-)$, wobei $\mathrm{Re}(f)^+, \mathrm{Re}(f)^-$, $\mathrm{Im}(f)^+, \mathrm{Im}(f)^-$ die Positiv- beziehungsweise Negativteile von $\mathrm{Re}(f)$ beziehungsweise $\mathrm{Im}(f)$ bezeichnen, und bemerke

$$\mathrm{P}[f] = \mathrm{P}[\mathrm{Re}(f)^+] - \mathrm{P}[\mathrm{Re}(f)^-] + i(\mathrm{P}[\mathrm{Im}(f)^+] - \mathrm{P}[\mathrm{Im}(f)^-]).$$

Es sei also $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T}^n, \sigma)$ reellwertig und nichtnegativ. Ist $z_0 \in \mathbb{D}^{n-1}$, so genügt es die Harmonizität der Abbildung

$$\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}, w \longmapsto \mathrm{P}[f](w, z_0)$$

nachzuweisen. Hierfür beachte man, dass

$$\mathrm{P}_1(z, \zeta) = \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right)$$

für $(z, \zeta) \in \mathbb{D} \times \mathbb{T}$ gilt und durch die Vorschrift

$$\sigma_f(A) = \int_A f(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \qquad (A \in \mathfrak{B}(\mathbb{T}^n))$$

ein endliches Maß $\sigma_f \colon \mathfrak{B}(\mathbb{T}^n) \to [0, \infty)$ mit

$$\int_{\mathbb{T}^n} g(\zeta)\, d\sigma_f(\zeta) = \int_{\mathbb{T}^n} g(\zeta) f(\zeta)\, d\sigma(\zeta)$$

für alle beschränkten, Borel-messbaren Funktionen $g \colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ definiert wird. Es seien nun $w \in \mathbb{D}$ und $z = (w, z_0)$. Da die Funktion $\mathrm{P}_n(z, \cdot) \colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ beschränkt und Borel-messbar ist, folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}[f](z) &= \int_{\mathbb{T}^n} \mathrm{P}_n(z, \zeta) f(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} \mathrm{P}_{n-1}(z_0, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)\, \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta_1 + w}{\zeta_1 - w}\right) d\sigma_f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \\
&= \mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{T}^n} \mathrm{P}_{n-1}(z_0, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) \frac{\zeta_1 + w}{\zeta_1 - w}\, d\sigma_f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)\right).
\end{aligned}$$

Definieren wir

$$F \colon \mathbb{D} \times \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad (v, \zeta) \longmapsto \mathrm{P}_{n-1}(z_0, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) \frac{\zeta_1 + v}{\zeta_1 - v},$$

so ist $F(v, \cdot)$ für jedes feste $v \in \mathbb{D}$ σ_f-integrierbar und $F(\cdot, \zeta)$ ist für jedes feste $\zeta \in \mathbb{T}^n$ holomorph. Ist $r \in (0, 1)$ so werden die Funktionen $|F(v, \cdot)|$ gleichmäßig in allen $v \in \mathrm{D}_r(0)$ majorisiert durch die σ_f-integrierbare Funktion

$$\mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \longmapsto |\mathrm{P}_{n-1}(z_0, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)| \frac{2}{1 - r}.$$

Nach einem Satz über parameterabhängige Integrale ist die Abbildung

$$\mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad v \longmapsto \int_{\mathbb{T}^n} F(v, \zeta)\, d\sigma_f(\zeta)$$

holomorph und daher ist $\mathrm{P}[f](\cdot, z_0)$ als Realteil dieser Funktion harmonisch, das heißt $\mathrm{P}[f]$ ist n-harmonisch. Für $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T}^n, \sigma)$ setzen wir jetzt zusätzlich $\hat{f}(\alpha) = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{N}^n$ voraus. Man rechnet leicht nach, dass

$$\mathrm{P}_1(z, \zeta) = 2 \operatorname{Re}\left(\frac{z\bar{\zeta}}{1 - z\bar{\zeta}}\right) + 1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} z^{(k)} \bar{\zeta}^k \tag{1.2}$$

für $(z, \zeta) \in \mathbb{D} \times \mathbb{T}$ gilt, wobei

$$z^{(k)} = \begin{cases} z^k, & \text{falls } k \in \mathbb{N} \\ \bar{z}^{|k|}, & \text{falls } k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \end{cases}$$

für $k \in \mathbb{Z}$ sei. Setzen wir entsprechend

$$z^{(\alpha)} = z_1^{(\alpha_1)} \ldots z_n^{(\alpha_n)}$$

für $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{D}^n$ und $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$, so liefert die Darstellung (1.2) sinngemäß

$$\mathrm{P}_n(z, \zeta) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \bar{\zeta}^\alpha z^{(\alpha)}$$

für $(z, \zeta) \in \mathbb{D}^n \times \mathbb{T}^n$. Es sei $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{D}^n$. Da die Reihe

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} (|z_1|, \ldots, |z_n|)^{(|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n|)}$$

konvergiert, folgt aus

$$\left|\bar{\zeta}^\alpha z^{(\alpha)}\right| = (|z_1|, \ldots, |z_n|)^{(|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n|)}$$

und dem Weierstraßschen Majorentenkriterium (siehe [10, Satz 1.11]), dass $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \bar{\zeta}^\alpha z^{(\alpha)}$ gleichmäßig in $\zeta \in \mathbb{T}^n$ konvergiert. Somit gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{P}[f](z) &= \int_{\mathbb{T}^n} \mathrm{P}_n(z, \zeta) f(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \bar{\zeta}^\alpha z^{(\alpha)} f(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \left(\int_{\mathbb{T}^n} \bar{\zeta}^\alpha f(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \right) z^{(\alpha)} \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(\alpha) z^{(\alpha)} \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \hat{f}(\alpha) z^\alpha, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Voraussetzung $\hat{f}(\alpha) = 0$ für $\alpha \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{N}^n$ verwendet haben. $\mathrm{P}[f]$ ist daher als analytische Funktion holomorph.

□

Das Poisson-Integral einer stetigen Funktion definiert eine Lösung des Dirichlet-Problems auf $\mathbb{D}^n$ wie das folgende Lemma zeigt.

1.8 Lemma. *Sei $u \in \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n)$ so, dass $u|_{\mathbb{D}^n}$ n-harmonisch ist. Dann gilt*

$$u(z) = \mathrm{P}[u|_{\mathbb{T}^n}](z)$$

für jedes $z \in \mathbb{D}^n$.

Beweis. Wir beweisen dies durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}^*$. Theorem 11.9 in [27] zeigt den Fall $n = 1$. Ist die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}^*$ wahr und $u \in \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^{n+1})$ derart, dass $u|_{\mathbb{D}^{n+1}}$ $(n+1)$-harmonisch ist, so liegt die Abbildung

$$u_{\zeta_1} \colon \overline{\mathbb{D}}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \zeta \longmapsto u(\zeta_1, \zeta)$$

für festes $\zeta_1 \in \overline{\mathbb{D}}$ in $\mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n)$ und $u_{\zeta_1}|_{\mathbb{D}^n}$ ist nach Lemma 1.5 n-harmonisch. Somit liefert die Induktionsvoraussetzung für $z = (z_1, z') \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}^n$ zusammen mit dem Satz von Fubini, dass

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}[u|_{\mathbb{T}^{n+1}}](z) &= \int_{\mathbb{T}^{n+1}} \mathrm{P}_{n+1}(z,\zeta) u(\zeta)\, d\sigma_{n+1}(\zeta) \\
&= \int_{\mathbb{T}} \mathrm{P}_1(z_1,\zeta_1) \int_{\mathbb{T}^n} \mathrm{P}_n(z',\zeta') u_{\zeta_1}(\zeta')\, d\sigma_n(\zeta')\, d\sigma_1(\zeta_1) \\
&= \int_{\mathbb{T}} \mathrm{P}_1(z_1,\zeta_1)\, \mathrm{P}[u_{\zeta_1}|_{\mathbb{T}^n}](z')\, d\sigma_1(\zeta_1) \\
&= \int_{\mathbb{T}} \mathrm{P}_1(z_1,\zeta_1) u(\zeta_1, z')\, d\sigma_1(\zeta_1) \\
&= \mathrm{P}[u(\cdot, z')|_{\mathbb{T}}](z_1) \\
&= u(z).
\end{aligned}$$

□

Für $r \in [0,1)$ und eine Funktion $u \colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$ definiere die Randfunktion

$$u_r \colon \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \zeta \longmapsto u(r\zeta).$$

Wir wollen als nächstes aufzeigen, unter welchen Bedigungen an eine Funktion $u \colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$ diese als Poisson-Integral bezüglich einer Funktion $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{T}^n, \sigma)$ mit $1 \leq p \leq \infty$ dargestellt werden kann. Als Hilfsmittel dienen uns die folgenden beiden Lemmata. Ersteres wird in [26, Theorem 2.1.3] bewiesen, weswegen wir auf die Ausführung des Beweises verzichten.

1.9 Lemma. *Sind $1 \leq p < \infty$, $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{T}^n, \sigma)$ und $u = \mathrm{P}[f]$, so gilt*

$$\lim_{r \uparrow 1} \|u_r - f\|_{\mathrm{L}^p} = 0.$$

1.10 Lemma. *Seien $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}^n, \sigma)$ und $u = \mathrm{P}[f]$. Dann konvergiert $(u_r)_{r\in[0,1)}$ für $r \uparrow 1$ in $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}^n, \sigma)$ bezüglich der w*-Topologie gegen f.*

Beweis. Es sei $h \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T}^n, \sigma)$. Beachtet man, dass $\lim_{r\uparrow 1} \|(\mathrm{P}[h])_r - h\|_{\mathrm{L}^1} = 0$ nach Lemma 1.9 gilt und u nach Lemma 1.7 n-harmonisch ist, so zeigt die Rechnung

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^n} h(\zeta)u_r(\zeta)\, d\sigma(\zeta) &= \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n} h(\zeta)\, \mathrm{P}_n(r\zeta, \eta) f(\eta)\, d\sigma(\eta)\, d\sigma(\zeta)\\
&= \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n} h(\zeta)\, \mathrm{P}_n(r\eta, \zeta)\, d\sigma(\zeta)\, f(\eta)\, d\sigma(\eta)\\
&= \int_{\mathbb{T}^n} (\mathrm{P}[h])_r(\eta) f(\eta)\, d\eta,
\end{aligned}$$

dass

$$\lim_{r\uparrow 1} \int_{\mathbb{T}^n} h(\zeta)u_r(\zeta)\, d\sigma(\zeta) = \int_{\mathbb{T}^n} h(\zeta)f(\zeta)\, d\sigma(\zeta)\,.$$

Somit konvergiert $(u_r)_{r\in[0,1)}$ für $r \uparrow 1$ in $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}^n, \sigma)$ bezüglich der w*-Topologie gegen f.

$\square$

Wir erhalten folgende Charakterisierung von Klassen Poissonscher Integrale.

1.11 Satz. *Sind $u \colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$ n-harmonisch und $1 < p \leq \infty$, so gilt:*

(i) Es gibt genau dann eine Funktion $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{T}^n, \sigma)$ mit $u = \mathrm{P}[f]$, wenn die Familie $(u_r)_{r\in[0,1)}$ in $\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^n, \sigma)$ beschränkt ist.

(ii) Es gibt genau dann eine Funktion $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T}^n, \sigma)$ mit $u = \mathrm{P}[f]$, wenn die Familie $(u_r)_{r\in[0,1)}$ in $\mathrm{L}^1(\mathbb{T}^n, \sigma)$ konvergiert für $r \uparrow 1$.

Beweis. Ist $1 < p \leq \infty$, so folgt die Notwendigkeit der Beschränktheit von $(u_r)_{r\in[0,1)}$ in $\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^n, \sigma)$ in Teil (i) aus Lemma 1.9 für $1 < p < \infty$ beziehungsweise Theorem 2.1.3 aus [26] im Fall $p = \infty$. Für die umgekehrte Implikation sei $1 < p \leq \infty$ und $q \in [1, \infty)$ so gewählt, dass 1/p + 1/q = 1. Nach Voraussetzung ist $R = \sup_{r\in[0,1)} \|u_r\|_{\mathrm{L}^p} < \infty$. Nach dem Satz von Alaoglu-Bourbaki ist die Menge

$$B = \big\{ f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{T}^n, \sigma) \mid \|f\|_{\mathrm{L}^p} \leq R \big\}$$

w*-kompakt. Als Netz in B besitzt $(u_r)_{r\in[0,1)}$ ein w*-konvergentes Teilnetz $(u_{r_j})_{j\in J}$ mit Grenzwert $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{T}^n, \sigma)$. Es sei $z \in \mathbb{D}^n$ fest. Da $\mathrm{P}_n(z, \cdot)$ in $\mathrm{L}^q(\mathbb{T}^n, \sigma)$ liegt, ist die Abbildung

$$\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^n, \sigma) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad g \longmapsto \int_{\mathbb{T}^n} \mathrm{P}_n(z, \cdot) g(\zeta)\, d\sigma(\zeta)$$

stetig, wenn wir $\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^n, \sigma)$ mit der w*-Topologie versehen. Lemma 1.8 liefert daher

$$\begin{aligned} u(z) &= \lim_j u(r_j z) \\ &= \lim_j \int_{\mathbb{T}^n} \mathrm{P}_n(z,\zeta) u(r_j \zeta)\, d\sigma(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} \mathrm{P}_n(z,\zeta) f(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \\ &= \mathrm{P}[f](z). \end{aligned}$$

Die Hinrichtung von Teil (ii) ist identisch mit der Aussage von Lemma 1.9 für $p = 1$. Es seien $z \in \mathbb{D}^n$ und $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T}^n, \sigma)$ mit $\lim_{r\uparrow 1} \|u_r - f\|_{\mathrm{L}^1} = 0$. Beachtet man, dass $\mathrm{P}_n(z, \cdot) \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}^n, \sigma)$ so folgt mit Satz 1.3 schließlich

$$\begin{aligned} u(z) &= \lim_{r\uparrow 1} u(rz) \\ &= \lim_{r\uparrow 1} \int_{\mathbb{T}^n} \mathrm{P}_n(z,\zeta) u_r(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} \mathrm{P}_n(z,\zeta) f(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \\ &= \mathrm{P}[f](z). \end{aligned}$$

□

Der folgende Satz, der als Hauptresultat dieses Abschnitts gelten möge, wird in einer etwas allgemeineren Fassung in [26, Theorem 2.3.1] bewiesen und macht eine Aussage über das radiale Randverhalten Poissonscher Integrale auf $\mathbb{D}^n$.

1.12 Satz. *Ist $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T}^n, \sigma)$, so gilt*

$$\lim_{r\uparrow 1} \mathrm{P}[f](r\zeta) = f(\zeta)$$

für σ-fast alle $\zeta \in \mathbb{T}^n$.

1.3 Der Hardyraum

Wir definieren nun die Hardyräume über dem Einheitspolyzylinder und formulieren einige wohlbekannte Resultate zu diesen Räumen. Allgemein schreiben wir $\mathcal{O}(U)$ für die Menge der holomorphen Funktionen $f\colon U \to \mathbb{C}$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}^n$. Wie auch im letzten Paragraphen richten wir uns nach den Ausführungen in [26] und [9]. Für eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$ und eine Zahl $r > 0$ setzen wir

$$f_r\colon \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \zeta \longmapsto f(r\zeta)$$

und definieren für $1 \leq p < \infty$

$$\|f\|_{\mathrm{H}^p} = \sup_{0\leq r<1} \|f_r\|_{\mathrm{L}^p}$$

beziehungsweise

$$\|f\|_{\mathrm{H}^\infty} = \sup_{0\leq r<1} \|f_r\|_{\mathbb{T}^n}.$$

Für $1 \leq p \leq \infty$ heißt der Vektorraum

$$\mathrm{H}^p(\mathbb{D}^n) = \big\{f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}^n) \mid \|f\|_{\mathrm{H}^p} < \infty\big\}$$

Hardyraum über $\mathbb{D}^n$. Offenbar definiert $\|\cdot\|_{\mathrm{H}^p}$ eine Norm auf $\mathrm{H}^p(\mathbb{D}^n)$ für jedes $1 \leq p \leq \infty$. Man kann zeigen, dass

$$\|f\|_{\mathrm{H}^p} = \lim_{r\uparrow 1} \|f_r\|_{\mathrm{L}^p} \qquad (f \in \mathrm{H}^p(\mathbb{D}^n))$$

beziehungsweise

$$\|f\|_{\mathrm{H}^\infty} = \lim_{r\uparrow 1} \|f_r\|_{\mathbb{T}^n} \qquad (f \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{D}^n))$$

gilt. Siehe hierzu etwa die Theoreme 3.2.3 und 3.2.4 in [26] sowie die Bemerkungen auf Seite 50 des gleichen Werkes. Die Hardyräume $(\mathrm{H}^p(\mathbb{D}^n), \|\cdot\|_{\mathrm{H}^p})$ sind darüber hinaus, wie schon im klassischen Fall der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$, Banachräume, wie wir gleich sehen werden. Zunächst führen wir folgende Inklusionsbeziehung der Hardyräume an.

1.13 Lemma. *Für $p, q \in [1, \infty]$ mit $p < q$ gilt $\mathrm{H}^q(\mathbb{D}^n) \subset \mathrm{H}^p(\mathbb{D}^n)$. Ist $f \in \mathrm{H}^q(\mathbb{D}^n)$, so gilt darüber hinaus*

$$\|f\|_{\mathrm{H}^p} \leq \|f\|_{\mathrm{H}^q}.$$

Beweis. Es genügt die zweite Behauptung einzusehen. Sind $f \in \mathrm{H}^q(\mathbb{D}^n)$ und $r \in [0,1)$, so liegt die Funktion $|f_r|^p$ in $\mathrm{L}^{q/p}(\mathbb{T}^n, \sigma)$ und es folgt

$$\|f_r\|_{\mathrm{L}^p} \leq \|f_r\|_{\mathrm{L}^q} \leq \|f_r\|_{\mathrm{L}^\infty}$$

aus der Hölderschen Ungleichung. Der Gernzübergang $r \uparrow 1$ liefert sogleich die Behauptung

$$\|f\|_{\mathrm{H}^p} \leq \|f\|_{\mathrm{H}^q} \leq \|f\|_{\mathrm{H}^\infty}.$$

Beachte hierbei, dass $\|f\|_{\mathrm{H}^\infty} = \infty$ möglich ist, falls $q < \infty$.

□

Als nächste zeigen wir mit Hilfe der Ergebnisse aus dem letzten Abschnitt, dass man, wie auch im Fall des Hardyraumes über $\mathbb{D}$, $\mathrm{H}^p(\mathbb{D}^n)$ mit einem abgeschlossenen Unterraum von $\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^n, \sigma)$ identifizieren kann.

1.14 Satz. *Ist $1 < p \leq \infty$, so gibt es zu jeder Funktion $f \in \mathrm{H}^p(\mathbb{D}^n)$ eine Abbildung $f^* \in \mathrm{L}^p(\mathbb{T}^n, \sigma)$ derart, dass*

$$f^*(\zeta) = \lim_{r \uparrow 1} f(r\zeta)$$

*für σ-fast alle $\zeta \in \mathbb{T}^n$ gilt. Die Funktion f^* heißt **radialer Limes** von f.*

Beweis. Es sei $f \in \mathrm{H}^p(\mathbb{D}^n)$. Dann ist f als holomorphe Funktion auch n-harmonisch und nach Voraussetzung ist die Familie $(f_r)_{r \in [0,1)}$ in $\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^n, \sigma)$ beschränkt. Satz 1.11 zufolge gibt es eine Funktion $f^* \in \mathrm{L}^p(\mathbb{T}^n, \sigma)$ so, dass $f = \mathrm{P}[f^*]$. Aus Satz 1.12 folgt

$$\lim_{r \uparrow 1} f(r\zeta) = \lim_{r \uparrow 1} \mathrm{P}[f^*](r\zeta) = f^*(\zeta)$$

für σ-fast alle $\zeta \in \mathbb{T}^n$.

□

1.15 Satz. *Für $1 < p \leq \infty$ wird durch*

$$\mathrm{H}^p(\mathbb{T}^n) = \left\{ g \in \mathrm{L}^p(\mathbb{T}^n) \mid \hat{g}(\alpha) = 0 \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{N}^n \right\}$$

ein abgeschlossener Teilraum von $\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^n)$ definiert und die Abbildung

$$\psi\colon\ \mathrm{H}^p(\mathbb{D}^n) \longrightarrow \mathrm{H}^p(\mathbb{T}^n), \qquad f \longmapsto f^*$$

ist ein isometrischer Isomorphismus zwischen Banachräumen.

Beweis. Es seien $1 < p \leq \infty$ und $f \in \mathrm{H}^p(\mathbb{D}^n)$. Nach Satz 1.14 liegt der radiale Limes f^* von f in $\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^n, \sigma)$ und nach Teil (i) aus Lemma 1.11 gilt $f = \mathrm{P}[f^*]$. Weiter implizieren Teil (i) aus Lemma 1.11 sowie Lemma 1.9, dass

$$\lim_{r\uparrow 1} \|f_r - f^*\|_{\mathrm{L}^p} = 0 \tag{1.3}$$

im Fall $p \in (1, \infty)$, also insbesondere $\|f\|_{\mathrm{H}^p} = \|f^*\|_{\mathrm{L}^p}$ für $p \in (1, \infty)$. Ist $p = \infty$, so konvergiert $(f_r)_{r\in[0,1)}$ für $r \uparrow 1$ in $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}^n, \sigma)$ bezüglich der w*-Topologie gegen f^* nach Lemma 1.10 und Teil (i) aus Lemma 1.11. Darüber hinaus liegt $(f_r)_{r\in[0,1)}$ in der, nach dem Satz von Alaoglu Bourbaki w*-kompakten, Menge $\big\{g \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}^n, \sigma) \mid \|g\|_{\mathrm{L}^\infty} \leq \|f\|_{\mathrm{H}^\infty}\big\}$, sodass $\|f^*\|_{\mathrm{L}^\infty} \leq \|f\|_{\mathrm{H}^\infty}$. Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \left| \int_{\mathbb{T}^n} \mathrm{P}_n(z, \zeta) f^*(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \right| \\
&\leq \|f^*\|_{\mathrm{L}^\infty} \int_{\mathbb{T}^n} \mathrm{P}_n(z, \zeta)\, d\sigma(\zeta) \\
&= \|f^*\|_{\mathrm{L}^\infty}
\end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{D}^n$, das heißt $\|f\|_{\mathrm{H}^\infty} \leq \|f^*\|_{\mathrm{L}^\infty}$. Wir haben damit gezeigt, dass die Abbildung $\psi\colon\ \mathrm{H}^p(\mathbb{D}^n) \to \mathrm{L}^p(\mathbb{T}^n, \sigma)$ für $p \in (1, \infty]$ eine wohldefinierte Isometrie ist. Wir zeigen abschließend, dass $\psi(\mathrm{H}^p(\mathbb{D}^n)) = \mathrm{H}^p(\mathbb{T}^n)$. Ist $f \in \mathrm{H}^p(\mathbb{D}^n)$ so gilt $f \in \mathrm{H}^1(\mathbb{D}^n)$ nach Lemma 1.13 und

$$\lim_{r\uparrow 1} \|f_r - f^*\|_{\mathrm{L}^1} = 0 \tag{1.4}$$

folgt aus (1.3) mit Hilfe von [8, Satz VI.2.10]. Für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{N}^n$, wobei wir ohne Einschränkung $\alpha_1 < 0$ annehmen, und $r \in (0, 1)$ gilt

$$\begin{aligned}
\hat{f}_r(\alpha) &= \int_{\mathbb{T}^n} f_r(\zeta) \bar{\zeta}^\alpha\, d\sigma(\zeta) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^{n-1}} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it}, r\zeta') e^{i|\alpha_1|t}\, dt\, \bar{\zeta}'^{(\alpha_2,\dots,\alpha_n)}\, d\sigma_{n-1}(\zeta') \\
&= \frac{1}{2\pi i r^{|\alpha_1|}} \int_{\mathbb{T}^{n-1}} \int_{\partial \mathrm{D}_r(0)} f(z, r\zeta') z^{|\alpha_1|-1}\, dz\, d\sigma_{n-1}(\zeta'),
\end{aligned}$$

wobei das innere Integral als Kurvenintegral zu lesen ist. Dieses verschwindet aber nach dem Cauchyschen Integralsatz, sodass $\hat{f}_r(\alpha) = 0$ und somit wegen (1.4) schließlich

$$\hat{f^*}(\alpha) = \lim_{r\uparrow 1} \hat{f}_r(\alpha) = 0$$

für alle $\alpha \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{N}^n$ gilt. Damit ist $f^* \in \mathrm{H}^p(\mathbb{T}^n)$ gezeigt. Ist umgekehrt $g \in \mathrm{L}^p(\mathbb{T}^n, \sigma)$ mit $\hat{g}(\alpha) = 0$ für jedes $\alpha \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{N}^n$, so ist $f = \mathrm{P}[g]$ nach

Lemma 1.7 holomorph. Lemma 1.11 liefert $f \in \mathrm{H}^p(\mathbb{D}^n)$ und aus Satz 1.14 folgt $f^*(\zeta) = g(\zeta)$ für σ-fast alle $\zeta \in \mathbb{T}^n$. Also ist ψ ein isometrischer Isomorphismus und da $\mathrm{H}^p(\mathbb{T}^n)$ $(1 < p \leq \infty)$ als abgeschlossener Unterraum des Banachraums $\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^n)$ selbst ein Banachraum ist, sind die Hardyräume $\mathrm{H}^p(\mathbb{D}^n)$ für $1 < p \leq \infty$ ebenfalls Banachräume.

$\square$

Wir ziehen aus den obigen beiden Sätzen ein wichtiges Korollar. Hierbei bezeichne $\mathbb{C}[z] = \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ den Polynomring in n Variablen sowie

$$\mathbb{C}[z]|_{\mathbb{D}^n} = \left\{ p|_{\mathbb{D}^n} \mid p \in \mathbb{C}[z] \right\}$$

beziehungsweise

$$\mathbb{C}[z]|_{\mathbb{T}^n} = \left\{ p|_{\mathbb{T}^n} \mid p \in \mathbb{C}[z] \right\}$$

die entsprechenden Einschränkungen von $\mathbb{C}[z]$ auf $\mathbb{D}^n$ beziehungsweise $\mathbb{T}^n$.

1.16 Korollar. *Für $p \in (1, \infty)$ liegen die Polynome $\mathbb{C}[z]|_{\mathbb{D}^n} \subset \mathrm{H}^p(\mathbb{D}^n)$ dicht. Die Aussage bleibt richtig, wenn man $\mathbb{D}^n$ durch $\mathbb{T}^n$ ersetzt.*

Beweis. Es sei $p \in (1, \infty)$ und $f \in \mathrm{H}^p(\mathbb{D}^n)$. Offenbar liegen die Polynome $\mathbb{C}[z]|_{\mathbb{D}^n}$ als holomorphe, beschränkte Funktionen in $\mathrm{H}^\infty(\mathbb{D}^n)$ und demnach auch in $\mathrm{H}^p(\mathbb{D}^n)$. Mit der gleichen Begründung sieht man, dass die Funktion

$$f(r) \colon \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto f(rz)$$

für $r \in (0, 1)$ in $\mathrm{H}^p(\mathbb{D}^n)$ liegt. Da dem Beweis von Satz 1.15 zufolge

$$\lim_{r \uparrow 1} \|f(r) - f\|_{\mathrm{H}^p} = \lim_{r \uparrow 1} \|f_r - f^*\|_{\mathrm{L}^p} = 0$$

gilt, genügt es zu zeigen, dass die Funktion $f(r)$ in $\mathrm{H}^p(\mathbb{D}^n)$ durch Polynome approximiert werden kann. Schreiben wir

$$f(r)(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$$

für die Taylorreihe von $f(r)$, so konvergiert $(\sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha z^\alpha)_{N \in \mathbb{N}}$ nach Voraussetzung gleichmäßig in $z \in \mathbb{D}^n$, und somit auch in $\mathrm{H}^\infty(\mathbb{D}^n)$, gegen $f(r)$. Gemäß Lemma 1.13 konvergiert obige Folge von Partialsummen also auch in $\mathrm{H}^p(\mathbb{D}^n)$ gegen $f(r)$. Die Dichtheit von $\mathbb{C}[z]|_{\mathbb{T}^n}$ in $\mathrm{H}^p(\mathbb{T}^n)$ folgt aus der Tatsache, dass der isometrische Isomorphismus $\psi \colon \mathrm{H}^p(\mathbb{D}^n) \longrightarrow \mathrm{H}^p(\mathbb{T}^n)$ aus Satz 1.15 die Eigenschaft $\psi(\mathbb{C}[z]|_{\mathbb{D}^n}) = \mathbb{C}[z]|_{\mathbb{T}^n}$ hat.

$\square$

1.17 Bemerkung. *Wir definieren die Polyzylinder-Algebra* $\mathrm{A}(\mathbb{D}^n)$ *durch*

$$\mathrm{A}(\mathbb{D}^n) = \big\{ f \in \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n) \mid f|_{\mathbb{D}^n} \in \mathcal{O}(\mathbb{D}^n) \big\}.$$

Dann ist die Einschränkungsmenge

$$\mathrm{A}(\mathbb{D}^n)|_{\mathbb{D}^n} = \big\{ f|_{\mathbb{D}^n} \mid f \in \mathrm{A}(\mathbb{D}^n) \big\}$$

eine Teilmenge von $\mathrm{H}^p(\mathbb{D}^n)$ *für* $p \in (1, \infty]$*, da ihre Elemente holomorph und beschränkt sind. Da* $\mathrm{A}(\mathbb{D}^n)|_{\mathbb{D}^n}$ *die Polynome* $\mathbb{C}[z]|_{\mathbb{D}^n}$ *enthält, liegt sie sogar dicht in* $\mathrm{H}^p(\mathbb{D}^n)$ *für* $p \in (1, \infty)$*. Ebenso liegt*

$$\mathrm{A}(\mathbb{D}^n)|_{\mathbb{T}^n} = \big\{ f|_{\mathbb{T}^n} \mid f \in A(\mathbb{D}^n) \big\}$$

in $\mathrm{H}^p(\mathbb{T}^n)$ *dicht.*

Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass die Aussagen der Sätze 1.14 und 1.15 sowie das Ergebnis von Korollar auch für den Fall $p = 1$ wahr sind. Dies kann mit den Methoden und Ergebnissen aus [26, Kapitel 3] gezeigt werden. Wir verzichten an dieser Stelle auf die Ausführung der Details, da wir diesen speziellen Fall, außer für $n = 1$ (siehe hierzu [27, Theorem 17.11]), in dieser Arbeit nicht benötigen werden. Es bezeichne $P\colon \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma) \to \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$ die orthogonale Projektion von $\mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma)$ auf $\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$ und $\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)^\perp = \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma) \ominus \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$ das orthogonale Komplement von $\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$ in $\mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma)$. Ist $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} a_\alpha z^\alpha$ die Fourierentwicklung einer Funktion $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma)$ bezüglich der Orthonormalbasis $(z^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ von $\mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma)$, so folgt

$$P(f) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$$

aus der Stetigkeit der Projektion und der Tatsache, dass $z^\alpha \in \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)^\perp$ für $\alpha \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{N}^n$.

1.18 Satz. *Für* $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma)$ *ist die Funktion* Pf *radialer Limes einer Funktion* $F \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D}^n)$ *und es gilt*

$$F(z) = \int_{\mathbb{T}^n} C_n(z, \zeta) f(\zeta)\, d\sigma(\zeta)$$

für alle $z \in \mathbb{D}^n$*, wobei*

$$C_n\colon \mathbb{D}^n \times \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad (z, \zeta) \longmapsto \prod_{j=1}^n (1 - z_j \bar{\zeta}_j)^{-1}$$

den Cauchykern auf $\mathbb{D}^n$ *bezeichne.*

Beweis. Es sei $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma)$ mit Fourierentwicklung $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} a_\alpha z^\alpha$. Dann konvergiert $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$ in $\mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma)$ gegen $(1-P)f$ und somit folgt

$$\int_{\mathbb{T}^n} C_n(z,\zeta)(1-P)f(\zeta)\, d\sigma(\zeta) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{N}^n} a_\alpha \int_{\mathbb{T}^n} C_n(z,\zeta)\zeta^\alpha\, d\sigma(\zeta) \tag{1.5}$$

aus [8, Satz VI.2.10] für jedes $z \in \mathbb{D}^n$. Seien nun $z = (z_1, z') \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}^{n-1}$ und ohne Einschränkung $\alpha = (\alpha_1, \alpha') \in (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) \times \mathbb{Z}^{n-1}$. Nach dem Satz von Fubini gilt

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{T}^n} C_n(z,\zeta)\zeta^\alpha\, d\sigma(\zeta) \\ &\qquad = \int_{\mathbb{T}^{n-1}} C_{n-1}(z',\zeta')\zeta'^{\alpha'}\, d\sigma_{n-1}(\zeta') \int_{\mathbb{T}} C_1(z_1,\zeta_1)\zeta_1^{\alpha_1}\, d\sigma_1(\zeta_1), \end{aligned} \tag{1.6}$$

wobei das erste Integral auf der rechten Seite im Fall $n = 1$ als 1 zu lesen ist. Für $z_1 = 0$ ist das letzte Integral in (1.6) Null. Ist $z_1 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, so ist die Funktion

$$h : \mathrm{D}_2(0) \setminus \{0, z_1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \zeta \longmapsto \frac{1}{(\zeta - z_1)\zeta^{|\alpha_1|}}$$

holomorph mit $\operatorname{Res}(h, z_1) = 1/z_1^{|\alpha_1|} = -\operatorname{Res}(h, 0)$ und somit liefert die Anwendung des Residuenssatzes auf die Funktion h zusammen mit der Transformationsformel für Bildmaße

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} C_1(z_1,\zeta)\zeta_1^\alpha\, d\sigma_1(\zeta) &= \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{(\zeta - z_1)\zeta^{|\alpha_1|-1}}\, d\sigma_1(\zeta) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1}{(\zeta - z_1)\zeta^{|\alpha_1|}}\, d\zeta \\ &= \operatorname{Res}(h, z_1) + \operatorname{Res}(h, 0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei das letzte Integral als Kurvenintegral zu lesen ist. Dies liefert zusammen mit (1.5) und (1.6) schließlich

$$\int_{\mathbb{T}^n} C_n(z,\zeta)(1-P)f(\zeta)\, d\sigma = 0. \tag{1.7}$$

Nach Satz 1.14 ist Pf radialer Limes einer Funktion $F \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D}^n)$. Im Beweis von Satz 1.15 haben wir $\lim_{r \uparrow 1} \|F_r - Pf\|_{\mathrm{L}^2} = 0$ gezeigt und daher folgt

$$\lim_{r \uparrow 1} \| C_n(z,\cdot)F_r - C_n(z,\cdot)(Pf)\|_{\mathrm{L}^1} = 0.$$

Dies und die Anwendung der iterierten Cauchyschen Integralformel auf die holomorphen Funktionen

$$\mathrm{P}^n_{1/r}(0) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad w \longmapsto F_r(w) \qquad (r \in (0,1))$$

liefern zusammen mit (1.7) zuletzt

$$\begin{aligned} F(z) &= \lim_{r\uparrow 1} F_r(z) \\ &= \lim_{r\uparrow 1} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_\circ \mathbb{D}^n} \frac{F_r(w)}{(w-z)^{(1,\dots,1)}}\, dw \\ &= \lim_{r\uparrow 1} \int_{\mathbb{T}^n} C_n(z,\zeta) F_r(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} C_n(z,\zeta)(Pf)(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} C_n(z,\zeta) f(\zeta)\, d\sigma(\zeta)\,. \end{aligned}$$

□

Im Fall $n = 1$ entspricht die Polyzylinder-Algebra $\mathrm{A}(\mathbb{D}^n)$ der wohlbekannten Disc-Algebra. In diesem Fall schreiben wir $A(\mathbb{D}) = \mathrm{A}(\mathbb{D}^1)$ und definieren darüber hinaus

$$A_0(\mathbb{D}) = \big\{ f \in A(\mathbb{D}) \mid f(0) = 0 \big\}.$$

Die Randfunktionen $A_0(\mathbb{D})|_{\mathbb{T}}$ lassen sich auf die folgende Weise faktorisieren:

1.19 Lemma. *Ist $f \in A_0(\mathbb{D})|_{\mathbb{T}}$, so gibt es $f_1, f_2 \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T})$ mit $\hat{f}_2(0) = 0$, $f = f_1 f_2$ und*

$$\|f\|_{\mathrm{L}^1} = \|f_1\|_{\mathrm{L}^2} \|f_2\|_{\mathrm{L}^2}.$$

Beweis. Es sei $F \in A_0(\mathbb{D})$ mit $F|_{\mathbb{T}} = f$ und B das Blaschke-Produkt zur Nullstellenfolge von $F|_{\mathbb{D}}$ (siehe hierzu auch [27, Theorem 15.21]). Dann liegt $F|_{\mathbb{D}}$ in $\mathrm{H}^1(\mathbb{D})$ und nach [27, Theorem 17.10] gibt es eine nullstellenfreie Funktion $h \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D})$ so, dass $F|_{\mathbb{D}} = Bh^2$ und

$$\|h\|^2_{\mathrm{H}^2} = \|F|_{\mathbb{D}}\|_{\mathrm{H}^1}.$$

Da $B \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{D})$ und $F|_{\mathbb{D}} \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{D})$, folgt $h^2 \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{D})$. Somit liegen die Funktionen $F_1 = h$ und $F_2 = Bh$ in $\mathrm{H}^\infty(\mathbb{D})$ und es gilt $F_2(0) = 0$. Wir setzen $f_i = F_i^*$ für $i = 1,2$ und bemerken, dass Satz 1.14 zufolge $f_1, f_2 \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T})$ sind mit

$$f(\zeta) = \lim_{r\uparrow 1} F(r\zeta) = \lim_{r\uparrow 1} F_1(r\zeta) F_2(r\zeta) = f_1(\zeta) f_2(\zeta)$$

für σ-fast alle $\zeta \in \mathbb{T}$ und

$$\|f\|_{\mathrm{L}^1} = \|F|_{\mathbb{D}}\|_{\mathrm{H}^1} = \|F_1\|_{\mathrm{H}^2}\|F_2\|_{\mathrm{H}^2} = \|f_1\|_{\mathrm{L}^2}\|f_2\|_{\mathrm{L}^2}.$$

Ebenfalls haben wir im Beweis von Satz 1.14 gesehen, dass $\lim_{r\uparrow 1}\|(F_2)_r - f_2\|_{\mathrm{L}^1} = 0$ ist. Wir erhalten also insbesondere

$$\begin{aligned}
\hat{f}_2(0) &= \int_{\mathbb{T}} f_2(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \\
&= \lim_{r\uparrow 1} \int_{\mathbb{T}} F_2(r\zeta)\, d\sigma(\zeta) \\
&= \lim_{r\uparrow 1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathrm{D}_r(0)} \frac{F_2(z)}{z}\, dz \\
&= F_2(0) = 0
\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt die Cauchysche Integralformel verwendet haben.

□

Zerlegungen wie im letzten Lemma existieren im Fall $n > 1$ im Allgemeinen nichtmehr, wie [26, Theorem 4.2.2] lehrt. Der in Abschnitt 2.2 gegebene Beweis des Satzes von Hartman beruht auf folgendem Resultat von D. Sarason aus dem Jahre 1967. Für einen Beweis der folgenden Aussage siehe [17, VII.A.3] oder [25, Theorem 1.5.1].

1.20 Satz (Sarason, 1967). *Die Menge*

$$\mathrm{C}(\mathbb{T}) + \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T}) = \big\{[f+h] \mid f \in \mathrm{C}(\mathbb{T}),\ [h] \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T})\big\} \subset \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}, \sigma)$$

ist eine abgeschlossene Teilalgebra von $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}, \sigma)$*.*

Abschließend zitieren wir noch ein Resultat zur Dualität der Hardyräume. Wir wollen zunächst anmerken, dass durch

$$\mathrm{dist}([f]) = \mathrm{dist}_{\mathrm{L}^\infty}(f, \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T})) = \inf\big\{\|f-g\|_{\mathrm{L}^\infty} \mid g \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T})\big\},$$

wobei $[f] \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}, \sigma)/\,\mathrm{H}^\infty(\mathbb{T})$ sei, eine Norm auf dem Quotientenraum $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}, \sigma)/\,\mathrm{H}^\infty(\mathbb{T})$ definiert wird. Für einen Beweis des folgenden Lemmas sei auf Abschnitt VII.A.1 in [17] verwiesen.

1.21 Lemma. *Definiere*

$$\mathrm{H}^1_0(\mathbb{T}) = \big\{f \in \mathrm{H}^1(\mathbb{T}) \mid \hat{f}(0) = 0\big\},$$

dann ist $\left(\mathrm{H}_0^1(\mathbb{T})\right)^*$ *isometrisch isomorph zu* $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{T},\sigma)/\,\mathrm{H}^\infty(\mathbb{T})$ *vermöge der durch*

$$\psi([f])(g) = \int_{\mathbb{T}} f(\zeta)g(\zeta)\,d\sigma(\zeta) \qquad ([f] \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T},\sigma)/\,\mathrm{H}^\infty(\mathbb{T}), g \in \mathrm{H}_0^1(\mathbb{T}))$$

definierten linearen Abbildung $\psi\colon\ \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T},\sigma)/\,\mathrm{H}^\infty(\mathbb{T}) \longrightarrow \left(\mathrm{H}_0^1(\mathbb{T})\right)^*$.

Zum Abschluss halten wir fest:

1.22 Lemma. *Versieht man* $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}^n,\sigma)$ *mit der w*-Topologie, so ist* $\mathrm{H}^\infty(\mathbb{T}^n)$ *in* $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}^n,\sigma)$ *w*-abgeschlossen und die Polynome* $\mathbb{C}[z]|_{\mathbb{T}^n}$ *liegen w*-folgendicht in* $\mathrm{H}^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Beweis. Es sei $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ ein w*-konvergentes Netz in $\mathrm{H}^\infty(\mathbb{T}^n)$ mit Grenzwert $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}^n,\sigma)$, das heißt es gilt

$$\lim_{\alpha\in A} \int_{\mathbb{T}^n} f_\alpha(\zeta)g(\zeta)\,d\sigma(\zeta) = \int_{\mathbb{T}^n} f(\zeta)g(\zeta)\,d\sigma(\zeta)$$

für jedes $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T}^n,\sigma)$. Daher gilt für $\beta \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{N}^n$ wegen $\hat{f}_\alpha(\beta) = 0$ für jedes $\alpha \in A$, dass

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\beta) &= \int_{\mathbb{T}^n} f(\zeta)\bar{\zeta}^\beta\,d\sigma(\zeta)\\
&= \lim_{\alpha\in A} \int_{\mathbb{T}^n} f_\alpha(\zeta)\bar{\zeta}^\beta\,d\sigma(\zeta)\\
&= \lim_{\alpha\in A} \hat{f}_\alpha(\beta)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Somit liegt der Grenzwert f von $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ ebenfalls in $\mathrm{H}^\infty(\mathbb{T}^n)$. Zum Beweis der zweiten Aussage bemerken wir, dass eine Funktion $f \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T}^n)$ nach Satz 1.15 radialer Limes einer Funktion $F \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{D}^n)$ ist. Im Beweis von Satz 1.15 haben wir gesehen, dass $f = \text{w*-}\lim_{r\uparrow 1} F_r$ (man beachte hier nochmals die Lemmata 1.10 und 1.11). Daher genügt es zu zeigen, dass F_r für jedes $r \in [0,1)$ in der w*-Topologie durch eine Folge von Polynomen approximiert werden kann. Nach Voraussetzung besitzt F eine auf $\mathbb{D}^n$ kompakt gleichmäßig konvergente Potenzreihenentwicklung, etwa

$$F(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$$

für $z \in \mathbb{D}^n$, das heißt die Folge $(\sum_{|\alpha|\le N} a_\alpha (r\zeta)^\alpha)_{N\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig in $\zeta \in \mathbb{T}$ gegen F_r. Es folgt

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{T}^n} (F_r(\zeta) - \textstyle\sum_{|\alpha|\le N} a_\alpha (r\zeta)^\alpha) g(\zeta)\,d\sigma(\zeta)\right| &\le \|(F_r - \textstyle\sum_{|\alpha|\le N} a_\alpha (r\zeta)^\alpha) g\|_{\mathrm{L}^1}\\
&\le \|g\|_{\mathrm{L}^1} \|F_r - \textstyle\sum_{|\alpha|\le N} a_\alpha (r\zeta)^\alpha\|_{\mathbb{T}}
\end{aligned}$$

für jedes $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T}^n, \sigma)$. Da die Rechte Seite der letzten Ungleichung im Grenzwert $N \to \infty$ gegen Null konvergiert, folgt die Behauptung.

$\square$

1.4 Verallgemeinerte Bergmanräume

Im Folgenden führen wir einige Eigenschaften verallgemeinerter Bergmanräume an und beweisen diese. Wir werden die hier aufgeführten Resultate im dritten Kapitel dieser Arbeit verwenden. Es sei $n \in \mathbb{N}^*$ eine beliebige natürliche Zahl. Bevor wir den Bergmanraum bezüglich einem regulären Borelmaß $\nu\colon \mathfrak{B}(\mathbb{D}^n) \to [0,\infty)$ definieren, zeigen wir folgendes Lemma.

1.23 Lemma. *Es sei $\mu\colon \mathfrak{B}([0,1)^n) \to [0,\infty)$ ein reguläres Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[0,1)^n$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes reguläres Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß $\nu_n\colon \mathfrak{B}(\mathbb{D}^n) \to [0,\infty)$ auf $\mathbb{D}^n$ mit*

$$\int_{\mathbb{D}^n} f(z)\, d\,\nu_n(z) = \int_{[0,1)^n}\int_{\mathbb{T}^n} f(r\zeta)\, d\sigma_n(\zeta)\, d\mu(r) \tag{1.8}$$

für alle $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{D}^n, \nu_n)$.

Beweis. Da der lokalkompakte hausdorffsche topologische Raum $\mathbb{D}^n$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, ist das Bildmaß $\nu_n = \phi(\sigma_n \otimes \mu)$ unter der $(\mathfrak{B}([0,1)^n \times \mathbb{T}^n), \mathfrak{B}(\mathbb{D}^n))$-messbaren Abbildung

$$\phi\colon [0,1)^n \times \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{D}^n, \qquad (r,\zeta) \longmapsto r\zeta$$

Korollar [8, VIII.1.12] zufolge ein reguläres Borelmaß auf $\mathbb{D}^n$. Weiter gilt

$$\int_{\mathbb{D}^n} f(z)\, d\,\nu_n(z) = \int_{[0,1)^n}\int_{\mathbb{T}^n} f(r\zeta)\, d\sigma_n(\zeta)\, d\mu(r)$$

für alle $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{D}^n, \nu_n)$ nach dem Satz von Fubini und der Transformationsformel für Bildmaße. Beachtet man, dass

$$\mathrm{C}_c(\mathbb{D}^n) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f \longmapsto \int_{[0,1)^n}\int_{\mathbb{T}^n} f(r\zeta)\, d\sigma_n(\zeta)\, d\mu(r)$$

eine positive Linearform definiert, so folgt aus dem Eindeutigkeitsteil des Rieszschen Darstellungssatzes für Maße, dass das oben definierte Maß ν_n das einzige reguläre Borelmaß mit der Eigenschaft (1.8) ist. Ferner gilt

$$\nu_n(\mathbb{D}^n) = (\sigma_n \otimes \mu)(\mathbb{T}^n \times [0,1)^n) = \sigma_n(\mathbb{T}^n)\mu([0,1)^n) = 1,$$

da σ_n und μ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{T}^n$ beziehungsweise $[0,1)^n$ sind. $\square$

1.24 Korollar. *Ist $\mu = \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n$ das Produktmaß aus n regulären Borel-Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mu_1, \ldots, \mu_n\colon \mathfrak{B}([0,1)) \to [0,\infty)$ auf $[0,1)$ und $\nu\colon \mathfrak{B}(\mathbb{D}^n) \to [0,\infty)$ das zu μ gehörige reguläre Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß* *auf $\mathbb{D}^n$ aus Lemma 1.23, so gibt es eindeutig bestimmte reguläre Borel-Wahrscheinlichkeitsmaße $\nu_1, \ldots, \nu_n \colon \mathfrak{B}(\mathbb{D}) \to [0, \infty)$ so, dass $\nu = \nu_1 \otimes \ldots \otimes \nu_n$ und*

$$\int_{\mathbb{D}} f(z)\, d\nu_i(z) = \int_{[0,1)} \int_{\mathbb{T}} f(r\zeta)\, d\sigma(\zeta)\, d\mu_i(r)$$

für alle $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{D}, \nu_i)$ und $i = 1, \ldots, n$ gilt.

Beweis. Die Anwendung von Lemma 1.23 auf die Maße μ_i $(i = 1, \ldots, n)$ liefert eindeutige, reguläre Borel-Wahrscheinlichkeitsmaße $\nu_1, \ldots, \nu_n \colon \mathfrak{B}(\mathbb{D}) \to [0, \infty)$ mit

$$\int_{\mathbb{D}} f(z)\, d\nu_i(z) = \int_{[0,1)} \int_{\mathbb{T}} f(r\zeta)\, d\sigma(\zeta)\, d\mu_i(r)$$

für alle $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{D}, \nu_i)$ und $i = 1, \ldots, n$. Satz III.5.10 aus [8] zufolge ist $\mathfrak{B}(\mathbb{D}^n) = \mathfrak{B}(\mathbb{D}) \times \ldots \times \mathfrak{B}(\mathbb{D})$ und daher gilt für $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{B}(\mathbb{D})$ unter Verwendung des Satzes von Fubini

$$\begin{aligned}
\nu(A_1 \times \ldots \times A_n) &= \int_{\mathbb{D}^n} \chi_{A_1}(z_1) \ldots \chi_{A_n}(z_n)\, d\nu(z_1, \ldots, z_n) \\
&= \int_{[0,1)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(r_i\zeta_i)\, d\sigma(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)\, d\mu(r_1, \ldots, r_n) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \int_{[0,1)} \int_{\mathbb{T}} \chi_{A_i}(r\zeta)\, d\sigma(\zeta)\, d\mu_i(r) \\
&= (\nu_1 \otimes \ldots \otimes \nu_n)(A_1 \times \ldots \times A_n).
\end{aligned}$$

□

Das Maß ν_n aus Lemma 1.23 ist rotationsinvariant im folgenden Sinne.

1.25 Proposition. *Es sei $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{D}^n)$, $\mu \colon \mathfrak{B}([0,1)^n) \to [0, \infty)$ ein reguläres Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[0,1)^n$ und ν_n das durch Lemma 1.23 gegebene, zugehörige Maß auf $\mathbb{D}^n$. Dann gilt $\nu_n(\zeta B) = \nu_n(B)$ für alle $\zeta \in \mathbb{T}^n$.*

Beweis. Ist $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{D}^n)$, so liefert Lemma 1.1 zusammen mit der Eigenschaft (1.8) des Maßes ν_n und der Transformationsformel für Bildmaße

$$\begin{aligned}
\nu_n(\zeta B) &= \int_{\mathbb{D}^n} \chi_B(\zeta z)\, d\nu_n(z) \\
&= \int_{[0,1)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \chi_B(\zeta r\eta)\, d\sigma(\eta)\, d\mu(r) \\
&= \int_{[0,1)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \chi_B(r\eta)\, d\sigma(\eta)\, d\mu(r) \\
&= \nu_n(B)
\end{aligned}$$

für alle $\zeta \in \mathbb{T}^n$.

□

Wir definieren den Bergmanraum nun wie folgt.

1.26 Definition. *Es sei* $\mu\colon \mathfrak{B}([0,1)^n) \to [0,\infty)$ *ein reguläres Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß auf* $[0,1)^n$ *mit der Eigenschaft, dass* $\mu([r,1)^n) > 0$ *für alle* $r \in [0,1)$ *gilt und* ν_n *das durch Lemma 1.23 zu* μ *gegebene reguläre Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß auf* $\mathbb{D}^n$*. Dann heißt der Unterraum*

$$\mathrm{A}^2_{\nu_n} = \big\{[f] \in \mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n) \mid f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}^n)\big\}$$

von $\mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n)$ *(verallgemeinerter)* ***Bergmanraum bezüglich dem Maß*** ν_n*.*

Durch die Eigenschaft $\mu([r,1)^n) > 0$, $r \in [0,1)$, wird $\mathrm{A}^2_{\nu_n}$ zu einem funktionalen Unterhilbertraum von $\mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n)$, wie wir im Folgenden zeigen werden. Ist $r > 0$ und $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, so bezeichnen wir mit

$$\partial_\circ \mathrm{P}^n_r(z) = \big\{w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n \mid |w_i - z_i| = r \text{ für } i = 1, \dots, n\big\}$$

den ausgezeichneten Rand des Polyzylinders $\mathrm{P}^n_r(z)$.

1.27 Lemma. *Ist* $M \subset \mathbb{D}^n$ *kompakt, so gibt es eine Konstante* $C_M > 0$ *derart, dass*

$$|f(z)| \le C_M \|f\|_{\mathrm{L}^2}$$

für alle $f \in \mathrm{A}^2_{\nu_n}$ *und alle* $z \in M$ *erfüllt ist.*

Beweis. Es seien $z = (z_1, \dots, z_n) \in M$ und $f \in \mathrm{A}^2_{\nu_n}$. Wähle $\hat{r} \in [0,1)$ so, dass $M \subset \mathrm{P}_{\hat{r}}(0)$ gilt und setze

$$R = \min_{i=1,\dots,n} \operatorname{dist}(\pi_i(M), \overline{\mathbb{D}} \setminus \mathrm{D}_{\hat{r}}(0)).$$

Dann ist $R > 0$ und aus der iterierten Cauchyschen Integralformel folgt

$$\begin{aligned}
\big|f^2(z)\big| &= \left|\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_\circ \mathrm{P}^n_r(0)} \frac{f^2(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1) \cdot \ldots \cdot (\zeta_n - z_n)}\, d(\zeta_1, \dots, \zeta_n)\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{T}^n} \frac{r_1 \dots r_n \zeta_1 \dots \zeta_n f^2(r_1\zeta_1, \dots, r_n\zeta_n)}{(r_1\zeta_1 - z_1) \cdot \ldots \cdot (r_n\zeta_n - z_n)}\, d\sigma(\zeta_1, \dots, \zeta_n)\right| \\
&\le \frac{1}{R^n} \int_{\mathbb{T}^n} |f(r\zeta)|^2\, d\sigma(\zeta)
\end{aligned}$$

für alle $r = (r_1, \dots, r_n) \in [\hat{r}, 1)^n$, wobei das erste Integral als iteriertes Kurvenintegral zu lesen ist. Die letzte Ungleichung impliziert

$$\big|f^2(z)\big|\, \chi_{[\hat{r},1)^n} \le \frac{1}{R^n} \int_{\mathbb{T}^n} |f(r\zeta)|^2\, d\sigma(\zeta)$$

für alle $r \in [0,1)^n$ und die Integration bezüglich dem Maß μ liefert hieraus

$$|f(z)| \le (R^n \mu([\hat{r},1)^n))^{-1/2} \|f\|_{\mathrm{L}^2}.$$

$\square$

1.28 Korollar. $\mathrm{A}^2_{\nu_n}$ *ist ein abgeschlossener Teilraum von* $\mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n)$ *und funktionaler Hilbertraum über* $\mathbb{D}^n$.

Beweis. Sei $([f_k])_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathrm{A}^2_{\nu_n}$ die in $\mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n)$ gegen eine Funktion $[f] \in \mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n)$ konvergiert. Auf jedem Kompaktum $M \subset \mathbb{D}^n$ ist die Folge $(f_k|_M)_{k\in\mathbb{N}}$ nach Lemma 1.27 eine Cauchyfolge in $(\mathrm{C}(M), \|\cdot\|_M)$ und daher konvergiert $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ kompakt gleichmäßig gegen eine Funktion $h\colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$, die nach einem bekannten Resultat von K. Weierstraß aus der Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher (siehe etwa Theorem I.4.4 in [13]) holomorph ist. Auf der anderen Seite gibt es eine Teilfolge $(f_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ der Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die punktweise ν_n-fast überall gegen f konvergiert. Somit stimmen h und f ν_n-fast überall überein und daher ist $[f] \in \mathrm{A}^2_{\nu_n}$. Als abgeschlossener Teilraum des Hilbertraums $\mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n)$ ist $\mathrm{A}^2_{\nu_n}$ ein Hilbertraum. Ist $z \in \mathbb{D}^n$, so folgt aus Lemma 1.27, mit $M = \{z\}$, sofort die Stetigkeit der Punktauswertung

$$\delta_z\colon \mathrm{A}^2_{\nu_n} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f \longmapsto f(z),$$

das heißt $\mathrm{A}^2_{\nu_n}$ ist ein funktionaler Hilbertraum.

□

In Abschnitt 3.1 werden wir zeigen, dass die Polynome $\mathbb{C}[z]|_{\mathbb{D}^n} \subset \mathrm{A}^2_{\nu_n}$ dicht liegen und folglich eine kanonische Orthonormalbasis liefern. Beim Begriff des Bergmanraumes denkt man vordergründig zunächst an den üblichen Bergmanraum

$$\mathrm{A}^2_\lambda = \big\{[f] \in \mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \lambda_n|_{\mathbb{D}^n}) \mid f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}^n)\big\},$$

wobei $\lambda_n|_{\mathbb{D}^n}\colon \mathfrak{B}(\mathbb{D}^n) \to [0, \infty)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ das Lebesgue-Borelsche Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{D}^n$ sei, oder allgemeiner an gewichtete Bergmanräume, wie sie beispielsweise in [32] für den Fall $n = 1$ definiert sind. Die folgende elementare Betrachtung zeigt, dass diese klassischen Bergmanräume in unserer Definition 1.26 berücksichtigt werden.

Es bezeichne

$$\lambda_n|_{[0,1)^n}\colon \mathfrak{B}([0, 1)^n) \to [0, \infty) \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

das Lebesgue-Borelsche Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[0, 1)^n$. Für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (-1, \infty)^n$ seien

$$f\colon [0, 1)^n \longrightarrow [0, \infty), \qquad (r_1, \ldots, r_n) \longmapsto 2^n \prod_{i=1}^n (\alpha_i + 1)(1 - r_i^2)^{\alpha_i} r_i.$$

und $\mu = f \odot \lambda_n|_{[0,1)^n}$ das Maß mit der Dichte f bezüglich $\lambda_n|_{[0,1)^n}$ sowie $\nu\colon \mathfrak{B}(\mathbb{D}^n) \to [0, \infty)$ das gemäß Lemma 1.23 zu μ gegebene reguläre Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{D}^n$. Eine Anwendung der Transformationsformel

[8, V.4.2] zeigt

$$\int_{[0,1)^n} \int_{\mathbb{T}^n} h(r\zeta)\, d\sigma_n(\zeta)\, d\mu(r) = \int_{\mathbb{D}^n} h(z)\, d(g \odot \lambda_n|_{\mathbb{D}^n})(z),$$

für alle $h \in \mathrm{C}_c(\mathbb{D}^n)$, wobei

$$g\colon \mathbb{D}^n \longrightarrow [0, \infty), \qquad (z_1, \ldots, z_n) \longmapsto \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1)(1 - |z_i|^2)^{\alpha_i}.$$

Nach dem Eindeutigkeitsteil des Rieszschen Darstellungssatzes für Maße gilt somit $\nu = g \odot \lambda_n|_{\mathbb{D}^n}$, also stimmt A^2_ν mit dem gewichteten Bergmanraum bezüglich α überein. Im Hinblick auf dieses Beispiel erscheint der in Definition 1.26 festgehaltene Begriff des „verallgemeinerten Bergmanraumes“ als sinnvoll.

2 Hankeloperatoren auf dem Hardyraum

Dieses Kapitel ist der Untersuchung kompakter Hankeloperatoren auf $\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$, $(n \in \mathbb{N}^*)$, beziehungsweise deren zugehörigen Symbolen gewidmet. Wir werden diejenigen Symbole, deren zugehöriger Hankeloperator kompakt ist, charaktisieren. Hierbei zeigen sich deutliche Unterschiede zwischen dem Fall $n = 1$ und der Situation für $n > 1$. Während der eindimensionale Fall bereits seit dem Jahre 1958 durch ein klassisches Resultat von Hartman verstanden ist (siehe hierzu Satz 2.8), gelang dies im Fall $n > 1$ erst Anfang der neunziger Jahre durch M. Cotlar und C. Sadosky (Satz 2.15). Der hier dargelegte Beweis des Satzes von Hartman verwendet ein Ergebnis von Nehari aus [22] aus dem Jahre 1957, weswegen wir dieses zunächst im folgenden Abschnitt beweisen.

2.1 Der Satz von Nehari

Wir beginnen mit der Definition von Hankeloperatoren. Für $n \in \mathbb{N}^*$ seien die Shiftoperatoren $\mathrm{S}_k\colon \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma)$ $(k = 1, \ldots, n)$ durch

$$\mathrm{S}_k(f)(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \zeta_k f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \qquad ((\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{T}^n)$$

definiert. Im Falle $k = 1$ schreiben wir auch $\mathrm{S} = \mathrm{S}_1$ Ferner sei mit $\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)^\perp = \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma) \ominus \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$ das orthogonale Komplement von $\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$ in $\mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma)$ und mit $P_-\colon \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma) \to \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)^\perp$ die orthogonale Projektion von $\mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma)$ auf $\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)^\perp$ bezeichnet.

2.1 Definition. *Ein beschränkter Operator H: $\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n) \to \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)^\perp$, der die Hankelgleichung*

$$H S_k \,|_{\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)} = P_- \, S_k \, H \tag{2.1}$$

für alle $k = 1, \ldots, n$ erfüllt, heißt (beschränkter) ***Hankeloperator auf*** $\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$.

Aus folgendem Lemma ist ersichtlich, dass Hankeloperatoren auf $\mathbb{C}[z]$ eine spezielle Gestalt haben.

2.2 Lemma. *Es sei H: $\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n) \to \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)^\perp$ ein Hankeloperator. Dann gilt*

$$Hp = P_-(p\, H1)$$

für jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$.

Beweis. Wegen der Linearität der Operatoren H und P_- genügt es die Aussage für Monome $z^\alpha \in \mathbb{C}[z]$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, nachzuprüfen. Es sei zunächst angemerkt, dass sich die Hankelgleichung (2.1) für $k \in \{1, \dots, n\}$ induktiv auf beliebige Potenzen des Shiftoperators S_k erweitern lässt, dass heißt es gilt

$$H(\mathrm{S}_k\,|_{\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)})^m = P_-\,\mathrm{S}_k^m\,H$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $k = 1, \dots, n$. Ist nun $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, so folgt durch iterative Anwendung der letzten Gleichung auf die Shiftoperatoren S_k, wobei $m = \alpha_k$ zu setzen ist, für $k = 1, \dots, n$ und unter Beachtung, dass

$$P_-\,\mathrm{S}_k^{\alpha_k}\,P_-\,f = P_-\,\mathrm{S}_k^{\alpha_k}\,f$$

für alle $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma)$ und jedes $k = 1, \dots, n$ gilt, dass

$$\begin{aligned} H z^\alpha &= H(\mathrm{S}_1\,|_{\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)})^{\alpha_1} \dots (\mathrm{S}_n\,|_{\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)})^{\alpha_n} 1 \\ &= P_-\,\mathrm{S}_1^{\alpha_1}\,P_-\,\mathrm{S}_2^{\alpha_2} \dots P_-\,\mathrm{S}_n^{\alpha_n}\,H1 \\ &= P_-(\mathrm{S}_1^{\alpha_1} \dots \mathrm{S}_n^{\alpha_n}\,H1) \\ &= P_-(z^\alpha\,H1). \end{aligned}$$

□

Ist $H\colon \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n) \to \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)^\perp$ ein Hankeloperator, so nennen wir eine Funktion $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma)$, die

$$Hp = P_-(pf)$$

für alle $p \in \mathbb{C}[z]$ erfüllt, ein **Symbol von** H. Dem letzten Lemma zufolge ist also das Bild $H1 \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma)$ der konstanten Funktion 1 unter H ein Symbol von H. Wir beobachten weiter, dass ein solches Symbol nicht eindeutig zu sein braucht. Denn ist $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma)$ ein Symbol des Hankeloperators H und $g \in \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$, so ist $pg \in \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$ für alle $p \in \mathbb{C}[z]$ und es gilt

$$P_-(pf + pg) = P_-(pf) = Hp$$

für alle $p \in \mathbb{C}[z]$. Das heißt für jedes $g \in \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$ ist auch $f + g$ ein Symbol von H.

Wir können die Aussage von Lemma 2.2 auf folgende Weise verschärfen. Mit $M_g\colon\ \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma) \longrightarrow \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma)$ sei der **Multiplikationsoperator von** $g \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}^n, \sigma)$, der durch

$$M_g\,f(\zeta) = g(\zeta)f(\zeta), \qquad (\zeta \in \mathbb{T}^n)$$

gegeben ist, bezeichnet.

2.3 Lemma. *Es sei H: $\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n) \to \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)^\perp$ ein beschränkter Hankeloperator. Dann gilt*

$$Hf = P_{-}(f\,H1)$$

für jedes $f \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Beweis. Es sei $f \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T}^n)$. Dann gibt es Lemma 1.22 zufolge eine Folge von Polynomen $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{C}[z]$, die bezüglich der w*-Topologie auf $\mathrm{H}^\infty(\mathbb{T}^n)$ gegen f konvergiert. Nach Lemma 1.3 bedeutet dies, dass

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{T}^n} p_k(\zeta) g(\zeta)\, d\sigma(\zeta) = \int_{\mathbb{T}^n} f(\zeta) g(\zeta)\, d\sigma(\zeta)$$

für alle $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T}^n, \sigma)$. Nach der Hölderschen Ungleichung liegt das Produkt zweier Funktionen $g, h \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma)$ in $\mathrm{L}^1(\mathbb{T}^n, \sigma)$. Mit obiger Identität folgt also

$$\lim_{k\to\infty} |\langle (M_{p_k} - M_f)(g), h\rangle_{\mathrm{L}^2}| = \lim_{k\to\infty} \left| \int_{\mathbb{T}} (p_k(\zeta) - f(\zeta)) g(\zeta) \overline{h(\zeta)}\, d\sigma(\zeta) \right| = 0,$$

das heißt $\mathrm{WOT}\text{-}\lim_{k\to\infty} M_{p_k} = M_f$. Beachtet man, dass

$$p_k = M_{p_k} 1 \quad (k \in \mathbb{N}) \qquad \text{und} \qquad f = M_f\, 1$$

beziehungsweise

$$p_k\, H1 = M_{p_k}\, H1 \quad (k \in \mathbb{N}) \qquad \text{und} \qquad f\, H1 = M_f\, H1$$

gilt, so folgt, dass $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ schwach in $\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$ gegen f und $(p_k\, H1)_{k\in\mathbb{N}}$ schwach in $\mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma)$ gegen $f\, H1$ konvergieren. Als stetig lineare Operatoren sind H und P_{-} auch schwach stetig, sodass

$$H(f) = \mathrm{w}\text{-}\lim\nolimits_{r\to\infty} H(p_k) = \mathrm{w}\text{-}\lim P_{-}(p_k\, H1) = P_{-}(f\, H1).$$

$\square$

Das folgende Lemma zeigt die typische Gestalt eines beschränkten Hankeloperators auf $\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$.

2.4 Lemma. *Es seien $f, g \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}^n, \sigma)$. Dann ist der Operator*

$$H_f\colon\ \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n) \longrightarrow \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)^\perp, \qquad h \longmapsto P_{-}\, M_f(h) \tag{2.2}$$

ein beschränkter Hankeloperator und es gilt

(i) $H_f = H_{f+g}$ *genau dann, wenn* $g \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T}^n)$,

(ii) $\|H_f\| \le \mathrm{dist}_{\mathrm{L}^\infty}(f, \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T}^n)) \le \|f\|_{\mathrm{L}^\infty}$.

Beweis. Es sei $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}^n, \sigma)$. Dann gilt

$$\|H_f(g)\|_{\mathrm{L}^2} \leq \|fg\|_{\mathrm{L}^2} \leq \|f\|_{\mathrm{L}^\infty} \|g\|_{\mathrm{L}^2}$$

für alle $g \in \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$, sodass H_f beschränkt ist. Ist $k \in \{1, \ldots, n\}$, so zeigt die Rechnung

$$\begin{aligned} P_- \mathrm{S}_k H_f &= P_- \mathrm{S}_k M_f - P_- \mathrm{S}_k P M_f \\ &= \mathrm{S}_k M_f - P \mathrm{S}_k M_f - \mathrm{S}_k P M_f + P \mathrm{S}_k P M_f \\ &= \mathrm{S}_k M_f - P \mathrm{S}_k M_f \\ &= H_f \mathrm{S}_k |_{\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)}, \end{aligned}$$

wobei für die dritte Identität die Tatsache $\mathrm{Im}(\mathrm{S}_k P M_f) \subseteq \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$ verwendet wurde, dass H_f ein Hankeloperator ist. Um Punkt (i) einzusehen, genügt es zu zeigen, dass $H_g = 0$ genau dann, wenn $g \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T}^n)$, denn dann folgt Punkt (i) aus der Identität

$$H_{f+g} = H_f + H_g \,.$$

Die Bedingung $H_g = 0$ ist nach Definition von H_g äquivalent zu der Bedingung $gh \in \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$ für alle $h \in \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$ und letztere ist genau dann erfüllt, wenn $g \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T}^n)$ ist. Außerdem gilt

$$\|H_f(h)\|_{\mathrm{L}^2} = \|H_{f+g}(h)\|_{\mathrm{L}^2} \leq \|f+g\|_{\mathrm{L}^\infty} \|h\|_{\mathrm{L}^2}$$

für alle $g \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T}^n)$ und alle $h \in \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$ nach Punkt (i) und der Übergang zum Infimum über alle $g \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T}^n)$ auf der rechten Seite obiger Ungleichung zeigt Punkt (ii).

□

Im Rahmen von Lemma 2.4 ist die Funktion $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}^n, \sigma)$ ein Symbol des Hankeloperators H_f. Während im Fall $n = 1$ alle beschränkten Hankeloperatoren von der Form (2.2) sind -wir zeigen dies im folgenden Satz 2.5-, ist dies in höheren Dimensionen falsch. Für $n > 1$ besitzen nicht alle beschränkten Hankeloperatoren notwendigerweise auch ein wesentlich beschränktes Symbol. Dies zeigen beispielsweise M. Cotlar und C. Sadosky in [7, Theorem 2.1]. Ein konkretes Beispiel eines beschränkten Hankeloperators mit unbeschränktem Symbol konstruieren M. Bakonyi und D. Timotin in [3, Theorem 2]. Wir wollen nun einen Beweis des Satzes von Nehari geben und folgen hierbei dem Argument Nikol'skii's, wie er es in [23, Abschnitt 1.4.1] darlegt.

2.5 Satz (Nehari, 1957). *Ist $H\colon \mathrm{H}^2(\mathbb{T}) \to \mathrm{H}^2(\mathbb{T})^\perp$ ein beschränkter Hankeloperator, so gibt es eine Funktion $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}, \sigma)$ mit $H = H_f$ und*

$$\|H_f\| = \mathrm{dist}_{\mathrm{L}^\infty}(f, \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T})) \tag{2.3}$$

Beweis. Vorgegeben sei ein beschränkter Hankeloperator H. Ist $f \in A_0(\mathbb{D})|_{\mathbb{T}}$ so gibt es nach Lemma 1.19 stetige Funktionen $f_1, f_2 \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T})$ mit $f = f_1 f_2$, $\hat{f}_2(0) = 0$ und $\|f\|_{\mathrm{L}^1} = \|f_1\|_{\mathrm{L}^2}\|f_2\|_{\mathrm{L}^2}$. Unter Beachtung von Lemma 2.3 und der Tatsache, dass $\bar{f}_2 \in \mathrm{H}^2(\mathbb{T})^\perp$, zeigt die Rechnung

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{T}} f\, H1\, d\sigma\right| &= \left|\int_{\mathbb{T}} f_1 f_2\, H1\, d\sigma\right| \\ &= \left|\langle f_1\, H1, \bar{f}_2\rangle_{\mathrm{L}^2}\right| \\ &= \left|\langle f_1\, H1, P_-\, \bar{f}_2\rangle_{\mathrm{L}^2}\right| \\ &= \left|\langle P_-\, f_1\, H1, \bar{f}_2\rangle_{\mathrm{L}^2}\right| \\ &= \left|\langle H f_1, \bar{f}_2\rangle_{\mathrm{L}^2}\right| \\ &\le \|H\|\,\|f_1\|_{\mathrm{L}^2}\|f_2\|_{\mathrm{L}^2} \\ &= \|H\|\,\|f\|_{\mathrm{L}^1}\end{aligned}$$

die Beschränktheit des Operators

$$L\colon (A_0(\mathbb{D})|_{\mathbb{T}}, \|\cdot\|_{\mathrm{L}^1}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f \longmapsto \int_{\mathbb{T}} f\, H1\, d\sigma,$$

wobei speziell

$$\|L\| \le \|H\| \tag{2.4}$$

gilt. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es eine normerhaltende Fortsetzung $\tilde{L} \in \left(\mathrm{L}^1(\mathbb{T})\right)^*$ von L. Satz 1.3 zufolge gibt es zu diesem Funktional $\tilde{L}$ eine Funktion $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}, \sigma)$ mit

$$\tilde{L}(g) = \int_{\mathbb{T}} g f\, d\sigma \tag{2.5}$$

für alle $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T})$ und aus Lemma 1.21 folgt wegen (2.4) schließlich

$$\|H\| \ge \|L\| = \|\tilde{L}|_{\mathrm{H}^1_0(\mathbb{T})}\| = \mathrm{dist}_{\mathrm{L}^\infty}\left(f, \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T})\right).$$

Somit liefert Teil (ii) aus Lemma 2.4 die Identität (2.3), wenn wir

$$H = H_f \tag{2.6}$$

gezeigt haben. Wegen der für alle $g \in A(\mathbb{D})|_{\mathbb{T}}$ und alle $h \in A_0(\mathbb{D})|_{\mathbb{T}}$ nach (2.5) gültigen Rechnung

$$\langle Hg, \bar{h}\rangle_{\mathrm{L}^2} = L(gh) = \tilde{L}(gh) = \int_{\mathbb{T}} ghf\, d\sigma = \langle H_f\, g, \bar{h}\rangle_{\mathrm{L}^2}$$

stimmen H und H_f auf der dichten Teilmenge $A(\mathbb{D})|_{\mathbb{T}} \subset \mathrm{H}^2(\mathbb{T})$ überein. Bachte hierbei, dass auch $\left\{\bar{h} \mid h \in A_0(\mathbb{D})|_{\mathbb{T}}\right\} \subset \mathrm{H}^2(\mathbb{T})^\perp$ dicht liegt. Damit folgt (2.6) aus der Stetigkeit der Operatoren H und H_f.

□

Zum Abschluss sei angemerkt, dass das, gemäß dem Satz von Nehari zu einem beschränkten Hankeloperator $H\colon \mathrm{H}^2(\mathbb{T}) \to \mathrm{H}^2(\mathbb{T})^\perp$ gegebene, Symbol $\varphi \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}, \sigma)$ stets so gewählt werden kann, dass $\|\varphi\|_{\mathrm{L}^\infty} = \|H_\varphi\| = \|H\|$ gilt. Dieses Symbol mit minimaler Norm ist im Allgemeinen jedoch nicht eindeutig. Siehe hierzu etwa die Anmerkungen in [25, S. 7f].

2.2 Ein Satz von Hartman

Eine Anwendung des Satzes von Nehari besteht in der Charakterisierung der Klasse von Symbolen, deren zugehöriger Hankeloperator kompakt ist. Dieses 1958 von P. Hartman in [14] veröffentlichte Ergebnis besagt, dass durch die Menge $\mathrm{C}(\mathbb{T})$ aller stetigen Symbole genau die kompakten Hankeloperatoren beschrieben werden. Wir orientieren uns im Folgenden an den Ausführungen der Werke [20, Theorem 4.3.1] beziehungsweise [24, Theorem 3.14]. Für diesen Abschnitt sei $n = 1$.

Wir beginnen mit folgendem Lemma.

2.6 Lemma. *Für jedes trigonometrische Polynom $p \in \mathbb{C}[z, \bar{z}]\,|_{\mathbb{T}}$ ist der zugehörige Hankeloperator H_p von endlichem Rang.*

Beweis. Es sei $p \in \mathbb{C}[z, \bar{z}]\,|_{\mathbb{T}}$ mit der Darstellung

$$p(z) = \sum_{k=-N}^{N} a_k z^k,$$

wobei $N \in \mathbb{N}$ und $a_{-N}, \dots, a_N \in \mathbb{C}$. Es genügt einzusehen, dass $H_{\bar{z}^k}$ für jedes $k \in \mathbb{N}^*$ endlichen Rang hat, denn dann ist

$$H_p = \sum_{k=-N}^{N} a_k\, H_{z^k} = \sum_{k=1}^{N} a_{-k}\, H_{\bar{z}^k}$$

als Summe von Operatoren endlichen Ranges selbst von endlichem Rang. Da aber $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $\mathrm{H}^2(\mathbb{T})$ ist, folgt

$$\dim \operatorname{Im} H_{\bar{z}^k} = k$$

aus der Beobachtung

$$H_{\bar{z}^k}\, z^n = P_-\, z^{n-k} = \begin{cases} z^{n-k}, & n < k \\ 0, & n \geq k \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

für jedes $k \in \mathbb{N}^*$ und der Beweis ist abgeschlossen.

□

Bevor wir das Hauptresultat formulieren, beweisen wir eine Eigenschaft des Shiftoperators S.

2.7 Proposition. *Die Folge $((S^*)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ stetiger Operatoren $\mathrm{H}^2(\mathbb{T}) \to \mathrm{H}^2(\mathbb{T})$ konvergiert punktweise und gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathrm{H}^2(\mathbb{T})$ gegen $0 \in \mathrm{L}(\mathrm{H}^2(\mathbb{T}))$.*

Beweis. Es sei $f \in \mathrm{H}^2(\mathbb{T})$ mit Orthonormalbasisentwicklung $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, wobei $a_i \in \mathbb{C}$ für $i \in \mathbb{N}$ sei. Beachtet man die Identitäten

$$\mathrm{S}^*(f) = P(\bar{z}f) \qquad \text{und} \qquad \|f\|_{\mathrm{L}^2} = \sum_{l=0}^{\infty} |a_l|^2 < \infty,$$

so folgt

$$\|(\mathrm{S}^*)^k(f)\|_{\mathrm{L}^2} = \sum_{l=k}^{\infty} |a_l|^2$$

für $k \in \mathbb{N}$ und da die rechte Seite im Grenzwert $k \to \infty$ gegen Null konvergiert, ist die erste Behauptung gezeigt. Es sei nun $K \subset \mathrm{H}^2(\mathbb{T})$ kompakt und $\varepsilon > 0$. Dann bilden die Kugeln

$$\mathrm{B}_\varepsilon(f) = \left\{ g \in \mathrm{H}^2(\mathbb{T}) \mid \|f - g\|_{\mathrm{L}^2} < \varepsilon \right\} \qquad (f \in K)$$

eine offene Überdeckung von K. Daher gibt es endlich viele Funktionen $f_1, \dots, f_m \in K$ $(m \in \mathbb{N}^*)$ mit $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{B}_\varepsilon(f_i)$. Mit Hilfe der bereits gezeigten Aussage, wählen wir $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\|(\mathrm{S}^*)^k(f_i)\|_{\mathrm{L}^2} < \varepsilon$$

für alle $k \geq N$ und jedes $i = 1, \dots, m$ gilt. Zu $h \in K$ gibt es $i \in \{1, \dots, m\}$ so, dass $h \in \mathrm{B}_\varepsilon(f_i)$. Unter Berücksichtigung, dass $\|\mathrm{S}^*\| = 1$, folgt schließlich

$$\|(\mathrm{S}^*)^k(h)\|_{\mathrm{L}^2} \leq \|(\mathrm{S}^*)^k(h) - (\mathrm{S}^*)^k(f_i)\|_{\mathrm{L}^2} + \|(\mathrm{S}^*)^k(f_i)\|_{\mathrm{L}^2} < 2\varepsilon$$

für alle $k \geq N$, das heißt $((\mathrm{S}^*)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf K gleichmäßig gegen $0 \in \mathrm{L}(\mathrm{H}^2(\mathbb{T}))$.

□

Es folgt nun der Satz von Hartman.

2.8 Satz (Hartman, 1958). *Sei $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}, \sigma)$. Dann ist H_f genau dann kompakt, wenn $f \in \mathrm{C}(\mathbb{T}) + \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T})$.*

Beweis. Zunächst sei $f \in \mathrm{C}(\mathbb{T}) + \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T})$, wobei wir ohne Einschränkung $f \in \mathrm{C}(\mathbb{T})$ annehmen dürfen. Da die trigonometrischen Polynome $\mathbb{C}[z, \bar{z}]\,|_{\mathbb{T}} \subseteq \mathrm{C}(\mathbb{T})$ nach dem Approximationssatz von Stone-Weierstraß dicht liegen, gibt es eine Folge $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}[z, \bar{z}]\,|_{\mathbb{T}}$ mit $\lim_{k\to\infty} \|p_k - f\|_{\mathbb{T}} = 0$ und aus der Abschätzung

$$\|H_{p_k} - H_f\| \leq \|p_k - f\|_{\mathbb{T}}$$

folgt mit Lemma 2.6, dass H_f als Grenzwert einer Folge von Operatoren endlichen Ranges kompakt ist.

Es sei nun $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T},\sigma)$ so, dass H_f kompakt ist. Dann liefert die Kompaktheit der Menge

$$K = \overline{H_f^* \left\{ g \in \mathrm{H}^2(\mathbb{T})^\perp \mid \|g\|_{\mathrm{L}^2} \leq 1 \right\}} \subseteq \mathrm{H}^2(\mathbb{T})$$

zusammen mit der Abschätzung

$$\begin{aligned} \|H_f\,\mathrm{S}^k\| &= \|(\mathrm{S}^*)^k\, H_f^*\| \\ &= \sup_{\substack{g \in \mathrm{H}^2(\mathbb{T})^\perp \\ \|g\|_{\mathrm{L}^2} \leq 1}} \|(\mathrm{S}^*)^k\, H_f^*\, g\|_{\mathrm{L}^2} \\ &\leq \sup_{h \in K} \|(\mathrm{S}^*)^k h\|_{\mathrm{L}^2} \end{aligned}$$

und Proposition 2.7, dass

$$\lim_{k\to\infty} \|H_f\,\mathrm{S}^k\| = 0. \tag{2.7}$$

Nun liefert der Satz von Nehari (Satz 2.5), unter Berücksichtigung, dass $\mathrm{C}(\mathbb{T}) + \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T}) \subseteq \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T},\sigma)$ nach Satz 1.20 eine Teilalgebra ist, die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|H_f\,\mathrm{S}^k\| &= \|H_{z^k f}\| \\ &= \inf\left\{ \|z^k f - g\|_{\mathrm{L}^\infty} \mid g \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T}) \right\} \\ &= \inf\left\{ \|z^k (f - \bar{z}^k g)\|_{\mathrm{L}^\infty} \mid g \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T}) \right\} \\ &= \inf\left\{ \|f - \bar{z}^k g\|_{\mathrm{L}^\infty} \mid g \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T}) \right\} \\ &\geq \inf\left\{ \|f - h\|_{\mathrm{L}^\infty} \mid h \in \mathrm{C}(\mathbb{T}) + \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T}) \right\} \end{aligned}$$

und da $\mathrm{C}(\mathbb{T}) + \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T}) \subset \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T},\sigma)$ erneut wegen Satz 1.20 abgeschlossen ist, folgt aus der letzten Ungleichung zusammen mit (2.7) schließlich $f \in \mathrm{C}(\mathbb{T}) + \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T})$.

□

2.3 Der mehrdimensionale Fall

Wir wollen uns im Folgenden mit kompakten Hankeloperatoren auf $\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$ für $n > 1$ beschäftigen. Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, dass ein Hankeloperator H_f mit Symbol $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}, \sigma)$ genau dann kompakt ist, wenn $f \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T}) + \mathrm{C}(\mathbb{T})$ gilt. Im Fall $n > 1$ wird sich zeigen, dass es gar keine vom Nulloperator verschiedenen kompakten Hankeloperatoren auf $\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$ gibt. Dies bemerkten zuerst M. Cotlar und C. Sadosky im Jahre 1993. Sie zeigten dies in [7], indem sie zunächst die Singulärwerte eines kompakten Hankeloperators H_f zu seiner Operatornorm in Beziehung setzten (siehe [7, Theorem B, S. 292] und [6]) und hieraus unmittelbar folgern konnten, dass schon jeder kompakte Hankeloperator endlichen Ranges gleich dem Nulloperator sein muss. Im Jahre 2009 bewiesen P. Ahern, E. H. Youssfi und K. Zhu dieses Resultat in [1] erneut, indem sie die Fourierentwicklung des Symbols $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}^n, \sigma)$ des Hankeloperators H_f bezüglich der Orthonormalbasis $(z^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ genauer untersuchten. Im folgenden werden wir diese Argumentation ausführlich darlegen. Die Hauptidee besteht darin, für $\zeta \in \mathbb{T}^n$ den folgenden unitären Operator U_ζ zu betrachten.

2.9 Lemma. *Für jedes $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{T}^n$ ist der Operator*

$$U_\zeta \colon \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma) \longrightarrow \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma), \qquad (U_\zeta f)(z) = f(\zeta z)$$

unitär mit

(i) $U_\zeta^* = U_{\bar{\zeta}}$,

(ii) $P\, U_\zeta = U_\zeta\, P$

und

(iii) $U_\zeta\, H_f\, U_\zeta^*|_{\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)} = H_{U_\zeta f}$ *für alle* $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}^n, \sigma)$.

Beweis. Sind $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma)$ zwei Repräsentanten der gleichen Äquivalenzklasse aus $\mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma)$, so wähle eine σ-Nullmenge $N \in \mathfrak{B}(\mathbb{T}^n)$ so, dass $f(\eta) = g(\eta)$ für alle $\eta \in \mathbb{T}^n \setminus N$. Für $\zeta \in \mathbb{T}^n$ ist die Menge $\bar{\zeta}N$ nach Lemma 1.1 ebenfalls eine σ-Nullmenge und es gilt $f(\zeta\eta) = g(\zeta\eta)$ für alle $\eta \in \mathbb{T}^n \setminus \bar{\zeta}N$. Für $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma)$ folgt ebenfalls aus Lemma 1.1 und der Transformationsformel für Bildmaße, dass $U_\zeta(f) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma)$, das heißt U_ζ ist wohldefiniert. Beachtet man, dass für $\zeta \in \mathbb{T}^n$ die Bijektion

$$\mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{T}^n, \qquad z \longmapsto \zeta z$$

als stetige Abbildung auch Borel-meßbar ist, so liefert die Transformationsformel für Bildmaße

$$\begin{aligned}\langle U_\zeta f, g\rangle_{\mathrm{L}^2} &= \int_{\mathbb{T}^n} (U_\zeta f)(\eta)\bar{g}(\eta)\, d\sigma(\eta)\\ &= \int_{\mathbb{T}^n} f(\zeta z)\bar{g}(\eta)\, d\sigma(\eta)\\ &= \int_{\mathbb{T}^n} f(\eta)\bar{g}(\bar{\zeta}\eta)\, d\sigma(\eta)\\ &= \langle f, U_{\bar{\zeta}}\, g\rangle_{\mathrm{L}^2}\end{aligned}$$

für alle $f, g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma)$ und Punkt (i) ist gezeigt. Wegen $\zeta\bar{\zeta} = (1, \ldots, 1)$ für $\zeta \in \mathbb{T}^n$ folgt die Unitarität des Operators U_ζ direkt aus seiner Definition und Teil (i). Da $(z^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$ eine Orthonormalbasis von $\mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma)$ ist, folgt Punkt (ii) direkt aus der Beobachtung

$$P(U_\zeta\, z^\alpha) = \zeta^\alpha\, P\, z^\alpha = \begin{cases} U_\zeta\, z^\alpha, & \alpha \in \mathbb{N}^n\\ 0, & \alpha \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{N}^n\end{cases} \qquad (\alpha \in \mathbb{Z}^n).$$

Für $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}^n, \sigma)$ und $g \in \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$ zeigt die Rechung

$$\begin{aligned}U_\zeta\, H_f\, U_\zeta^*\, g &= U_\zeta(1-P)f(U_{\bar{\zeta}}\, g)\\ &= U_\zeta(1-P)\, U_{\bar{\zeta}}((U_\zeta\, f)g)\\ &= H_{U_\zeta f}\, g\end{aligned}$$

Punkt (iii) des Lemmas. Man beachte hierbei, dass im letzten Schritt der Rechnung Punkt (ii) des Lemmas verwendet wurde.

□

Wir beweisen zunächst eine Reihe von Stetigkeitsaussagen, die im darauffolgenden Beweis der Hauptaussage verwendet werden. Wir beginnen mit folgendem Lemma

2.10 Lemma. *Ist $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma)$, so ist die Abbildung*

$$\mathbb{T}^n \longrightarrow \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma), \qquad \zeta \longmapsto U_\zeta\, f$$

stetig.

Beweis. Es sei $(\zeta_k)_k \in \mathbb{N}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{T}^n$ mit Grenzwert $\zeta \in \mathbb{T}^n$. Wir nehmen zunächst an, dass $f \in \mathrm{C}(\mathbb{T}^n) \subseteq \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma)$ ist und bemerken, dass f als stetige Funktion auf dem Kompaktum $\mathbb{T}^n$ schon gleichmäßig stetig ist. Es folgt

$$\lim_{k\to\infty} \|U_{\zeta_k}\, f - U_\zeta\, f\|_{\mathrm{L}^2} \leq \lim_{k\to\infty} \|U_{\zeta_k}\, f - U_\zeta\, f\|_{\mathbb{T}^n} = 0,$$

sodass die Aussage für stetige $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n,\sigma)$ gezeigt ist. Sei nun allgemein $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n,\sigma)$ und $\varepsilon > 0$. Wir wählen eine Funktion $g \in \mathrm{C}(\mathbb{T}^n)$ so, dass $\|f-g\|_{\mathrm{L}^2} < \varepsilon$ erfüllt ist. Weiter sei $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\|(U_{\zeta_k} - U_\zeta)g\|_{\mathrm{L}^2} < \varepsilon$ für alle $k \geq N$ gilt. Eine solche Zahl N existiert nach obiger Argumentation. Hieraus erhält man

$$\begin{aligned}\|U_{\zeta_k} f - U_\zeta f\|_{\mathrm{L}^2} &\leq \|U_{\zeta_k}(f-g)\|_{\mathrm{L}^2} + \|U_\zeta(g-f)\|_{\mathrm{L}^2} + \|U_{\zeta_k} g - U_\zeta g\|_{\mathrm{L}^2} \\ &\leq 2\|f-g\|_{\mathrm{L}^2} + \|(U_{\zeta_k} - U_\zeta)g\|_{\mathrm{L}^2} \\ &< 3\varepsilon\end{aligned}$$

für alle $k \geq N$. Damit ist alles gezeigt.

□

Wir folgern aus dem letzten Lemma und Punkt (iii) aus Lemma 2.9.

2.11 Lemma. *Es sei $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T},\sigma)$. Für jedes $g \in \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$ ist dann die Abbildung*

$$\mathbb{T}^n \longrightarrow \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n,\sigma), \qquad \zeta \longmapsto H_{U_\zeta f}(g)$$

stetig.

Beweis. Wir zeigen die Folgenstetigkeit der Abbildung. Sei hierzu $(\zeta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{T}^n$ mit Grenzwert $\zeta \in \mathbb{T}^n$. So liefert Punkt (iii) aus Lemma 2.9 die Identität

$$\begin{aligned}H_{U_{\zeta_k} f} - H_{U_\zeta f} &= U_{\zeta_k} H_f U_{\zeta_k}^* |_{\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)} - U_\zeta H_f U_\zeta^* |_{\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)} \\ &= U_{\zeta_k} H_f U_{\zeta_k}^* |_{\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)} - U_{\zeta_k} H_f U_\zeta^* |_{\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)} \\ &\qquad + U_{\zeta_k} H_f U_\zeta^* |_{\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)} - U_\zeta H_f U_\zeta^* |_{\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)} \\ &= U_{\zeta_k} H_f (U_{\bar\zeta_k} |_{\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)} - U_{\bar\zeta} |_{\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)}) + (U_{\zeta_k} - U_\zeta) H_f U_{\bar\zeta} |_{\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)}.\end{aligned}$$

Hieraus erhält man für $g \in \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$ die Ungleichung

$$\|(H_{U_{\zeta_k} f} - H_{U_\zeta f})g\|_{\mathrm{L}^2} \leq \|H_f\| \|(U_{\bar\zeta_k} - U_{\bar\zeta})g\|_{\mathrm{L}^2} + \|(U_{\zeta_k} - U_\zeta) H_f U_{\bar\zeta} g\|_{\mathrm{L}^2}$$

und da die Rechte Seite Lemma 2.10 zufolge im Limes $k \to \infty$ gegen Null konvergiert, folgt die Behauptung.

□

Bevor wir zum Hauptresultat dieses Abschnitts kommen, beweisen wir zunächst einen Spezialfall. Wir benötigen dazu die folgende Proposition.

2.12 Proposition. *Seien $n > 1$ und*

$$\pi \colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^{n-1}, \qquad (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \longmapsto (\zeta_2, \ldots, \zeta_n)$$

die Projektion auf die letzten $n-1$ Variablen. Dann wird durch

$$\Phi([g]) = [g \circ \pi]$$

eine lineare Isometrie $\Phi\colon \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^{n-1}) \to \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$ mit unendlichdimensionalem Bild definiert.

Beweis. Es sei $[g] \in \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^{n-1})$. Dann ist $g \circ \pi$ als Komposition Borel-messbarer Funktionen wieder Borel-messbar und wegen

$$\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}^n} |(g\circ\pi)(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)|^2 \, d\sigma_{n-1}(\zeta_2,\ldots,\zeta_n)\, d\sigma_1(\zeta_1) = \|g\|_{\mathrm{L}^2}^2 < \infty$$

folgt $[g\circ\pi] \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n,\sigma)$ und $\|g\circ\pi\|_{\mathrm{L}^2} = \|g\|_{\mathrm{L}^2}$ mit dem Satz von Fubini. Für $\alpha = (\alpha_1,\alpha') \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^{(n-1)}$ gilt nach dem Satz von Fubini und der Transformationsformel für Bildmaße

$$\langle z^\alpha, g\circ\pi\rangle_{\mathrm{L}^2} = \langle z'^{\alpha'}, g\rangle_{\mathrm{L}^2} \int_{\mathbb{T}} \zeta^{\alpha_1}\, d\sigma_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\langle z'^{\alpha'}, g\rangle_{\mathrm{L}^2} \int_{[-\pi,\pi]} e^{i|\alpha_1|t}\, d\lambda_1(t)\,.$$

wobei $z'^{\alpha'}\colon \mathbb{T}^{n-1} \to \mathbb{C}, \zeta \mapsto \zeta^{\alpha'}$. Wegen $g \in \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^{n-1})$ ist $\langle z'^{\alpha'}, g\rangle_{\mathrm{L}^2} = 0$ für alle $\alpha' \in \mathbb{Z}^{n-1}\setminus\mathbb{N}^{n-1}$ und da das Integral auf der rechten Seite obiger Gleichung Null ist für alle $\alpha_1 \in \mathbb{Z}^*$ folgt $\langle z^\alpha, g\circ\pi\rangle_{\mathrm{L}^2} = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{Z}^n\setminus\mathbb{N}^n$, das heißt $g\circ\pi \in \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$. Sei h ein weiterer Repräsentant von $[g]$ und eine σ_{n-1}-Nullmenge $N \in \mathfrak{B}(\mathbb{T}^{n-1})$ so gewählt, dass $h = g$ auf $\mathbb{T}^{n-1}\setminus N$ gilt. Dann ist $\mathbb{T}\times N \in \mathfrak{B}(\mathbb{T}^n)$ eine σ_n-Nullmenge mit $h\circ\pi = g\circ\pi$ auf $\mathbb{T}^n \setminus (\mathbb{T}\times N)$ und die Wohldefiniertheit der Abbildung Φ ist gezeigt. Da Φ offenbar linear ist und $\|g\circ\pi\|_{\mathrm{L}^2} = \|g\|_{\mathrm{L}^2}$ für $g \in \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^{n-1})$ gilt, ist Φ auch eine Isometrie. Hieraus und aus der Tatsache, dass $\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^{n-1})$ unendlichdimensional ist, folgt $\dim \Phi(\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^{n-1})) = \infty$.

□

2.13 Lemma. *Sei $n > 1$ und $\alpha \in \mathbb{Z}^n\setminus\mathbb{N}^n$. Dann ist H_{z^α} nicht kompakt.*

Beweis. Sei $\alpha = (\alpha_1,\alpha') \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^{n-1}\setminus(\mathbb{N}\times\mathbb{N}^{n-1})$, wobei wir ohne Einschränkung $\alpha_1 < 0$ annehmen dürfen. Setze $M = \Phi(\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^{n-1}))$, wobei Φ die in Proposition 2.12 definierte lineare Isometrie sei. Für $g \in M$ liegt die Funktion

$$G^*\colon \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \zeta \longmapsto \zeta^\alpha g(\zeta)$$

als Produkt einer $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}^n,\sigma)$-Funktion und einer $\mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n,\sigma)$-Funktion wieder in $\mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n,\sigma)$ und wählt man $\tilde{g} \in \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^{n-1})$ mit $\Phi(\tilde{g}) = g$, so gilt

$$\begin{aligned} G^*(\zeta) &= \zeta^\alpha g(\zeta) \\ &= \bar{\zeta}_1^{|\alpha_1|}(\zeta_2,\ldots,\zeta_n)^{\alpha'}\tilde{g}(\zeta_2,\ldots,\zeta_n) \\ &= \bar{\zeta}_1^{|\alpha_1|} h(\zeta_2,\ldots,\zeta_n) \end{aligned} \tag{2.8}$$

für alle $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{T}^n$, wobei $h \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^{n-1})$ durch $h(\zeta) = \zeta^{\alpha'} \tilde{g}(\zeta)$ ($\zeta \in \mathbb{T}^{n-1}$) definiert ist. Satz 1.18 zufolge ist die Funktion $PG^* \in \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$ radialer Limes einer Funktion $G \in \mathrm{H}^2(\mathbb{D}^n)$, für die unter Verwendung von Gleichung (2.8)

$$\begin{aligned} G(z) &= \int_{\mathbb{T}^n} C_n(z,\zeta) G^*(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} C_n(z,\zeta) \bar{\zeta}_1^{|\alpha_1|} h(\zeta_2, \ldots, \zeta_n)\, d\sigma(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{T}^{n-1}} C_{n-1}(z',\zeta) h(\zeta)\, d\sigma_{n-1}(\zeta) \int_{\mathbb{T}} C_1(z_1,\zeta) \bar{\zeta}^{|\alpha_1|}\, d\sigma_1(\zeta) \end{aligned} \tag{2.9}$$

für alle $z = (z_1, z') \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}^{n-1}$ gilt. Nach Satz 1.18 definiert

$$\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad z_1 \longmapsto \int_{\mathbb{T}} C_1(z_1,\zeta) \bar{\zeta}^{|\alpha_1|}\, d\sigma_1(\zeta)$$

eine Funktion in $\mathrm{H}^2(\mathbb{D})$, für die der zugehörige radiale Limes in $\mathrm{H}^2(\mathbb{T})$ als Projektion der Funktion $\mathbb{T} \to \mathbb{C}, \zeta \mapsto \bar{\zeta}^{|\alpha_1|}$ in den Hardyraum $\mathrm{H}^2(\mathbb{T})$ gleich Null ist. Aus (2.9) folgt also $G(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{D}^n$ und somit ist $PG^* = 0$ als radialer Limes der Funktion G. Dies bedeutet aber $P(z^\alpha g) = 0$ nach Definition von G^*, sodass $H_{z^\alpha}(g) = z^\alpha g$ und daher $\|H_{z^\alpha}(g)\|_{\mathrm{L}^2} = \|z^\alpha g\|_{\mathrm{L}^2} = \|g\|_{\mathrm{L}^2}$. Damit haben wir gezeigt, dass $H_{z^\alpha}|_M$ eine Isometrie ist und da M nach Proposition 2.12 unendlichdimensional ist, schließt dies die Kompaktheit des Hankeloperators H_{z^α} aus.

□

Die Gültigkeit der Identität im folgenden Lemma ist entscheidend für das Argument von Ahern, Youssfi und Zhu.

2.14 Lemma. *Sei $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}^n, \sigma) \subset \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma)$ mit Fourierentwicklung*

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} a_\alpha z^\alpha.$$

Ist $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ mit $a_\alpha \neq 0$, so gilt

$$\langle H_{a_\alpha z^\alpha}(g), h \rangle_{\mathrm{L}^2} = \int_{\mathbb{T}^n} \langle H_{\mathrm{U}_\zeta f}(g), h \rangle_{\mathrm{L}^2} \bar{\zeta}^\alpha \, d\sigma(\zeta) \tag{2.10}$$

für alle $g \in \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$ und alle $h \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma)$.

Beweis. Als erstes bemerken wir, dass der Integrand unter dem Integral auf der rechten Seite von (2.10) nach Lemma 2.11 stetig und somit σ-integrierbar ist. Wir beweisen die Identität in mehreren Schritten. Zunächst bemerken wir, dass die Folge $(f_N)_{N\in\mathbb{N}}$ mit $f_N = \sum_{|\beta|\leq N} a_\beta z^\beta$ in $\mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n,\sigma)$ gegen f konvergiert. Es sei nun $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ mit $a_\alpha \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^n} \langle H_{U_\zeta f_N}(g), h\rangle_{\mathrm{L}^2} \bar{\zeta}^\alpha \, d\sigma(\zeta) &= \sum_{|\beta|\leq N} \langle z^\beta, z^\alpha\rangle_{\mathrm{L}^2} \langle H_{a_\beta z^\beta}(g), h\rangle_{\mathrm{L}^2} \\ &= \langle H_{a_\alpha z^\alpha}(g), h\rangle_{\mathrm{L}^2}\end{aligned} \tag{2.11}$$

für jedes $N \geq |\alpha|$, alle $g \in \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$ und alle $h \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n,\sigma)$, wobei die σ-Integrierbarkeit des Integranden auf der linken Seite erneut aus Lemma 2.11 folgt. Beachte, dass im letzten Schritt verwendet wurde, dass die Familie $(z^\beta)_{\beta\in\mathbb{Z}^n}$ eine Orthonormalbasis von $\mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n,\sigma)$ bildet. Für den Rest des Beweises sei $h \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n,\sigma)$ beliebig aber fest. Wir zeigen die Identität (2.10) im ersten Schritt für Funktionen $g \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T}^n) \subset \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$. Nach Lemma 2.11 sind die Funktionen

$$\gamma_N \colon \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \zeta \longmapsto \langle H_{U_\zeta f_N}(g), h\rangle_{\mathrm{L}^2} \bar{\zeta}^\alpha \qquad (N \in \mathbb{N})$$

stetig und somit insbesondere Borel-messbar. Definieren wir

$$\gamma \colon \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \zeta \longmapsto \langle H_{U_\zeta f}(g), h\rangle_{\mathrm{L}^2} \bar{\zeta}^\alpha$$

und ist $\zeta \in \mathbb{T}^n$, so gilt

$$\begin{aligned}|\gamma_N(\zeta) - \gamma(\zeta)| &= \left|\langle H_{U_\zeta(f_N - f)}(g), h\rangle_{\mathrm{L}^2}\right| \\ &\leq \|H_{U_\zeta(f_N - f)}(g)\|_{\mathrm{L}^2} \|h\|_{\mathrm{L}^2} \\ &\leq \|g\, U_\zeta(f_N - f)\|_{\mathrm{L}^2} \|h\|_{\mathrm{L}^2} \\ &\leq \|g\|_{\mathrm{L}^\infty} \|U_\zeta(f_N - f)\|_{\mathrm{L}^2} \|h\|_{\mathrm{L}^2} \\ &= \|g\|_{\mathrm{L}^\infty} \|f_N - f\|_{\mathrm{L}^2} \|h\|_{\mathrm{L}^2}.\end{aligned}$$

Da die rechte Seite der letzten Ungleichung für $N \to \infty$ gegen Null konvergiert, ist die Abbildung γ der punktweise Limes der Folge $(\gamma_N)_{N\in\mathbb{N}}$. Wähle weiter eine reelle Zahl $C > 0$ so, dass $\|f_N\|_{\mathrm{L}^2} \leq C$ für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt. Wir erhalten nun

$$\begin{aligned}|\gamma_N(\zeta)| &= \left|\langle H_{U_\zeta f_N}(g), h\rangle_{\mathrm{L}^2} \bar{\zeta}^\alpha\right| \\ &\leq \|H_{U_\zeta f_N}(g)\|_{\mathrm{L}^2} \|h\|_{\mathrm{L}^2} \\ &\leq \|g\|_{\mathrm{L}^\infty} \|U_\zeta f_N\|_{\mathrm{L}^2} \|h\|_{\mathrm{L}^2} \\ &= \|g\|_{\mathrm{L}^\infty} \|f_N\|_{\mathrm{L}^2} \|h\|_{\mathrm{L}^2} \\ &\leq C \|g\|_{\mathrm{L}^\infty} \|h\|_{\mathrm{L}^2}\end{aligned}$$

für alle $\zeta \in \mathbb{T}^n$. Da die Rechte Seite der letzten Ungleichung, aufgefasst als Funktion in $\zeta \in \mathbb{T}^n$ in $\mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma)$ liegt, erfüllt die Folge $(\gamma_N)_{N\in\mathbb{N}}$ die Voraussetzungen des Satzes von der majorisierten Konvergenz und es folgt unter Beachtung von Gleichung (2.11) die Identität

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^n} \langle H_{\mathrm{U}_\zeta f}(g), h\rangle_{\mathrm{L}^2} \bar{\zeta}^\alpha \, d\sigma(\zeta) &= \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{T}^n} \langle H_{\mathrm{U}_\zeta f_N}(g), h\rangle_{\mathrm{L}^2} \bar{\zeta}^\alpha \, d\sigma(\zeta) \\ &= \langle H_{a_\alpha z^\alpha}(g), h\rangle_{\mathrm{L}^2}.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Somit ist (2.10) für Funktionen $g \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T}^n)$ gezeigt. Im zweiten Schritt sei $g \in \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$. Da $\mathrm{H}^\infty(\mathbb{T}^n)$ in $\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$ dicht liegt (beachte hierfür Korollar 1.16), gibt es eine Folge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{H}^\infty(\mathbb{T}^n)$, die in $\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$ gegen g konvergiert. Wir wählen erneut eine Konstante $C > 0$ mit $\|g_k\|_{\mathrm{L}^2} \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und bemerken

$$\left|\langle H_{\mathrm{U}_\zeta f}(g_k), h\rangle_{\mathrm{L}^2} \bar{\zeta}^\alpha\right| \leq \|H_{\mathrm{U}_\zeta f}\| \|g_k\|_{\mathrm{L}^2} \|h\|_{\mathrm{L}^2} \leq C \|H_f\| \|h\|_{\mathrm{L}^2}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Da die durch

$$\delta_k \colon \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \zeta \longmapsto \langle H_{\mathrm{U}_\zeta f}(g_k), h\rangle_{\mathrm{L}^2} \bar{\zeta}^\alpha$$

gegebene Folge stetiger Funktionen punktweise gegen die Funktion

$$\delta \colon \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \zeta \longmapsto \langle H_{\mathrm{U}_\zeta f}(g), h\rangle_{\mathrm{L}^2} \bar{\zeta}^\alpha$$

konvergiert, liefert eine weitere Anwendung des Satzes von der majorisierten Konvergenz zusammen mit der bereits bewiesenen Identität (2.12) schließlich

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^n} \langle H_{\mathrm{U}_\zeta f}(g), h\rangle_{\mathrm{L}^2} \bar{\zeta}^\alpha \, d\sigma(\zeta) &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{T}^n} \langle H_{\mathrm{U}_\zeta f}(g_k), h\rangle_{\mathrm{L}^2} \bar{\zeta}^\alpha \, d\sigma(\zeta) \\ &= \lim_{k\to\infty} \langle H_{a_\alpha z^\alpha}(g_k), h\rangle_{\mathrm{L}^2} \\ &= \langle H_{a_\alpha z^\alpha}(g), h\rangle_{\mathrm{L}^2}.\end{aligned}$$

□

Wir kommen nun zum Hauptresultat dieses Abschnitts.

2.15 Satz. *Es seien $n > 1$ und $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}^n, \sigma)$. Dann ist der Hankeloperator H_f genau dann kompakt, wenn $f \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T}^n)$ ist.*

Beweis. Ist $f \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T}^n)$, so ist der zugehörige Hankeloperator der Nulloperator und daher kompakt. Es bleibt also nur zu zeigen, dass die Bedingung $f \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T}^n)$ auch notwendig für die Kompaktheit von H_f ist. Sei hierzu $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}^n, \sigma)$ so, dass der Hankeloperator H_f kompakt ist. Es sei

$$f = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} a_\alpha z^\alpha$$

die Fourierentwicklung von f bezüglich der Orthonormalbasis $(z^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$ von $\mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n,\sigma)$. Wir zeigen, dass $f \in \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$ ist. Hierfür genügt es zu begründen, dass für $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ mit $a_\alpha \neq 0$ der Hankeloperator $H_{a_\alpha z^\alpha}$ kompakt ist, denn dann liefert Lemma 2.13 sofort $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Sei ein solches $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ mit $a_\alpha \neq 0$ vorgegeben. Wir setzen $f_\alpha = a_\alpha z^\alpha \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{T}^n,\sigma)$ und beachten, dass wegen Lemma 2.14 die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\langle H_{f_\alpha}(g),h\rangle_{\mathrm{L}^2}| &= \left|\int_{\mathbb{T}^n}\langle H_{\mathrm{U}_\zeta f}(g),h\rangle_{\mathrm{L}^2}\bar{\zeta}^\alpha\,d\sigma(\zeta)\right| \\ &\leq \int_{\mathbb{T}^n}\left|\langle H_{\mathrm{U}_\zeta f}(g),h\rangle_{\mathrm{L}^2}\right|d\sigma(\zeta) \\ &\leq \int_{\mathbb{T}^n}\|H_{\mathrm{U}_\zeta f}(g)\|_{\mathrm{L}^2}\,d\sigma(\zeta) \end{aligned}$$

für alle $g \in \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$ und alle $h \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n,\sigma)$ mit $\|h\|_{\mathrm{L}^2} \leq 1$ gilt. Hierbei sind alle Integrale wohldefiniert und endlich, da die Integranden nach Lemma 2.11 alle stetig und somit beschränkt messbar sind. Wir folgern aus obiger Ungleichung weiter

$$\|H_{f_\alpha}(g)\|_{\mathrm{L}^2} = \sup_{\|h\|_{\mathrm{L}^2}\leq 1}|\langle H_{f_\alpha}(g),h\rangle_{\mathrm{L}^2}| \leq \int_{\mathbb{T}^n}\|H_{\mathrm{U}_\zeta f}(g)\|_{\mathrm{L}^2}\,d\sigma(\zeta) \tag{2.13}$$

für $g \in \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$. Es sei nun $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine schwache Nullfolge in $\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$. Wir folgern die Kompaktheit des Hankeloperators H_{f_α}, indem wir zeigen, dass $\lim_{k\to\infty}\|H_{f_\alpha}(g_k)\|_{\mathrm{L}^2} = 0$.

Als schwache Nullfolge ist $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nach dem Satz von Banach-Steinhaus auch normbeschränkt durch eine Konstante $C > 0$. Weiter liefert die Kompaktheit des Operators H_f zusammen mit Punkt (iii) aus Lemma 2.9 diejenige des Hankeloperators $H_{\mathrm{U}_\zeta f}$, das heißt es gilt insbesondere

$$\lim_{k\to\infty}\|H_{\mathrm{U}_\zeta f}(g_k)\|_{\mathrm{L}^2} = 0. \tag{2.14}$$

Weiter gilt für jedes $\zeta \in \mathbb{T}^n$ und alle $k \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$\|H_{\mathrm{U}_\zeta f}(g_k)\|_{\mathrm{L}^2} = \|U_\zeta\, H_f\, U_\zeta^*(g_k)\|_{\mathrm{L}^2} \leq C\|H_f\|. \tag{2.15}$$

Die Folgerungen (2.14) und (2.15) weisen die Voraussetzungen des Satzes von der majorisierten Konvergenz nach, den wir auf die Folge

$$f_k(\zeta) = \|H_{\mathrm{U}_\zeta f}(g_k)\|_{\mathrm{L}^2} \qquad (\zeta \in \mathbb{T}^n)$$

stetiger Funktionen $f_k\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{N})$ anwenden, um zusammen mit Ungleichung (2.13) schließlich

$$\lim_{k\to\infty}\|H_{f_\alpha}(g_k)\|_{\mathrm{L}^2} \leq \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{T}^n}\|H_{\mathrm{U}_\zeta f}(g_k)\|_{\mathrm{L}^2}\,d\sigma(\zeta) = 0$$

zu erhalten. Also ist H_{f_α} kompakt und daher $f \in \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$.

$\square$

Zusammen mit Teil (i) aus Lemma 2.4 liefert der letzte Satz also die Erkenntnis, dass es im Fall $n > 1$ außer dem Nulloperator in $\mathrm{L}(\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n), \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)^\perp)$ keine weiteren kompakten Hankeloperatoren H: $\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n) \to \mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)^\perp$ gibt.

3 Hankeloperatoren auf verallgemeinerten Bergmanräumen

In diesem Abschnitt werden wir diejenigen stetigen Funktionen auf $\overline{\mathbb{D}}^n$ charakterisieren, die kompakte Hankeloperatoren auf dem Bergmanraum bezüglich geeigneter regulärer Borel-Wahrscheinlichkeitsmaße liefern. Während im Falle des Hardyraumes über dem Einheitspolyzylinder $\mathbb{D}^n$ für $n > 1$ keine von Null verschiedenen kompakten Hankeloperatoren existieren, wie wir im vorhergehenden Kapitel gezeigt haben, gibt es im Falle verallgemeinerter Bergmanräume nichttriviale kompakte Hankeloperatoren. Eine geometrische Charakterisierung derjenigen stetigen Symbole $f \in \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n)$, die kompakte Hankeloperatoren liefern fand Trieu Le in [18]. Wir wollen seine Argumente in den folgenden Abschnitten näher erläutern. Im gesamten Kapitel sei, wenn nicht näher spezifiziert, $n \geq 1$ eine natürliche Zahl, $\mu\colon \mathfrak{B}([0,1)^n) \to [0,\infty)$ ein reguläres Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß und $\nu_n\colon \mathfrak{B}(\mathbb{D}^n) \to [0,\infty)$ das gemäß Lemma 1.23 zu μ gehörige reguläre Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{D}^n$.

3.1 Quasi-Homogene Funktionen

Im Folgenden untersuchen wir die Eigenschaften spezieller Klassen von Funktionen aus $\mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n)$. Wir zeigen, dass $\mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n)$ in die direkte Hilbertraumsumme $\bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{H}_\alpha$ der abgeschlossenen Unterräume $\mathcal{H}_\alpha$ aller quasi-homogenen Funktionen vom Multigrad $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ zerfällt. Wir beginnen mit der Definition der Unterräume $\mathcal{H}_\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{Z}^n$.

3.1 Definition. *Es sei $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. Eine Funktion $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n)$ heißt **quasi-homogen vom (Multi-)Grad α**, wenn zu jedem $\zeta \in \mathbb{T}^n$ eine ν_n-Nullmenge $N \in \mathfrak{B}(\mathbb{D}^n)$ existiert, sodass*

$$f(\zeta z) = \zeta^\alpha f(z)$$

*für alle $z \in \mathbb{D}^n \setminus N$ gilt. Eine Äquivalenzklasse $[f] \in \mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n)$ heißt **quasi-homogen vom (Multi-)Grad α**, wenn sie einen vom Grad α quasi-homogenen Repräsentanten besitzt.*

Ist $[f] \in \mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n)$ quasi-homogen vom Grad $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, so folgt aus obiger Definition mit Proposition 1.25, dass jeder Repräsentant von $[f]$ quasi-homogen vom Grad α ist. Aus diesem Grund werden wir im Folgenden, wenn wir von quasi-Homogenität sprechen, nicht mehr zwischen Äquivalenzklassen $[f] \in \mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n)$ und deren Repräsentanten aus $\mathcal{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n)$ unterscheiden und wieder f für $[f]$ schreiben. Aus dem jeweiligen Zusammenhang wird immer deutlich werden, ob die Äquivalenzklasse als ganzes oder ein zugehöriger Repräsentant gemeint ist.

3.2 Proposition. *Für jedes $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ ist*

$$\mathcal{H}_\alpha = \big\{ f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n) \mid f \textit{ ist quasi-homogen vom Grad } \alpha \big\}$$

ein abgeschlossener Unterraum von $\mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n)$.

Beweis. Für $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ ist $\mathcal{H}_\alpha$ offenbar ein Unterraum von $\mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n)$. Zum Beweis der Abgeschlossenheit sei eine in $\mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n)$ konvergente Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ quasi-homogener Funktionen vom Grad α mit Grenzwert $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n)$ vorgegeben. Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ von $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und eine ν_n-Nullmenge $N \in \mathfrak{B}(\mathbb{D}^n)$ so, dass $\lim_{l\to\infty} f_{k_l}(z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{D}^n \setminus N$ gilt. Da die Funktionen f_{k_l} $(l \in \mathbb{N})$ in $\mathcal{H}_\alpha$ liegen, gibt es zu $\zeta \in \mathbb{T}^n$ ν_n-Nullmengen $N_l \in \mathfrak{B}(\mathbb{D}^n)$ so, dass

$$f_{k_l}(\zeta z) = \zeta^\alpha f_{k_l}(z)$$

für alle $z \in \mathbb{D}^n \setminus N_l$ und $l \in \mathbb{N}$ gilt. Als abzählbare Vereinigung von ν_n-Nullmengen ist $N_0 = \big(\bigcup_{l\in\mathbb{N}} N_l\big) \cup N \cup \bar{\zeta} N$ wieder eine ν_n-Nullmenge und es gilt

$$f(\zeta z) = \lim_{l\to\infty} f_{k_l}(\zeta z) = \lim_{l\to\infty} \zeta^\alpha f_{k_l}(z) = \zeta^\alpha f(z)$$

für alle $z \in \mathbb{D}^n \setminus N_0$, das heißt $f \in \mathcal{H}_\alpha$.

□

Für $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ bezeichne $\mathrm{Q}_\alpha \colon \mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n) \to \mathcal{H}_\alpha$ die orthogonale Projektion von $\mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n)$ auf $\mathcal{H}_\alpha$.

3.3 Lemma. *Für $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ und $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n)$ gilt*

$$\mathrm{Q}_\alpha f(z) = \int_{\mathbb{T}^n} f(\zeta z) \bar{\zeta}^\alpha \, d\sigma(\zeta) \tag{3.1}$$

für ν_n-fast alle $z \in \mathbb{D}^n$.

Beweis. Es sei $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n)$. Dann ist $|f| \in \mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n)$ und die Funktion

$$\mathbb{T}^n \times \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad (z, \zeta) \longmapsto f(\zeta z) \bar{\zeta}^\alpha$$

ist Borel-messbar. Der Transformationsformel für Bildmaße zufolge gilt

$$\int_{\mathbb{D}^n} \big| f(\zeta z) \bar{\zeta}^\alpha \big| \, d\nu_n(z) = \int_{\mathbb{D}^n} |f(z)| \, d\nu_n(z) < \infty$$

für alle $\zeta \in \mathbb{T}^n$ und daher

$$\int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{D}^n}\left|f(\zeta z)\bar{\zeta}^\alpha\right| d\,\nu_n(z)\, d\sigma(\zeta) < \infty.$$

Aus dem Satz von Fubini folgt daher die Existenz einer ν_n-Nullmenge $N \in \mathfrak{B}(\mathbb{D}^n)$ derart, dass für jedes feste $z \in \mathbb{D}^n \setminus N$ die Abbildung

$$\mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \zeta \longmapsto f(\zeta z)\bar{\zeta}^\alpha$$

σ-integrierbar und die durch

$$f_\alpha(z) = \begin{cases} \int_{\mathbb{T}^n} f(\zeta z)\bar{\zeta}^\alpha\, d\sigma(\zeta), & z \in \mathbb{D}^n \setminus N \\ 0, & z \in N \end{cases} \qquad (z \in \mathbb{D}^n)$$

definierte Funktion $f_\alpha\colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$ ν_n-integrierbar ist. Somit ist die rechte Seite in (3.1) wohldefiniert. Indem man in dem obigen Argument f durch f^2 ersetzt, sieht man, dass man die obige ν_n-Nullmenge $N \in \mathfrak{B}(\mathbb{D}^n)$ so wählen kann, dass gleichzeitig für jedes $z \in \mathbb{D}^n \setminus N$ die Abbildung

$$\mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \zeta \longmapsto (f(\zeta z)\bar{\zeta}^\alpha)^2$$

σ-integrierbar und die durch

$$g_\alpha(z) = \begin{cases} \int_{\mathbb{T}^n}\left|f(\zeta z)\bar{\zeta}^\alpha\right| d\sigma(\zeta), & z \in \mathbb{D}^n \setminus N \\ 0, & z \in N \end{cases}$$

definierte Funktion $g_\alpha\colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$ ν_n-integrierbar ist. Da die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ konvex ist, liefert die Jensensche Ungleichung (siehe etwa VI.1.3 in [8])

$$\left|f_\alpha(z)\right|^2 \leq g_\alpha(z)$$

für alle $z \in \mathbb{D}^n$ und somit $f_\alpha \in \mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n)$. Zum Beweis der Identität (3.1) genügt es also $\mathrm{Q}_\alpha f = f_\alpha$ zu zeigen. Dies folgt, wenn wir $f_\alpha \in \mathcal{H}_\alpha$ und $f - f_\alpha \in \mathcal{H}_\alpha^\perp$ zeigen können.

Für $\gamma \in \mathbb{T}^n$ und $z \in \mathbb{D}^n \setminus (N \cup \bar{\gamma}N)$ gilt nach der Transformationsformel für Bildmaße

$$\begin{aligned} f_\alpha(z\gamma) &= \int_{\mathbb{T}^n} f(z\gamma\zeta)\bar{\zeta}^\alpha\, d\sigma(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} f(z\zeta)\gamma^\alpha\bar{\zeta}^\alpha\, d\sigma(\zeta) \\ &= \gamma^\alpha f_\alpha(z). \end{aligned}$$

Also ist $f \in \mathcal{H}_\alpha$. Weiter liefert der Satz von Fubini zusammen mit Proposition 1.25, dass

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}^n} f_\alpha(z)\overline{g(z)}\,d\nu_n(z) &= \int_{\mathbb{D}^n}\int_{\mathbb{T}^n} f(\zeta z)\bar{\zeta}^\alpha \overline{g(z)}\,d\sigma(\zeta)\,d\nu_n(z) \\
&= \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{D}^n} f(\zeta z)\bar{\zeta}^\alpha \overline{g(z)}\,d\nu_n(z)\,d\sigma(\zeta) \\
&= \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{D}^n} f(\zeta z)\overline{g(\zeta z)}\,d\nu_n(z)\,d\sigma(\zeta) \\
&= \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{D}^n} f(z)\overline{g(z)}\,d\nu_n(z)\,d\sigma(\zeta) \\
&= \int_{\mathbb{D}^n} f(z)\overline{g(z)}\,d\nu_n(z)
\end{aligned}$$

für jedes $g \in \mathcal{H}_\alpha$, das heißt $\langle f - f_\alpha, g\rangle_{\mathrm{L}^2} = 0$ für alle $g \in \mathcal{H}_\alpha$. Somit ist (3.1) gezeigt.

□

Wir entnehmen dem letzten Resultat das folgende Korollar.

3.4 Korollar. *Ist $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n)$ so gibt es zu jedem $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ eine Funktion $f_\alpha \in \mathcal{H}_\alpha$ mit $f_\alpha(\zeta z) = \zeta^\alpha f_\alpha(z)$ für alle $\zeta \in \mathbb{T}^n$ und alle $z \in \mathbb{D}^n$ so, dass $\mathrm{Q}_\alpha(f)(z) = f_\alpha(z)$ für ν_n-fast alle $z \in \mathbb{D}^n$ gilt. Ist zusätzlich $f \in \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n)$, so kann $f_\alpha \in \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n)$ gewählt werden und es gilt $f_\alpha(\zeta z) = \zeta^\alpha f_\alpha(z)$ für alle $\zeta \in \mathbb{T}^n$ und alle $z \in \overline{\mathbb{D}}^n$.*

Beweis. Sind $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n)$ und $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, so unterscheidet sich die durch

$$f_\alpha(z) = \begin{cases} \int_{\mathbb{T}^n} f(\zeta z)\bar{\zeta}^\alpha\,d\sigma(\zeta), & \text{falls der Integrand } \sigma\text{-integrierbar ist} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad (z \in \mathbb{D}^n)$$

definierte Funktion $f_\alpha\colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$ von der im Beweis von Lemma 3.3 definierten Funktion f_α höchstens auf einer ν_n-Nullmenge. Sie liegt daher in $\mathcal{H}_\alpha$ und erfüllt $f_\alpha(\gamma z) = \gamma^\alpha f_\alpha(z)$ für alle $z \in \mathbb{D}^n$ und alle $\gamma \in \mathbb{T}^n$. Unter der zusätzlichen Voraussetzung $f \in \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n)$ ist die Funktion

$$\overline{\mathbb{D}}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto f(\zeta z)\bar{\zeta}^\alpha$$

für jedes feste $\zeta \in \mathbb{T}^n$ stetig und für jedes $z \in \mathbb{D}^n$ ist die Abbildung

$$\mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \zeta \longmapsto f(\zeta z)\bar{\zeta}^\alpha$$

σ-integrierbar mit $\left|f(z\zeta)\bar{\zeta}^\alpha\right| \leq \|f\|_{\overline{\mathbb{D}}^n}$. Nach einem Satz über parameterabhängige Integrale ist die vom Grade α quasi-homogene Funktion

$$f_\alpha\colon \overline{\mathbb{D}}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto \int_{\mathbb{T}^n} f(\zeta z)\bar{\zeta}^\alpha\,d\sigma(\zeta)$$

stetig und aus der Transformationsformel für Bildmaße folgt

$$f_\alpha(\zeta z) = \zeta^\alpha f_\alpha(z)$$

für alle $\zeta \in \mathbb{T}^n$ und alle $z \in \overline{\mathbb{D}}^n$.

□

3.5 Lemma. *Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$ mit $\alpha \neq \beta$, so gilt $\mathcal{H}_\alpha \perp \mathcal{H}_\beta$.*

Beweis. Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$ mit $\alpha \neq \beta$, $f \in \mathcal{H}_\alpha$ und $g \in \mathcal{H}_\beta$. Dann zeigt die für jedes $\zeta \in \mathbb{T}^n$ gültige Rechnung

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}^n} \zeta^{\beta-\alpha} f(z)\overline{g(z)}\, d\,\nu_n(z) &= \int_{\mathbb{D}^n} f(\zeta z)\overline{g(\zeta z)}\, d\,\nu_n(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}^n} f(z)\overline{g(z)}\, d\,\nu_n(z),\end{aligned}$$

dass $\langle f, g\rangle_{\mathrm{L}^2} = 0$.

□

3.6 Lemma. *Für jedes $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n)$ ist die Reihe $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} \mathrm{Q}_\alpha(f)$ in $\mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n)$ summierbar mit $f = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} \mathrm{Q}_\alpha(f)$.*

Beweis. Für eine beliebige Abzählung $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^n$ ist die Folge

$$\delta_N \colon \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto \sum_{k=0}^{N} \left| \int_{\mathbb{T}^n} f(\zeta z)\bar{\zeta}^{\varphi(\alpha)}\, d\sigma(\zeta)\right|^2 \qquad (N \in \mathbb{N})$$

nichtnegativer, messbarer Funktionen punktweise monoton wachsend. Der Satz von der monotonen Konvergenz liefert daher zusammen mit der parsevallschen Gleichung (beachte hierbei, dass die Familie $(\zeta^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}^n}$ eine Orthonormalbasis von $\mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma)$ bildet), dass

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \|\mathrm{Q}_{\varphi(k)}(f)\|_{\mathrm{L}^2}^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{D}^n} \left|\int_{\mathbb{T}^n} f(\zeta z)\bar{\zeta}^{\varphi(k)}\, d\sigma(\zeta)\right|^2 d\,\nu_n(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}^n} \sum_{k=0}^{\infty} \left|\int_{\mathbb{T}^n} f(\zeta z)\bar{\zeta}^{\varphi(k)}\, d\sigma(\zeta)\right|^2 d\,\nu_n(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}^n}\int_{\mathbb{T}^n} |f(\zeta z)|^2\, d\sigma(\zeta)\, d\,\nu_n(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}^n} |f(z)|^2\, d\,\nu_n(z) \\ &= \|f\|_{\mathrm{L}^2}^2.\end{aligned}$$

Also ist die Reihe $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} \mathrm{Q}_\alpha(f)$ summierbar in $\mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n)$. Wegen Punkt (i) aus Lemma 3.5 gilt

$$\begin{aligned}\Big\| f - \sum_{k=0}^{N} \mathrm{Q}_{\varphi(k)}(f) \Big\|^2 &= \|f\|^2_{\mathrm{L}^f} - 2\,\mathrm{Re}\,\langle f, \big(\sum_{k=0}^{N} \mathrm{Q}_{\varphi(k)}\big) f\rangle + \sum_{k=0}^{N} \|\mathrm{Q}_{\varphi(k)}(f)\|^2_{\mathrm{L}^2} \\ &= \|f\|^2_{\mathrm{L}^2} - \sum_{k=0}^{N} \|\mathrm{Q}_{\varphi(k)}\, f\|^2_{\mathrm{L}^2},\end{aligned}$$

wobei die rechte Seite im Limes $N \to \infty$ gegen Null konvergiert. Da die Abzählung φ beliebig vorgegeben war, ist

$$f = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} \mathrm{Q}_\alpha(f)$$

gezeigt.

□

Zum Abschluss dieses Kapitels zeigen wir, dass die analytischen Monome $\{z^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ in $\mathrm{A}^2_{\nu_n}$ dicht liegen. Wir führen hierzu etwas Notation zur handhabung partieller komplexer Ableitungen ein. Sind $U \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Menge und $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und bezeichnet für den Augenblick $(e_i)_{i=1}^n$ die Standardbasis von $\mathbb{C}^n$, so schreiben wir

$$\partial_i f(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+he_i) - f(z)}{h} \in \mathbb{C}$$

für die partielle Ableitung von f im Punkt $z \in U$ bezüglich der i-ten Komponente $(i = 1, \dots, n)$. Entsprechend bezeichne $\partial_i^k f(z) = \partial_i \dots \partial_i f(z)$ die k-te partielle Ableitung von f im Punkt $z \in U$ bezüglich der i-ten Komponente und für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ definieren wir die α-te partielle Ableitung von f in einem Punkt $z \in U$ durch

$$\partial^\alpha f(z) = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} f(z).$$

Hierbei ist $\partial^\alpha f$ unabhängig von der Reihenfolge der partiellen Ableitungen. Schließlich erinnern wir daran, dass für jede holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$ ihre Taylorreihe

$$f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{\partial^\alpha f(0)}{\alpha!} z^\alpha$$

mit Entwicklungspunkt $0 \in \mathbb{D}^n$ gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{D}^n$ gegen f konvergiert.

3.7 Satz. *Die Polynome $\mathbb{C}[z]|_{\mathbb{D}^n}$ liegen dicht in $\mathrm{A}^2_{\nu_n}$. Insbesondere bildet die durch*

$$e_\alpha(z) = \frac{z^\alpha}{\sqrt{c_\alpha}} \qquad (\alpha \in \mathbb{N}^n, z \in \mathbb{D}^n)$$

gegebene Familie $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ von Monomen $e_\alpha \colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$, wobei

$$c_\alpha = \langle z^\alpha, z^\alpha \rangle_{\mathrm{L}^2} = \int_{[0,1)^n} r^{2\alpha}\, d\mu(r)$$

für $\alpha \in \mathbb{N}^n$ sei, eine Orthonormalbasis von $\mathrm{A}^2_{\nu_n}$.

Beweis. Es sei $f \in \mathrm{A}^2_{\nu_n}$. Dann ist für jedes $z \in \mathbb{D}^n$ die Abbildung

$$\phi_z \colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n, \qquad w \longmapsto wz$$

holomorph mit $\phi_z(U_z) \subset \mathbb{D}^n$ für eine geeignete, von z abhängige, offene Obermenge $U_z \subset \mathbb{C}^n$ von $\overline{\mathbb{D}}^n$. Die iterierte Anwendung der mehrdimensionalen Kettenregel für komplexe partielle Ableitungen (siehe [10, Lemma 2.10]) auf die Funktion $f \circ \phi_z|_{U_z}$ liefert (man beachte hier auch [10, Satz 1.19])

$$\partial^\alpha (f \circ \phi_z|_{U_z})(0) = (\partial^\alpha f)(0) z^\alpha.$$

Mit diesen Bemerkungen folgt für $\alpha \in \mathbb{N}^n$ aus Lemma 3.3 und [10, Satz 1.17] weiter

$$\begin{aligned}
\mathrm{Q}_\alpha f(z) &= \int_{\mathbb{T}^n} f(\zeta z)\bar{\zeta}^\alpha\, d\sigma(\zeta) \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_\circ \mathbb{D}^n} \frac{(f \circ \phi_z|_{U_z})(\zeta)}{\zeta^{\alpha+(1,\ldots,1)}}\, d\zeta \\
&= \frac{\partial^\alpha (f \circ \phi_z|_{U_z})(0)}{\alpha!} \\
&= \frac{\partial^\alpha f(0)}{\alpha!} z^\alpha
\end{aligned}$$

für ν_n-fast alle $z \in \mathbb{D}^n$, wobei das letzte Integral als iteriertes Kurvenintegral zu lesen ist. Ist ohne Einschränkung $\alpha = (\alpha_1, \alpha') \in (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) \times \mathbb{Z}^{n-1}$, so gilt erneut nach Lemma 3.3 und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
\mathrm{Q}_\alpha f(z) &= \int_{\mathbb{T}^n} f(\zeta z)\bar{\zeta}^\alpha\, d\sigma(\zeta) \\
&= \int_{\mathbb{T}^{n-1}} \int_{\mathbb{T}} f(\zeta_1 z_1, \zeta' z')\zeta_1^{|\alpha_1|}\, d\sigma_1(\zeta_1)\, \bar{\zeta}'^{\alpha'}\, d\sigma_{n-1}(\zeta')
\end{aligned} \tag{3.2}$$

für ν_n-fast alle $z = (z_1, z') \in \mathbb{D}^n$. Nach dem Cauchyschen Integralsatz, angewendet auf die, auf einer offenen Obermenge $U \subset \mathbb{C}$ von $\overline{\mathbb{D}}$ holomorphe Funktion

$$U \longmapsto \mathbb{C}, \qquad w \longmapsto f(wz_1, \zeta' z')w^{|\alpha_1|} \qquad ((z_1, z') \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}^n, \zeta' \in \mathbb{T}^{n-1}),$$

verschwindet das innere Integral auf der Rechten Seite von 3.2, sodass $\mathrm{Q}_\alpha f(z) = 0$ für ν_n-fast alle $z \in \mathbb{D}^n$. Insgesamt haben wir

$$\mathrm{Q}_\alpha f(z) = \begin{cases} \frac{\partial^\alpha f(0)}{\alpha!} z^\alpha, & \text{falls } \alpha \in \mathbb{N}^n \\ 0, & \text{falls } \alpha \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{N}^n \end{cases}$$

für ν_n-fast alle $z \in \mathbb{D}^n$ und jedes $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ gezeigt. Nach Lemma 3.6 konvergiert daher die Taylorreihe von f in $\mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n)$ gegen f, das heißt die Polynome $\mathbb{C}[z]|_{\mathbb{D}^n}$ liegen dicht in $\mathrm{A}^2_{\nu_n}$. Offenbar bildet die Familie $(z^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ von Monomen ein Orthogonalsystem in $\mathrm{A}^2_{\nu_n}$. Nach dem bisher gezeigten ist also die Familie

$$e_\alpha \colon \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto \frac{z^\alpha}{\|z^\alpha\|_{\mathrm{L}^2}} \qquad (\alpha \in \mathbb{N}^n)$$

eine Orthonormalbasis von $\mathrm{A}^2_{\nu_n}$ und nach Lemma 1.23 gilt

$$\begin{aligned} c_\alpha &= \|z^\alpha\|^2_{\mathrm{L}^2} \\ &= \int_{\mathbb{D}^n} |z^\alpha|^2 \, d\nu_n(z) \\ &= \int_{[0,1)^n} \int_{\mathbb{T}^n} |r^\alpha \zeta^\alpha|^2 \, d\sigma(\zeta) \, d\mu(r) \\ &= \int_{[0,1)^n} r^{2\alpha} \, d\mu(r) \end{aligned}$$

für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

□

Im folgenden sei $P\colon \mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n) \to \mathrm{A}^2_{\nu_n}$ die orthogonale Projektion von $\mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n)$ auf den nach Lemma 1.28 abgeschlossenen Unterraum $\mathrm{A}^2_{\nu_n}$. Ferner schreiben wir $\mathrm{A}^{2\perp}_{\nu_n} = \mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n) \ominus \mathrm{A}^2_{\nu_n}$ für das orthogonale Komplement von $\mathrm{A}^2_{\nu_n}$ in $\mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n)$ sowie $P_-\colon \mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n) \to \mathrm{A}^{2\perp}_{\nu_n}$ für die orthogonale Projektion auf $\mathrm{A}^{2\perp}_{\nu_n}$. Mit Hilfe des letzten Ergebnisses zeigen wir nun das folgende Korollar.

3.8 Korollar. *Es sei $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. Dann gilt*

(i) $P\mathrm{Q}_\alpha = \mathrm{Q}_\alpha P$,

(ii) $P\mathcal{H}_\alpha \subseteq \mathcal{H}_\alpha$,

(iii) $\mathrm{Q}_\alpha(\mathrm{A}^2_{\nu_n}) = \begin{cases} \mathbb{C}e_\alpha, & \textit{falls } \alpha \in \mathbb{N}^n \\ 0, & \textit{falls } \alpha \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{N}^n. \end{cases}$

Beweis. Teil (iii) folgt aus Lemma 3.5 und der Tatsache, dass die Elemente der Orthonormalbasis $(e_\beta)_{\beta\in\mathbb{N}^n}$ von $\mathrm{A}^2_{\nu_n}$ die Eigenschaft $e_\beta \in \mathcal{H}_\beta$ $(\beta \in \mathbb{N}^n)$ haben. Da Q_α eine Projektion ist, sind $\mathrm{A}^2_{\nu_n}$ und $\mathrm{A}^{2\perp}_{\nu_n}$ invariante Teilräume für Q_α. Daher gilt

$$P\mathrm{Q}_\alpha f = P\mathrm{Q}_\alpha Pf + P\mathrm{Q}_\alpha(1-P)f = \mathrm{Q}_\alpha Pf$$

und (i) ist gezeigt. Punkt (ii) folgt unmittelbar aus (i), denn

$$P\mathcal{H}_\alpha = P\mathrm{Q}_\alpha \mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n) = \mathrm{Q}_\alpha P\mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n) \subset \mathcal{H}_\alpha\,.$$

□

Natürlich gilt Punkt (i) des letzten Korollars auch mit P_- an der Stelle von P.

Wir haben in Lemma 1.28 gesehen, dass $\mathrm{A}^2_{\nu_n}$ ein funktionaler Hilbertraum ist und somit einen reproduzierenden Kern besitzt. Das heißt es gibt eine Abbildung $\mathrm{K}\colon \mathbb{D}^n \times \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$ so, dass

$$\mathrm{K}_z\colon \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad w \longmapsto \mathrm{K}(w,z)$$

für jedes feste $z \in \mathbb{D}^n$ in $\mathrm{A}^2_{\nu_n}$ liegt und die

$$f(z) = \langle f, \mathrm{K}_z\rangle_{\mathrm{L}^2} \tag{3.3}$$

für alle $f \in \mathrm{A}^2_{\nu_n}$ erfüllt.

3.9 Proposition. *Ist $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ die durch Korollar 3.7 gegebene Orthonormalbasis von $\mathrm{A}^2_{\nu_n}$, so gilt*

$$\mathrm{K}(z,z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} |e_\alpha(z)|^2$$

für alle $z \in \mathbb{D}^n$.

Beweis. Nach der Parsevallschen Gleichung und der Eigenschaft (3.3) von K gilt

$$\mathrm{K}(z,z) = \langle \mathrm{K}_z, \mathrm{K}_z\rangle_{\mathrm{L}^2} = \|\mathrm{K}_z\|^2_{\mathrm{L}^2} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} |\langle \mathrm{K}_z, e_\alpha\rangle_{\mathrm{L}^2}|^2 = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} |e_\alpha(z)|^2$$

für jedes $z \in \mathbb{D}^n$.

□

3.10 Proposition. *Ist $M \subset \mathbb{D}^n$ kompakt und $C_M > 0$ gemäß Lemma 1.27 gewählt, so gilt*

$$\mathrm{K}_z(z) \le C_M^2$$

für alle $z \in M$.

Beweis. Für $z \in M$ gilt wegen der Eigenschaft (3.3) des reproduzierenden Kerns

$$\mathrm{K}_z(z) \leq C_M \|\mathrm{K}_z\|_{\mathrm{L}^2} = C_M \langle \mathrm{K}_z, \mathrm{K}_z \rangle_{\mathrm{L}^2}^{1/2} = C_M (\mathrm{K}_z(z))^{1/2}$$

und daher $\mathrm{K}_z(z) \leq C_M^2$.

□

3.2 Hankeloperatoren mit Quasi-Homogenen Symbolen

Wir werden im Folgenden Hankeloperatoren auf $\mathrm{A}^2_{\nu_n}$ untersuchen, deren Symbole quasi-homogen sind. Anschließend beschränken wir uns auf stetige Symbole $f \in \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n)$ und werden zeigen, dass eine solche Funktion f, deren zugehöriger Hankeloperator (siehe Definition 3.11) kompakt ist, auf dem topologischen Rand $\partial\mathbb{D}^n$ des Einheitspolyzylinders im Wesentlichen mit einem Monom übereinstimmt. Diese Beobachtung ist essenziell im Argument von T. Le, welches sein, hier in Satz 3.25 formuliertes, Hauptresultat verifiziert.

Wir beginnen mit der Definition eines Hankeloperators und beschränken uns hierbei auf die Symbolklasse $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{D}^n, \nu_n)$. Für $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{D}^n, \nu_n)$ bezeichnen wir mit

$$M_f \colon \mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n), \qquad g \longmapsto fg$$

den induzierten Multiplikationsoperator. Außerdem erinnern wir an die Notationen $\mathrm{A}^{2\perp}_{\nu_n}$ für das orthogonale komplement von $\mathrm{A}^2_{\nu_n}$ in $\mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n)$ sowie $P\colon \mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n) \to \mathrm{A}^2_{\nu_n}$ und $P_-\colon \mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu_n) \to \mathrm{A}^{2\perp}_{\nu_n}$ für die orthogonalen Projektionen auf $\mathrm{A}^2_{\nu_n}$ beziehungsweise $\mathrm{A}^{2\perp}_{\nu_n}$ aus dem letzten Abschnitt.

3.11 Definition. *Für $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{D}^n, \nu_n)$ heißt*

$$H_f \colon \mathrm{A}^2_{\nu_n} \longrightarrow \mathrm{A}^{2\perp}_{\nu_n}, g \longmapsto P_- M_f(g)$$

Hankeloperator mit Symbol f.

In Satz 3.7 haben wir gezeigt, dass die Familie

$$e_\alpha \colon \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto \frac{z^\alpha}{\sqrt{c_\alpha}} \qquad (\alpha \in \mathbb{N}^n),$$

wobei

$$c_\alpha = \int_{[0,1)^n} r^{2\alpha}\, d\mu(r)$$

für $\alpha \in \mathbb{N}^n$ sei, eine Orthonormalbasis des verallgemeinerten Bergmanraumes $\mathrm{A}^2_{\nu_n}$ bildet.

3.12 Lemma. *Es seien $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ und $f \colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$ eine beschränkte, Borelmessbare Funktion mit $f(r\zeta) = \zeta^\alpha f(r)$ für alle $(r,\zeta) \in [0,1)^n \times \mathbb{T}^n$. Dann ist $H_f{}^* H_f$ ein Diagonaloperator bezüglich der Orthonormalbasis $(e_\beta)_{\beta\in\mathbb{N}^n}$ von $\mathrm{A}^2_{\nu_n}$ mit Eigenwerten*

$$\lambda_\beta = \frac{1}{c_\beta} \int_{[0,1)^n} |f(t)|^2\, t^{2\beta}\, d\mu(t),$$

falls $\alpha + \beta \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{N}^n$ *und*

$$\lambda_\beta = \frac{1}{c_\beta} \int_{[0,1)^n} |f(t)|^2 \, t^{2\beta} \, d\mu(t) - \frac{1}{c_\beta c_{\alpha+\beta}} \left| \int_{[0,1)^n} f(t) t^{\alpha+2\beta} \, d\mu(t) \right|^2,$$

falls $\alpha + \beta \in \mathbb{N}^n$.

Beweis. Es sei $\beta \in \mathbb{N}^n$. Nach Voraussetzung ist $fe_\beta \in \mathcal{H}_{\alpha+\beta}$ und daher folgt $P(fe_\beta) \in \mathcal{H}_{\alpha+\beta}$ beziehungsweise $H_f(e_\beta) = fe_\beta - P(fe_\beta) \in \mathcal{H}_{\alpha+\beta}$ mit Teil (ii) aus Lemma 3.8. Lemma 3.5 liefert hieraus

$$\langle H_f{}^* \, H_f(e_\beta), e_\gamma \rangle_{\mathrm{L}^2} = \langle H_f(e_\beta), H_f(e_\gamma) \rangle_{\mathrm{L}^2} = 0$$

für alle $\gamma \in \mathbb{N}^n$ mit $\beta \neq \gamma$, das heißt $H_f{}^* \, H_f$ ist ein Diagonaloperator bezüglich der Orthonormalbasis $(e_\beta)_{\beta \in \mathbb{N}^n}$ von $\mathrm{A}^2_{\nu_n}$. Beachtet man, dass

$$P(fe_\beta) = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^n} \langle P(fe_\beta), e_\gamma \rangle_{\mathrm{L}^2} e_\gamma = \begin{cases} \langle fe_\beta, e_{\alpha+\beta} \rangle_{\mathrm{L}^2} e_{\alpha+\beta}, & \alpha + \beta \in \mathbb{N}^n \\ 0, & \alpha + \beta \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{N}^n \end{cases}$$

für alle $\beta \in \mathbb{N}^n$ gilt, so erhält man für die Eigenwerte λ_β ($\beta \in \mathbb{N}^n$) unter Verwendung des Satzes von Pythagoras die Darstellungen

$$\begin{aligned} \lambda_\beta &= \langle H_f{}^* \, H_f(e_\beta), e_\beta \rangle_{\mathrm{L}^2} \\ &= \|H_f(e_\beta)\|^2_{\mathrm{L}^2} \\ &= \|fe_\beta - P(fe_\beta)\|^2_{\mathrm{L}^2} \\ &= \|fe_\beta\|^2_{\mathrm{L}^2} - \|P(fe_\beta)\|^2_{\mathrm{L}^2} \\ &= \begin{cases} \|fe_\beta\|^2_{\mathrm{L}^2}, & \alpha + \beta \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{N}^n \\ \|fe_\beta\|^2_{\mathrm{L}^2} - |\langle fe_\beta, e_{\alpha+\beta} \rangle_{\mathrm{L}^2}|^2, & \alpha + \beta \in \mathbb{N}^n. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Auswertung der Terme auf der rechten Seite der letzten Gleichung liefert mit Hilfe von Lemma 1.23 die gewünschte Darstellung.

□

Bevor wir zum Hauptresultat dieses Abschnitts kommen, präsentieren wir noch einige Hilfsergebnisse aus der Maßtheorie.

3.13 Proposition. *Ist* μ *ein endliches Borelmaß auf* $[0, 1)$ *mit der Eigenschaft* $\mu([r, 1)) > 0$ *für alle* $r \in [0, 1)$, *so gilt*

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ m \in \mathbb{R}_0^+}} \frac{\int_{[0,\delta)} r^m \, d\mu(r)}{\int_{[0,1)} r^m \, d\mu(r)} = 0$$

für alle $\delta \in [0, 1)$.

Beweis. Zu $\delta \in [0,1)$ wähle $\varepsilon \in (\delta, 1)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{\int_{[0,\delta)} r^m \, d\mu(r)}{\int_{[0,1)} r^m \, d\mu(r)} &\leq \frac{\mu([0,\delta))}{\int_{[0,1)} \left(\frac{r}{\delta}\right)^m d\mu(r)} \\ &\leq \frac{\mu([0,\delta))}{\int_{[\varepsilon,1)} \left(\frac{r}{\delta}\right)^m d\mu(r)} \\ &\leq \frac{\mu([0,\delta)}{\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^m \mu([\varepsilon,1))}\end{aligned}$$

und da die rechte Seite der letzten Ungleichung gegen Null konvergiert für $m \to \infty$, folgt die Behauptung.

□

Man kann die letzte Proposition auf die folgende Weise verallgemeinern. Wir folgen dabei dem Beweis von T. Le aus [19, Lemma 2.4].

3.14 Lemma. *Es seien $\mu_1, \ldots, \mu_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ endliche Borelmaße auf $[0,1)$ mit $\mu_j([r,1)) > 0$ für alle $r \in [0,1)$ und $j = 1, \ldots, n$ und $\mu = \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n$. Weiter sei $\varphi\colon [0,1)^n \to \mathbb{C}$ Borel-messbar und beschränkt mit*

$$\lim_{(r_1,\ldots,r_n)\to(1,\ldots,1)} \varphi(r_1, \ldots, r_n) = y$$

für ein $y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lim_{\substack{m\to(\infty,\ldots,\infty) \\ m\in\mathbb{R}^n}} \frac{\int_{[0,1)^n} \varphi(r) r^{m+\alpha} \, d\mu(r)}{\int_{[0,1)^n} r^{m+\beta} \, d\mu(r)} = y$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ mit Komponenten $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ beziehungsweise $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ und $\varepsilon > 0$. Wir nehmen zunächst $\alpha - \beta \in [0,\infty)^n$ an. Wähle $M > 0$ so, dass $|\varphi(r)| \leq M$ für alle $r \in [0,1)^n$ gilt. Nach Voraussetzung gibt es $\delta > 0$ mit $|\varphi(r) r^{\alpha-\beta} - y| < \varepsilon$ für alle $r \in [\delta, 1)^n$. Setze $R = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$ und schreibe $\pi_i = [0,1)^{i-1} \times [0,\delta) \times [0,1)^{n-i}$ für $i = 2, \ldots, n-1$ beziehungsweise $\pi_1 = [0,\delta) \times [0,1)^{n-1}$ und $\pi_n = [0,1)^{n-1} \times [0,\delta)$, sodass

$$[0,1)^n = [\delta,1)^n \cup \pi_1 \cup \ldots \cup \pi_n. \tag{3.4}$$

Wegen $\left|\varphi(r) r^{\alpha-\beta} - y\right| \leq M + |y|$ für $r \in [0,1)^n$ gilt für alle $m = (m_1, \ldots, m_n) \in$

$[R,\infty)^n$, dass

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\int_{[0,1)^n}\varphi(r)r^{m+\alpha}\,d\mu(r)}{\int_{[0,1)^n}r^{m+\beta}\,d\mu(r)}-y\right| &\le \frac{\int_{[0,1)^n}\left|\varphi(r)r^{\alpha-\beta}-y\right|r^{m+\beta}\,d\mu(r)}{\int_{[0,1)^n}r^{m+\beta}\,d\mu(r)}\\
&\le \frac{\int_{[\delta,1)^n}\varepsilon r^{m+\beta}\,d\mu(r)+\sum_{j=1}^n\int_{\pi_j}(M+|y|)r^{m+\beta}\,d\mu(r)}{\int_{[0,1)^n}r^{m+\beta}\,d\mu(r)}\\
&\le \varepsilon+\sum_{j=1}^n(M+|y|)\frac{\int_{[0,\delta)}r_j^{m_j+\beta_j}\,d\mu_j(r_j)}{\int_{[0,1)}r_j^{m_j+\beta_j}\,d\mu_j(r_j)},
\end{aligned}$$

wobei bei der vorletzten Abschätzung die Zerlegung (3.4) verwendet wurde und im letzten Schritt der Satz von Fubini einging. Proposition 3.13 zufolge konvergiert jeder Summand auf der rechten Seite der letzten Ungleichung für $m_j\to\infty$ $(j=1,\dots,n)$ gegen Null und die Aussage ist für den speziellen Fall $\alpha-\beta\in[0,\infty)^n$ gezeigt. Sind $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n$ beliebig, so setze $\gamma_i=\min\{\alpha_i,\beta_i\}$ für $i=1,\dots,n$ und $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ und bemerke

$$\frac{\int_{[0,1)^n}\varphi(r)r^{m+\alpha}\,d\mu(r)}{\int_{[0,1)^n}r^{m+\beta}\,d\mu(r)}=\frac{\int_{[0,1)^n}\varphi(r)r^{m+\alpha}\,d\mu(r)}{\int_{[0,1)^n}r^{m+\gamma}\,d\mu(r)}\left(\frac{\int_{[0,1)^n}r^{m+\beta}\,d\mu(r)}{\int_{[0,1)^n}r^{m+\gamma}\,d\mu(r)}\right)^{-1}$$

für $m\in[0,\infty)^n$. Da $\alpha-\gamma\in[0,\infty)^n$ beziehungsweise $\beta-\gamma\in[0,\infty)^n$ erfüllt ist, konvergiert das Produkt auf der rechten Seite der letzten Identität für $m\to(\infty,\dots,\infty)$, nach dem bereits bewiesenen Spezialfall, gegen y und der Beweis ist abgeschlossen.

□

Für den Rest dieses Abschnitts sei $\mu\colon\mathfrak{B}([0,1)^n)\to[0,\infty)$ ein reguläres Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß, welches das Produkt regulärer Borel-Wahrscheinlichkeitsmaße $\mu_i\colon\mathfrak{B}([0,1))\to[0,\infty)$ mit $\mu_i([r,1))>0$ für alle $r\in[0,1)$ $(i=1,\dots,n)$ ist. Zu μ kann man im Hinblick auf Lemma 1.23 auf kanonische Weise ein reguläres Borelmaß $\gamma\colon\mathfrak{B}(\partial\mathbb{D}^n)\longrightarrow[0,\infty)$ auf $\partial\mathbb{D}^n$ assoziieren. Seien dazu $\nu_1,\dots,\nu_n\colon\mathfrak{B}(\mathbb{D})\to[0,\infty)$ die durch Korollar 1.24 gegebenen regulären Borel-Wahrscheinlichkeitsmaße mit $\nu=\nu_1\otimes\dots\otimes\nu_n$. Weiter sei

$$\kappa\colon\{0,1\}\longrightarrow\{\mathbb{T},\mathbb{D}\},\qquad t\longmapsto\begin{cases}\mathbb{D}, & t=0\\ \mathbb{T}, & t=1\end{cases}$$

und $B=\{0,1\}^n\setminus\{(0,\dots,0)\}$. Bemerke, dass sich $\partial\mathbb{D}^n$ als endliche, disjunkte Vereinigung

$$\partial\mathbb{D}^n=\bigcup_{b\in B}W_b=\bigcup_{b\in B}\kappa(\pi_1(b))\times\dots\times\kappa(\pi_n(b)) \tag{3.5}$$

schreiben lässt. Für $b \in B$ ist dann $\gamma_b = \gamma_{1,b} \otimes \ldots \otimes \gamma_{n,b}$, wobei

$$\gamma_{i,b} = \begin{cases} \sigma_1, & \text{falls } \pi_i(b) = 1 \\ \nu_i, & \text{falls } \pi_i(b) = 0 \end{cases}$$

für $i = 1, \ldots, n$ sei, ein reguläres Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß auf W_b und durch

$$\gamma \colon \mathfrak{B}(\partial\mathbb{D}^n) \longrightarrow [0, \infty), \qquad A \longmapsto \sum_{b \in B} \gamma_b(A \cap W_b)$$

wird ein reguläres Borelmaß auf $\partial\mathbb{D}^n$ definiert. Nach Konstruktion ist $\gamma|_{\mathbb{T}^n} = \sigma_n$.

3.15 Satz. *Seien $n \geq 2$, $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ und $f \in \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n)$ mit*

$$f(\zeta z) = \zeta^\alpha f(z)$$

für alle $z \in \overline{\mathbb{D}}^n$ und alle $\zeta \in \mathbb{T}^n$. Ist der Hankeloperator $H_f \colon \mathrm{A}^2_{\nu_n} \to \mathrm{A}^{2\perp}_{\nu_n}$ kompakt, so gilt

$$f(z) = f(1, \ldots, 1) z^\alpha$$

für γ-fast alle $z \in \partial\mathbb{D}^n$, falls $\alpha \in \mathbb{N}^n$ und

$$f(z) = 0$$

für γ-fast alle $z \in \partial\mathbb{D}^n$, falls $\alpha \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{N}^n$.

Beweis. Es sei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ und $f \in \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n)$ mit

$$f(\zeta z) = \zeta^\alpha f(z) \tag{3.6}$$

für alle $z \in \overline{\mathbb{D}}^n$ und alle $\zeta \in \mathbb{T}^n$. Sei $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ und setze $m_i = \max\{0, -\alpha_i\}$ für $i = 1, \ldots, j$. Aus Gründen der Übersichtlichkeit betrachten wir nur die Teilmenge $W = W_b = \mathbb{D}^j \times \mathbb{T}^{n-j}$ ($b = (0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1) \in B$) von $\partial\mathbb{D}^n$. Das folgende Argument lässt sich für jede Teilmenge der Zerlegung (3.5), ausgenommen $\mathbb{T}^n$, durchführen. Da H_f nach Voraussetzung kompakt ist, ist $H_f{}^* H_f$ kompakt. Da (3.6) gilt und f als stetige Funktion auf dem Kompaktum $\overline{\mathbb{D}}^n$ beschränkt ist, ist der Operator $H_f{}^* H_f$ nach Lemma 3.12 ein Diagonaloperator bezüglich der Orthonormalbasis $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ von A^2_ν. Es gilt also insbesondere

$$\lim_{(m_{j+1}, \ldots, m_n) \to (\infty, \ldots, \infty)} \lambda_{(m_1, \ldots, m_j, m_{j+1}, \ldots, m_n)} = 0. \tag{3.7}$$

Wähle $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $m + \alpha_i \geq 0$ für alle $m \geq N$ und $i = 1, \ldots, n$ gilt. Schreiben wir $m = (m_1, \ldots, m_j, \tilde{m}) \in \mathbb{N}^n$ mit $\tilde{m} = (m_{j+1}, \ldots, m_n)$ und

$J = \big\{(n_1, \ldots, n_{n-j}) \in \mathbb{N}^{n-j} \mid n_i < N \text{ für ein } i \in \{1, \ldots, n-j\}\big\}$, so folgt erneut aus Lemma 3.12 unter Beachtung von (3.7), dass

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{\tilde{m}\to(\infty,\ldots,\infty)\\ \tilde{m}\in\mathbb{N}^{n-j}\setminus J}} \frac{1}{c_m} \int_{[0,1)^n} |f(t)|^2\, t^{2m}\, d\mu(t)& \\ - \frac{1}{c_m c_{m+\alpha}} \left| \int_{[0,1)^n} f(t) t^{\alpha+2m}\, d\mu(t) \right|^2 &= 0.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Setze $\tilde{\mu} = \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_j$ und $m' = (m_1, \ldots, m_j)$. Nach einem Satz über parameterabhängige Integrale ist die Funktion

$$\varphi\colon [0,1]^{n-j} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad t \longmapsto \int_{[0,1)^j} |f(s,t)|^2\, s^{2m'}\, d\tilde{\mu}(s)$$

stetig (beachte hier, dass nach Voraussetzung $f \in \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n)$). Sie erfüllt somit die Voraussetzungen von Lemma 3.14 und daher folgt aus eben jenem Lemma unter Beachtung der Darstellung $c_m = \int_{[0,1)^n} t^{2m}\, d\mu(t)$ $(m \in \mathbb{N}^n)$, dass

$$\begin{aligned}\lim_{\tilde{m}\to(\infty,\ldots,\infty)} \frac{1}{c_m} \int_{[0,1)^n} |f(t)|^2 t^{2m}\, d\mu(t)& \\ = \frac{\int_{[0,1)^j} |f(s,1,\ldots,1)|^2\, s^{2m'}\, d\tilde{\mu}(s)}{\int_{[0,1)^j} s^{2m'}\, d\tilde{\mu}(s)}&.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Nach einem Satz über parameterabhängige Integrale ist die Funktion

$$\varphi\colon [0,1]^{n-j} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad t \longmapsto \int_{[0,1)^j} f(s,t) s^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_j)+2m'}\, d\tilde{\mu}(s)$$

stetig und die zweifache Anwendung von Lemma 3.14 liefert

$$\begin{aligned}\lim_{\tilde{m}\to(\infty,\ldots,\infty)} \frac{1}{c_m c_{m+\alpha}} \left| \int_{[0,1)^n} f(t) t^{2m+\alpha}\, d\mu(t) \right|^2& \\ = \frac{\left| \int_{[0,1)^j} f(s,1,\ldots,1) s^{2m'+(\alpha_1,\ldots,\alpha_j)}\, d\tilde{\mu}(s) \right|^2}{\int_{[0,1)^j} s^{2m'}\, d\tilde{\mu}(s) \int_{[0,1)^j} s^{2(m'+(\alpha_1,\ldots,\alpha_j))}\, d\tilde{\mu}(s)}&.\end{aligned}$$

Hieraus folgt insgesamt mit (3.8) und (3.9), dass

$$\int_{[0,1)^j} |f(s,1,\ldots,1)|^2\, s^{2m'}\, d\tilde{\mu}(s) = \frac{\left| \int_{[0,1)^j} f(s,1,\ldots,1) s^{2m'+(\alpha_1,\ldots,\alpha_j)}\, d\tilde{\mu}(s) \right|^2}{\int_{[0,1)^j} s^{2(m'+(\alpha_1,\ldots,\alpha_j))}\, d\tilde{\mu}(s)}.$$

Dies zeigt die Gleichheit

$$|\langle F, G\rangle_{\mathrm{L}^2}| = \|F\|_{\mathrm{L}^2} \|G\|_{\mathrm{L}^2}$$

in der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, wobei $F\colon [0,1)^j \to \mathbb{C}$ und $G\colon [0,1)^j \to \mathbb{C}$ die durch

$$F(t) = f(t,1,\dots,1)t^{m'} \qquad (t \in [0,1)^j)$$

beziehungsweise

$$G(t) = t^{m'+(\alpha_1,\dots,\alpha_j)} \qquad (t \in [0,1)^j)$$

definierten Funktionen aus $\mathcal{L}^2([0,1)^j, \tilde{\mu})$ seien. Demnach gibt es eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ so, dass

$$f(t,1,\dots,1)t^{m'} = \lambda t^{m'+(\alpha_1,\dots,\alpha_j)} \tag{3.10}$$

für $\tilde{\mu}$-fast alle $t \in [0,1)^j$ gilt. Wir erinnern daran, dass $\tilde{\mu}([r,1)^j) > 0$ für jedes $r \in [0,1)$ gilt. Speziell gibt es also eine konvergente Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus $[0,1)^j$ mit Grenzwert $(1,\dots,1) \in \mathbb{R}^j$, sodass (3.10) mit t_k an der Stelle von t für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt und somit liefert der Grenzübergang $k \to \infty$ in (3.10) die Gleichheit

$$\lambda = f(1,\dots,1).$$

Wir nehmen nun $\alpha \in \mathbb{N}^n$ an und bemerken, dass $m_1 = \ldots = m_j = 0$ nach Definition von m_i $(i = 1,\dots,j)$. Wegen (3.10) gibt es also eine $\tilde{\mu}$-Nullmenge $N \in \mathfrak{B}([0,1)^j)$ so, dass

$$f(t_1,\dots,t_j,1,\dots,1) = f(1,\dots,1)t_1^{\alpha_1}\dots t_j^{\alpha_j} \tag{3.11}$$

für alle $(t_1,\dots,t_j) \in [0,1)^j \setminus N$ gilt. Die Menge

$$\tilde{N} = \big\{(z_1,\dots,z_j) \in \mathbb{D}^j \mid (|z_1|,\dots,|z_j|) \in N\big\}$$

liegt in $\mathfrak{B}(\mathbb{D}^j)$ als Urbild der Borel-Menge N unter der stetigen Funktion $\mathbb{D}^j \to [0,1)^j, (z_1,\dots,z_j) \mapsto (|z_1|,\dots,|z_j|)$. Daher ist $N_b = \tilde{N} \times \mathbb{T}^{n-1} \in \mathfrak{B}(W)$. N_b ist eine γ_b-Nullmenge, denn nach Lemma 1.23 gilt

$$\begin{aligned}
\gamma_b(N_b) &= (\nu_1 \otimes \ldots \otimes \nu_j)(\tilde{N}) \\
&= \int_{[0,1)^j}\int_{\mathbb{T}^j} \chi_{\tilde{N}}(r\zeta)\, d\sigma(\zeta)\, d\tilde{\mu}(r) \\
&= \int_{[0,1)^j} \chi_N(r)\, d\tilde{\mu}(r) \\
&= \tilde{\mu}(N) = 0.
\end{aligned}$$

Sei $z \in W \setminus N_b$. So folgt

$$f(z) = f(1,\dots,1)z^\alpha \tag{3.12}$$

aus (3.6) und (3.11). Ein komplett analoges Argument liefert zu jeder Menge W_b $(b \in B \setminus \{(1,\dots,1)\})$ eine γ_b-Nullmenge $N_b \in \mathfrak{B}(W_b)$ so, dass (3.12) für alle $z \in W_b \setminus N_b$ gilt. Ist $\zeta \in \mathbb{T}^n$, so gilt $f(\zeta) = \zeta^\alpha f(1, \dots, 1)$ nach (3.6). Setze also $N_{(1,\dots,1)} = \emptyset$ und da die Vereinigung $\bigcup_{b \in B} N_b \in \mathfrak{B}(\partial\mathbb{D}^n)$ nach Definition von γ eine γ-Nullmenge ist, gilt

$$f(z) = f(1, \dots, 1) z^\alpha$$

für γ-fast alle $z \in \partial\mathbb{D}^n$.

Es sei nun $\alpha \in \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{N}^n$, wobei wir ohne Einschränkung $\alpha_1 < 0$ annehmen. Gemäß Lemma 3.12 gilt

$$\lambda_m = \frac{\int_{[0,1)^n} |f(t)|^2 \, t^{2m} \, d\mu(t)}{\int_{[0,1)^n} t^{2m} \, d\mu(t)}$$

für alle $m \in \{0\} \times \mathbb{N}^{n-1}$. Wir haben an dieser Stelle die Voraussetzung $n \geq 2$ verwendet. Eine erneute Anwendung eines Satzes über parameter abhängige Integrale zeigt die Stetigkeit der Funktion

$$\varphi\colon [0,1]^{n-1} \to \mathbb{C}, \qquad t \longmapsto \int_{[0,1)} |f(t_1, t)|^2 \, d\mu_1(t_1) \, .$$

Daher folgt aus Lemma 3.14, angewendet auf die Funktion φ, dass

$$\lim_{\substack{m \to (0,\infty,\dots,\infty) \\ m \in \{0\} \times \mathbb{N}^{n-1}}} \frac{\int_{[0,1)^n} |f(t)|^2 \, t^{2m} \, d\mu(t)}{\int_{[0,1)^n} t^{2m} \, d\mu(t)} = \int_{[0,1)} |f(t_1, 1, \dots, 1)|^2 \, d\mu_1(t_1) \, .$$

Unter Beachtung von (3.7) gilt also

$$\int_{[0,1)} |f(t_1, 1, \dots, 1)|^2 \, d\mu_1(t_1) = 0,$$

das heißt $f(t_1, 1, \dots, 1) = 0$ für μ_1-fast alle $t_1 \in [0,1)$. Berücksichtigt man wieder, dass $\mu_1([r,1)) > 0$ für alle $r \in [0,1)$ gilt, so folgt $f(1, \dots, 1) = 0$ und (3.10) sichert die Existenz einer $\tilde{\mu}$-Nullmenge $N \in \mathfrak{B}([0,1)^j)$ mit

$$f(t, 1, \dots, 1) t^{m'} = 0$$

für alle $t \in [0,1)^j \setminus N$. Es sei $t = (t_1, \dots, t_j) \in [0,1)^j \setminus N$. Im Falle, dass $t^{m'} \neq 0$ ist, gilt $f(t, 1, \dots, 1) = 0$. Andernfalls wähle $i \in \{1, \dots, j\}$ so, dass $t_i = 0$ und $m_i = \max\{0, -\alpha_i\} > 0$ und bemerke $\alpha_i < 0$. Für $\zeta \in \mathbb{T}$ gilt

$$\begin{aligned} f(t_1, \dots, t_j, 1, \dots, 1) &= f(t_1, \dots, \zeta t_i, \dots, t_j, 1, \dots, 1) \\ &= \zeta^{\alpha_i} f(t_1, \dots, t_j, 1, \dots, 1), \end{aligned}$$

wegen (3.6). Da man $\zeta \in \mathbb{T}^n$ so wählen kann, dass $\zeta^{\alpha_i} \neq 1$, folgt $f(t_1, \ldots, t_j, 1, \ldots, 1) = 0$. Wir haben also

$$f(t, 1, \ldots, 1) = 0 \tag{3.13}$$

für alle $t \in [0,1)^j \setminus N$ gezeigt. Analog zur Vorgehensweise im Fall $\alpha \in \mathbb{N}^n$ erhält man aus (3.6) und (3.13), dass

$$f(z) = 0$$

für γ_b-fast alle $z \in W$. Beachtet man wieder, dass $f(\zeta) = \zeta^\alpha f(1, \ldots, 1) = 0$ für alle $\zeta \in \mathbb{T}^n$ nach (3.6) gilt, so folgt mit dem gleichen Argument wie im Fall $\alpha \in \mathbb{N}^n$ zuletzt

$$f(z) = 0$$

für γ-fast alle $z \in \partial\mathbb{D}^n$. Hiermit ist der Beweis abgeschlossen.

□

Ist $f \in \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n)$ quasi-homogen vom Grad $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, so gibt es nach Korollar 3.4 eine Funktion $f_\alpha \in \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n)$ so, dass $f(z) = f_\alpha(z)$ für ν-fast alle $z \in \mathbb{D}^n$ sowie $f_\alpha(\zeta z) = \zeta^\alpha f_\alpha(z)$ für alle $z \in \overline{\mathbb{D}}^n$ und alle $\zeta \in \mathbb{T}^n$ gelten. Diese Funktion f_α erfüllt also die Voraussetzungen des letzten Satzes. Wir haben also gezeigt, dass die vom Grad α quasi-homogene Funktion f durch eine Funktion $f_\alpha \in \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n)$ repräsentiert wird, die auf dem Rand $\partial\mathbb{D}^n$ im Wesentlichen die Form eines analytischen Polynoms hat.

3.3 Ein Konvergenzkriterium aus der harmonischen Analysis

Dieser Abschnitt befasst sich mit einem Ergebnis aus der harmonischen Analysis. In Korollar 3.4 haben wir gezeigt, dass es zu einer Funktion $f \in \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n)$ und jedem $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ eine vom Grade α quasi-homogene Funktion $f_\alpha \in \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n)$ gibt, sodass $\mathrm{Q}_\alpha(f) = f_\alpha$ ν_n-fast überall auf $\mathbb{D}^n$ gilt. Wir wollen im Folgenden zeigen, dass die sogenannten Cesàro-Mittelwerte der Funktionen f_α $(\alpha \in \mathbb{Z}^n)$ von f gleichmäßig auf $\overline{\mathbb{D}}^n$ gegen f konvergieren. Diese Tatsache folgt aus einem Resultat der harmonischen Analysis, wie es beispielsweise in [16, Abschnitt I.2.2] zu finden ist. Dieser Abschnitt folgt den Ausführungen jenes Werkes von Y. Katznelson. Wir beginnen mit der Definition des Fejér Kerns.

3.16 Definition. *Für $N \in \mathbb{N}$ heißt die Funktion*

$$\mathrm{F}_N \colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}, \qquad \zeta \longmapsto \sum_{k=-N}^{N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) \zeta^k$$

N-ter Fejér-Kern.

Als trigonometrisches Polynom ist F_N $(N \in \mathbb{N})$ offenbar σ-integrierbar. Eine alternative Darstellung des Fejér-Kerns durch eine geschlossene Formel halten wir in einer ersten Proposition fest.

3.17 Proposition. *Ist $N \in \mathbb{N}$, so gilt*

$$F_N(\zeta) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{1 - \mathrm{Re}(\zeta^{N+1})}{1 - \mathrm{Re}(\zeta)} \right) \tag{3.14}$$

für alle $\zeta \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$. Insbesondere ist F_N nichtnegativ.

Beweis. Wegen $\mathrm{F}_N(1) \geq 0$ genügt es (3.14) zu zeigen. Sei $\zeta \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$. Aus der Identität

$$\left(-\frac{1}{4}\bar{\zeta} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\zeta\right) F_N(\zeta) = \frac{1}{N+1} \left(-\frac{1}{4}\bar{\zeta}^{N+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\zeta^{N+1}\right)$$

folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_N(\zeta) &= \frac{1}{N+1} \left(\frac{-\frac{1}{4}\bar{\zeta}^{N+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\zeta^{N+1}}{-\frac{1}{4}\bar{\zeta} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\zeta} \right) \\ &= \frac{1}{N+1} \left(\frac{1 - \mathrm{Re}(\zeta^{N+1})}{1 - \mathrm{Re}(\zeta)} \right). \end{aligned}$$

□

Zur Vereinfachung der Notation definieren wir

$$\mathrm{F}_N^m \colon \mathbb{T}^m \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad (\zeta_1, \dots, \zeta_m) \longmapsto F_N(\zeta_1) \dots \mathrm{F}_N(\zeta_n)$$

für $N \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}^*$. Der Fejér-Kern hat die folgenden, für die weiteren Betrachtungen wesentlichen, Eigenschaften.

3.18 Lemma. *Seien $N \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}^*$. Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{T}^m} \mathrm{F}_N^m(\zeta)\, d\sigma(\zeta) = 1 \tag{3.15}$$

und

$$\lim_{N \to \infty} \int_{\mathbb{T}^m \setminus (M_\delta)^m} F_N^m(\zeta_1)\, d\sigma(\zeta) = 0 \tag{3.16}$$

für jedes $\delta \in (0, \pi)$, wobei $M_\delta = \big\{\zeta \in \mathbb{T} \mid \arg(\zeta) \in (-\delta, \delta)\big\}$.

Beweis. Um (3.15) zu zeigen nehmen wir ohne Einschränkung $m = 1$ an. Dann liefert

$$\int_{\mathbb{T}} \zeta^k\, d\sigma(\zeta) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0, \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

dass

$$\int_{\mathbb{T}} \mathrm{F}_N(\zeta)\, d\sigma(\zeta) = \sum_{k=-N}^{N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) \int_{\mathbb{T}} \zeta^k\, d\sigma(\zeta) = 1 \tag{3.17}$$

für $N \in \mathbb{N}$. Für jedes $\delta \in (0, \pi)$ liefert Proposition 3.17 die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{T} \setminus M_\delta} \mathrm{F}_N(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \right| &= \frac{1}{N+1} \int_{\mathbb{T} \setminus M_\delta} \frac{1 - \mathrm{Re}(\zeta^{N+1})}{1 - \mathrm{Re}(\zeta)}\, d\sigma(\zeta) \\ &\leq \frac{2}{(N+1)(1 - \cos(\delta))} \end{aligned}$$

und der Grenzübergang $N \to \infty$ liefert die Behauptung (3.16) im Fall $m = 1$. Sei nun $m \geq 2$ beliebig. Wir schreiben $\mathbb{T}^m \setminus (M_\delta)^m = \bigcup_{k=1}^m \pi^{(k)}$, wobei $\pi^{(1)} = (\mathbb{T} \setminus M_\delta) \times \mathbb{T}^{m-1}$, $\pi^{(m)} = \mathbb{T}^{m-1} \times (\mathbb{T} \setminus M_\delta)$ und $\pi^{(k)} = \mathbb{T}^{k-1} \times (\mathbb{T} \setminus M_\delta) \times \mathbb{T}^{m-k}$ für $k \in \{2, \dots, m-1\}$ seien. Mit (3.17) und dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{T}^m \setminus (M_\delta)^m} F_N^m(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \right| &\leq \sum_{k=1}^m \int_{\pi^{(k)}} \mathrm{F}_N^m(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \\ &= m \left(\int_{\mathbb{T}} \mathrm{F}_N(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \right)^{m-1} \int_{\mathbb{T} \setminus M_\delta} \mathrm{F}_N(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \\ &= m \int_{\mathbb{T} \setminus M_\delta} \mathrm{F}_N(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \end{aligned}$$

und da die linke Seite der letzten Ungleichung nach dem bereits bewiesenen Spezialfall $m = 1$ gegen Null konvergiert für $N \to \infty$, ist (3.16) gezeigt.

$\square$

Es folgt das Hauptresultat dieses Abschnitts. Wir schreiben $(\mathbb{T}^n, \mathcal{A}, \tilde{\sigma})$ für die Vervollständigung des Maßraums $(\mathbb{T}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{T}^n), \sigma)$.

3.19 Satz. *Es sei* $\varphi\colon \mathbb{T}^n \to (\mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n), \|\cdot\|_{\overline{\mathbb{D}}^n})$ *eine stetige Funktion. Schreiben wir* $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{T}^n$*, so gilt*

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{T}^n} \mathrm{F}_N^n(\zeta)\varphi(\zeta)\, d\tilde{\sigma}(\zeta) = \varphi(\mathbf{1}),$$

wobei das Integral als Bochner $\tilde{\sigma}$*-Integral (siehe Anhang C) zu lesen ist.*

Beweis. Korollar C.8 zufolge ist die stetige Funktion

$$\mathbb{T}^n \longrightarrow (\mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n), \|\cdot\|_{\overline{\mathbb{D}}^n}), \qquad \zeta \longmapsto \mathrm{F}_N^n(\zeta)\varphi(\zeta)$$

Bochner $\tilde{\sigma}$-integrierbar. Es sei $\varepsilon > 0$. Beachtet man, dass $\zeta = e^{i\arg(\zeta)}$ für $\zeta \in \mathbb{T}$ gilt, so liefert die Stetigkeit von φ und diejenige der Abbildung

$$(-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad t \longmapsto e^{it}$$

ein $\delta > 0$ so, dass

$$\sup_{\zeta\in(M_\delta)^n} \|\varphi(\zeta) - \varphi(\mathbf{1})\| \le \varepsilon.$$

Wenden wir Teil (iii) von Lemma C.5 auf den beschränkten Operator

$$\mathbb{C} \longrightarrow (\mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n), \|\cdot\|_{\overline{\mathbb{D}}^n}), \qquad z \longmapsto \varphi(\mathbf{1})z$$

an und beachten Eigenschaft (3.15) von F_N^n, so folgt

$$\varphi(\mathbf{1}) = \int_{\mathbb{T}^n} \mathrm{F}_N^n(\zeta)\varphi(\mathbf{1})\, d\tilde{\sigma}(\zeta)\,.$$

Daher zeigt die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\mathbb{T}^n} \mathrm{F}_N^n(\zeta)\varphi(\zeta)\, d\tilde{\sigma}(\zeta) - \varphi(\mathbf{1}) \right\|_{\overline{\mathbb{D}}^n} &= \left\| \int_{\mathbb{T}^n} \mathrm{F}_N^n(\zeta)(\varphi(\zeta) - \varphi(\mathbf{1}))\, d\tilde{\sigma}(\zeta) \right\|_{\overline{\mathbb{D}}^n} \\
&\le \left\| \int_{\mathbb{T}^n\setminus(M_\delta)^n} \mathrm{F}_N^n(\zeta)(\varphi(\zeta) - \varphi(\mathbf{1}))\, d\tilde{\sigma}(\zeta) \right\|_{\overline{\mathbb{D}}^n} \\
&\qquad + \left\| \int_{(M_\delta)^n} \mathrm{F}_N^n(\zeta)(\varphi(\zeta) - \varphi(\mathbf{1}))\, d\tilde{\sigma}(\zeta) \right\|_{\overline{\mathbb{D}}^n}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sup_{\zeta \in \mathbb{T}^n} \|\varphi(\zeta) - \varphi(\mathbf{1})\|_{\overline{\mathbb{D}}^n} \int_{\mathbb{T}^n \setminus (M_\delta)^n} \mathrm{F}_N^n(\zeta)\, d\tilde{\sigma}(\zeta) \\
&\qquad\qquad + \sup_{\zeta \in (M_\delta)^n} \|\varphi(\zeta) - \varphi(\mathbf{1})\|_{\overline{\mathbb{D}}^n} \int_{\mathbb{T}^n} \mathrm{F}_N^n(\zeta)\, d\tilde{\sigma}(\zeta) \\
&\leq \sup_{\zeta \in \mathbb{T}^n} \|\varphi(\zeta) - \varphi(\mathbf{1})\|_{\overline{\mathbb{D}}^n} \int_{\mathbb{T}^n \setminus (M_\delta)^n} \mathrm{F}_N^n(\zeta)\, d\tilde{\sigma}(\zeta) \; + \; \varepsilon,
\end{aligned}
$$

wobei im letzten Schritt (3.15) verwendet wurde, zusammen mit Eigenschaft (3.16) aus dem vorigen Lemma, dass

$$
\lim_{N \to \infty} \left\| \int_{\mathbb{T}^n} \mathrm{F}_N^n(\zeta) \varphi(\zeta)\, d\sigma(\zeta) - \varphi(\mathbf{1}) \right\|_{\overline{\mathbb{D}}^n} \leq \varepsilon.
$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben war, folgt die Behauptung.

□

Im Beweis des letzten Satzes war die spezielle Gestalt des Fejer-Kerns irrelevant. Lediglich die beiden Eigenschaften aus Lemma 3.18 und die Nichtnegativität von F_N ($N \in \mathbb{N}$) waren essenziell. Allgemeiner lässt sich obige Aussage mit einem analogen Beweis für beliebige sogenannte „summierbare Kerne“ auf $\mathbb{T}^n$ formulieren. Hierbei kann man auch $(\mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n), \|\cdot\|_{\overline{\mathbb{D}}^n})$ durch einen beliebigen Banachraum ersetzen. Die Definition eines „summierbaren Kerns“ ist in [16, Abschnitt I.2.2] zu finden. Als Folgerung aus dem letzten Satz erhalten wir:

3.20 Korollar. *Es sei $f \in \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n)$. Dann konvergiert die durch*

$$
\Lambda_N(f) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}^n \\ |\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n| \leq N}} \left(1 - \frac{|\alpha_1|}{N+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{|\alpha_n|}{N+1}\right) f_\alpha
$$

gegebene Folge $(\Lambda_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ von Funktionen aus $\mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n)$ gleichmäßig gegen f. Man nennt $\Lambda_N(f)$ den ***N-ten Cesàro-Mittelwert von f****.*

Beweis. Ist $f \in \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n)$ so gilt unter Beachtung der Definition der Funktionen f_α ($\alpha \in \mathbb{Z}^n$) im Beweis von Korollar 3.4

$$
\begin{aligned}
\Lambda_N(f)(z) &= \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}^n \\ |\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n| \leq N}} \left(1 - \frac{|\alpha_1|}{N+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{|\alpha_n|}{N+1}\right) f_\alpha(z) \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} \Bigg(\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}^n \\ |\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n| \leq N}} \left(1 - \frac{|\alpha_1|}{N+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{|\alpha_1|}{N+1}\right) \zeta^\alpha \Bigg) f(\zeta z)\, d\sigma(\zeta) \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} F_N^n(\zeta) f(\zeta z)\, d\sigma(\zeta)
\end{aligned}
$$

für jedes $z \in \overline{\mathbb{D}}^n$ und jedes $N \in \mathbb{N}$. Da die Funktion

$$\varphi\colon \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n), \qquad \zeta \longmapsto f_\zeta,$$

wobei

$$f_\zeta\colon \overline{\mathbb{D}}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto f(\zeta z)$$

für $\zeta \in \mathbb{T}^n$ sei, stetig ist, lässt sich $\Lambda_N(f)$ nach obiger Rechnung und Korollar C.8 als Bochner $\tilde{\sigma}$-Integral

$$\Lambda_N(f) = \int_{\mathbb{T}^n} F_N^n(\zeta)\varphi(\zeta)\, d\tilde{\sigma}(\zeta)$$

schreiben. Beachtet man $\varphi(1, \dots, 1) = f$, so folgt die gleichmäßige Konvergenz der Cesaro-Mittelwerte $\Lambda_N(f)$ $(N \in \mathbb{N})$ gegen die Funktion f aus Satz 3.19.

$\square$

3.4 Kompakte Hankeloperatoren mit stetigen Symbolen

Wir wollen in dem letzten Teil dieser Arbeit das Hauptresultat von Trieu Le aus [18] präsentieren. Dieses gibt eine geometrische Charakterisierung derjenigen Symbole $f \in \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n)$, deren zugehöriger Hankeloperator $H_f\colon \mathrm{A}^2_{\nu_n} \to \mathrm{A}^{2\perp}_{\nu_n}$ kompakt ist. Wie auch im Fall kompakter Hankeloperatoren auf dem Hardyraum, sind auch hier Unterschiede zwischen dem eindimensionalen und dem höherdimensionalen Fall zu beobachten. Wir betrachten zunächst den Fall $n = 1$ und schreiben $\nu\colon \mathfrak{B}(\mathbb{D}) \to [0,\infty)$ für das gemäß Lemma 1.23 zu einem regulären Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu\colon \mathfrak{B}([0,1)) \to [0,\infty)$ gegebene reguläre Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{D}$. Wir verifizieren im folgenden Satz, dass jeder Hankeloperator $H_f\colon \mathrm{A}^2_\nu \to \mathrm{A}^{2\perp}_\nu$ mit stetigem Symbol $f \in \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}})$ schon kompakt ist. Kern dieses Arguments sind die Ergebnisse aus Lemma 3.12 und Satz 3.15.

3.21 Satz. *Es sei $f \in \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}})$. Dann ist der Hankeloperator $H_f\colon \mathrm{A}^2_\nu \to \mathrm{A}^{2\perp}_\nu$ kompakt.*

Beweis. Für $f \in \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}})$ betrachten wir zunächst den Spezialfall, dass f von der Form $f(z) = z^\alpha \bar{z}^\beta$ $(z \in \overline{\mathbb{D}})$ mit natürlichen Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ ist. Dann ist $f \in \mathcal{H}_{\alpha-\beta}$ und nach Lemma 3.12 ist ${H_f}^* H_f$ ein Diagonaloperator bezüglich der Orthonormalbasis $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus Lemma 3.7 und es gilt

$$\begin{aligned} {H_f}^* H_f(g) &= \sum_{k=0}^{\infty} \langle {H_f}^* H_f(g), e_k\rangle_{\mathrm{L}^2} e_k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \langle g, {H_f}^* H_f(e_k)\rangle_{\mathrm{L}^2} e_k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \langle g, e_k\rangle_{\mathrm{L}^2} e_k, \end{aligned}$$

für jedes $g \in \mathrm{A}^2_\nu$, wobei $\lambda_k \in \mathbb{C}$ der Eigenwert von ${H_f}^* H_f$ zum Eigenvektor e_k für $k \in \mathbb{N}$ sei. Um die Kompaktheit von H_f einzusehen, genügt es $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$ zu zeigen. Ebenfalls nach Lemma 3.12 hat λ_k für $k > \beta - \alpha$ die Gestalt

$$\lambda_k = \frac{\int_{[0,1)} t^{2k+2(\alpha-\beta)}\, d\mu(t)}{\int_{[0,1)} t^{2k}\, d\mu(t)} - \frac{\left|\int_{[0,1)} t^{2(k+\alpha)}\, d\mu(t)\right|^2}{\int_{[0,1)} t^{2k}\, d\mu(t) \int_{[0,1)} t^{2k+2(\alpha-\beta)}\, d\mu(t)}. \tag{3.18}$$

Die Anwendung von Lemma 3.14 auf die konstante Funktion

$$\varphi\colon [0,1) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad t \longmapsto 1$$

liefert

$$\lim_{\substack{k\to\infty\\k>\beta-\alpha}} \frac{\int_{[0,1)} t^{2k+2(\alpha-\beta)}\,d\mu(t)}{\int_{[0,1)} t^{2k}\,d\mu(t)} = 1$$

beziehungsweise

$$\lim_{\substack{k\to\infty\\k>\beta-\alpha}} \frac{\left|\int_{[0,1)} t^{2(k+\alpha)}\,d\mu(t)\right|^2}{\int_{[0,1)} t^{2k}\,d\mu(t)\int_{[0,1)} t^{2k+2(\alpha-\beta)}\,d\mu(t)} = 1$$

und somit folgt aus (3.18), dass $\lim_{k\to\infty}\lambda_k = 0$. Es folgt, dass Hp kompakt ist für jedes trigonometrische Polynom $p \in \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}})$. Da die trigonometrischen Polynome in $\mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}})$ dicht liegen und $\|H_f - Hg\| \leq \|f-g\|_{\mathrm{L}^\infty}$ für alle $f, g \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{D},\nu)$, ist jeder Hankeloperator H_f mit stetigem Symbol $f \in \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}})$ als Grenzwert kompakter Operatoren selbst kompakt.

□

Wir fahren nun mit dem Beweis einiger Hilfsaussagen fort, bevor wir zum Hauptergebnis kommen. Ab sofort gelte stets $n \geq 2$. Es sei $\mu = \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n$ das Produkt regulärer Borel-Wahrscheinlichkeitsmaße $\mu_1, \ldots, \mu_n \colon \mathfrak{B}([0,1)) \to [0,\infty)$ und $\nu = \nu_1 \otimes \ldots \otimes \nu_n$ das durch Lemma 1.23 beziehungsweise Korollar 1.24 gegebene Produktmaß regulärer Borel-Wahrscheinlichkeitsmaße $\nu_1, \ldots,$ ν_n auf $\mathbb{D}$. Weiter bezeichne $\gamma\colon \mathfrak{B}(\partial\mathbb{D}^n) \to [0,\infty)$ das durch μ induzierte und in Abschnitt 3.2 konstruierte reguläre Borelmaß auf $\partial\mathbb{D}^n$. Wir erinnern daran, dass jede Funktion $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n,\nu)$ gemäß Lemma 3.6 durch die, in $\mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n,\nu)$ summierbare, Reihe $\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} \mathrm{Q}_\alpha(f)$ dargestellt werden kann, wobei $\mathrm{Q}_\alpha\colon \mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n,\nu) \to \mathcal{H}_\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ die orthogonale Projektion auf den abgeschlossenen Teilraum $\mathcal{H}_\alpha \subset \mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n,\nu)$ der vom Grade α quasi-homogenen Funktionen sei. Mit diesen Bezeichnungen notieren wir zunächst das folgende Lemma.

3.22 Lemma. *Es sei $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{D}^n,\nu)$ so, dass der Hankeloperator $H_f\colon \mathrm{A}^2_{\nu_n} \to \mathrm{A}^{2\perp}_{\nu_n}$ kompakt ist. Dann liegt für jedes $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ die Funktion $f_\alpha = \mathrm{Q}_\alpha(f) \in \mathcal{H}_\alpha$ in $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{D}^n,\nu)$ und der Operator H_{f_α} ist kompakt.*

Beweis. Ist $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, so gibt es nach Lemma 3.3 eine ν-Nullmenge $N \in \mathfrak{B}(\mathbb{D}^n)$ so, dass

$$\mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \zeta \longmapsto f(\zeta z)\bar{\zeta}^\alpha$$

σ-integrierbar ist mit

$$f_\alpha(z) = \int_{\mathbb{T}^n} f(\zeta z)\bar{\zeta}^\alpha\,d\sigma(\zeta)$$

für $z \in \mathbb{D}^n \setminus N$. Es folgt $|f_\alpha(z)| \leq \|f\|_{\mathrm{L}^\infty}$ für jedes $z \in \mathbb{D}^n \setminus N$ und daher $f_\alpha \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{D}^n,\nu)$. Wie oben bereits erwähnt, konvergiert $\sum_{\beta\in\mathbb{Z}^n} f_\beta$ in $\mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n,\nu_n)$

gegen f und daher gilt für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$\begin{aligned} H_f(e_\alpha) &= P_-(fe_\alpha) \\ &= P_-\left(e_\alpha \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^n} f_\beta\right) \\ &= \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^n} P_-(f_\beta e_\alpha) \\ &= \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^n} H_{f_\beta}(e_\alpha), \end{aligned}$$

denn P_- ist stetig. Für $\gamma, \beta \in \mathbb{Z}^n$ zeigt die Rechnung

$$\mathrm{Q}_{\gamma+\alpha}(H_{f_\beta}(e_\alpha)) = P_-(\mathrm{Q}_{\gamma+\alpha}(f_\beta e_\alpha)) = \begin{cases} P_-(f_\beta e_\alpha), & \text{falls } \gamma = \beta \\ 0, & \text{falls } \gamma \neq \beta \end{cases},$$

dass

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}_{\gamma+\alpha}(H_f(e_\alpha)) &= \mathrm{Q}_{\gamma+\alpha}\left(\sum_{\beta\in\mathbb{Z}^n} H_{f_\beta}\, e_\alpha\right) \\ &= \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^n} \mathrm{Q}_{\gamma+\alpha}(H_{f_\beta}\, e_\alpha) \\ &= \mathrm{Q}_{\gamma+\alpha}(H_{f_\gamma}\, e_\alpha) \\ &= H_{f_\gamma}(e_\alpha). \end{aligned}$$

Wir bemerken weiter, dass der Operator ${H_{f_\gamma}}^* H_{f_\gamma}$ nach Lemma 3.12 und Korollar 3.4 ein Diagonaloperator bezüglich der Orthonormalbasis $(e_\beta)_{\beta\in\mathbb{N}^n}$ von $\mathrm{A}^2_{\nu_n}$ ist und berechnen

$$\lambda_\alpha = \|H_{f_\gamma}(e_\alpha)\|^2_{\mathrm{L}^2} = \|\mathrm{Q}_{\gamma+\alpha}(H_f(e_\alpha))\|^2_{\mathrm{L}^2} \leq \|H_f(e_\alpha)\|^2_{\mathrm{L}^2}. \tag{3.19}$$

Für jede Abzählung $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^n$ ist $\lim_{k\to\infty}\|H_f(e_{\varphi(k)})\|_{\mathrm{L}^2} = 0$ wegen der Kompaktheit des Operators H_f und daher gilt auch $\lim_{k\to\infty} \lambda_{\varphi(k)} = 0$ nach (3.19), das heißt der Operator ${H_{f_\gamma}}^* H_{f_\gamma}$ und damit H_{f_γ} ist kompakt.

□

Das nächste Lemma macht eine Aussage über das Randverhalten gewisser Borel-messbarer Funktionen auf $\mathbb{D}^n$. Der Beweis ist in [18, Lemma 2.1] zu finden.

3.23 Lemma. *Sei $f\colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$ Borel-messbar so, dass der Grenzwert $F(z) = \lim_{\substack{z\to w\\ z\in\mathbb{D}^n}} f(z)$ für alle $w \in \partial\mathbb{D}^n$ existiert. Ist $F(w) = 0$ für γ-fast alle $w \in \partial\mathbb{D}^n$, so gibt es eine Borel-messbare Funktion $g\colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$ derart, dass $f(z) = g(z)$ für ν-fast alle $z \in \mathbb{D}^n$ erfüllt ist und $\lim_{\substack{z\to w\\ z\in\mathbb{D}^n}} g(z) = 0$ für alle $w \in \partial\mathbb{D}^n$ gilt.*

Beweis. Für $j = 1, \dots, n$ setze

$$R_j = \{U \in \mathfrak{B}(\mathbb{D}) \mid U \subseteq \mathbb{D} \text{ ist offene } \nu_j\text{-Nullmenge}\}$$

und bemerke, dass die Menge $V_j = \bigcup_{U \in R_j} U$ aufgrund der Regularität des Maßes ν_j und Lemma VIII.2.15 aus [8] die bezüglich Inklusion größte offene ν_j-Nullmenge in $\mathbb{D}$ ist. Das Komplement $\mathbb{D}^n \setminus G$ der Menge $G = (\mathbb{D} \setminus V_1) \times \ldots \times (\mathbb{D} \setminus V_n) \in \mathfrak{B}(\mathbb{D}^n)$ ist eine ν-Nullmenge, denn es gilt $\mathbb{D}^n \setminus G = \bigcup_{i=1}^n \pi_i^{-1}(V_i)$ und daher

$$\begin{aligned}
\nu(\mathbb{D}^n \setminus G) &= \nu\left(\bigcup_{i=1}^n \pi_i^{-1}(V_i)\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \nu(\pi_i^{-1}(V_i)) \\
&= \sum_{i=1}^n \nu_i(V_i) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Wir folgern, dass $f(z) = f(z)\chi_G(z)$ für ν-fast alle $z \in \mathbb{D}^n$ gilt. Wir begründen nun, dass die Borel-messbare Funktion

$$g \colon \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto f(z)\chi_G(z)$$

die Eigenschaft

$$\lim_{\substack{z \to w \\ z \in \mathbb{D}^n}} g(z) = 0$$

für alle $w \in \partial\mathbb{D}^n$ hat. Sei $w = (w_1, \dots, w_n) \in \partial\mathbb{D}^n$, wobei wir durch eventuelle Permutation der Koordinaten von w erreichen können, dass $w \in \mathbb{T}^s \times \mathbb{D}^{n-s}$ für ein $s \in \{1, \dots, n\}$ gilt. Ist $F(w) = 0$, so folgt $\lim_{\substack{z \to w \\ z \in \mathbb{D}^n}} g(z) = 0$ aus der Abschätzung $|g(z)| \leq |f(z)|$ $(z \in \mathbb{D}^n)$ und der Voraussetzung $\lim_{\substack{z \to w \\ z \in \mathbb{D}^n}} f(z) = 0$. Wir nehmen jetzt $F(w) \neq 0$ an. Nach Definition von F gibt es dann eine Zahl $\varepsilon > 0$ so, dass

$$|f(z)| > \frac{|F(w)|}{2}$$

für alle $z \in \mathbb{D}^n \cap \mathrm{P}_\varepsilon^n(w)$. Dies liefert

$$|F(u)| \geq \frac{|F(w)|}{2}$$

für alle $u \in (\mathbb{T}^s \times \mathbb{D}^{n-s}) \cap \mathrm{P}_\varepsilon^n(w)$ und da nach Voraussetzung $F(u) = 0$ für γ-fast alle $u \in \partial\mathbb{D}^n$ gilt, ist $\gamma((\mathbb{T}^s \times \mathbb{D}^{n-s}) \cap \mathrm{P}_\varepsilon^n(w)) = 0$. Wegen $\gamma|_{\mathbb{T}^n} = \sigma_n$ gilt

$s \in \{1, \ldots, n-1\}$ und es gibt $j \in \{s+1, \ldots, n\}$ so, dass $\nu_j(\mathbb{D} \cap \mathrm{D}_\varepsilon(w_j)) = 0$, denn es gilt

$$\gamma((\mathbb{T}^s \times \mathbb{D}^{n-s}) \cap \mathrm{P}^n_\varepsilon(w)) = \sigma_s(\mathbb{T}^s \cap \mathrm{P}^s_\varepsilon(w_1, \ldots, w_s)) \prod_{i=s+1}^{n} \nu_i(\mathbb{D} \cap \mathrm{D}_\varepsilon(w_i))$$

nach Konstruktion von γ. Nach Wahl von V_j ist $\mathbb{D} \cap \mathrm{D}_\varepsilon(w_j) \subseteq V_j$ und daher $\pi_j(\mathbb{D}^n \cap \mathrm{P}^n_\varepsilon(w)) \subseteq V_j$, das heißt $\chi_G|_{\mathbb{D}^n \cap \mathrm{P}^n_\varepsilon(w)} \equiv 0$. Hieraus folgt sofort $\lim_{\substack{z \to w \\ z \in \mathbb{D}^n}} g(z) = 0$.

□

Um das Hauptresultat dieses Abschnitts zu formulieren, bedienen wir uns der in der folgenden Definition festgelegten Schreibweise.

3.24 Definition. *Es sei $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu)$ und $w \in \mathbb{C}$. Wir schreiben*

$$\lim_{z \to \partial \mathbb{D}^n} g(z) = w,$$

wenn es zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{D}^n$ gibt, sodass $|g(z) - w| < \varepsilon$ für ν-fast alle $z \in \mathbb{D}^n \setminus K$ gilt.

3.25 Satz (T. Le, 2010)**.** *Es sei $f \in \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n)$. Dann ist der Hankeloperator $H_f \colon \mathrm{A}^2_\nu \to \mathrm{A}^{2\perp}_\nu$ genau dann kompakt, wenn es Funktionen $h \in A(\mathbb{D}^n)$ und $g \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{D}^n, \nu)$ mit $\lim_{z \to \partial \mathbb{D}^n} g(z) = 0$ gibt, sodass*

$$f(z) = h(z) + g(z)$$

für ν-fast alle $z \in \mathbb{D}^n$ gilt.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, es gäbe Funktionen $h \in \mathrm{A}(\mathbb{D}^n)$ und $g \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{D}^n, \nu)$ mit $\lim_{z \to \partial \mathbb{D}^n} g(z) = 0$ und $f(z) = h(z) + g(z)$ für ν-fast alle $z \in \mathbb{D}^n$. Es genügt zu zeigen, dass der Operator H_g kompakt ist. Nehme zunächst an, dass es eine kompakte Menge $M \subset \mathbb{D}^n$ gibt, sodass $g|_{\mathbb{D}^n \setminus M} \equiv 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{|\alpha| \leq N \\ \alpha \in \mathbb{N}^n}} \|H_g(e_\alpha)\|^2_{\mathrm{L}^2} &\leq \sum_{\substack{|\alpha| \leq N \\ \alpha \in \mathbb{N}^n}} \|g e_\alpha\|^2_{\mathrm{L}^2} \\ &= \int_{\mathbb{D}^n} |g(z)|^2 \sum_{\substack{|\alpha| \leq N \\ \alpha \in \mathbb{N}^n}} |e_\alpha(z)|^2 \, d\nu(z) \end{aligned} \tag{3.20}$$

für alle $N \in \mathbb{N}$. Die durch

$$\delta_N \colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto |g(z)|^2 \sum_{\substack{|\alpha| \leq N \\ \alpha \in \mathbb{N}^n}} |e_\alpha(z)|^2$$

gegebene Folge $(\delta_N)_{N\in\mathbb{N}}$ positiver, Borel-messbarer Funktionen ist punktweise monoton wachsend. Somit folgt aus dem Satz von der monotonen Konvergenz zusammen mit (3.20), dass

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \|H_g(e_\alpha)\|_{\mathrm{L}^2}^2 \leq \int_{\mathbb{D}^n} |g(z)|^2 \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} |e_\alpha(z)|^2 \, d\,\nu(z)\,. \tag{3.21}$$

Den Propositionen 3.9 und 3.10 zufolge gilt $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} |e_\alpha(z)|^2 = K(z,z) \leq C_M^2$ für alle $z \in M$, wobei die Konstante $C_M > 0$ zum Kompaktum M gemäß Lemma 1.27 gewählt sei. Aus (3.21) folgt schließlich

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \|H_g(e_\alpha)\|_{\mathrm{L}^2}^2 \leq C_M^2 \int_{\mathbb{D}^n} |g(z)|^2 \, d\,\nu(z) < \infty,$$

das heißt H_g ist ein Hilbert-Schmidt Operator und damit auch kompakt.

Ist allgemein $g \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{D}^n, \nu)$ mit $\lim_{z\to\partial\mathbb{D}^n} g(z) = 0$, so gibt es zu jeder Zahl $k \in \mathbb{N}^*$ eine kompakte Menge $M_k \subset \mathbb{D}^n$ so, dass $|g(z)| < 1/k$ für ν-fast alle $z \in \mathbb{D}^n \setminus M_k$ gilt. Offenbar besitzen die Funktionen $g\chi_{M_k} \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{D}^n, \nu)$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ kompakte Träger. Nach dem bisher gezeigten Spezialfall sind die Hankeloperatoren $H_{g\chi_{M_k}}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ kompakt und wegen

$$\|H_g - H_{g\chi_{M_k}}\| \leq \|g - g\chi_{M_k}\|_{\mathrm{L}^\infty} \leq \frac{1}{k} \qquad (k \in \mathbb{N}^*)$$

ist H_g als Grenzwert kompakter Operatoren wiederum kompakt.

Sei umgekehrt $f \in \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n)$ so, dass H_f kompakt ist. Wähle zu jedem $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ gemäß Korollar 3.4 eine vom Grade α quasi-homogene Funktion $f_\alpha \in \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n)$ mit $\mathrm{Q}_\alpha(f) = f_\alpha$ ν-fast überall auf $\mathbb{D}^n$ und

$$f_\alpha(\zeta z) = \zeta^\alpha f_\alpha(z)$$

für alle $\zeta \in \mathbb{T}^n$ und alle $z \in \overline{\mathbb{D}}^n$. Nach Lemma 3.22 ist dann H_{f_α} kompakt für jedes $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ und Satz 3.15 zufolge gibt es holomorphe Monome $h_\alpha \in \mathrm{A}(\mathbb{D}^n)$ mit $(f_\alpha - h_\alpha)(w) = 0$ für γ-fast alle $w \in \partial\mathbb{D}^n$. Für jedes $N \in \mathbb{N}^*$ sind die Polynome

$$p_N(z) = \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{Z}^n \\ |\beta_1|,\ldots,|\beta_n|\leq N}} \left(1 - \frac{|\beta_1|}{N+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{|\beta_n|}{N+1}\right) h_\beta(z) \quad (z \in \overline{\mathbb{D}}^n)$$

holomorph mit $p_N(w) = \Lambda_N(f)(w)$ für γ-fast alle $w \in \partial\mathbb{D}^n$. Nach Konstruktion des Maßes γ ist $\gamma|_{\mathbb{T}^n} = \sigma_n$ und somit folgt aufgrund der Stetigkeit der Abbildungen $p_N - \Lambda_N(f)$ $(N \in \mathbb{N}^*)$ schon $p_N(w) = \Lambda_N(f)(w)$ für alle $w \in \mathbb{T}^n$ und alle $N \in \mathbb{N}^*$. Nach Korollar 3.20 konvergiert $(\Lambda_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ auf $\overline{\mathbb{D}}^n$ gleichmäßig gegen f. Nach obiger Argumentation konvergiert also insbesondere die Folge $(p_N|_{\mathbb{T}^n})_{N\in\mathbb{N}^*}$ gleichmäßig gegen $f|_{\mathbb{T}^n}$. Lemma A.1 zufolge ist $(p_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ eine Cauchyfolge im Banachraum $(\mathrm{A}(\mathbb{D}^n), \|\cdot\|_{\overline{\mathbb{D}}^n})$. Sie ist somit konvergent, das heißt es gibt eine Funktion $h \in \mathrm{A}(\mathbb{D}^n)$ so, dass $(p_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ auf $\overline{\mathbb{D}}^n$ gleichmäßig gegen h konvergiert. Aus den bisherigen Ausführungen folgt $h(w) = f(w)$ für γ-fast alle $w \in \partial\mathbb{D}^n$. Bemerke weiter, dass die Funktion $\tilde{g} = f - h$ in $\mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n)$ liegt und $\tilde{g}(w) = 0$ für γ-fast alle $w \in \partial\mathbb{D}^n$ erfüllt. Lemma 3.23 zufolge gibt es zu $\tilde{g}$ eine Borel-messbare Funktion $g\colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$ mit $\tilde{g}(z) = g(z)$ für ν-fast alle $z \in \mathbb{D}^n$ und $\lim_{\substack{z\to w\\ z\in\mathbb{D}^n}} g(z) = 0$ für alle $w \in \partial\mathbb{D}^n$. Die Kompaktheit des Randes $\partial\mathbb{D}^n$ von $\mathbb{D}^n$ impliziert $\lim_{z\to\partial\mathbb{D}^n} g(z) = 0$ und somit haben die Funktionen h und g die gewünschten Eigenschaften.

□

Trieu Le erkannte auch, dass man auf die Stetigkeitsforderung an die Funktion $f\colon \overline{\mathbb{D}}^n \to \mathbb{C}$ in Satz 3.25 nicht verzichten kann. Er konstruiert in [18] auch ein Beispiel für eine stetige, beschränkte Funktion $f\colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$ mit kompaktem Hankeloperator H_f, die keine Zerlegung $f = h + g$ in Funktionen $h \in \mathrm{A}^2_{\nu_n}$ und $g \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{D}^n, \nu_n)$ mit $\lim_{z\to\partial\mathbb{D}^n} g(z) = 0$ besitzt. Wir wollen diese Konstruktion zum Abschluss ebenfalls durch den Beweis des nächsten Lemmas festhalten.

3.26 Lemma. *Es gibt eine beschränkte Funktion $f \in \mathrm{C}(\mathbb{D}^n)$ so, dass der Hankeloperator H_f kompakt ist und die keine Zerlegung $f = h + g$ aus Funktionen $h \in \mathrm{A}^2_\nu$ und $g \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{D}^n, \nu_n)$ mit $\lim_{z\to\partial\mathbb{D}^n} g(z) = 0$ besitzt.*

Beweis. Sei $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge aus $[0,1)^n$ mit $\lim_{k\to\infty} r_k = 1$. Setze $j_1 = 1$ und bemerke $\mu((r_{j_1}, 1)^n) > 0$. Weiter ist die durch $M_k = (r_{j_1}, r_k)^n$ gegebene Folge $(M_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ aus $\mathfrak{B}(\mathbb{D}^n)$ bezüglich Inklusion aufsteigend. Da das Maß μ stetig von unten ist, gilt

$$\lim_{k\to\infty} \mu(M_k) = \mu((r_{j_1}, 1)^n)$$

und daher gibt es eine natürliche Zahl $j_2 \geq j_1 + 1$ so, dass $\mu((r_{j_1}, r_{j_2})^n) > 0$. Ist für $k \geq 2$ eine Zahl $j_k \in \mathbb{N}^*$ so gewählt, dass $j_k \geq j_{k-1} + 1$ und $\mu((r_{j_{k-1}}, r_{j_k})^n) > 0$ wähle mit dem gleichen Argument wie oben eine natürliche Zahl $j_{k+1} \geq j_k + 1$ mit $\mu((r_{j_k}, r_{j_{k+1}})^n) > 0$. Induktiv erhalten wir eine Folge $(j_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ natürlicher Zahlen mit $j_{k+1} \geq j_k + 1$ und $\mu((r_{j_k}, r_{j_{k+1}})^n) > 0$ für $k \in \mathbb{N}^*$. Wir zeigen als nächstes, dass es zu jedem $k \in \mathbb{N}^*$ eine offene Menge $V_k \subseteq \mathbb{T}^n$ mit

$$0 < \sigma(V_k) < \frac{1}{k} \quad \text{und} \quad \int_{E_k} \mathrm{K}(z,z)\, d\nu(z) < \frac{1}{k^2} \tag{3.22}$$

gibt, wobei $\mathrm{K}\colon \mathbb{D}^n \times \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$ der reproduzierenden Kern von $\mathrm{A}^2_{\nu_n}$ und $E_k = \{r\zeta \in \mathbb{D}^n \mid r \in R_k, \zeta \in V_k\}$ mit $R_k = (r_{j_k}, r_{j_{k+1}})^n$ seien. Sei $k \in \mathbb{N}^*$ fest und bemerke, dass die Menge $E = \{r\zeta \in \mathbb{D}^n \mid r \in \overline{R_k}, \zeta \in \mathbb{T}^n\}$ kompakt ist als Bild des Kompaktums $\overline{R_k} \times \mathbb{T}^n$ unter der stetigen Funktion $[0,1)^n \times \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}^n$, $(r,\zeta) \mapsto r\zeta$. Nach Proposition 3.9 ist $\mathbb{D}^n \to \mathbb{C}, z \mapsto \mathrm{K}_z(z)$ nichtnegativ und wegen Proposition 3.10 ist das Integral $\int_E \mathrm{K}_z(z)\, d\nu(z)$ endlich. Daher gibt es $\zeta_0 \in \mathbb{T}^n$ so, dass

$$\int_P \mathrm{K}_z(z)\, d\nu(z) < \frac{1}{2k^2}, \tag{3.23}$$

wobei $P = \{r\zeta_0 \in \mathbb{D}^n \mid r \in \overline{R_k}\} \subset E$ sei. Setzt man

$$W_m = \overline{\mathrm{P}^n_{2-1/m}(-\zeta_0)} \cap \mathbb{T}^n$$

und

$$\tilde{E}_m = \{r\zeta \in \mathbb{D}^n \mid r \in \overline{R_k}, \zeta \in W_m\} \subset E$$

für $m \in \mathbb{N}^*$, so zeigt die Anwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz auf die Folge $\mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \mathrm{K}_z(z)\chi_{\tilde{E}_m}(z)$, dass

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\tilde{E}_m} \mathrm{K}_z(z)\, d\nu(z) = \int_{E\setminus P} \mathrm{K}_z(z)\, d\nu(z)\,.$$

Hieraus folgt die Existenz einer Zahl $N \in \mathbb{N}^*$ so, dass

$$\int_{(E\setminus P)\setminus\tilde{E}_m} \mathrm{K}_z(z)\, d\nu(z) < \frac{1}{2k^2} \tag{3.24}$$

für jedes $m \geq N$. Wähle eine natürliche Zahl $m_k \geq N$ so groß, dass $0 < \sigma(\mathbb{T}^n \setminus W_{m_k}) < 1/k$ gilt und setze $V_k = \mathbb{T}^n \setminus W_{m_k}$. Setzen wir $E_k = \{r\zeta \in \mathbb{D}^n \mid r \in R_k, \zeta \in V_k\}$, so gilt $E_k \subset E \setminus \tilde{E}_{m_k}$ und aus (3.23) und (3.24) folgt

$$\int_{E_k} \mathrm{K}_z(z)\, d\nu(z) \leq \int_{(E\setminus P)\setminus\tilde{E}_k} \mathrm{K}_z(z)\, d\nu(z) + \int_P \mathrm{K}_z(z)\, d\nu(z) < \frac{1}{k^2}.$$

Damit hat die Menge V_k die Eigenschaften in (3.22). Nach Definition ist die Menge E_k ($k \in \mathbb{N}^*$) offen in $\mathbb{D}^n$ mit $\nu(E_k) > 0$. Aufgrund der Regularität des Maßes ν gibt es ein Kompaktum $K \subseteq E_k$ so, dass $\nu(K) > 0$. Eine Anwendung des Lemmas von Urysohn (siehe etwa Proposition 7.1.8 in [5]) zeigt die Existenz einer stetigen Funktion $f_k \colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$, deren Träger noch ganz in E_k enthalten ist und die $f_k|_K \equiv 1$ und $f_k(\mathbb{D}^n) \subseteq [0,1]$ erfüllt. Da die Mengen E_k ($k \in \mathbb{N}^*$) paarweise disjunkt sind, ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$$

stetig und insbesondere beschränkt. Wir zeigen im nächsten Schritt, dass der Hankeloperator H_f kompakt ist. Eine analoge Abschätzung wie in (3.21) aus dem Beweis von Satz 3.25 mit f an der Stelle von g liefert zusammen mit Proposition 3.9 und unter Verwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \|H_f(e_\alpha)\|^2_{\mathrm{L}^2} &\leq \int_{\mathbb{D}^n} |f(z)|^2 \, \mathrm{K}_z(z) \, d\,\nu(z) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} |f_k(z)|^2 \, \mathrm{K}_z(z) \, d\,\nu(z) \\
&< \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Somit ist H_f als Hilbert-Schmidt Operator kompakt. Wir zeigen nun

$$\lim_{z \to \partial \mathbb{D}^n} \mathrm{Q}_\alpha(f)(z) = 0 \tag{3.25}$$

für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Schreiben wir $0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{N}^n$, so genügt es

$$\lim_{z \to \partial \mathbb{D}^n} \mathrm{Q}_0(f)(z) = 0 \tag{3.26}$$

zu zeigen, denn nach Lemma 3.3 gilt

$$|\mathrm{Q}_\alpha(f)(z)| = \left| \int_{\mathbb{T}^n} f(\zeta z) \bar{\zeta}^\alpha \, d\sigma(\zeta) \right| \leq \int_{\mathbb{T}^n} f(\zeta z) \, d\sigma(\zeta) = \mathrm{Q}_0(f)(z)$$

für ν-fast alle $z \in \mathbb{D}^n$ und jedes $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Sei eine ν_n-Nullmenge $N \in \mathfrak{B}(\mathbb{D}^n)$ gemäß Lemma 3.3 so gewählt, dass $\mathrm{Q}_0(f)(z) = \int_{\mathbb{T}^n} f(z\zeta) \, d\sigma(\zeta)$ für alle $z \in \mathbb{D}^n \setminus N$ gilt. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\mathrm{Q}_0(f)(z) &= \int_{\mathbb{T}^n} f(\zeta z) \, d\sigma(\zeta) \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} f(|z_1| \, \zeta_1, \ldots, |z_n| \, \zeta_n) \, d\sigma(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(|z_1| \, \zeta_1, \ldots, |z_n| \, \zeta_n) \, d\sigma(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{T}^n} \chi_{E_k}(|z_1| \, \zeta_1, \ldots, |z_n| \, \zeta_n) \, d\sigma(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

für alle $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{D}^n \setminus N$ mit dem Satz von der monotonen Konvergenz und Proposition 1.1. Sei $k \geq 2$ eine beliebige natürliche Zahl und $z = (z_1, \ldots, z_n) \in (\mathbb{D}^n \setminus N) \setminus \overline{\mathrm{P}^n_{r_{j_k}}(0)}$. Liegt der Vektor $(|z_1|, \ldots, |z_n|)$ in keiner Menge R_m für $m \in \mathbb{N}^*$, so folgt $(|z_1|\,\zeta_1, \ldots, |z_n|\,\zeta_n) \notin E_m$ für alle $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{T}^n$ und jedes $m \in \mathbb{N}^*$ und somit $\mathrm{Q}_0(f)(z) = 0$ nach (3.27). Andernfalls gibt es genau ein $k_0 \in \mathbb{N}^*$ mit $(|z_1|, \ldots, |z_n|) \in R_{k_0}$ und wegen $z \notin \overline{\mathrm{P}^n_{r_{j_k}}(0)}$ gilt $r_{j_{k_0+1}} > r_{j_k}$, das heißt $k_0 \leq k$. Mit (3.22) und (3.27) erhalten wir

$$\begin{aligned} |\mathrm{Q}_0(f)(z)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{T}^n} \chi_{E_k}(|z_1|\,\zeta_1, \ldots, |z_n|\,\zeta_n)\, d\sigma(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} \chi_{E_{k_0}}(|z_1|\,\zeta_1, \ldots, |z_n|\,\zeta_n)\, d\sigma(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} \chi_{V_{k_0}}(\zeta)\, d\sigma(\zeta) \\ &= \sigma(V_{k_0}) \leq \frac{1}{k_0} \leq \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Da der abgeschlossene Polyzylinder $\overline{\mathrm{P}^n_{r_{j_k}}(0)}$ kompakt ist, gilt (3.26) gemäß Definition 3.24.

Wir nehmen im letzten Schritt an, es gäbe Funktionen $h \in \mathrm{A}^2_{\nu_n}$ und $g \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{D}^n, \nu_n)$ mit $\lim_{z \to \partial\mathbb{D}^n} g(z) = 0$ so, dass $f = h + g$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{D}^n$ so, dass $|g(z)| < \varepsilon$ für ν-fast alle $z \in \mathbb{D}^n \setminus K$. Weiter gibt es einen Polyzylinder P mit Mittelpunkt 0, sodass $K \subset \overline{P}$ und somit folgt

$$|\mathrm{Q}_\alpha(g)(z)| \leq \int_{\mathbb{T}^n} |g(\zeta z)|\, d\sigma(\zeta) \leq \varepsilon$$

für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^n$ und ν-fast alle $z \in \mathbb{D}^n \setminus \overline{P}$ erneut aus Lemma 3.3. Beachte hierbei dass für $z \in \mathbb{D}^n \setminus \overline{P}$ und $\zeta \in \mathbb{T}^n$ auch $\zeta z \in \mathbb{D}^n \setminus \overline{P}$ gilt. Wir haben also $\lim_{z \to \partial\mathbb{D}^n} Q_\alpha(g)(z) = 0$ $(\alpha \in \mathbb{N}^n)$ gezeigt. Dies liefert zusammen mit (3.25)

$$\lim_{z \to \partial\mathbb{D}^n} Q_\alpha(h)(z) = \lim_{z \to \partial\mathbb{D}^n} Q_\alpha(f)(z) - Q_\alpha(g)(z) = 0$$

für $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Gemäß Teil (iii) aus Lemma 3.8 ist $Q_\alpha(h)(z)$ ein Vielfaches des Monoms z^α für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^n$ und daher $\mathrm{Q}_\alpha(h) = 0$. Nach Lemma 3.6 wird h durch die Nullfunktion repräsentiert, das heißt es gilt $f = g$. Nach Konstruktion der Funktion f hat die Menge $\{z \in \mathbb{D}^n \setminus M \mid f(z) = 1\}$ für jedes beliebige Kompaktum $M \subset \mathbb{D}^n$ positives ν-Maß im Widerspruch zur Voraussetzung $\lim_{z \to \partial\mathbb{D}^n} g(z) = 0$.

□

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass die hier ausgeführten Argumente zum Beweis von Satz 3.25 erheblichen Gebrauch von der Produktstruktur $\nu = \nu_1 \otimes \ldots \otimes \nu_n$ des zugrunde liegenden Borel-Wahrscheinlichkeitsmaßes $\nu\colon \mathfrak{B}(\mathbb{D}^n) \to [0, \infty)$ machen. Dem Autor dieser Arbeit ist nicht bekannt, ob das angesprochene Resultat 3.25 von Trieu Le auch ohne diese Forderung an das Maß ν gültig bleibt. Die Haupthindernisse für eine „direkte“ Übertragung der in diesem Kapitel vorgestellten Methoden von T. Le auf den allgemeineren Fall scheinen in der Verifikation der Aussage aus Lemma 3.14 sowie einer geeigneten Wahl des zu ν assoziierten Randmaßes $\gamma\colon \mathfrak{B}(\partial\mathbb{D}^n) \longrightarrow [0,\infty)$ (siehe Abschnitt 3.2) zu liegen. Der indirekte Ansatz, den allgemeinen Fall durch die Reduktion auf den bereits gezeigten Spezialfall zu beweisen, scheint ebenfalls problematisch zu sein, da die Assoziation eines geeigneten Produktmaßes zum Maß ν nicht kanonisch ist.

Anhang A

Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher

In diesem kurzen Abschnitt zur komplexen Analysis wollen wir eine Folgerung aus dem Maximumprinzip festhalten. Es seien $n \in \mathbb{N}^*$ und

$$\mathrm{A}(\mathbb{D}^n) = \big\{ f \in \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n) \mid f|_{\mathbb{D}^n} \in \mathcal{O}(\mathbb{D}^n) \big\}.$$

Wir zeigen, dass jede funktion $f \in \mathrm{A}(\mathbb{D}^n)$ ihr Betragsmaximum auf dem ausgezeichneten Rand $\mathbb{T}^n$ von $\mathbb{D}^n$ annimmt. Die im folgenden Lemma formulierte Aussage gilt auch, wenn man $\mathbb{D}^n$ durch einen beliebigen Polyzylinder $P \subseteq \mathbb{C}^n$ ersetzt und stetige Funktionen $f\colon \overline{P} \to \mathbb{C}$ betrachtet, die auf dem offenen Polyzylinder P holomorph sind.

A.1 Lemma. *Für jede Funktion $f \in A(\mathbb{D}^n)$ gilt $\|f\|_{\overline{\mathbb{D}}^n} \leq \|f\|_{\mathbb{T}^n}$.*

Beweis. Wir beweisen dies durch Induktion nach n. Ist $n = 1$, so folgt die zu zeigende Aussage direkt aus dem Maximumprinzip der Funktionentheorie einer Veränderlicher. Sei die Aussage für $n \in \mathbb{N}^*$ gezeigt und $f \in \mathrm{A}(\mathbb{D}^{n+1})$. Eine Anwendung des Konvergenzsatzes von Weierstraß aus der klassischen Funktionentheorie (siehe etwa Theorem III.1.3 in [11]) zeigt, dass die Funktion

$$f_z\colon \overline{\mathbb{D}} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad w \longmapsto f(w, z_2, \ldots, z_{n+1})$$

für jedes $z = (z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \overline{\mathbb{D}}^{n+1}$ in $A(\mathbb{D})$ liegt. Dem Maximumprinzip zufolge gilt

$$|f(z)| = |f_z(z_1)| \leq \|f_z\|_{\mathbb{T}}$$

für alle $z = (z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \overline{\mathbb{D}}^{n+1}$. Da die Menge $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{C}$ kompakt ist, wird das Supremum auf der rechten Seite der letzten Ungleichung angenommen, etwa im Punkt $w_0 \in \mathbb{T}$. Wenden wir die Induktionsvoraussetzung auf die Funktion

$$f(w_0, \cdot)\colon \overline{\mathbb{D}}^n \to \mathbb{C}, \qquad z \longmapsto f(w_0, z)$$

an, so folgt

$$|f(z)| \leq |f(w_0, z_2, \ldots, z_{n+1})| \leq \|f(w_0, \cdot)\|_{\mathbb{T}^n} \leq \|f\|_{\mathbb{T}^{n+1}}$$

für alle $z = (z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \overline{\mathbb{D}}^{n+1}$ und damit die Behauptung.

□

Anhang B

Hilbert-Schmidt Operatoren

Wir wollen auf den folgenden Seiten die Klasse der Hilbert-Schmidt Operatoren $\mathrm{HS}(\mathcal{H})$ über einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ definieren und ein bekanntes Resultat aus der Operatorentheorie formulieren. Hierbei orientieren wir uns an den Ausführungen in [21, S. 59ff]. Es sei stets $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ ein separabler Hilbertraum.

B.1 Definition. *Es sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis des Hilbertraums $\mathcal{H}$. Für einen beschränkten Operator $T : H \to H$ setzen wir*

$$\|T\|_{\mathrm{HS}}^{(e_n)_n} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|^2\right)^{1/2}$$

und nennen T einen ***Hilbert-Schmidt Operator****, falls $\|T\|_{\mathrm{HS}}^{(e_n)_n} < \infty$. Wir schreiben $\mathrm{HS}(\mathcal{H})$ für die Menge aller Hilbert-Schmidt Operatoren.*

Es gilt das folgende Lemma.

B.2 Lemma. *Ist $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$, so wird durch die Vorschrift*

$$\|T\|_{\mathrm{HS}}^{(e_n)_n} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|^2\right)^{1/2} \qquad (T \in \mathrm{HS}(\mathcal{H}))$$

eine Norm auf $\mathrm{HS}(\mathcal{H})$ definiert. Diese hängt nicht von der speziellen Wahl der Orthonormalbasis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ab, das heißt, ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$, so gilt $\|T\|_{\mathrm{HS}}^{(e_n)_n} = \|T\|_{\mathrm{HS}}^{(f_n)_n}$ für alle $T \in \mathrm{HS}(\mathcal{H})$.

Das die Abbildung $\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}^{(e_n)_n}$ aus obigem Lemma eine Norm auf $\mathrm{HS}(\mathcal{H})$ definiert, wird in [21, Theorem 2.4.10] bewiesen. Die Unabhängigkeit der Norm von der zugrunde gelegten Orthonormalbasis wird ebenfalls in [21, S. 59f] verifiziert. Motiviert durch das letzte Lemma schreiben wir ab sofort $\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$ für $\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}^{(e_n)_n}$. Für uns ist die Aussage des folgenden Lemmas von Interesse.

B.3 Lemma. *Jeder Hilbert-Schmidt Operator $T \in \mathrm{HS}(\mathcal{H})$ ist kompakt.*

Beweis. Es sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$. Für $x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n \in \mathcal{H}$ folgt mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\|Tx\|^2 = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n T e_n \right\|^2 \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|^2 \right) = \|x\|^2 \|T\|_{\mathrm{HS}}^2.$$

Also gilt $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$ auf $\mathrm{HS}(\mathcal{H})$. Weiter gibt es zu $T \in \mathrm{HS}(\mathcal{H})$ und $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{n=N}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \varepsilon^2.$$

Setze $U = \mathrm{LH}\big\{e_n \mid 0 \leq n \leq N\big\}$. Für den durch

$$S(x \oplus y) = Tx \qquad (x \oplus y \in U \oplus U^{\perp})$$

definierten, stetigen Operator $S \in \mathrm{L}(\mathcal{H})$ endlichen Ranges gilt

$$\|T - S\|_{\mathrm{HS}}^2 = \sum_{n=N}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \varepsilon^2.$$

Wegen $\|T - S\| \leq \|T - S\|_{\mathrm{HS}} < \varepsilon$ lässt sich T in der Operatornorm durch stetige Operatoren endlichen Ranges approximieren. Also ist T kompakt.

$\square$

Anhang C

Das Bochner Integral

Wir fassen auf den folgenden Seiten die Konstruktion eines Banachraumwertigen Integral-Begriffs, die des Bochner-Integrals, zusammen und zitieren einige, für die Ausführungen dieser Arbeit relevante, grundlegende Eigenschaften. Wir folgen dabei den Aufzeichnungen von H. Amann und J. Escher aus ihrem Buch [2] zur Analysis. In diesem Abschnitt sei $(X, \mathcal{U}, \mu)$ ein σ-endlicher, vollständiger Maßraum und $(B, \|\cdot\|_B)$ ein komplexer Banachraum.

C.1 Definition. *Sei $f\colon X \to B$ eine Funktion. Gibt es $m \in \mathbb{N}$, paarweise verschiedene $b_1, \ldots, b_m \in B \setminus \{0\}$ und paarweise disjunkte Mengen $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{U}$ mit $\mu(A_j) < \infty$ für $j = 1, \ldots, m$ so, dass*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{A_j}(x)$$

*für alle $x \in X$ gilt, dann nennt man f **Treppenfunktion bezüglich $\boldsymbol{\mu}$**. Wir bezeichnen die Menge der Treppenfunktionen bezüglich μ mit $\mathcal{T}(X, \mu, B)$. Ist $f \in \mathcal{T}(X, \mu, B)$ mit obiger Darstellung, so nennt man das Element*

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(A_j) \tag{C.1}$$

*aus B das **Bochner $\boldsymbol{\mu}$-Integral von $\boldsymbol{f}$**.*

Die Menge $\mathcal{T}(X, \mu, B)$ bildet vermöge der üblichen Addition und Skalarmultiplikation banachraumwertiger Funktionen einen Vektorraum. Beachtet man, dass für eine Funktion $\phi \in \mathcal{T}(X, \mu, B)$ auch

$$\|\phi\|_B\colon X \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad x \longmapsto \|f(x)\|_B$$

in $\mathcal{T}(X, \mu, \mathbb{R})$ liegt, so ist die Abbildung

$$\|\cdot\|_s\colon\ \mathcal{T}(X, \mu, B) \longrightarrow [0, \infty), \qquad f \longmapsto \int_X \|f(x)\|_B\, d\mu(x)$$

wohldefiniert und definiert eine Halbnorm auf $\mathcal{T}(X, \mu, B)$.

C.2 Definition. *Eine Funktion $f\colon X \to B$ heißt **Bochner $\boldsymbol{\mu}$-integrierbar**, falls es eine Folge $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{T}(X,\mu,B)$ gibt, sodass $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ punktweise μ-fast überall gegen f konvergiert und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\|\varphi_j - \varphi_i\|_s < \varepsilon$ für alle $i, j \geq N$ gilt. Wir nennen eine solche Folge $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{T}(X,\mu,B)$ eine **approximierende Folge von $\boldsymbol{f}$**. Wir schreiben*

$$\mathcal{B}(X,\mu,B) = \big\{f\colon X \to B \mid f \text{ Bochner } \mu\text{-integrierbar}\big\}.$$

Approximierende Folgen wie in der letzten Definition sind im Allgemeinen nicht eindeutig. Für die Definition des Bochner Integrals für Funktionen aus $\mathcal{B}(X,\mu,B)$ ist folgendes Lemma entscheidend. Es wird in [2, Korollar X.2.7] bewiesen.

C.3 Lemma. *Es seien $f \in \mathcal{B}(X,\mu,B)$ und $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ zwei approximierende Folgen von f. Dann sind die Folgen $(\int_X \varphi_j(x)\,d\mu(x))_{j\in\mathbb{N}}$ beziehungsweise $(\int_X \psi_j(x)\,d\mu(x))_{j\in\mathbb{N}}$ aus B konvergent und besitzen den gleichen Grenzwert in B.*

C.4 Definition. *Es sei $f \in \mathcal{B}(X,\mu,B)$ und $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine approximierende Folge von f. Dann heißt der Grenzwert*

$$\int_X f(x)\,d\mu(x) = \lim_{j\to\infty} \int_X \varphi_j(x)\,d\mu(x) \tag{C.2}$$

*aus B das **Bochner $\boldsymbol{\mu}$-Integral von $\boldsymbol{f}$ über $\boldsymbol{X}$**.*

Für Treppenfunktionen $f \in \mathcal{T}(X,\mu,B)$ stimmen die Integrale (C.1) und (C.2) überein. Ist $f \in \mathcal{B}(X,\mu,B)$ so wird in [2, Lemma X.2.8] gezeigt, dass die Abbildung

$$\|f\|_B\colon X \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad x \longmapsto \|f(x)\|_B$$

in $\mathcal{B}(X,\mu,\mathbb{R})$ liegt.

C.5 Lemma. *Es gilt:*

(i) Die Abbildung

$$\mathcal{B}(X,\mu,B) \to B, \qquad f \longmapsto \int_X f(x)\,d\mu(x)$$

ist linear mit

$$\left\| \int_X f(x)\,d\mu(x) \right\|_B \leq \int_X \|f(x)\|_B\,d\mu(x)$$

für alle $f \in \mathcal{B}(X,\mu,B)$.

(ii) Die Linearform

$$\mathcal{B}(X,\mu,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f \longmapsto \int_X f(x)\, d\mu(x)$$

ist positiv.

(iii) Ist $(F, \|\cdot\|_F)$ ein Banachraum und $T\colon B \to F$ ein beschränkter Operator, so liegt die Funktion

$$Tf\colon X \longrightarrow F, \qquad x \longmapsto T(f(x))$$

für jedes $f \in \mathcal{B}(X,\mu,B)$ in $\mathcal{B}(X,\mu,F)$ und es gilt

$$T\left(\int_X f(x)\, d\mu(x)\right) = \int_X (Tf)(x)\, d\mu(x)\,. \tag{C.3}$$

Beweis. Ein Beweis der ersten Aussage wird in [2, Theorem X.2.11] gegeben. Für die Verifikation von (ii) schreiben wir $|\cdot|$ für den Betrag auf $\mathbb{R}$ und bemerken, dass für jede Treppenfunktion $\varphi \in \mathcal{T}(X,\mu,\mathbb{R})$ auch

$$|\varphi| : X \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto |\varphi(x)|$$

in $\mathcal{T}(X,\mu,\mathbb{R})$ liegt, etwa $|\varphi| = \sum_{i=1}^m b_i \chi_{A_i}$ für $b_1,\dots,b_m \in \mathbb{R}_0^+$ und paarweise disjunkte $A_1,\dots,A_m \in \mathcal{U}$. Daher gilt

$$\int_X |\varphi|\,(x)\, d\mu(x) = \sum_{i=1}^m b_i \mu(A_i) \geq 0.$$

Ist $f \in \mathcal{B}(X,\mu,\mathbb{R})$ nichtnegativ und $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine approximierende Folge von f, so folgt

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \lim_{j\to\infty} \int_X |\varphi_j(x)|\, d\mu(x) \geq 0$$

aus [2, Lemma X.2.8] und dem bereits gezeigten. Für Punkt (iii) sei $f \in \mathcal{B}(X,\mu,B)$ und $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine approximierende Folge von f. Aufgrund der Linearität von T ist $(T\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen aus $\mathcal{T}(X,\mu,F)$. Weiter gibt es nach Voraussetzung eine μ-Nullmenge $N \in \mathcal{U}$ so, dass $\lim_{j\to\infty} \varphi_j$ $(x) = f(x)$ für alle $x \in X \setminus N$. Da T stetig linear ist, gilt

$$\|(Tf)(x) - (T\varphi_j)(x)\|_F \leq \|T\|\,\|f(x) - \varphi_j(x)\|_B$$

für jedes $x \in X$ und jedes $j \in \mathbb{N}$ und es folgt $\lim_{j\to\infty}(T\varphi_j)(x) = (Tf)(x)$ für alle $x \in X \setminus N$. Weiter wähle für $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$\|\varphi_j - \varphi_i\|_s < \varepsilon$$

für alle $i, j \geq N$ erfüllt ist. Unter Verwendung der Teile (i) und (ii) erhalten wir

$$\begin{aligned}\|T\varphi_j - T\varphi_i\|_s &= \int_X \|(T\varphi_j)(x) - (T\varphi_i)(x)\|_F \, d\mu(x) \\ &\leq \|T\| \int_X \|\varphi_j(x) - \varphi_i(x)\|_B \, d\mu(x) \\ &\leq \varepsilon \|T\|\end{aligned}$$

für alle $i, j \geq N$ und somit ist $(T\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine approximierende Folge von Tf, das heißt $Tf \in \mathcal{B}(X, \mu, F)$. Wir bemerken weiter, dass

$$T\left(\int_X \varphi(x) \, d\mu(x)\right) = \int_X (T\varphi)(x) \, d\mu(x)$$

für jedes $\varphi \in \mathcal{T}(X, \mu, B)$ aufgrund der Linearität von T und der Definition des Bochner μ-Integrals für Treppenfunktionen gilt. Zusammen mit dem bereits gezeigten liefert die Stetigkeit des Operators T schließlich

$$\begin{aligned}T\left(\int_X f(x) \, d\mu(x)\right) &= \lim_{j\to\infty} T\left(\int_X \varphi_j(x) \, d\mu(x)\right) \\ &= \lim_{j\to\infty} \int_X (T\varphi_j)(x) \, d\mu(x) \\ &= \int_X (Tf)(x) \, d\mu(x) \, .\end{aligned}$$

□

C.6 Definition. *Eine Funktion $f\colon X \to B$ heißt **μ-messbar**, wenn es eine Folge $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{T}(X, \mu, B)$ gibt, die punktweise μ-fast überall gegen f konvergiert.*

Da der Maßraum $(X, \mathcal{U}, \mu)$ vollständig ist, ist eine μ-messbare Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ genau dann im klassischen Sinne μ-integrierbar, wenn sie Bochner μ-integrierbar ist. In diesem Fall sind die Integralwerte identisch. Siehe hierzu Bemerkung X.3.11 und Theorem X.3.9 in [2]. Im Folgenden sei $\sigma\colon \mathfrak{B}(\mathbb{T}^n) \to [0, \infty)$ das normierte Haarmaß auf $\mathbb{T}^n$ und $(\mathbb{T}^n, \mathcal{A}, \tilde{\sigma})$ die σ-endliche Vervollständigung des σ-endlichen Maßraums $(\mathbb{T}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{T}^n), \sigma)$.

C.7 Bemerkung. *Eine Borel-messbare Funktion $f\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ ist genau dann σ-integrierbar, wenn sie bezüglich der Vervollständigung $\tilde{\sigma}$ integrierbar ist. In diesem Fall gilt*

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(x) \, d\sigma(x) = \int_{\mathbb{T}^n} f(x) \, d\tilde{\sigma}(x) \, .$$

Siehe hierzu etwa [12, Proposition 212F] oder Proposition 2.1.11 sowie die Ausführungen auf den Seiten 120f des Werkes [4].

Wir wollen abschließend ein Korollar aus Lemma C.5 ziehen.

C.8 Korollar. *Ist $\varphi\colon \mathbb{T}^n \to (\mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n), \|\cdot\|_{\overline{\mathbb{D}}^n})$ stetig, so ist φ Bochner $\tilde{\sigma}$-integrierbar mit*

$$\left(\int_{\mathbb{T}^n} \varphi(\zeta)\, d\tilde{\sigma}(\zeta)\right)(z) = \int_{\mathbb{T}^n} \varphi(\zeta)(z)\, d\sigma(\zeta)$$

für jedes $z \in \overline{\mathbb{D}}^n$.

Beweis. Wir begründen zunächst, dass φ Bochner $\tilde{\sigma}$-integrierbar ist. Als Bild des Kompaktums $\mathbb{T}^n$ unter der stetigen Funktion φ ist $(\varphi(\mathbb{T}^n), \|\cdot\|_{\overline{\mathbb{D}}^n})$ ein kompakter metrischer Raum und somit separabel. Weiter ist $\varphi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{T}^n$ offen für jede offene Menge $U \subseteq \mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n)$. Theorem X.1.4 aus [2] zufolge ist φ daher $\tilde{\sigma}$-messbar. Beachtet man weiter, dass die Funktion

$$\mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \zeta \longmapsto \|\varphi(\zeta)\|_{\overline{\mathbb{D}}^n}$$

als beschränkte, Borel-messbare Funktion $\tilde{\sigma}$-integrierbar ist, so folgt die Bochner $\tilde{\sigma}$-Integrierbarkeit von φ aus [2, Theorem X.3.9]. Wir beachten weiter, dass für festes $z \in \overline{\mathbb{D}}^n$ die Punktauswertung

$$T_z\colon (\mathrm{C}(\overline{\mathbb{D}}^n), \|\cdot\|_{\overline{\mathbb{D}}^n}) \longrightarrow \mathbb{C}, f \longmapsto f(z)$$

ein beschränkter Operator und die Abbildung

$$\mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \zeta \longmapsto \varphi(\zeta)(z)$$

als stetige Funktion σ-integrierbar ist. Nach Teil (iii) aus Lemma C.5 und Bemerkung C.7 gilt zuletzt

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{T}^n} \varphi(\zeta)\, d\tilde{\sigma}(\zeta)\right)(z) &= T_z\left(\int_{\mathbb{T}^n} \varphi(\zeta)\, d\tilde{\sigma}(\zeta)\right)\\ &= \int_{\mathbb{T}^n} T_z(\varphi(\zeta))\, d\tilde{\sigma}(\zeta)\\ &= \int_{\mathbb{T}^n} \varphi(\zeta)(z)\, d\tilde{\sigma}(\zeta)\\ &= \int_{\mathbb{T}^n} \varphi(\zeta)(z)\, d\sigma(\zeta)\,.\end{aligned}$$

□

Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}$	$\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{N}^*$	$\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}_0^+$	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$\arg(z)$	Hauptwert des Arguments einer komplexen Zahl z
$\mathrm{D}_r(z)$	Kreisscheibe in $\mathbb{C}$ mit Mittelpunkt z und Radius $r > 0$, Seite 7
$\operatorname{Im} f$	Bildmenge einer Abbildung f
A^2_ν	Verallgemeinerter Bergmanraum zum Maß ν, Seite 31
$\mathfrak{B}(X)$	σ-Algebra der Borelschen Teilmengen eines topologischen Raums X, Seite 8
C_n	Cauchykern auf $\mathbb{D}^n$, Seite 23
χ_A	Charakteristische Funktion der Menge A
$\dim V$	Dimension eines $\mathbb{C}$-Vektorraums V
$\mathrm{A}(\mathbb{D}^n)$	Polyzylinder-Algebra über $\mathbb{D}^n$, Seite 23
$\mathbb{D}^n$	Einheitspolyzylinder in $\mathbb{C}^n$, Seite 7
F_N, F_N^m	N-ter Fejér-Kern, Seite 72
$\mathrm{H}^p(\mathbb{D}^n)$	Hardyraum auf $\mathbb{D}^n$ zur Potenz p, Seite 19
$\mathrm{H}^p(\mathbb{T}^n)$	In $\mathrm{L}^p(\mathbb{T}^n, \sigma_n)$ eingebetteter Hardyraum zur Potenz p, Seite 20
$\hat{f}(\alpha)$	α-ter Fourierkoeffizient einer Funktion f, Seite 13
H_f	Hankeloperator bezüglich einem Symbol f, Seite 37

$\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)^\perp$	Orthogonales Komplement von $\mathrm{H}^2(\mathbb{T}^n)$ in $\mathrm{L}^2(\mathbb{T}^n, \sigma_n)$, Seite 23
$\mathcal{O}(U)$	Menge der holomorphen Funktionen $U \to \mathbb{C}$ auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}^n$, Seite 19
$\Lambda_N(f)$	N-ter Cesàro-Mittelwert einer Funktion f, Seite 75
$\mathrm{L}^p(X, \mu)$	Banachraum der zur p-ten Potenz μ-integrierbaren Funktionen $X \to \mathbb{C}$, Seite 8
$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$	Hilbertraumtensorprodukt der Hilberträume $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$
M_g	Multiplikationsoperator bezüglich einer Funktion g, Seite 36
P_n	Poissonkern auf $\mathbb{D}^n$, Seite 13
$\partial_\circ \mathrm{P}$	Ausgezeichneter Rand des Polyzylinders P, Seite 31
$\mathrm{P}[f]$	Poisson-Integral einer Funktion f, Seite 13
$\mathcal{L}^p(X, \mu)$	Raum der zur p-ten Potenz μ-integrierbaren Funktionen $X \to \mathbb{C}$, Seite 7
$\mathbb{C}[z]$	Menge der Polynome in n Unbekannten, Seite 22
$\mathrm{P}_r^n(z)$	Polyzylinder in $\mathbb{C}^n$ mit Mittelpunkt z und Multiradius $r \in [0, \infty)^n$, Seite 7
Q_α	Orthogonale Projektion von $\mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu)$ auf $\mathcal{H}_\alpha$, Seite 54
$\mathcal{H}_\alpha$	Raum der quasi-homogenen Funktionen vom Grad $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, Seite 54
$\mathrm{Res}(h, z)$	Residuum der holomorphen Funktion h im Punkt z
σ	Auf 1 normiertes Haar-Maß auf $\mathbb{T}$, Seite 8
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{L}^2}$	Skalarprodukt auf dem Hilbertraum der quadratintegrierbaren Funktionen
$\mathrm{C}(X)$	Raum der stetigen Funktionen $X \to \mathbb{C}$ auf einem topologischen Raum X, Seite 9
$\mathrm{A}_\nu^{2\perp}$	Orthogonales Komplement von A_ν^2 in $\mathrm{L}^2(\mathbb{D}^n, \nu)$, Seite 60
$\mathrm{L}(X)$	Vektorraum der linearen, stetigen Operatoren auf einem normierten Raum X

$\mathrm{L}(X,Y)$	Vektorraum der linearen, stetigen Operatoren von einem normierten Raum X in einen normierten Raum Y, Seite 11
$\mathbb{T}^n$	Ausgezeichneter Rand von $\mathbb{D}^n$, Seite 7
w - lim	Konvergenz bezüglich der schwachen Topologie, Seite 11
WOT - lim	Konvergenz bezüglich der schwachen Operatortopologie, Seite 11
w* - lim	Konvergenz bezüglich der schwach*-Topologie, Seite 10
V^*	Topologischer Dualraum des normierten Raums V, Seite 10

Literaturverzeichnis

[1] P. Ahern, E. H. Youssfi, and K. Zhu. *Compactness of Hankel Operators on Hardy-Sobolev spaces of the polydisc.* J. Operator Theory 61(2), 301-312, 2009.

[2] H. Amann and J. Escher. *Analysis III.* Birkhäuser, Basel, 2008.

[3] M. Bakonyi and D. Timotin. *On a conjecture of Cotlar and Sadosky on multidimensional Hankel Operators.* C. R. Acad. Sci. Paris, t. 325, Serie I, 1071-1075, 1997.

[4] V. I. Bogachev. *Measure Theory / Vol. 1.* Springer, Berlin, 2007.

[5] D. L. Cohn. *Measure Theory.* Birkhäuser, Boston, 1980.

[6] M. Cotlar and C. Sadosky. *The Helson-Szego theorem in L^p of the bidimensional torus.* Contemporary Mathematics 107, 19-37, 1990.

[7] M. Cotlar and C. Sadosky. *Two Distinguished Subspaces of Product BMO and the Nehari-AAK Theory for Hankel operators in the torus.* Integral Equations Operator Theory 26, 273-304, 1996.

[8] J. Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie.* Springer-Verlag, Berlin, 2011.

[9] J. Eschmeier. *Banachräume analytischer Funktionen.* unveröffentlichtes Vorlesungsskript, 2006.

[10] J. Eschmeier. *Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher.* Vorlesungsskript, Universität des Saarlandes, 2010.

[11] E. Freitag and R. Busam. *Funktionentheorie 1.* Springer-Verlag, Heidelberg, 2006.

[12] D. Fremlin. *Measure Theory: Broad Foundations.* University of Essex, 2009.

[13] K. Fritzsche and H. Grauert. *From Holomorphic Functions to Complex Manifolds.* Springer-Verlag, New York, 2002.

[14] P. Hartman. *On completely continuous Hankel matrices.* Proc. Amer. Math. Soc. 9, 862-866, 1958.

[15] R. V. Kadinson and J. R. Ringrose. *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Vol. 1: Elementary Theory.* Academic Press, New York, 1983.

[16] Y. Katznelson. *An Introduction to Harmonic Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[17] P. Koosis. *Introduction to* H^p *Spaces.* Cambridge Univerity Press, Cambridge, 1998.

[18] T. Le. *Compact Hankel Operators on Generalized Bergman Spaces of the Polydisc.* Integral Equations Operator Theory 67, 425 - 438, 2010.

[19] T. Le. *On Toeplitz operators on Bergman spaces of the unit polydisk.* Proc. Am. Math. Soc. 138, 275 - 285, 2010.

[20] R. A. Martínez-Avendano and P. Rosenthal. *An Introduction to Operators on Hardy-Hilbert Space.* Springer-Verlag, New York, 2007.

[21] G. J. Murphy. *C*-Algebras and Operator Theory.* Academic Press, San Diego, 1990.

[22] Z. Nehari. *On bounded bilinear forms.* Ann. of Math. vol. 65 pp. 153-162, 1957.

[23] N. K. Nikol'skii. *Operators, Functions, and Systems: An Easy Reading.* Amer. Math. Soc., University of Bordeaux I, 2002.

[24] J. R. Partington. *An Introduction to Hankel Operators.* Cambridge University Press, New York, 1989.

[25] V. Peller. *Hankel Operators and Their Applications.* Springer-Verlag, New York, 2003.

[26] W. Rudin. *Function theory in polydiscs.* W. A. Benjamin, New York, 1969.

[27] W. Rudin. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill Science, Singapur, 1987.

[28] J. Shohat and J. Tamarkin. *The Problem of Moments.* Amer. Math. Soc., New York, 1970.

[29] K. Stroethoff. *Compact Hankel Operators on the Bergman spaces of the unit ball and polydisc in* $\mathbb{C}^n$. J. Operator Theory 23(1), 153-170, 1990.

[30] D. Werner. *Funktionalanalysis.* Springer, Berlin, 2011.

[31] D. Zheng. *Toeplitz operators and Hankel operators.* Integral Equations Operator Theory 12(2), 280-299, 1989.

[32] K. Zhu. *Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball.* Springer, New York, 2005.