Das Randverhalten der Berezin-Transformierten auf funktionalen Hilberträumen

Bachelorarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science
im Studiengang Mathematik
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät I
- Mathematik und Informatik -
der Universität des Saarlandes

von

Elena Kreutzer

Saarbrücken, 2011

Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Saarbrücken, den

(Elena Kreutzer)

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In ihrer Arbeit „Spectral inclusion theorems“([7]) dient R. Douglas und J. Eschmeier die verallgemeinerte Berezin-Transformation als Hilfsmittel, um interessante Ergebnisse über Multiplikatorentupel auf funktionalen Hilberträumen zu beweisen. Unter anderem gelingt es ihnen mit Hilfe dieser Transformation, das untere Semi-Fredholm-Spektrum eines Multiplikatorentupels zu charakterisieren. Doch die Berezin-Transformation erweist sich nicht nur als nützliches Hilfsmittel, um die Theorie der funktionalen Hilberträume voranzutreiben, sie besitzt auch selbst interessante Eigenschaften.
So untersuchen beispielsweise K. Davidson und R. Douglas in [6] das Verhalten der verallgemeinerten Berezin-Transformation vor dem Hintergrund der quasi-freien Hilbertmoduln. Dabei sind nicht nur die Eigenschaften der Berezin-Transformation selbst von Interesse, sondern vor allem die der verallgemeinerten Berezin-Transformierten eines Operators X. Besonders deren Randverhalten wird ausführlich dargelegt. Es werden beispielsweise Bedingungen angegeben, unter denen für einen Mutliplikationsoperator der Grenzwert seiner Berezin-Transfomierten gegen einen Randpunkt ihrer Definitionsmenge existiert. In diesem Zusammenhang fließen Ergebnisse über Peakpunkte für uniforme Algebren mit ein, die A. Izzo in [11] zur Verfügung gestellt hat.
Auch Arazy und Engliš befassen sich in [1] mit der Berezin-Transformation, sie behandeln dort jedoch einen Spezialfall, in dem man die Berezin-Transformierte mit Hilfe eines Integrals darstellen kann. Ziel dieser Arbeit wird es sein, einen Überblick über die Erkenntnisse zu liefern, die in den genannten Artikeln über die Berezin-Transformierte und ihr Randverhalten gewonnen wurden. Den Rahmen bilden dabei die funktionalen Hilberträume und die Definition der Berezin-Transformation, wie sie in [7] gegeben wird. Die Ergebnisse von Davidson und Douglas sollen dabei, sofern möglich, auf den Fall der funktionalen Hilberträume übertragen werden. Weiterhin werden als Anwendung Erkenntnisse über Multiplikationsoperatoren gegeben, die mit Hilfe der Berezin-Transformation gezeigt werden können. In diesem Zusammenhang gehen wir auch noch kurz auf den Drury-Arveson Raum ein. Wir behandeln unter anderem einen Satz, den Costea, Sawyer und Wick [5] bei der Lösung des Corona-Problems für den Drury-Arveson Raum verwendet haben.
Im letzten Kapitel dient der Hardyraum als Beispiel. Hier können die Ergebnisse über die Berezin-Transformation konkretisiert werden. Insbesondere zeigen wir, dass über dem klassischen Hardyraum auf dem Einheitskreis in $\mathbb{C}$ die Berezin-Transformierte eines Toeplitz-Operators mit stetigem Symbol mit dem Poisson-Integral des Symbols übereinstimmt. In diesem Spezialfall liefern die vorher erzielten, allgemeinen Ergebnisse über das Randverhalten der Berezin-Transformation eine Lösung des Dirichlet-Problems über der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$.

Ich möchte mich am Ende dieser Einleitung bei allen bedanken, die mir beim Anfertigen dieser Arbeit und während meines Studiums zur Seite gestanden haben. Mein besonderer Dank gilt Professor Jörg Eschmeier für die ausgezeichnete Betreuung während der letzten Monate. Weiterhin möchte ich mich bei meinen Eltern, meinem Bruder Florian, meinen Großeltern und meinen Freunden für die moralische Untersützung bedanken. Darüber hinaus danke ich Serjoscha Ziegler, Phil Servatius, Kristina Prinz und meinen Eltern für das Korrekturlesen dieser Arbeit, sowie Michael Hartz, Sebastian Langendörfer und Katrin Bardyszewski, die für meine Fragen immer ein offenes Ohr hatten.

2 Vorbemerkungen

Bevor wir uns dem eigentlichen Thema, der Berezin-Transformation, zuwenden, sollen hier zunächst einige Notationen festgelegt und grundlegende Tatsachen erläutert werden.

2.1 Funktionale Hilberträume

In dieser Arbeit wird das Verhalten der Berezin-Transformation auf funktionalen Hilberträumen untersucht, deshalb erscheint es sinnvoll, noch einmal an die Definition eines funktionalen Hilbertraumes zu erinnern.

Definition 2.1. *Sei also E ein komplexer Hilbertraum, Ω eine beliebige Menge und E^Ω die Menge aller Abbildungen von Ω nach E. Dann nennt man einen Hilbertraum $H \subset E^\Omega$ funktional, falls alle Punktauswertungen*

$$\delta_z : H \to E, f \mapsto f(z)$$

stetig sind.

Bemerkung 2.2. *Sei $H \subset E^\Omega$ ein funktionaler Hilbertraum. Dann definiert*

$$K : \Omega \times \Omega \to L(E), K(z,w) = \delta_z \delta_w^*$$

die eindeutige $L(E)$-wertige Abbildung auf $\Omega \times \Omega$ mit

1. *$K(\cdot, w)x \in H$ für $x \in E, w \in \Omega$*
2. *$\langle f, K(\cdot, w)x \rangle = \langle f(w), x \rangle$ für $f \in H, w \in \Omega, x \in E$.*

Man nennt K den reproduzierenden Kern von H.

Funktionale Hilberträume hängen eng mit positv definiten Abbildungen zusammen.

Definition 2.3. *Eine Abbildung*

$$K : \Omega \times \Omega \to L(E)$$

über einer beliebigen Menge Ω heißt positiv definit, wenn

$$\sum_{i,j=1}^{n} \langle K(z_i, z_j)x_j, x_i \rangle_E \geq 0$$

für alle endlichen Folgen $(z_i)_{i=1}^n$ in Ω und $(x_i)_{i=1}^n$ in E gilt.

Unter anderem wird in [3] gezeigt, dass jede positiv definite Abbildung Kern eines eindeutig bestimmten funktionalen Hilbertraumes ist. Umgekehrt ist der reproduzierende Kern eines funktionalen Hilbertraumes immer positiv definit. Ein anderes wichtiges Resultat über funktionale Hilberträume, das in dieser Arbeit Anwendung findet, ist der Satz von Kolmogorov. Dieser besagt, dass man jede positiv definite Abbildung

$$K : \Omega \times \Omega \to L(E)$$

faktorisieren kann als

$$K(z,w) = k(z)^* k(w)$$

mit einer Abbildung

$$k : \Omega \to L(E,F)$$

und einem geeigneten Hilbertraum F. Ein Beweis dazu findet sich ebenfalls in [3]. Das folgende Lemma ist oft hilfreich, wenn man die positive Definitheit einer Abbildung zeigen will.

Lemma 2.4. *Seien $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ eine beliebige Menge, E, F Hilberträume und*

$$K : \Omega \times \Omega \to L(E)$$

eine positiv definite Abbildung. Dann ist für jede Abbildung

$$A : \Omega \to L(F,E)$$

auch die Abbildung

$$K_0 : \Omega \times \Omega \to L(F), K_0(z,w) = A(z)^* K(z,w) A(w)$$

positiv definit.

Beweis. Seien $(z_i)_{i=1}^m$, $(x_i)_{i=1}^m$ endliche Folgen in Ω beziehungsweise F.
Dann ist $(A(z_i)x_i)_{i=1}^m$ eine endliche Folge in E und es gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m \langle K_0(z_i,z_j)x_j, x_i\rangle &= \sum_{i=1}^m \langle A(z_i)^* K(z_i,z_j) A(z_j) x_j, x_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \langle K(z_i,z_j) A(z_j) x_j, A(z_i) x_i\rangle \geq 0\end{aligned}$$

und somit ist K_0 positiv definit. □

Eine wichtige Rolle in dieser Arbeit als Beispiel für einen funktionalen Hilbertraum spielt der sogenannte Drury-Arveson Raum, der folgendermaßen definiert ist:

Definition 2.5. *Sei*

$$\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C}^n; \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 < 1\}$$

die offene Einheitskugel im $\mathbb{C}^n$ *und*

$$K : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{C}, K(z,w) = \frac{1}{1 - \langle z, w\rangle_{\mathbb{C}^n}}.$$

Man kann zeigen ([8]), dass die Abbildung K positiv definit ist und dass der zugehörige funktionale Hilbertraum $H(\mathbb{B}) = H(K)$ *sich darstellen lässt als*

$$H(\mathbb{B}) = \{f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \in \mathcal{O}(\mathbb{B}); \|f\|^2 = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{|a_\alpha|}{\gamma_\alpha} \infty\},$$

wobei $\gamma_\alpha = \frac{|\alpha|!}{\alpha!}$ *für* $\alpha \in \mathbb{N}^n$. *Diesen Hilbertraum nennt man den Drury-Arveson Raum. Für einen komplexen Hilbertraum E sei der E-wertige Drury-Arveson Raum* $H(\mathbb{B}, E)$ *der von der Abbildung*

$$K_E : \Omega \times \Omega \to L(E), K_E(z,w) = K(z,w)1_E$$

erzeugte funktionale Hilbertraum.

Außerdem werden wir an dieser Stelle den Hardyraum definieren, den wir in Korollar 6.24 betrachten wollen.

Definition 2.6. *Sei* $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\} \subset \mathbb{C}$ *die offene Einheitskreisscheibe in* $\mathbb{C}$. *Die Menge*

$$H^2 = \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}); f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \text{ mit } (\mathrm{a_k})_{\mathrm{k}\in\mathbb{N}} \in \mathrm{l}^2\}$$

ist offensichtlich ein linearer Teilraum von $\mathcal{O}(\mathbb{D})$. *Wir nennen* H^2 *den Hardyraum.*

Lemma 2.7. *Definiert man für zwei Funktionen* $f, g \in H^2$ *mit Taylorentwicklung*

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

das Skalarprodukt von f und g durch

$$\langle f, g\rangle_{H^2} = \langle (a_k)_{k\in\mathbb{N}}, (b_k)_{k\in\mathbb{N}}\rangle_{l^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_k \overline{b_k},$$

so wird H^2 *zu einem Hilbertraum. Es stellt sich heraus, dass der Hardyraum sogar ein funktionaler Hilbertraum mit reproduzierendem Kern*

$$K : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{C}, (z,w) \mapsto \frac{1}{1 - z\bar{w}}$$

ist.

Beweis. Da die Taylorentwicklung einer Funktion eindeutig ist, sieht man sofort, dass H^2 isomorph zum Raum l^2 der quadratsummierbaren Folgen ist vermöge der Abbildung

$$l : H^2 \to l^2, f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \mapsto (a_k)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Der Raum l^2 ist ein Hilbertraum, deshalb wird durch die obige Formel ein vollständiges Skalarprodukt auf H^2 definiert. Für festes $z \in \mathbb{D}$ liegt die Folge

$$(z^k)_{k\in\mathbb{N}}$$

in l^2, denn

$$|z| < 1.$$

Wir rechnen mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung nach, dass für

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in H^2$$

gilt

$$|\delta_z(f)| = |f(z)| = |\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k| \leq (\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=0}^{\infty} |z|^{2k})^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{H^2} \frac{1}{(1-|z|^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Dies zeigt die Stetigkeit der Punktauswertungen auf H^2, der Hardyraum ist demnach ein funktionaler Hilbertraum. Es existiert folglich ein reproduzierender Kern

$$K : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{C}$$

für H^2. Für eine Orthonormalbasis $(e_i)_{i\in I}$ von H^2 kann man diese Abbildung darstellen als

$$K(z,w) = \sum_{i\in I} e_i(z)\overline{e_i(w)},$$

denn da für festes $w \in \mathbb{D}$ die Funktion $K(\cdot, w)$ ein Element von H^2 ist, gilt

$$K(\cdot, w) = \sum_{i\in I} \langle K(\cdot, w), e_i\rangle e_i = \sum_{i\in I} \overline{\langle e_i, K(\cdot, w)\rangle e_i} = \sum_{i\in I} \overline{e_i(w)} e_i.$$

Wegen der Stetigkeit der Punktauswertungen erhält man für alle $z, w \in \mathbb{D}$

$$K(z,w) = \sum_{i\in I} e_i(z)\overline{e_i(w)}.$$

Das Orthonormalsystem der Funktionen z^k für $k \in \mathbb{N}$ bildet eine Orthonormalbasis von H^2, denn man rechnet leicht nach, dass für alle $f \in H^2$ gilt

$$\|f\|_{H^2} = (\sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle f, z^k\rangle_{H^2}|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Es folgt

$$K(z,w) = \sum_{i \in I} e_i(z)\overline{e_i(w)} = \sum_{k \in \mathbb{N}} z^k \overline{w^k} = \frac{1}{1 - z\overline{w}}$$

für alle $z, w \in \mathbb{D}$. □

Bei der Arbeit mit Hardyräumen spielt außerdem die Fourier-Transformation eine Rolle.

Definition 2.8. *Sei*

$$\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$$

das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$ *und*

$$m : \mathcal{B}(\partial\mathbb{D}) \to [0,1], m(A) = \frac{1}{2\pi}\lambda(\{t \in [-\pi, \pi]; e^{it} \in A\})$$

das normalisierte Lebesguemaß auf dem Einheitskreis $\partial\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$. *Für eine Funktion* $f \in L^2(m)$ *und* $k \in \mathbb{Z}$ *nennen wir*

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} f(e^{it})e^{-ikt} d\lambda(t) = \int_{\partial\mathbb{D}} f(z)z^{-k} dm(z)$$

den k*-ten Fourierkoeffizienten von* f *und die Funktion*

$$\hat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}, k \mapsto \hat{f}(k)$$

die Fourier-Transformierte von f.

Außerdem werden wir in Zusammenhang mit Hardyräumen Kenntnisse über die sogenannte Disk-Algebra benötigen.

Definition 2.9. *Sei* $\mathbb{D}$ *die offene Einheitskreisscheibe in* $\mathbb{C}$. *Wir definieren die Disk-Algebra als*

$$A(\mathbb{D}) = \{f \in C(\overline{\mathbb{D}}); f\mid_{\mathbb{D}} \text{ holomorph}\}.$$

Bemerkung 2.10. *Man beachte, dass*

$$(A(\mathbb{D}), \|f\|_\infty)$$

eine Banachalgebra ist mit

$$A \subset H^2,$$

und dass die zugehörige Inklusionsabbildung kontraktiv ist.

Schließlich werden wir bei unserer Arbeit mit Hardyräumen noch das Poisson-Integral betrachten.

Definition 2.11. *Sei $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$. Wir definieren den Poisson-Kern an der Stelle z als*

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}$$

und das Poisson-Integral einer Funktion $f \in C(\partial\mathbb{D})$ als

$$\tilde{f} : \mathbb{D} \to \mathbb{C}, \tilde{f}(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) P_r(\theta - t) d\lambda(t).$$

In Kapitel 3, §3 in [4] wird gezeigt, dass

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta) + \mathrm{r}^2}$$

gilt.

In Kapitel 4 stehen funktionale Hilberträume H(E) im Vordergrund, die einen Kern der Form

$$K_E : \Omega \times \Omega \to L(E), K_E(z, w) = K(z, w)1_E$$

mit einer skalarwertigen positiv definiten Abbildung

$$K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$$

besitzen. Diese funktionalen Hilberträume kann man kanonisch mit den Hilbertraumtensorprodukten $H(K) \otimes E$ identifizieren, was den Umgang mit ihnen erleichtert. Dies wird in [8] ausgeführt. Hierbei sei H(K) der von der Abbildung K erzeugte skalarwertige funktionale Hilbertraum.
Schließlich soll hier noch die gemeinsame Nullstellenmenge eines funktionalen Hilbertraumes definiert werden.

Definition 2.12. *Seien $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ eine offene und beschränkte Menge und E ein Hilbertraum. Sei zusätzlich $H \subset E^\Omega$ ein funktionaler Hilbertraum mit reproduzierendem Kern $K : \Omega \times \Omega \to L(E)$. Dann heißt*

$$Z(H) = \bigcap \{z \in \Omega; f(z) = 0 \text{ für alle } f \in H\}$$

die gemeinsame Nullstellenmenge von H.

2.2 Multiplikatoren

Einige zentrale Ergebnisse dieser Arbeit betreffen das Verhalten der Berezin-Transformierten von Multiplikationsoperatoren. Deshalb soll hier auch noch kurz auf Multiplikatoren eingegangen werden.

Definition 2.13. *Für eine Menge Ω und zwei Hilberträume E_1 und E_2 seien H_1 und H_2 funktionale Hilbertäume mit $H_i \subset E_i^\Omega$ und reproduzierenden Kernen $K_i : \Omega \times \Omega \to L(E_i)$. Man nennt die Elemente von*

$$\mathcal{M}(H_1, H_2) = \{\varphi : \Omega \to L(E_1, E_2); \varphi H_1 \subset H_2\}$$

Multiplikatoren von H_1 nach H_2. Hierbei sei für $f : \Omega \to E_1$ die Abbildung $\varphi f : \Omega \to E_2$ definiert durch:

$$(\varphi f)(z) = \varphi(z) f(z) \;\; (z \in \Omega).$$

Ist $\varphi \in M(H_1, H_2)$, so heißt

$$M_\varphi : H_1 \to H_2, f \mapsto \varphi f$$

der Multiplikationsoperator mit Symbol φ.

Multiplikationsoperatoren sind stetig linear, was sich mit dem Graphensatz beweisen lässt. Durch Nachrechnen erhält man für $\varphi \in \mathcal{M}(H_1, H_2), z \in \Omega$ und $y \in E_2$ leicht, dass

$$M_\varphi^* K_2(\cdot, z) y = K_1(\cdot, z) \varphi(z)^* y.$$

Um zu testen, ob eine Abbildung ein Multiplikator ist, hat sich der folgende Satz als hilfreich erwiesen.

Satz 2.14. *Für eine Abbildung $\varphi : \Omega \to L(E_1, E_2)$ sind äquivalent:*

1. $\varphi \in \mathcal{M}(H_1, H_2)$,
2. *Es gibt ein $c > 0$ so, dass die Abbildung*

$$\gamma_c : \Omega \times \Omega \to L(E_2), (z, w) \mapsto c^2 K_2(z, w) - \varphi(z) K_1(z, w) \varphi(w)^*$$

   positiv definit ist.

In diesem Fall gilt

$$\|M_\phi\| = \min\{c \geq 0; \gamma_c \text{ist positiv definit}\}.$$

Im Spezialfall $E_1 = E_2 = \mathbb{C}$, $H_1 = H_2 = H(K)$ mit einer positiv definiten Abbildung

$$K \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$$

liefert das außerdem

$$\|\phi\|_{\infty, \Omega} \leq \|M_\phi\|.$$

Beweis. Einen Beweis dieses Satzes findet man in [8]. □

2.3 Operatoren auf Banachräumen

In den Beweisen einiger zentraler Sätze tauchen immer wieder Operatoren des Typs $B = AA^*$ auf, wobei A ein beliebiger Operator mit abgeschlossenem Bild ist. In diesem Fall kennt man auch Kern und Bild des Operators B.

Lemma 2.15. *Seien E,F Hilberträume und $A \in L(E,F)$ ein Operator mit abgeschlossenem Bild. Dann ist das Bild des Operators $B = AA^*$ gleich dem Bild von A, außerdem besitzt B den selben Kern wie A^*.*

Beweis. Dass

$$\ker A^* \subset \ker AA^*$$

gilt, ist offensichtlich. Sei nun $x \in \ker(AA^*)$. Dann gilt

$$\|A^*x\|^2 = \langle A^*x, A^*x\rangle = \langle x, AA^*x\rangle = 0,$$

demnach liegt x auch im Kern von A^*. Die Inklusion $\mathrm{Im}AA^* \subset \mathrm{Im}A$ ist trivial, für die umgekehrte Inklusion sei x im Bild von AA^*. Dann liegt x in $A(\mathrm{Im}(A^*))$. Die Abgeschlossenheit von Im(A) ist äquivalent zur Abgeschlossenheit von $\mathrm{Im}(A^*)$. Daher erhält man

$$A(\mathrm{Im}A^*) = A((\ker A)^\perp) = \mathrm{Im}A.$$

□

In Lemma 3.8 benutzen wir den Minimalmodul eines Operators, um Erkenntnisse über die Berezin-Transformierte von Operatoren zu gewinnen. Dieser soll hier definiert werden.

Definition 2.16. *Seien X, Y Banachräume, $T \in L(X,Y)$. Dann definiert man den Minimalmodul von T als*

$$m(T) = \inf_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

Weiterhin wird in dem oben genannten Lemma das folgende Ergebnis nützlich sein.

Lemma 2.17. *Seien X, Y Banachräume, $T \in L(X,Y)$ invertierbar. Dann gilt:*

$$\|T^{-1}\| = \frac{1}{m(T)}.$$

Beweis. Es gilt für alle $x \in X$:

$$\|x\| = \|T^{-1}Tx\| \leq \|T^{-1}\|\|Tx\|,$$

woraus folgt, dass

$$\|T^{-1}\| \geq \sup_{x \in X\setminus\{0\}} \frac{\|x\|}{\|Tx\|}$$

und man erhält

$$\frac{1}{m(T)} = \frac{1}{\inf\limits_{\|x\|=1} \|Tx\|} = \sup_{\|x\|=1} \frac{1}{\|Tx\|} \leq \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|x\|}{\|Tx\|} \leq \|T^{-1}\|.$$

Nimmt man an $\|T^{-1}\|$ wäre echt größer als $\frac{1}{m(T)}$, so folgt, dass ein $y \in Y$ existiert mit

$$\frac{\|T^{-1}(y)\|}{\|y\|} > \frac{1}{\inf\limits_{\|x\|=1} \|Tx\|}.$$

Dann gibt es ein $x_0 \in X$ mit $Tx_0 = y$ und

$$\frac{\|x_0\|}{\|Tx_0\|} > \frac{1}{\inf\limits_{\|x\|=1} \|Tx\|},$$

was bedeutet, dass

$$\|T(\frac{x_0}{\|x_0\|})\| = \frac{\|Tx_0\|}{\|x_0\|} < \inf_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

Dies ist offensichtlich ein Widerspruch. Also war die Annahme falsch und es gilt

$$\|T^{-1}\| = \frac{1}{m(T)}.$$

□

Schaut man sich nun die Polarzerlegung von δ_z^* aus 2.1.1 an, so erhält man, weil V_z eine Isometrie ist:

$$\|Q_z^{-1}\| = \frac{1}{m(Q_z)} = \frac{1}{\inf\limits_{\|x\|=1} \|Q_z x\|} = \frac{1}{\inf\limits_{\|x\|=1} \|V_z Q_z x\|} = \frac{1}{m(\delta_z^*)}.$$

Im Beweis von Satz 4.2 wird zusätzlich das folgende Resultat benötigt:

Lemma 2.18. *Sei G ein Hilbertraum. Sind $A, B \in L(G)$ selbstadjungierte Operatoren und ist $c \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl mit*

$$A \geq 2c1_G$$

und

$$B \leq c1_G,$$

so ergeben sich für jeden Operator $Q \in L(G)$ folgende Ungleichungen:

$$\langle (A - B)x, x\rangle \geq c\langle x, x\rangle$$

und

$$\langle Q^*(A - B)Qx, x\rangle \geq c\langle Q^*Qx, x\rangle$$

Beweis. Man rechnet nach, dass gilt

$$\langle (A-B)x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle - \langle Bx, x\rangle \geq c\langle x, x\rangle$$

und

$$\langle Q^*(A-B)Qx, x\rangle = \langle (A-B)Qx, Qx\rangle \geq c\langle Q^*Qx, x\rangle.$$

□

Es soll hier noch das untere Semi-Fredholm-Spektrum für endliche Operatorentupel definiert werden, das in Korollar 4.3 eine Rolle spielen wird.

Definition 2.19. *Sei H ein Hilbertraum, $T = (T_1, \dots, T_n) \in L(H)^n$ ein Tupel stetig linearer Operatoren. Dann nennt man die Menge*

$$\sigma_{re}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}^n; \mathrm{dim}(\mathrm{H}/\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}(\lambda_\mathrm{i} - \mathrm{T}_\mathrm{i})\mathrm{H}) = \infty\}$$

das untere Semi-Fredholm-Spektrum von T.

In Kapitel 6 werden wir mehrmals mit uniformen Algebren arbeiten, weshalb wir hier noch festlegen wollen, wann wir eine Algebra uniform nennen.

Definition 2.20. *Sei X ein kompakter Hausdorffraum. Wir nennen eine bezüglich der Supremumsnorm abgeschlossene Teilalgebra A von $C(X)$ eine uniforme Algebra, falls A die Punkte in X trennt und die konstanten Funktionen enthält.*

3 Die Berezin-Transformation

3.1 Die Polarzerlegung

Sei $H \subset E^{\Omega}$ ein funktionaler Hilbertraum. Wie zuvor bezeichnen wir mit

$$\delta_z : H \to E, f \mapsto f(z)$$

die Punktauswertung auf H im Punkt $z \in \Omega$. Bevor wir die Berezin-Transformierte von Operatoren auf H definieren, betrachten wir zunächst die Polarzerlegung des Operators

$$\delta_z^* : E \to H.$$

Lemma 3.1. *Seien Ω eine beliebige Menge, E ein Hilbertraum und $H \subset E^{\Omega}$ ein funktionaler Hilbertraum mit reproduzierendem Kern*

$$K : \Omega \times \Omega \to L(E)$$

so, dass die Punktauswertungen

$$\delta_z : H \to E, f \mapsto f(z)$$

für alle $z \in \Omega$ surjektiv sind.
Dann gilt:

1. *Der durch $Q_z = \sqrt{\delta_z \delta_z^*} \in L(E)$ definierte Operator ist positiv und invertierbar für alle $z \in \Omega$.*

2. *Für alle $z \in \Omega$ ist der eindeutig bestimmte Operator $V_z \in L(E, H)$ mit $\delta_z^* = V_z Q_z$ eine Isometrie.*

Beweis. Sei $z \in \Omega$ beliebig.
Der Operator $\delta_z \delta_z^*$ ist positiv und besitzt daher eine positive Quadratwurzel. Somit ist Q_z wohldefiniert und positiv. Wegen

$$\mathrm{Im}(\delta_z \delta_z^*) = \mathrm{Im}(\delta_z)$$

nach Lemma 2.15 ist $\delta_z \delta_z^*$ surjektiv, da δ_z nach Voraussetzung surjektiv war. Weiterhin gilt wegen der Selbstadjungiertheit von $\delta_z \delta_z^*$

$$\ker(\delta_z \delta_z^*) = (\mathrm{Im}(\delta_z \delta_z^*))^{\perp} = E^{\perp} = \{0\},$$

also ist $\delta_z \delta_z^*$ bijektiv und somit nach dem Prinzip der stetigen Inversen invertierbar in L(E). Daraus folgt, dass das Spektrum von $\delta_z \delta_z^*$ die Null nicht enthält. Nach dem

spektralen Abbildungssatz liegt die Null dann auch nicht im Spektrum von Q_z. Somit ist Q_z invertierbar in L(E).
Der Operator V_z ist für $z \in \Omega$ durch $V_z = \delta_z^* Q_z^{-1}$ definiert.
Wegen

$$\|Q_z x\|^2 = \langle \delta_z \delta_z^* x, x \rangle = \|\delta_z^* x\|^2$$

ist V_z isometrisch für alle $z \in \Omega$. □

Die Zerlegung

$$\delta_z^* = v_z Q_z$$

nennen wir im Folgenden die Polarzerlegung von δ_z^*.

3.2 Die Berezin-Transformation

Mit Hilfe dieser Polarzerlegung kann man die verallgemeinerte Berezin-Transformierte eines Operators $X \in L(H)$ definieren.

Definition 3.2. *Sei Ω eine beliebige Menge, E ein Hilbertraum und $H \subset E^\Omega$ ein funktionaler Hilbertraum, so dass alle Punktauswertungen*

$$\delta_z : H \to E$$

surjektiv sind. Sei $X \in L(H)$ ein Operator und $\delta_z^* = V_z Q_z$ die Polarzerlegung von δ_z^* gemäß Lemma 3.1
Dann heißt die Abbildung

$$\Gamma(X) : \Omega \to L(E),\ \Gamma(X)(z) = V_z^* X V_z$$

die Berezin-Transformierte von X.

Betrachtet man nun die Berezin-Transformation

$$\Gamma : L(H) \to B(\Omega, L(E)),\ X \mapsto \Gamma(X),$$

wobei $B(\Omega, L(E)) = \{F; F : \Omega \to L(E) \text{ beschränkt}\}$, so erhält man schnell einige erste Eigenschaften. Man beachte dabei, dass $B(\Omega, L(E))$ bezüglich der Norm $\|F\| = \|F\|_{\infty,\Omega}$ und der Involution $F^*(z) = F(z)^*$ eine C^*-Algebra ist.

Lemma 3.3. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ eine beliebige Menge, E ein Hilbertraum und $H \subset E^\Omega$ ein funktionaler Hilbertraum so, dass alle Punktauswertungen*

$$\delta_z : H \to E$$

surjektiv sind. Dann ist die Berezin-Transformation wohldefiniert, linear, kontraktiv und verträglich mit der Involution.

Beweis. Seien $X \in L(H)$, $z \in \Omega$ beliebig.
Dann gilt
$$\|\Gamma(X)(z)\| = \|V_z^* X V_z\| \leq \|V_z^*\| \|X\| \|V_z\| = \|X\|.$$
Also erhält man
$$\|\Gamma(X)\|_{\infty,\Omega} \leq \|X\|,$$
was bedeutet, dass $\Gamma(X)$ ein Element von $B(\Omega, L(E))$ ist. Die Berezin-Transformation ist demnach wohldefiniert und kontraktiv.
Seien nun $a \in \mathbb{C}$, $X, Y \in L(H)$ und $z \in \Omega$ beliebig.
Da V_z^* linear ist, folgt die Linearität von Γ mit:

$$\begin{aligned}\Gamma(aX+Y)(z) &= V_z^*(aX+Y)V_z = V_z^*(aX)V_z + V_z^* Y V_z \\ &= aV_z^* X V_z + V_z^* Y V_z = a\Gamma(X)(z) + \Gamma(Y)(z).\end{aligned}$$

Die Verträglichkeit mit den Involutionen ergibt sich aus:

$$\Gamma(X^*)(z) = V_z^* X^* V_z = (V_z^* X V_z)^* = (\Gamma(X)(z))^*$$

für alle $z \in \Omega$. □

Nun wenden wir uns den Eigenschaften der Berezin-Transformierten eines Operators zu. Wir benötigen zunächst das folgende Lemma.

Lemma 3.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Menge, E ein Hilbertraum und $H \subset E^\Omega$ ein funktionaler Hilbertraum, dessen Elemente holomorph sind. Dann ist die Abbildung*

$$g : \Omega \to L(H, E), z \mapsto \delta_z$$

holomorph und damit insbesondere stetig.

Beweis. Nach Satz 5.1 aus [8] ist g genau dann holomorph, wenn für alle $f \in H$ die Funktion
$$\Omega \to E, z \mapsto \delta_z(f) = f(z)$$
holomorph ist. Dies ist aber erfüllt, da die Funktionen aus H als holomorph vorausgesetzt waren. □

Lemma 3.5. *Sei Ω eine offene Menge, E ein Hilbertraum und $H \subset E^\Omega$ ein funktionaler Hilbertraum mit surjektiven Punktauswertungen, dessen Elemente holomorphe Funktionen sind. Dann ist die Berezin-Transformierte eines Operators $X \in L(H)$ stetig.*

Beweis. Nach dem vorhergehenden Lemma ist die Abbildung

$$\Omega \to L(H, E), z \mapsto \delta_z$$

stetig. Damit ist auch die Funktion

$$h : \Omega \to L(E), z \mapsto \delta_z \delta_z^*$$

stetig. Sei $z_0 \in \Omega$ und U eine kompakte Umgebung von z_0. Die Funktion ist stetig, deshalb ist

$$h(U) \subset L(E)$$

kompakt, also auch norm-beschränkt durch eine Konstante R. Für $z \in U$ sind die Operatoren $\delta_z \delta_z^*$ positiv, daher liegen ihre Spektren in dem kompakten Intervall [0,R]. Auf diesem kompakten Intervall kann man die Wurzelfunktion gleichmäßig durch Polynome approximieren. Man erhält also eine Folge $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Polynomen mit

$$\begin{aligned} \| \sqrt{\delta_z \delta_z^*} - p_k(\delta_z \delta_z^*) \| &= \| (\sqrt{\cdot} - p_k)(\delta_z \delta_z^*) \| \\ &\leq \| \sqrt{\cdot} - p_k \|_{\infty, \sigma(\delta_z \delta_z^*)} \\ &\leq \| \sqrt{\cdot} - p_k \|_{\infty, [0,R]} \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

gleichmäßig für alle $z \in U$. Da die Funktionen

$$U \to L(E), z \mapsto p_k(\delta_z \delta_z^*)$$

stetig sind und gleichmäßig auf U gegen die Funktion

$$U \to L(E), z \mapsto \sqrt{\delta_z \delta_z^*}$$

konvergieren, ist die Funktion lokal stetig auf Ω, also stetig. Dann sind aber auch die Funktionen

$$\begin{aligned} \Omega \to L(H, E), z \mapsto Q_z = \sqrt{\delta_z \delta_z^*}, \\ \Omega \to L(H, E), z \mapsto V_z = \delta_z^* Q_z^{-1} \end{aligned}$$

und

$$\Omega \to L(H, E), z \mapsto V_z^*$$

stetig. Für jeden Operator $X \in L(H)$ folgt daher die Stetigkeit der Funktion

$$\Omega \to L(E), z \mapsto \Gamma(X)(z) = V_z^* X V_z.$$

□

Im Folgenden wollen wir das Randverhalten der Berezin-Transformierten von Operatoren auf funktionalen Hilberträumen über beschränkten offenen Mengen $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ näher untersuchen.

Definition 3.6. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ eine offene und beschränkte Menge, (F,t) ein topologischer Raum, $f : \Omega \to (F, t)$ eine Abbildung und $x_0 \in F$.*
Wir schreiben

$$\lim_{z \to \partial\Omega} f(z) = x_0,$$

falls für jede Umgebung U von x_0 ein $\delta > 0$ existiert so, dass

$$f(z) \in U$$

für alle $z \in \Omega$ mit

$$\mathrm{dist(z}, \partial\Omega) < \delta.$$

Man kann nun untersuchen, wie sich die Berezin-Transformierte eines kompakten Operators verhält, wenn z im Sinne von Definition 3.6 gegen den Rand von Ω konvergiert.

Lemma 3.7. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ eine offene und beschränkte Menge, E ein Hilbertraum und $H \subset E^\Omega$ ein funktionaler Hilbertraum so, dass alle Punktauswertungen surjektiv sind. Dann gilt:*

1. $\lim_{z\to\partial\Omega} V_z = 0$ *in (L(E,H),τ_{wot}) genau dann, wenn* $\lim_{z\to\partial\Omega} \Gamma(C)(z) = 0$ *in (L(E),τ_{sot}) für jeden kompakten Operator C auf H.*
2. $\lim_{z\to\partial\Omega} V_z^* = 0$ *in (L(H,E),τ_{sot}) genau dann, wenn* $\lim_{z\to\partial\Omega} \|\Gamma(C)(z)\| = 0$ *für jeden kompakten Operator C auf H.*

Beweis. Für $f, g \in H$ sei $g \otimes f \in L(H)$ definiert durch

$$g \otimes f(h) = \langle h, f\rangle g.$$

Dann gilt:

$$\Gamma(g \otimes f)(z) = V_z^* g \otimes f V_z = V_z^* \langle \cdot, f\rangle g V_z = \langle V_z(\cdot), f\rangle V_z^* g.$$

1. Wir beweisen zunächst die Implikation von links nach rechts. Es gelte

$$\lim_{z\to\partial\Omega} V_z = 0 \text{ in } (\mathrm{L(E,H)},\tau_{wot}).$$

Sei $(z_k)_{\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Ω mit

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{dist}(z_k, \partial\Omega) = 0$$

und sei $x \in E$. Dann folgt

$$\lim_{k\to\infty} |\langle V_{z_k} x, f\rangle| = 0 \text{ für alle } f \in H.$$

Also konvergiert $V_{z_k}x$ für $k \to \infty$ schwach gegen 0, woraus folgt, dass $CV_{z_k}x$ für alle kompakten Operatoren C auf H norm-konvergent gegen 0 ist. Dies bedeutet, dass

$$\|\Gamma(C)(z_k)(x)\| = \|V_{z_k}^* C V_{z_k} x\| \leq \|V_{z_k}^*\| \|CV_{z_k}x\| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

da $\|V_{z_k}^*\| = 1$.
Somit gilt

$$\lim_{z\to\partial\Omega} \Gamma(C)(z) = 0$$

in (L(E),τ_{sot}) für alle kompakten Operatoren C auf H.

Zum Beweis der umgekehrten Implikation sei

$$\lim_{z\to\partial\Omega} \Gamma(C)(z) = 0$$

in (L(E),τ_{sot}) für jeden kompakten Operator C auf H. Wegen $\|V_z^*\| = 1$ gibt es ein $g \in H$ mit $\|V_z^* g\| = 1$. Folglich gilt für $z \in \Omega$, $x \in E$ und $f \in H$

$$|\langle V_z x, f\rangle| = \|\langle V_z x, f\rangle V_z^* g\| = \|\Gamma(g \otimes f)(z)(x)\| \overset{z\to\partial\Omega}{\longrightarrow} 0,$$

da $g \otimes f$ als Operator mit endlichdimensionalem Bild kompakt ist.

2. Auch hier soll zunächst die Richtung von links nach rechts bewiesen werden. Es gelte also
$$\lim_{z\to\partial\Omega} V_z^* = 0$$
in (L(H,E),τ_{sot}). Die Menge
$$B_0 = \{F \in B(\Omega, L(E));\ \lim_{z\to\partial\Omega} \|F(z)\| = 0\} \subset B(\Omega, L(E))$$
ist abgeschlossen. Denn sind $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in B_0 mit Grenzwert F und $\epsilon > 0$, so existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit
$$\|F_k - F\|_{\infty,\Omega} < \frac{\epsilon}{2}$$
für alle $k \geq k_0$. Außerdem gibt es ein $\delta > 0$ mit
$$\|F_{k_0}(z)\| < \frac{\epsilon}{2}$$
für alle $z \in \Omega$ mit $\operatorname{dist}(z, \partial\Omega) < \delta$. Dann gilt
$$\|F(z)\| \leq \|F_{k_0}(z)\| + \|F_{k_0}(z) - F(z)\| \leq \epsilon$$
für alle $z \in \Omega$ mit $\operatorname{dist}(z, \partial\Omega) < \delta$. Also ist
$$\lim_{z\to\partial\Omega} \|F(z)\| = 0$$
und somit $F \in B_0$. Offensichtlich ist $B_0 \subset B$ ein linearer Teilraum.

Als Kontraktion ist die Berezin-Transformation stetig, damit ist auch $\Gamma^{-1}(B_0) \subset L(H)$ abgeschlossen und wegen der Linearität der Berezin-Transformation außerdem ein Unterraum. Weil die lineare Hülle der Menge M=$\{g \otimes f; f, g \in H\}$ im Raum der kompakten Operatoren auf H dicht liegt, genügt es zu zeigen, dass
$$M \subset \Gamma^{-1}(B_0).$$
Sei also
$$\mathrm{SOT} - \lim_{\mathrm{z}\to\partial\Omega} \mathrm{V}_\mathrm{z}^* = 0$$
und seien $f, g \in H$. Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ergibt sich
$$\|\langle V_z(\cdot), f\rangle\| = \|V_z^* f\|$$
und somit
$$\|\Gamma(g \otimes f)(z)\| = \|\langle V_z(\cdot), f\rangle V_z^* g\| = \|V_z^* f\|\|V_z^* g\| \overset{z\to\partial\Omega}{\longrightarrow} 0.$$

Sei nun umgekehrt
$$\lim_{z\to\partial\Omega} \|\Gamma(C)(z)\| = 0$$
für alle kompakten Operatoren C auf H. Für $f \in H$ ist der Operator $f \otimes f$ kompakt und es folgt
$$\|V_z^* f\|^2 = \|\Gamma(f \otimes f)(z)\| \longrightarrow 0 \text{ für } z \to \partial\Omega$$

□

In der Situation von Lemma 3.7 impliziert die Bedingung

$$\lim_{z\to\partial\Omega} V_z^* = 0 \text{ in } (L(E,H), \tau_{sot}),$$

dass

$$\lim_{z\to\partial\Omega} V_z = 0 \text{ in } (L(E,H), \tau_{wot}).$$

Dies sieht man sehr leicht direkt, aber es folgt natürlich auch aus Lemma 3.7. Mit Hilfe des in 2.16 eingeführten Minimalmoduls erhält man nun zusätzlich das folgende Resultat.

Lemma 3.8. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ eine offene und beschränkte Menge, E ein Hilbertraum und $H \subset E^\Omega$ ein funktionaler Hilbertraum mit surjektiven Punktauswertungen, in dem die beschränkten Funktionen dicht liegen. Gilt*

$$\lim_{z\to\partial\Omega} m(\delta_z^*) = \infty,$$

so folgt

$$\lim_{z\to\partial\Omega} V_z^* = 0 \textit{ in } (L(H,E),\tau_{sot}).$$

Beweis. Seien $z \in \Omega, x \in E$ und $f \in H$ beschränkt. Wegen $V_z x = \delta_z^* Q_z^{-1} x$ gilt

$$\langle V_z^* f, x\rangle = \langle f, V_z x\rangle = \langle f, \delta_z^* Q_z^{-1} x\rangle = \langle f(z), Q_z^{-1} x\rangle = \langle Q_z^{-1} f(z), x\rangle.$$

Also folgt

$$\|V_z^* f\| = \|Q_z^{-1} f(z)\| \leq \|Q_z^{-1}\|\|f(z)\| = \frac{1}{m(\delta_z^*)}\|f(z)\| \overset{z\to\partial\Omega}{\longrightarrow} 0,$$

da $m(\delta_z^*) \overset{z\to\partial\Omega}{\longrightarrow} \infty$ nach Voraussetzung gilt und f beschränkt ist. Sei nun $f \in H$ beliebig. Dann gibt es eine Folge $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ beschränkter Funktionen in H, die bezüglich der Norm auf H gegen f konvergiert. Also findet man zu jedem $\epsilon > 0$ ein $j_0 \in N$ mit

$$\|f_j - f\| < \frac{\epsilon}{2}$$

für alle $j \geq j_0$. Ist $(z_k)_{\in\mathbb{N}}$ nun eine beliebige Folge in Ω, die gegen den Rand von Ω konvergiert, so existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|V_{z_k}^* f_{j_0}\| < \frac{\epsilon}{2}$$

für alle $k \geq k_0$. Man erhält

$$\|V_{z_k}^* f\| \leq \|V_{z_k}^* f_{j_0}\| + \|V_{z_k}^*\|\|f_{j_0} - f\| \leq \|V_{z_k}^* f_{j_0}\| + \|f_{j_0} - f\| \leq 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

für alle $k \geq k_0$. Also konvergiert $\|V_{z_k}^* f\|$ gegen 0. Somit gilt

$$\lim_{z\to\partial\Omega} V_z^* = 0 \text{ in } (\text{L(H,E)},\tau_{sot}).$$

□

3.3 Spezielle funktionale Hilberträume

Für funktionale Hilberträume, deren Kern das Produkt aus einem skalarwertigen Kern und der Identität ist, kann man Q_z und V_z aus Lemma 2.1.1 expliziter angeben. Insbesondere ermöglicht dies Bedingungen anzugeben, unter denen die Voraussetzungen der Lemmata 3.7 und 3.8 erfüllt sind.

Lemma 3.9. *Seien E ein Hilbertraum,*

$$K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$$

positiv definit, H(K) der von K erzeugte funktionale Hilbertraum und $H(E) \subset E^{\Omega}$ *der von der positiv definiten Abbildung*

$$K_E : \Omega \times \Omega \to L(E),\ (z,w) \mapsto K(z,w)1_E$$

erzeugte E-wertige funktionale Hilbertraum. Dann gilt :

1. $\delta_z \in L(H(E),E)$ *ist surjektiv für alle* $z \in \Omega$ *genau dann, wenn* $Z(H(K)) = \emptyset$.
2. *In diesem Fall gilt für die Polarzerlegung von* $\delta_z^* \in L(E,H(E))$*:*

   $$Q_z = \|K(\cdot,z)\|1_E$$

   und

   $$V_z(x) = \frac{K(\cdot,z)}{\|K(\cdot,z)\|}x$$

   für $z \in \Omega$ *und* $x \in E$.
3. *Unter diesen Voraussetzungen sind die folgenden Aussagen äquivalent:*
   (i) $V_z \overset{z\to\partial\Omega}{\longrightarrow} 0$ *in* $(L(E,H(E)),\tau_{wot})$
   (ii) $\frac{K(\cdot,z)}{\|K(\cdot,z)\|} \overset{z\to\partial\Omega}{\longrightarrow} 0$ *in*$(H(K),\tau_w)$
   (iii) $V_z^* \overset{z\to\partial\Omega}{\longrightarrow} 0$ *in* $(L(H(E),E),\tau_{sot})$.

Beweis. 1. Sei $z \in \Omega$ eine gemeinsame Nullstelle für H(K). Dann wäre $K(z,y)x = 0$ für alle $y \in \Omega$ und $x \in E$. Da die lineare Hülle der Menge

$$\{K(\cdot,y)x; y \in \Omega,\ x \in E\}$$

dicht in H(E) liegt, wäre $\delta_z(f) = f(z) = 0$ für alle $f \in H(E)$. Damit ist δ_z nicht surjektiv.
Es gelte nun die rechte Seite. Sei $z \in \Omega$ beliebig. Wähle $f \in H(K)$ mit $f(z) \neq 0$. Da die lineare Hülle der Menge

$$H_0(K) = \{K(\cdot,y); y \in \Omega\}$$

dicht liegt in H(K) und die Punktauswertung in z stetig linear ist, kann f in $H_0(K)$ gewählt werden. Sei also $y \in \Omega$ mit $f = K(\cdot, y)$. Dann ist für $x \in E$ beliebig die Funktion $K(\cdot, y)x$ ein Element von $H(E)$. Also liegt auch

$$\frac{1}{f(z)} K(\cdot, y)x$$

in $H(E)$ und es gilt:

$$\delta_z \frac{1}{f(z)} K(\cdot, y)x = \frac{f(z)}{f(z)} x = x.$$

Also gibt es ein $g \in H(E)$ mit $\delta_z(g) = x$ und δ_z ist somit surjektiv.

2. Es ergibt sich nach Bemerkung 2.2 für $z \in \Omega$, $x \in E$:

$$\delta_z \delta_z^* = K(z, z) 1_E.$$

Mit der Definition von Q_z folgt dann

$$Q_z = \sqrt{\delta_z \delta_z^*} = \sqrt{K(z,z)} 1_E = \sqrt{\langle K(\cdot, z), K(\cdot, z)\rangle} 1_E = \|K(\cdot, z)\| 1_E.$$

Setzt man dieses Ergebnis nun in die Definition von V_z ein, so erhält man für $x \in E$:

$$V_z x = \delta_z^* Q_z^{-1} x = K(\cdot, z) Q_z^{-1} x = K(\cdot, z) \frac{1}{\|K(\cdot, z)\|} x = \frac{K(\cdot, z)}{\|K(\cdot, z)\|} x.$$

3. Wir zeigen zuerst die Implikation $(i) \Rightarrow (ii)$. Dazu sei

$$\lim_{z \to \partial\Omega} V_z = 0 \text{ in } (L(E, H(E)), \tau_{wot}).$$

Für ein beliebiges $f \in H(K)$und einen festen Einheitsvektor $x \in E$ liegt $f \otimes x$ in $H(E) \tilde{=} H(K) \otimes E$ und daher ist

$$\lim_{z \to \partial\Omega} |\langle V_z x, f \otimes x\rangle| = 0.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
|\langle V_z x, f \otimes x\rangle| &= |\langle \frac{K(\cdot, z)}{\|K(\cdot, z)\|} \otimes x, f \otimes x\rangle| \\
&= |\langle \frac{K(\cdot, z)}{\|K(\cdot, z)\|}, f\rangle||\langle x, x\rangle| \\
&= |\langle \frac{K(\cdot, z)}{\|K(\cdot, z)\|}, f\rangle|.
\end{aligned}$$

und deshalb

$$\lim_{z \to \partial\Omega} \langle \frac{K(\cdot, z)}{\|K(\cdot, z)\|}, f\rangle = 0.$$

Weil f beliebig war, erhalten wir wie gewünscht, dass

$$\frac{K(\cdot,z)}{\|K(\cdot,z)\|} \overset{z\to\partial\Omega}{\longrightarrow} 0 \text{ in(H(K)},\tau_w).$$

Die Richtung von $(ii) \Rightarrow (iii)$ ergibt sich folgendermaßen. Die Menge

$$M = \{g \in H \otimes E; \lim_{z\to\partial\Omega} \|V_z^* g\| = 0\} \subset H \otimes E$$

ist norm-abgeschlossen. Denn die Familie $(V_z^*)_{z\in\Omega}$ ist norm-beschränkt, da die Operatoren V_z alle isometrisch sind. Betrachtet man nun eine Folge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in M, die gegen ein $g \in H \otimes E$ konvergiert, so findet man für $\epsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|(g - g_k)\| < \frac{\epsilon}{2}$$

für alle $k \geq k_0$. Weiterhin existiert zu diesem k_0 ein $\delta > 0$ mit

$$\|V_z^* g_{k_0}\| < \frac{\epsilon}{2}$$

für alle $z \in \Omega$ mit $\operatorname{dist}(z, \partial\Omega) < \delta$. Für dieses δ gilt dann

$$\begin{aligned}
\|V_z^* g\| &\leq \|V_z^*(g - g_{k_0})\| + \|V_z^* g_{k_0}\| \\
&\leq \|V_z^*\|\|g - g_{k_0}\| + \|V_z^* g_{k_0}\| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Die Menge M ist also abgeschlossen in $H \otimes E$. Aufgrund der Linearität der V_z^* ist die Menge M außerdem ein linearer Teilraum von $H \otimes E$. Daher genügt es,

$$\lim_{z\to\partial\Omega} \|V_z^* g\| = 0$$

für Funktionen g aus der Menge

$$\{f \otimes x; f \in H(K), x \in E\}$$

zu zeigen, da die lineare Hülle dieser Menge in $H \otimes E$ dicht liegt. Sei also $g = f \otimes x$, $f \in H(K)$, $x \in E$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|V_z^* g\| &= \|V_z^*(f \otimes x)\| \\
&= \|(\delta_z^* Q_z^{-1})^*(f \otimes x)\| \\
&= \|Q_z^{-1}\delta_z(f \otimes x)\| = \|Q_z^{-1} f(z)x\| \\
&= \frac{\|f(z)x\|}{\|K(\cdot,z)\|} = \frac{|\langle K(\cdot,z), f\rangle|}{\|K(\cdot,z)\|}\|x\| \overset{z\to\partial\Omega}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Also folgt

$$V_z^* \stackrel{z\to\partial\Omega}{\longrightarrow} 0 \text{ in } (L(H(E),E),\tau_{sot}).$$

Da aus SOT-Konvergenz WOT-Konvergenz folgt und diese mit der Involution verträglich ist, folgt aus

$$\lim_{z\to\partial\Omega} V_z^* = 0 \text{ in } (L(H(E),E)\tau_{sot})$$

schon

$$\lim_{z\to\partial\Omega} V_z = 0 \text{ in } (L(E,H(E))\tau_{wot}),$$

was die Richtung von (iii) nach (i) liefert.

$\square$

4 Multiplikatoren auf funktionalen Hilberträumen

Aus den bisherigen Ergebnissen lassen sich nun einige Aussagen über Multiplikatoren ableiten.

Lemma 4.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ eine beliebige Menge, E ein Hilbertraum und $H \subset E^\Omega$ ein funktionaler Hilbertraum mit reproduzierendem Kern $K : \Omega \times \Omega \to L(E)$, so dass alle Punktauswertungen surjektiv sind. Dann ist für zwei beliebige Multiplikatoren $f, g \in \mathcal{M}(H)$ die Gleichung*

$$f(z)K(z,z)g(z)^* = Q_z\Gamma(M_f M_g^*)(z)Q_z \ (z \in \Omega)$$

erfüllt. Ist $K = K_0 1_E$ mit einer skalarwertigen positiv definiten Abbildung

$$K_0 : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C},$$

so folgt insbesondere, dass

$$f(z)g(z)^* = \Gamma(M_f M_g^*)(z)$$

für $f, g \in \mathcal{M}(H)$ und $z \in \Omega$ gilt.

Beweis. Seien $f, g \in \mathcal{M}(H)$ Multiplikatoren.Es gilt für $x \in E$ und $z \in \Omega$ beliebig:

$$\begin{aligned}
&f(z)K(z,z)g(z)^*x \\
&= f(z)\delta_z\delta_z^* g(z)^*x \\
&= \delta_z(M_f(\delta_z^* g(z)^*x)) \\
&= \delta_z M_f M_g^* \delta_z^* x \\
&= (V_z Q_z)^* M_f M_g^* V_z Q_z x \\
&= Q_z(V_z^* M_f M_g^* V_z)Q_z x \\
&= Q_z\Gamma(M_f M_g^*)(z)Q_z x.
\end{aligned}$$

Ist nun

$$K = K_0 1_E$$

mit einer skalarwertigen positiv definiten Abbildung

$$K_0 : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C},$$

so hat Q_z laut Lemma 3.9 die Form

$$Q_z = \|K_0(\cdot, z)\| 1_E.$$

Damit vereinfacht sich die obige Gleichung zu

$$K_0(z,z)f(z)g(z)^*x = \|K_0(\cdot,z)\|^2\Gamma(M_f M_g^*)(z)x = K_0(z,z)\Gamma(M_f M_g^*)(z)x.$$

Die Punktauswertungen sind nach Voraussetzung surjektiv, daher gilt

$$K(z,z) \neq 0,$$

man erhält also

$$f(z)g(z)^*x = \Gamma(M_f M_g^*)(z)x.$$

□

Satz 4.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ eine offene und beschränkte Menge, E ein Hilbertraum und $H \subset E^\Omega$ ein funktionaler Hilbertraum mit reproduzierendem Kern $K : \Omega \times \Omega \to L(E)$, so dass alle Punktauswertungen surjektiv sind und so, dass gilt*

$$\lim_{z\to\partial\Omega} V_z^* = 0 \text{ in } (L(H,E),\tau_{sot}).$$

Für jedes Multiplikatorentupel $f = (f_1,\dots,f_m) \in \mathcal{M}(H)^m$ mit der Eigenschaft, dass die Zeilenmultiplikation

$$M_f : H^m \to H,\ (g_i)_{i=1}^m \mapsto \sum_{i=1}^m f_i g_i$$

endlich kodimensionales Bild hat, gibt es ein $c > 0$ und eine offene Umgebung $U \supset \partial\Omega$ mit

$$\sum_{i=1}^m f_i(z)K(z,z)f_i(z)^* \geq cK(z,z) \text{ für alle } z \in U \cap \Omega.$$

Beweis. Nach Voraussetzung hat die Zeilenmultiplikation M_f endlich kodimensionales und somit abgeschlossenes Bild. Daraus folgt, dass der Kern von M_f^* endlich dimensional ist, denn

$$\ker M_f^* = (\mathrm{Im} M_f)^\perp \tilde{=} (H/\mathrm{Im}(M_f))'$$

und $(H/\mathrm{Im}(M_f))'$ ist endlich dimensional. Der Kern von M_f^* ist aber nach Lemma 2.15 gleich dem Kern von $M_f M_f^*$. Also hat auch dieser Operator endlich dimensionalen Kern. Wegen

$$\mathrm{Im} M_f M_f^* = \mathrm{Im}(M_f)$$

nach Lemma 2.15 hat er auch abgeschlossenes Bild und es gilt

$$H = \ker(M_f M_f^*) + \ker(M_f M_f^*)^\perp = \ker(M_f M_f^*) + \mathrm{Im}(M_f M_f^*).$$

Betrachtet man nun die Orthogonalprojektion F von H auf den Kern von $M_f M_f^*$, so ist der Operator $M_f M_f^* + F$ nach unten beschränkt. Um dies einzusehen, fixieren wir einen Vektor $g \in H$. Dann ist g=h+k mit $h \in \ker(M_f M_f^*)$ und $k \in \mathrm{Im}(M_f M_f^*)$. Deswegen gilt

$$M_f M_f^* g + Fg = M_f M_f^* h + Fh + M_f M_f^* k + Fk = h + M_f M_f^* k.$$

Die Tatsache, dass
$$\mathrm{Im}(M_f M_f^*) = \mathrm{Im}(M_f) \subset H$$
abgeschlossen ist, und die Gleichung
$$\mathrm{Im}(M_f M_f^*) = (\ker(M_f M_f^*))^\perp$$
zeigen, dass
$$M_f M_f^* : \mathrm{Im}(M_f M_f^*) \to H$$
injektiv mit abgeschlossenem Bild ist. Somit gibt es ein $c' > 0$ mit
$$\|M_f M_f^* x\| \geq c'\|x\|$$
für alle $x \in \mathrm{Im}(M_f M_f^*)$. Daher ergibt sich mit Pythagoras:
$$\|(M_f M_f^* + F)g\|^2 = \|M_f M_f^* k + h\|^2 = \|M_f M_f^* k\|^2 + \|h\|^2 \geq c^2(\|k\|^2 + \|h\|^2) = c^2\|g\|^2$$
für c= min(c',1). Als selbstadjungierter, nach unten beschränkter Operator ist $M_f M_f^* + F$ invertierbar, also liegt $\sigma(M_f M_f^* + F)$ in $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Demnach gibt es ein $c > 0$ mit $\lambda > 2c$ für alle $\lambda \in \sigma(M_f M_F^* + F)$, denn das Spektrum ist kompakt. Damit ist der Operator $M_f M_f^* + F - 2c1_H$ positiv, denn nach dem spektralen Abbildungssatz liegt sein Spektrum in $\mathbb{R}^+$. Die Berezintransformation erhält offensichtlich Positivität und es ergibt sich
$$\begin{aligned}
&\Gamma(M_f M_f^* + F)(z) \\
&= \Gamma(M_f M_f^* + F - 2c1_H)(z) + \Gamma(2c1_H)(z) \\
&\geq \Gamma(2c1_H)(z) \\
&= 2cV_z^* V_z = 2c1_E \text{ für alle } z \in \Omega.
\end{aligned}$$
Da F endlich dimensionales Bild hat und deswegen kompakt ist, folgt mit Lemma 3.7 aus der Voraussetzung
$$\mathrm{SOT} - \lim_{\mathrm{z} \to \partial\Omega} \mathrm{V}_\mathrm{z}^* = 0,$$
dass
$$\|\Gamma(F)(z)\| \longrightarrow 0$$
für $z \to \partial\Omega$. Somit findet man eine offene Obermenge $U \supset \partial\Omega$ mit
$$\|\Gamma(F)(z)\| < c$$
für alle $z \in U \cap \Omega$.
Da
$$\langle \Gamma(F)(z)x, x\rangle = |\langle \Gamma(F)(z)x, x\rangle| \leq c\langle x, x\rangle$$

für $z \in U \cap \Omega$ und $x \in E$ gilt, folgt mit Hilfe der Lemmata 2.18 und 4.1

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m f_i(z)K(z,z)f_i(z)^* &= \sum_{i=1}^m Q_z\Gamma(M_{f_i}M_{f_i}^*)(z)Q_z \\ &= Q_z\Gamma(\sum_{i=1}^m M_{f_i}M_{f_i}^*)(z)Q_z \\ &= Q_z\Gamma(M_fM_f^*)(z)Q_z \\ &= Q_z(\Gamma(M_fM_f^*+F)(z)-\Gamma(F)(z))Q_z \\ &\geq cQ_z^2 = c\delta_z\delta_z^* = cK(z,z)\end{aligned}$$

für alle $z \in U \cap \Omega$. □

Als Folgerung erhält man eine Aussage über das untere Semi-Fredholm-Spektrum von Multiplikationstupeln $M_f = (M_{f_1}, \ldots, M_{f_m}) \in L(H)^m$ im skalarwertigen Fall:

Korollar 4.3. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ eine offene und beschränkte Menge und $H \subset \mathbb{C}^\Omega$ ein funktionaler Hilbertraum mit reproduzierendem Kern $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$, so dass $Z(H) = \emptyset$ ist und so dass gilt*

$$\lim_{z\to\partial\Omega} \frac{K(\cdot,z)}{\|K(\cdot,z)\|} = 0 \text{ in } (H, \tau_w).$$

Dann gilt für $m \geq 1$ und $f \in \mathcal{M}(H)^m$:

$$\bigcap(\overline{f(U\cap\Omega)}, U \supset \partial\Omega \text{ offen }) \subset \sigma_{re}(M_f).$$

Beweis. Es gilt nach Lemma 3.9, dass

$$\lim_{z\to\partial\Omega} V_z^* = 0$$

in $(L(H,\mathbb{C}), \tau_{sot})$ und außerdem

$$K(z,z) = \|K(\cdot,z)\|^2 \neq 0.$$

Nimmt man nun an, dass 0 nicht in $\sigma_{re}(M_f)$ liegt, so folgt $\dim(H/\sum_{i=1}^m M_{f_i}H) < \infty$, M_f hat also endlich kodimensionales Bild. Mit Satz 4.2 folgt, dass man ein $c > 0$ und eine offene Umgebung $U \supset \partial\Omega$ finden kann mit

$$\sum_{i=1}^m f_i(z)K(z,z)f_i(z)^* \geq cK(z,z)$$

für alle $z \in U \cap \Omega$ oder äquivalent mit

$$\sum_{i=1}^m |f_i(z)|^2 \geq c.$$

Also erhält man

$$\|f(z)\|^2 > c \text{ für alle } z \in U \cap \Omega$$

und damit $0 \notin \overline{f(U \cap \Omega)}$. Somit gilt

$$0 \notin \bigcap (\overline{f(V \cap \Omega)}, V \supset \partial\Omega \text{ offen }).$$

Sei nun $\lambda \in \sigma_{re}(M_f)^c$. Wegen

$$\lambda - M_f = (\lambda_1 - M_{f_1}, \cdots, \lambda_m - M_{f_m}) = (M_{\lambda_1 - f_1}, \cdots, M_{\lambda_m - f_m}) = M_{\lambda - f}$$

ist dann

$$0 \notin \sigma_{re}(M_{\lambda - f})$$

und somit nach dem ersten Teil

$$0 \notin \bigcap (\overline{\lambda - f(U \cap \Omega)}, U \supset \partial\Omega \text{ offen }),$$

woraus folgt, dass

$$\lambda \notin \bigcap (\overline{f(U \cap \Omega)}, U \supset \partial\Omega \text{ offen }).$$

Es ergibt sich demnach

$$\bigcap (\overline{f(U \cap \partial\Omega)}, U \supset \Omega \text{ offen }) \subset \sigma_{re}(M_f).$$

□

Im Fall, dass die Zeilenmultiplikation nicht nur endlich-kodimensionales Bild hat, sondern sogar surjektiv ist, kann man die folgende Variante von Satz 4.2 beweisen. Zur Vorbereitung dient das folgende Lemma.

Lemma 4.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ eine beliebige Menge, E ein Hilbertraum und $H \subset E^\Omega$ ein funktionaler Hilbertraum so, dass alle Punktauswertungen surjektiv sind. Dann ist ein Operator $X \in L(H)$ genau dann positiv, wenn die Abbildung*

$$K_X : \Omega \times \Omega \to L(E), \ (z, w) \mapsto V_z^* X V_w$$

positiv definit ist.

Beweis. Sei zunächst $X \in L(H)$ positiv und seien endliche Folgen $(z_i)_{i=1}^m$ in Ω und $(x_i)_{i=1}^m$ in E gegeben. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \langle K_X(z_i, z_j) x_j, x_i \rangle &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \langle V_{z_i}^* X V_{z_j} x_j, x_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \langle X V_{z_j} x_j, V_{z_i} x_i \rangle \\
&= \langle X \sum_{j=1}^m V_{z_j} x_j, \sum_{j=1}^m V_{z_j} x_j \rangle \geq 0,
\end{aligned}$$

da X positiv ist. Also ist K_X positiv definit.
Wir setzen jetzt umgekehrt voraus, dass K_X positiv definit ist. Dann gilt für alle endlichen Folgen $(x_i)_{i=1}^m$ in E, $(z_i)_{i=1}^m$ in Ω:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\langle K_X(z_i,z_j)x_j,x_i\rangle \geq 0.$$

Nach obiger Rechnung ist dies äquivalent dazu, dass

$$\langle X\sum_{j=1}^{m}V_{z_j}x_j,\sum_{j=1}^{m}V_{z_j}x_j\rangle \geq 0.$$

Da Q_z invertierbar ist, ist

$$\mathrm{Im}(V_z)=\mathrm{Im}(V_zQ_z)=\mathrm{Im}(\delta_z^*)=\{K(\cdot,z)x;x\in E\}.$$

Also ist die lineare Hülle der Menge

$$\{V_zx;z\in\Omega,x\in E\}=\{K(\cdot,z)x;x\in E\}$$

dicht in H. Aus der Stetigkeit von X und des Skalarproduktes folgt, dass

$$\langle Xh,h\rangle \geq 0$$

für alle $h\in H$ gilt. Damit ist die Positivität von X gezeigt. □

Mit Hilfe dieses Lemmas ergibt sich nun die folgende Version von Satz 4.2.

Lemma 4.5. *Sei $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ eine beliebige Menge, E ein Hilbertraum und $H\subset E^\Omega$ ein funktionaler Hilbertraum so, dass alle Punktauswertungen surjektiv sind.*
Für ein Tupel $f=(f_1,\cdots,f_m)\in\mathcal{M}(H)^m$ von Multiplikatoren ist die Zeilenmultiplikation

$$M_f:H^m\to H,\ (g_i)_{i=1}^m\mapsto\sum_{i=1}^{m}f_ig_i$$

genau dann surjektiv, wenn es eine Konstante $c>0$ gibt, so dass die Abbildung

$$K_{f,c}:\Omega\times\Omega\to L(E),\ (z,w)\mapsto\sum_{i=1}^{m}f_i(z)K(z,w)f_i(w)^*-cK(z,w)$$

positiv definit ist.

Beweis. Setzt man die linke Seite voraus, so folgt nach Lemma 2.15 aus der Surjektivität von M_f wegen

$$\mathrm{Im}(M_f)=\mathrm{Im}(M_fM_f^*)$$

und

$$\ker(M_f^*)=\ker(M_fM_f^*)$$

die Bijektiviät von $M_f M_f^*$. Nach dem Satz von der stetigen Inversen ist $M_f M_f^*$ dann invertierbar in $L(H)$ und außerdem offensichtlich positiv. Somit ist das Spektrum von $M_f M_f^*$ in $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ enthalten. Das Spektrum ist kompakt, deshalb findet man ein $c > 0$ mit $\lambda > c$ für alle λ aus dem Spektrum von $M_f M_f^*$. Das Spektrum von $M_f M_f^* - c1_H$ ist dann nach dem spektralen Abbildungssatz in $\mathbb{R}^+$ enthalten, der Operator $M_f M_f^* - c1_H$ ist also positiv. Mit dem letzten Lemma folgt, dass die Abbildung

$$\Omega \times \Omega \to L(E), (z, w) \mapsto V_z^*(M_f M_f^* - c1_H)V_w$$

positiv definit ist. Man kann nun untersuchen, wie diese Abbildung auf ein x aus E wirkt:

$$\begin{aligned}
&Q_z^{-1}(\delta_z M_f M_f^* \delta_w^* - c\delta_z \delta_w^*)Q_w^{-1}x \\
=&Q_z^{-1}(\delta_z \sum_{i=1}^m M_{f_i} M_{f_i}^* \delta_w^* - c\delta_z \delta_w^*)Q_w^{-1}x \\
=&Q_z^{-1}(\sum_{i=1}^m \delta_z M_{f_i} M_{f_i}^* \delta_w^* Q_w^{-1}x - c\delta_z \delta_w^* Q_w^{-1}x) \\
=&Q_z^{-1}(\sum_{i=1}^m \delta_z M_{f_i} M_{f_i}^* K(\cdot, w)Q_w^{-1}x - c\delta_z \delta_w^* Q_w^{-1}x) \\
=&Q_z^{-1}(\sum_{i=1}^m \delta_z M_{f_i} K(\cdot, w)f_i(w)^* Q_w^{-1}x - c\delta_z \delta_w^* Q_w^{-1}x) \\
=&Q_z^{-1}(\sum_{i=1}^m (f_i(z)K(z, w)f_i(w)^*)Q_w^{-1}x - c\delta_z \delta_w^* Q_w^{-1}x) \\
=&Q_z^{-1}(\sum_{i=1}^m (f_i(z)K(z, w)f_i(w)^*) - c\delta_z \delta_w^*)Q_w^{-1}x.
\end{aligned}$$

Demnach ist die Abbildung

$$T : \Omega \times \Omega \to L(E), (z, w) \mapsto Q_z^{-1} K_{f,c}(z, w)Q_w^{-1}$$

positiv definit. Wegen Lemma 2.4 ist dann auch $K_{f,c}$ positiv definit.
Sei nun $K_{f,c}$ positiv definit. Dann ist nach Lemma 2.4 auch die Abbildung

$$\Omega \times \Omega \to L(E), (z, w) \mapsto Q_z^{-1} K_{f,c}(z, w)Q_w^{-1}$$

positiv definit. Nach der obigen Rechnung ist dann auch die Abbildung

$$T_0 : \Omega \times \Omega \to L(E), (z, w) \mapsto V_z^*(M_f M_f^* - c1_H)V_w$$

positiv definit und der Operator $M_f M_f^* - c1_H$ nach Lemma 5.4 positiv. Dies zeigt, dass das Spektrum von $M_f M_f^*$ die Null nicht enthält. Daraus folgt die Invertierbarkeit und somit auch die Surjektivität von $M_f M_f^*$ und von M_f. $\square$

5 Der Drury-Arveson Raum

Für den Drury-Arveson Raum erhält man damit noch eine andere Charakterisierung der Surjektivität der Zeilenmultiplikation. Dazu benötigt man noch den folgenden Satz:

Satz 5.1. *Seien E,F,G Hilberträume, $S \subset \mathbb{B}$ eine Teilmenge,*

$$\phi : S \to L(F, G),$$

$$\gamma : S \to L(E, G)$$

beliebige Funktionen. Weiterhin seien wie in Kapitel 1 $H(\mathbb{B})$ der Drury-Arveson Raum und

$$H(\mathbb{B}, E) \tilde{=} H(\mathbb{B}) \otimes E,$$

$$H(\mathbb{B}, F) \tilde{=} H(\mathbb{B}) \otimes F$$

die E- beziehungsweise F-wertigen Drury-Arveson-Räume. Dann existiert genau dann ein Multiplikator

$$\psi \in \mathcal{M}(H(\mathbb{B}, E), H(\mathbb{B}, F))$$

mit

$$\|M_\psi\| \leq 1$$

und

$$\phi(z)\psi(z) = \gamma(z),$$

wenn die Abbildung

$$K_{\phi,\gamma} : S \times S \to L(G), (z, w) \mapsto \frac{\phi(z)\phi(w)^* - \gamma(z)\gamma(w)^*}{1 - \langle z, w \rangle}$$

positiv definit ist.

Beweis. Seien $\psi \in \mathcal{M}(H(\mathbb{B}, E), H(\mathbb{B}, F))$ mit

$$\|M_\psi\| \leq 1$$

und

$$\phi(z)\psi(z) = \gamma(z)$$

für $z \in S$. Dann ist die Abbildung

$$S \times S \to L(F), (z, w) \mapsto \frac{1 - \psi(z)\psi(w)^*}{1 - \langle z, w \rangle}$$

nach Satz 2.14 positiv definit. Gemäß Lemma 2.4 ist auch die Abbildung

$$\begin{aligned} S \times S \to L(G),\ (z,w) &\mapsto \phi(z)\frac{1-\psi(z)\psi(w)^*}{1-\langle z,w\rangle}\phi(w)^* \\ = \frac{\phi(z)\phi(w)^* - \gamma(z)\gamma(w)^*}{1-\langle z,w\rangle} &= K_{\phi,\gamma}(z,w) \end{aligned}$$

positiv definit.
Sei jetzt umgekehrt $K_{\phi,\gamma}$ positiv definit. Nach dem Satz von Kolmogorov (vgl. Satz 1.7 in [3]) findet man einen Hilbertraum H und eine Abbildung $k : S \to L(G,H)$ so, dass folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\frac{\phi(z)\phi(w)^* - \gamma(z)\gamma(w)^*}{1-\langle z,w\rangle} = k(z)^*k(w)$$

für alle $z, w \in S$. Dies ist gleichbedeutend damit, dass

$$\sum_{i=1}^{n} (\overline{z_i}k(z))^*(\overline{w_i}k(w)) + \phi(z)\phi(w)^* = k(z)^*k(w) + \gamma(z)\gamma(w)^*$$

für alle $z, w \in S$. Wendet man Satz 1.7 aus [3] auf die Abbildungen

$$g_1 : S \to L(G, H^n \oplus F), g_1(z) = \begin{pmatrix} (\overline{z_i}k(z))_{i=1}^n \\ \phi(z)^* \end{pmatrix}$$

und

$$g_2 : S \to L(G, H \oplus E), g_2(z) = \begin{pmatrix} k(z) \\ \gamma(z)^* \end{pmatrix}$$

an, so sieht man, dass eine Isometrie

$$H^n \oplus F \supset \overline{\mathrm{LH}}\{g_1(z)x; z \in S, x \in G\} \xrightarrow{V} H \oplus E$$

existiert, für die gilt

$$Vg_1(z)x = g_2(z)x$$

für alle $z \in S$, $x \in G$. Wählt man eine genügend große Indexmenge I, kann man H so zu einem Hilbertraum $L = H \oplus l^2(I)$ vergrößern, dass ein unitärer Operator

$$U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in L(L \oplus E, L^n \oplus F)$$

existiert, derart, dass U^* eine Fortsetzung von V ist. Definiert man für $z \in \mathbb{B}$ die Abbildung $Z : L^n \to L$ durch $Z((x_i)_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^n z_i x_i$, so ergibt sich für $z \in S$ das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \text{(I)}\ A^*Z^*k(z) + C^*\phi(z)^* &= k(z) \\ \text{(II)}\ B^*Z^*k(z) + D^*\phi(z)^* &= \gamma(z)^*. \end{aligned}$$

Formt man Gleichung(I) um, folgt für $z \in S$

$$(1 - A^*Z^*)k(z) = C^*\phi(z)^*.$$

Der Operator $(1 - A^*Z^*)$ ist invertierbar, denn

$$\|A^*Z^*\| \leq \|A\|\|Z\| = \|A\|(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2)^{\frac{1}{2}} < 1.$$

Damit ergibt sich für $z \in S$

$$k(z) = (1 - A^*Z^*)^{-1}C^*\phi(z)^*.$$

Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, erhält man

$$\gamma(z)^* = [D^* + B^*Z^*(1 - A^*Z^*)^{-1}C^*]\phi(z)^*,$$

was für $z \in S$ äquivalent zu

$$\gamma(z) = \phi(z)(D + C(1 - ZA)^{-1}ZB)$$

ist. Nun definiert man Funktionen

$$f : \mathbb{B} \to L(L, F), f(z) = C(1 - ZA)^{-1}$$

und

$$\psi : \mathbb{B} \to L(E, F), \psi(z) = D + f(z)ZB.$$

Da U unitär ist, folgt

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = UU^* = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^* + BB^* & AC^* + BD^* \\ CA^* + DB^* & CC^* + DD^* \end{pmatrix}.$$

Außerdem gelten die Identitäten

$$f(z)ZA = -C + f(z),$$

$$A^*W^*f(w)^* = -C^* + f(w)^*$$

für $z, w \in \mathbb{B}$. Unter Verwendung dieser Gleichungen rechnet man nach

$$\begin{aligned}
&1 - \psi(z)\psi(w)^* \\
&= 1 - (DD^* + DB^*W^*f(w)^* + f(z)ZBD^* + f(z)ZBB^*W^*f(w)^*) \\
&= CC^* + CA^*W^*f(w)^* + f(z)ZAC^* + f(z)ZAA^*W^*f(w)^* - f(z)ZW^*f(w)^* \\
&= Cf(w)^* - CC^* + f(z)C^* + (-C + f(z))(-C^* + f(w)^*) - f(z)ZW^*f(w)^* \\
&= Cf(w)^* - CC^* + f(z)C^* + CC^* - Cf(w)^* - f(z)C^* + f(z)f(w)^* - f(z)ZW^*f(w)^* \\
&= (1 - \langle z, w\rangle)f(z)f(w)^*.
\end{aligned}$$

Umformen führt zu der Gleichung

$$\frac{1-\psi(z)\psi(w)^*}{1-\langle z,w\rangle} = f(z)f(w)^*$$

für $z, w \in \mathbb{B}$. Die Funktion

$$\mathbb{B} \times \mathbb{B} \to L(F), (z,w) \mapsto f(z)f(w)^*$$

ist positiv definit. Somit ist auch die linke Seite positiv definit, was nach Satz 2.14 äquivalent dazu ist, dass ψ ein Multiplikator von $H(\mathbb{B}, E)$ nach $H(\mathbb{B}, F)$ mit $\|M_\psi\| \leq 1$ ist. □

Satz 5.2. *Sei $H(\mathbb{B})$ der Drury-Arveson Raum, $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m) \in \mathcal{M}(H(\mathbb{B}))^m$ ein Tupel von Multiplikatoren auf $H(\mathbb{B})$. Die Zeilenmultiplikation*

$$M_\phi : H(\mathbb{B})^m \to H(\mathbb{B}),\ (g_i)_{i=1}^m \mapsto \sum_{i=1}^m \phi_i g_i$$

ist genau dann surjektiv, wenn ein Tupel $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_m) \in \mathcal{M}(H(\mathbb{B}), H(\mathbb{B}))^m$ existiert mit

$$\sum_{i=1}^m \phi_i \psi_i = 1$$

auf $\mathbb{B}$.

Beweis. Es gelte die rechte Seite. Sei $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_m) \in \mathcal{M}(H)^m$ ein Tupel mit

$$\sum_{i=1}^m \phi_i \psi_i = 1$$

auf $\mathbb{B}$. Für eine beliebiges $f \in H$ liegt dann $\psi f := (\psi_1 f, \ldots, \psi_m f)$ in H^m und es gilt

$$M_\phi(\psi f) = f.$$

Also ist M_ϕ surjektiv. Zum Beweis der anderen Implikation sei die Zeilenmultiplikation M_ϕ surjektiv. Dann gibt es nach Lemma 4.5 eine Konstante $c > 0$ so, dass

$$\begin{aligned} K_{\phi,c} : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C},\ (z,w) \mapsto & \sum_{i=1}^m \phi_i(z) \frac{1}{1-\langle z,w\rangle} \overline{\phi_i(w)} - c\frac{1}{1-\langle z,w\rangle} \\ = & \frac{\sum_{i=1}^m \phi_i(z)\overline{\phi_i(w)} - c}{1-\langle z,w\rangle} \end{aligned}$$

positiv definit ist. Somit gibt es nach Satz 5.1 angewendet auf $S = \mathbb{B}$, $E = G = \mathbb{C}$, $F = \mathbb{C}^m$,

$$\gamma : \mathbb{B} \to L(\mathbb{C}), \gamma(z) = \sqrt{c}$$

und

$$\varphi : \mathbb{B} \to L(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}), \varphi(z) = (\phi_1(z), \ldots, \phi_m(z))$$

ein

$$\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_m) \in \mathcal{M}(H(\mathbb{B}), H(\mathbb{B})^m)$$

mit

$$\sum_{i=1}^{m} \phi_i \psi_i = \sqrt{c}$$

auf $\mathbb{B}$. Dann hat der Multiplikator $\frac{\psi}{\sqrt{c}}$ die gewünschte Eigenschaft. □

Eine skalarwertige Version von Satz 5.1 mit $S = \mathbb{B}$ wurde in [2] als Anwendung eines geeigneten Commutant-Lifting-Satzes bewiesen. In [5] haben Costea, Sawyer und Wick die in Satz 5.2 beschriebene Folgerung benutzt, um das Corona-Problem für die Multiplikatorenalgebra $\mathcal{M}(H(\mathbb{B}))$ des Drury-Arveson Raumes zu lösen.

6 Fortsetzung der Berezin-Transformierten auf den Rand

In diesem Kapitel werden wir untersuchen, wann der Grenzwert der Berezin-Transformierten $\Gamma(T)(z)$ eines Operators T existiert, wenn sich der Punkt z einem Randpunkt z_0 von Ω nähert. Im Vordergrund werden auch hier wieder Multiplikationsoperatoren stehen, an die jedoch noch spezielle Anforderungen gestellt werden müssen, um die gewünschten Resultate zu erzielen.

6.1 Grundlagen

Bevor wir die ersten Ergebnisse formulieren können, müssen wir hier zunächst noch einige Vorbereitungen treffen. Seien im Folgenden immer $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ eine offene und beschränkte Menge,

$$K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$$

eine positiv definite Abbildung mit $Z(H(K)) = \emptyset$ und E ein Hilbertraum. Es bezeichne

$$H(E) = H(K) \otimes E$$

den funktionalen Hilbertraum mit reproduzierendem Kern

$$K_E : \Omega \times \Omega \to L(E), K_E(z,w) = K(z,w)1_E.$$

Wie oben schon erwähnt, sollen einige Resultate nur für bestimmte Multiplikationsoperatoren M_ϕ auf $H(E)$ gezeigt werden und zwar für solche, für die der Multiplikator ϕ in $\mathcal{M}(H(K))$ liegt. Dass dies überhaupt wieder einen wohldefinierten Multiplikationsoperator auf $H(E)$ liefert, zeigt das nächste Lemma.

Lemma 6.1. *Sei $\phi \in \mathcal{M}(H(K))$. Dann definiert*

$$M_\phi : H(E) \to H(E), f \mapsto \phi f$$

einen wohldefinierten Multiplikationsoperator.

Beweis. Da $\phi \in \mathcal{M}(H(K))$ ist, gibt es nach Satz 2.14 ein $c > 0$ so, dass die Abbildung

$$\gamma_c : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}, (z,w) \mapsto (c^2 - \phi(z)\overline{\phi(w)})K(z,w)$$

positiv definit ist. Also ist auch die Abbildung

$$\gamma_{c,E} : \Omega \times \Omega \to \mathbb{L}(E), (z,w) \mapsto (c^2 - \phi(z)\overline{\phi(w)})K(z,w)1_E$$

positiv definit nach Satz 3.4 in [8]. Somit ist die Abbildung

$$\Omega \to L(E), z \mapsto \phi(z)1_E$$

nach Satz 2.14 ein Multiplikator auf $H(E)$. □

Wir möchten im Beweis von Lemma 6.5 den Raum $H(E)$ in das Bild des Operators V_z und dessen orthogonales Komplement zerlegen. Dazu ist es hilfreich, die Orthogonalprojektion auf das Bild des Operators V_z zu kennen.

Lemma 6.2. *Sei $z \in \Omega$ und sei V_z die Isometrie aus Lemma 3.1. Dann ist*

$$P_z = V_z V_z^*$$

die Orthogonalprojektion auf das Bild von V_z.

Beweis. Für $x \in \mathrm{Im}(V_z)$, $y \in (\mathrm{Im}(V_z))^\perp$ gilt $x = V_z w$ für ein $w \in E$ und somit

$$P_z x = V_z V_z^* V_z w = V_z w = x,$$

sowie

$$P_z y = V_z V_z^* y = V_z 0 = 0.$$

Folglich ist P_z die Orthogonalprojektion auf $\mathrm{Im}(V_z)$. □

Genauere Informationen über die Gestalt von bestimmten Multiplikationsoperatoren bezüglich der oben erwähnten Zerlegung von $H(E)$ liefern die nächsten beiden Lemmata.

Lemma 6.3. *Für $\phi \in \mathcal{M}(H(E))$ ist das Bild von V_z ein invarianter Unterraum von M_ϕ^*. Zerlegt man den Hilbertraum $H(E)$ in der Form*

$$H(E) = (Im(V_z) \oplus (Im(V_z))^\perp,$$

so erhält man für den Operator M_ϕ eine Matrixdarstellung der Form:

$$M_\phi = \begin{pmatrix} A_z & 0 \\ C_z & D_z \end{pmatrix}.$$

Beweis. Für $x \in \mathrm{Im}(V_z)$ gibt es ein $y \in E$ mit

$$x = V_z y$$

Nach Lemma 2.1 in [8] und Bemerkung 1.1.2 gilt

$$M_\phi^* \delta_z^* y = \delta_z^* \phi(z)^* y.$$

Man erhält also

$$M_\phi^* x = M_\phi^* V_z y = M_\phi^* \delta_z^* Q_z^{-1} y = \delta_z^* \phi(z)^* Q_z^{-1} y = \delta_z^* Q_z^{-1} Q_z \phi(z)^* Q_z^{-1} y = V_z w$$

mit $w = Q_z^{-1} \phi(z)^* Q_z^{-1} y$. Also liegt $M_\phi^* x$ wieder im Bild von V_z. Damit ist gezeigt, dass $\mathrm{Im} V_z$ invariant unter M_ϕ^* ist. Daraus folgt sofort die oben beschriebene Matrixdarstellung. □

Lemma 6.4. *Sei $\phi \in \mathcal{M}(H(K))$ ein skalarer Multiplikator. Dann erhält man*

$$M_\phi^* \mid_{Im(V_z)} = \overline{\phi(z)} I_{Im(V_z)}$$

und man kann M_ϕ bezüglich der Zerlegung

$$H(E) = (Im(V_z)) \oplus (Im(V_z))^\perp$$

folgendermaßen darstellen:

$$M_\phi = \begin{pmatrix} \phi(z) I_{Im(V_z)} & 0 \\ C_z & D_z \end{pmatrix}.$$

Für $z \in \Omega$ erhält man für die Norm des Operators C_z die Abschätzung

$$\|C_z\| \leq \sqrt{\|M_\phi\|^2 - |\phi(z)|^2}.$$

Beweis. Sei $f \in \mathrm{Im} V_z$ gegeben. Wendet man den Operator M_ϕ^* auf f an, so ergibt sich, da $\mathrm{Im}(V_z)$ nach dem vorhergehenden Lemma ein invarianter Unterraum für M_ϕ^* ist,

$$M_\phi^* f = M_\phi^* P_z f = M_\phi^* V_z V_z^* f = M_\phi^* \delta_z^* Q_z^{-1} V_z^* f = \delta_z^* \overline{\phi(z)} Q_z^{-1} V_z^* f = \overline{\phi(z)} \delta_z^* Q_z^{-1} V_z^* f = \overline{\phi(z)} f.$$

Somit ist

$$M_\phi^* \mid_{\mathrm{Im}(V_z)} = \overline{\phi(z)} I_{\mathrm{Im}(V_z)}$$

bewiesen, und mit der Matrixdarstellung aus dem vorherigen Lemma auch

$$M_\phi = \begin{pmatrix} \phi(z) I_{\mathrm{Im} V_z} & 0 \\ C_z & D_z \end{pmatrix}.$$

Gibt man sich nun ein $f \in \mathrm{Im} V_z$ vor, so rechnet man nach

$$\|C_z f\|^2 + |\phi(z)|^2 \|f\|^2 = \|M_\phi \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \|^2 \leq \|M_\phi\|^2 \|f\|^2.$$

Dies führt zu

$$\|\phi\|_{\infty,\Omega} \leq \|M_\phi\|$$

und zu

$$\|C_z\| \leq \sqrt{\|M_\phi\|^2 - |\phi(z)|^2}$$

für $z \in \Omega$. □

Nun kann man ein wichtiges Ergebnis über das Grenzverhalten des Kommutators

$$[M_\phi, P_z]$$

für geeignete Multiplikatoren ϕ festhalten, das indirekt in den Beweis der folgenden Sätze eingehen wird.

Lemma 6.5. *Sei $z_0 \in \partial\Omega$ fest und*

$$\mathcal{P}_{z_0} = \{\phi \in \mathcal{M}(H(K)); \|M_\phi\| = \lim_{z \to z_0} |\phi(z)|\}$$

Für $\phi \in \mathcal{P}_{z_0}$ gilt

$$\|[M_\phi, P_z]\| \overset{z \to z_0}{\longrightarrow} 0.$$

Beweis. Sei zunächst $\phi \in \mathcal{M}(H(E))$. Lemma 6.3 liefert die Darstellung

$$M_\phi = \begin{pmatrix} A_z & 0 \\ C_z & D_z \end{pmatrix} \in L((\mathrm{Im}V_z) \oplus \mathrm{Im}(V_z)^\perp).$$

Man rechnet leicht nach, dass

$$[M_\phi, P_z] = [\begin{pmatrix} A_z & 0 \\ C_z & D_z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C_z & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\|[M_\phi, P_z]\| = \|C_z\|.$$

Für $\phi \in \mathcal{P}_{z_0} \subset \mathcal{M}(H(K))$ kann man nun Lemma 5.1.4 anwenden, welches besagt, dass

$$\|C_z\| \leq \sqrt{\|M_\phi\|^2 - |\phi(z)|^2} \overset{z \to z_0}{\longrightarrow} 0$$

nach der Definition von $\mathcal{P}_{z_0}$ gilt. □

Während die Aussage im vorhergehenden Lemma nur für bestimmte Multiplikationsoperatoren getroffen wurde, ermöglicht uns das folgende Lemma eine Verallgemeinerung.

Lemma 6.6. *Sei $z_0 \in \partial\Omega$ fest. Dann ist die Menge*

$$\mathcal{B}_{z_0} = \{T \in L(H(E)); [T, P_z] \overset{z \to z_0}{\longrightarrow} 0\} \subset L(H(E))$$

eine C^*-Unteralgebra von L(H(E)).

Beweis. Seien T_1, $T_2 \in \mathcal{B}_{z_0}$, $a \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|[aT_1 + T_2, P_z]\| &= \|((aT_1 + T_2)P_z - P_z(aT_1 + T_2))\| \\ &= \|aT_1P_z + T_2P_z - aP_zT_1 - P_zT_2\| \\ &\leq |a|\|[T_1, P_Z]\| + \|[T_2, P_z]\| \overset{z \to z_0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{B}_{z_0}$ ein Unterraum von $L(H(E))$. Zusätzlich gilt für T_1, $T_2 \in \mathcal{B}_{z_0}$:

$$\begin{aligned} \|[T_1T_2, P_z]\| &= \|(T_1T_2P_z - P_zT_1T_2)\| \\ &\leq \|(T_1T_2P_z - T_1P_zT_2)\| + \|(T_1P_zT_2 - P_zT_1T_2)\| \\ &\leq \|T_1\|\|T_2P_z - P_zT_2\| + \|T_1P_z - P_zT_1\|\|T_2\| \\ &= \|T_1\|\|[T_2, P_z]\| + \|[T_1, P_z]\|\|T_2\| \overset{z \to z_0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

und für T in $\mathcal{B}_{z_0}$ liegt wegen

$$\begin{aligned}\|[T^*, P_z]\| &= \|(T^*P_z - P_zT^*)\| \\ &= \|(P_zT - TP_z)^*\| \\ &= \|(TP_z - P_zT)\| \\ &= \|[T, P_z]\| \xrightarrow{z \to z_0} 0.\end{aligned}$$

auch T^* in $\mathcal{B}_{z_0}$. Betrachtet man eine Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{B}_{z_0}$, die bezüglich der Operatornorm gegen einen Operator $T \in L(H(E))$ konvergiert und eine Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in Ω, die gegen z_0 konvergiert, so gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|T_n - T\| < \frac{\epsilon}{3}$$

für alle $n \geq n_0$ und ein $k_0 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\|[T_{n_0}, P_{z_k}]\| < \frac{\epsilon}{3}$$

gilt für alle $k \geq k_0$. Dann folgt für

$$\begin{aligned}&\|[T, P_{z_k}]\| = \|TP_{z_k} - P_{z_k}T\| \\ &\leq \|T_{n_0}P_{z_k} - P_{z_k}T_{n_0}\| + \|TP_{z_k} - T_{n_0}P_{z_k} - P_{z_k}T + P_{z_k}T_{n_0}\| \\ &\leq \|T_{n_0}P_{z_k} - P_{z_k}T_{n_0}\| + \|(T - T_{n_0})P_{z_k}\| + \|P_{z_k}(T - T_{n_0})\| \\ &\leq \|T_{n_0}P_{z_k} - P_{z_k}T_{n_0}\| + \|(T - T_{n_0})\| + \|T - T_{n_0})\| \\ &\leq 3 * \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.\end{aligned}$$

für alle $k \geq k_0$, da $\|P_{z_k}\| = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dies liefert die Abgeschlossenheit der Menge $\mathcal{B}_{z_0}$. Somit ist die Menge $\mathcal{B}_{z_0}$ eine C^*-Unteralgebra von $L(H(E))$.

□

Jetzt benötigen wir noch zwei Hilfslemmata, bevor wir zur ersten zentralen Aussage dieses Kapitels kommen.

Lemma 6.7. *Für $S, T \in L(H(E))$ gilt*

$$\|\Gamma(ST)(z) - \Gamma(S)(z)\Gamma(T)(z)\| \leq \|S\|\|[T, P_z]\|$$

für alle $z \in \Omega$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\|\Gamma(ST)(z) - \Gamma(S)(z)\Gamma(T(z))\| &= \|V_z^*STV_z - V_z^*SV_zV_z^*TV_z\| \\ &= \|V_z^*STP_zV_z - V_z^*SP_zTV_z\| \\ &= \|V_z^*S[T, P_z]V_z\| \\ &\leq \|V_z^*\|\|S\|\|[T, P_z]\|\|V_z\| \\ &= \|S\|\|[T, P_z]\|.\end{aligned}$$

□

Lemma 6.8. *Sei $B(\Omega, L(E))$ wie zuvor die C^*-Algebra der beschränkten $L(E)$-wertigen Funktionen auf Ω. Die Menge*

$$\mathcal{F} = \{F \in B(\Omega, L(E)); \lim_{z \to z_0} F(z) \in \mathbb{C}1_E \textit{existiert}\} \subset B(\Omega, L(E))$$

ist ein abgeschlossener selbstadjungierter Unterraum von $B(\Omega, L(E))$.

Beweis. Dass die Menge $\mathcal{F}$ ein selbstadjungierter Unterraum von $B(\Omega, L(E))$ ist, ist klar. Sie ist außerdem abgeschlossen, denn betrachtet man eine Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{F}$, die bezüglich der Supremumsnorm gegen ein $F \in B(\Omega, L(E))$ konvergiert, so findet man zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|F_n - F_m\| < \epsilon$$

für alle $n, m \geq n_0$. Daher ergibt sich

$$\| \lim_{z\to z_0} F_n(z) - \lim_{z\to z_0} F_m(z)\| = \lim_{z\to z_0} \|(F_n - F_m)(z)\| \leq \|F_n - F_m\|_{\infty,\Omega} < \epsilon$$

für alle $n, m \geq n_0$. Die Folge

$$(\lim_{z\to z_0} F_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$$

ist also eine Cauchy-Folge in $L(E)$. Da E vollständig ist, ist auch $L(E)$ vollständig und die Folge besitzt daher einen Grenzwert $T \in L(E)$. Sei nun $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Ω, die gegen z_0 konvergiert. Für beliebiges $\epsilon > 0$ findet man ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$\| \lim_{z\to z_0} F_n(z) - T\| < \frac{\epsilon}{3}$$

für alle $n \geq n_1$. Außerdem gibt es ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|F_n - F\|_{\infty,\Omega} < \frac{\epsilon}{3}$$

für alle $n \geq n_2$. Zu $n_3 = \max(n_1, n_2)$ gibt es dann ein $k_0 > 0$ mit

$$\|F_{n_3}(z_k) - \lim_{z\to z_0} F_{n_3}(z)\| < \frac{\epsilon}{3}$$

für alle $k \geq k_0$ und man erhält

$$\begin{aligned}
&\|F(z_k) - T\| \\
&\leq \|F(z_k) - F_{n_3}(z_k)\| + \|F_{n_3}(z_k) - \lim_{z\to z_0} F_{n_3}(z)\| \\
&+ \| \lim_{z\to z_0} F_{n_3}(z) - T\| \\
&< \|F_{n_3} - F\|_{\infty,\Omega} + 2\frac{\epsilon}{3} < 3\frac{\epsilon}{3} = \epsilon \text{ für alle } k \geq k_0.
\end{aligned}$$

Also konvergiert $F(z)$ für $z \to z_0$ und die Menge $\mathcal{F}$ ist somit abgeschlossen. Da die Menge $\mathbb{C}1_E$ abegchlossen ist, liegt auch

$$\lim_{z\to z_0} F(z)$$

wieder in $\mathbb{C}1_E$. □

6.2 Existenz des Grenzwertes

Die zuvor bewiesenen Aussagen ermöglichen es nun, unter bestimmten Bedingungen eine Aussage über das Randverhalten der Berezin-Transformierten zu treffen.

Satz 6.9. *Sei*

$$\mathcal{M}_{z_0} = \{\phi \in \mathcal{M}(H(K)); \phi(z_0) = \lim_{z \to z_0} \phi(z) \textit{ existiert und } |\phi(z_0)| = \|M_\phi\|\}.$$

Dann ist

$$L = L_{z_0} : C^*(\{M_\phi; \phi \in \mathcal{M}_{z_0}\}) \to L(E), L(T) = \lim_{z \to z_0} \Gamma(T)(z)$$

ein wohldefinierter unitaler C^*-Homomorphismus mit

$$\mathrm{Im(L)} \subset \mathbb{C}1_\mathrm{E}.$$

Beweis. In Lemma 3.3 wurde gezeigt, dass

$$\Gamma : L(H(E)) \to B(\Omega, L(E)), T \mapsto \Gamma(T)$$

linear und kontraktiv ist mit

$$\Gamma(T^*) = \Gamma(T)^*$$

für T aus $L(H(E))$. Weiterhin gilt

$$\Gamma(1_H)(z) = V_z^* V_z = 1_E$$

für alle $z \in \Omega$. Da

$$\mathcal{F} = \{F \in B(\Omega, L(E)); \lim_{z \to z_0} F(z) \in \mathbb{C}1_E \text{ existiert}\} \subset B(\Omega, L(E))$$

nach Lemma 6.8 ein selbstadjungierter abgeschlossener Unterraum von $B(\Omega, L(E))$ ist mit $1 \in \mathcal{F}$, ist auch die Menge

$$\{T \in L(H(E)); \lim_{z \to z_0} \Gamma(T)(z) \in \mathbb{C}1_E \text{ existiert } \} \subset L(H(E))$$

ein abgeschlossener selbstadjungierter Unterraum von L(H(E)), der die Eins enthält. Es genügt also zu zeigen, dass

$$\lim_{z \to z_0} \Gamma(T_1 \cdots T_r)(z) \in \mathbb{C}1_E$$

existiert für je endlich viele Operatoren

$$T_1, \ldots, T_r \in \{M_\phi; \phi \in \mathcal{M}_{z_0}\} \cup \{M_\phi^*; \phi \in \mathcal{M}_{z_0}\}.$$

Dies zeigen wir mit Induktion. Nach Lemma 4.1 gilt

$$\lim_{z \to z_0} \Gamma(M_\phi)(z) = \phi(z_0) 1_E$$

und

$$\lim_{z \to z_0} \Gamma(M_\phi^*)(z) = \overline{\phi}(z_0) 1_E.$$

Damit ist der Induktionsanfang bewiesen. Wir nehmen nun also an, die Behauptung sei gezeigt für ein $r \in \mathbb{N}$. Seien $T_1 \dots T_{r+1} \in \{M_\phi; \phi \in \mathcal{M}_{z_0}\} \cup \{M_\phi^*; \phi \in \mathcal{M}_{z_0}\}$. Dann liefert die Induktionsannahme, dass

$$\lim_{z \to z_0} \Gamma(T_1 \cdots T_r)(z) \in \mathbb{C} 1_E$$

existiert. Aus dem Induktionsanfang ist zusätzlich bekannt, dass

$$\lim_{z \to z_0} \Gamma(T_{r+1})(z) \in \mathbb{C} 1_E$$

existiert. Nach Lemma 6.7 gilt

$$\|\Gamma(T_1 \cdots T_{r+1})(z) - \Gamma(T_1 \cdots T_r)(z)\Gamma(T_{r+1})(z)\| \leq \|T_1 \cdots T_r\| \|[T_{r+1}, P_z]\|,$$

also auch

$$\lim_{z \to z_0} \|\Gamma(T_1 \cdots T_{r+1})(z) - \Gamma(T_1 \cdots T_r)(z)\Gamma(T_{r+1})(z)\| \leq \|T_1 \cdots T_r\| \lim_{z \to z_0} \|[T_{r+1}, P_z]\|.$$

Die rechte Seite hat nach den Lemmata 6.5 und 6.6 den Wert 0. Dies bedeutet, dass

$$\| \lim_{z \to z_0} \Gamma(T_1 \cdots T_{r+1})(z)\|$$

existiert mit

$$\lim_{z \to z_0} \Gamma(T_1 \cdots T_{r+1})(z) = \lim_{z \to z_0} \Gamma(T_1 \cdots T_r)(z) \lim_{z \to z_0} \Gamma(T_{r+1})(z) \in \mathbb{C} 1_E.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. Um zu sehen, dass

$$L : C^*(\{M_\phi; \phi \in \mathcal{M}_{z_0}\}) \to \mathbb{C} 1_E$$

einen unitalen C^*-Homomorphismus definiert, genügt es, die Multiplikativität zu zeigen. Diese folgt wie oben mit der Abschätzung

$$\Gamma(T_1 T_2)(z) - \Gamma(T_1)(z)\Gamma(T_2)(z)\| \leq \|T_1\| \|[T_2, P_z]\|$$

für $T_1, T_2 \in C^*(\{M_\phi; \phi \in \mathcal{M}_{z_0}\})$ zusammen mit Lemma 6.6.

□

6.3 Anwendungen

Nun möchten wir das obige Ergebnis auf eine Klasse konkreter Beispiele anwenden. Dazu seien im Folgenden $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ eine beschränkte offene Menge, μ ein positives Maß auf $\overline{\Omega}$ und $A \subset C(\overline{\Omega})$ eine abgeschlossene Teilalgebra von $C(\overline{\Omega})$, die mindestens die Einschränkungen der Polynome auf $\overline{\Omega}$ enthält. Weiterhin definieren wir

$$H_A^2(\mu) = \overline{A}^{L^2(\mu)}.$$

Zusätzlich soll im Folgenden immer vorausgesetzt werden, dass für jeden Punkt $z \in \Omega$ die Abbildung

$$(A, \|\cdot\|_{L^2(\mu)}) \to \mathbb{C}, [f] \mapsto f(z)$$

wohldefiniert, stetig und linear ist. Es bezeichne

$$\delta_z : H_A^2(\mu) \to \mathbb{C}$$

die eindeutige stetig lineare Fortsetzung dieser Abbildung. Wir nehmen weiter an, dass die Abbildung

$$\rho : H_A^2(\mu) \to \mathbb{C}^\Omega, \rho(f)(z) = \delta_z(f)$$

zumindest injektiv ist. Dann wird $\mathcal{H}_A^2(\mu)$=Im(ρ) vermöge des Skalarproduktes

$$\langle \rho(f), \rho(g) \rangle = \langle f, g \rangle_{H_A^2(\mu)} = \int_{\overline{\Omega}} f(z)\overline{g(z)} d\mu(z)$$

zu einem funktionalen Hilbertraum. Unter diesen Voraussetzungen kann man erste Erkenntnisse über Multiplikatoren auf $\mathcal{H}_A^2(\mu)$ gewinnen.

Lemma 6.10. *Sei $\phi \in A$. Dann ist $\phi\,|_\Omega$ ein Multiplikator auf $\mathcal{H}_A^2(\mu)$ mit*

$$\|M_\phi\| = \|\phi\|_{\infty,\Omega}.$$

Beweis. Sei $\phi \in A$. Wegen

$$\|\phi f\|_{L^2(\mu)} \leq \|\phi\|_{\infty,\Omega} \|f\|_{L^2(\mu)}$$

für alle $f \in L^2(\mu)$ hat die Abbildung

$$(A, \|\cdot\|_{L^2(\mu)}) \to (A, \|\cdot\|_{L^2(\mu)}), [f] \mapsto [\phi f]$$

eine wohldefinierte stetig lineare Fortsetzung

$$M_\phi : H_A^2(\mu) \to H_A^2(\mu)$$

mit

$$\|M_\phi\| \leq \|\phi\|_{\infty,\Omega}.$$

Da $(A, \|\cdot\|_{L^2(\mu)})$ in $H_A^2(\mu)$ dicht liegt, gilt

$$M_\phi[f] = [\phi f]$$

für $[f] \in H_A^2(\mu)$, denn zu jedem $[f] \in H_A^2(\mu)$ gibt es eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in A mit

$$\lim_{k\to\infty} [f_k] = [f] \text{ in } L^2(\mu).$$

Wegen der Stetigkeit von M_ϕ findet man dann zu jedem $\epsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|M_\phi([f]) - M_\phi([f_k])\| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

für alle $k \geq k_0$. Als stetige Funktion auf einer kompakten Menge nimmt ϕ ihr Maximum an, daher gilt

$$\|\phi\|_{\infty,\overline{\Omega}} < \infty.$$

Da $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen f konvergiert, gibt es ein $k_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|[f_k] - [f]\| \leq \frac{\epsilon}{2\|\phi\|_{\infty,\overline{\Omega}}}.$$

Sei

$$k_2 = \max\{k_0, k_1\}.$$

Dann rechnet man nach, dass

$$\begin{aligned}
\|M_\phi([f]) - [\phi f]\| &\leq \|M_\phi([f]) - M_\phi([f_{k_2}])\| + \|M_\phi([f_{k_2}]) - [\phi f]\| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \|[\phi f_{k_2}] - [\phi f]\| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \|\phi\|_{\infty,\overline{\Omega}} \|[f_{k_2}] - [f]\| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Also ist

$$M_\phi[f] = [\phi f]$$

für alle $[f] \in H^2_A(\mu)$ gezeigt. Die Abbildung

$$\tilde{M_\phi} = \rho M_\phi \rho^{-1} : \mathcal{H}^2_A(\mu) \to \mathcal{H}^2_A(\mu)$$

ist stetig mit

$$\|\tilde{M_\phi}\| = \|M_\phi\| \leq \|\phi\|_{\infty,\Omega}.$$

Indem man zu $[f] \in H^2_A(\mu)$ wieder eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in A wählt mit

$$\lim_{k\to\infty} [f_k] = [f] \text{ in } L^2(\mu),$$

sieht man, dass

$$\begin{aligned}
\tilde{M_\phi}(\rho([f]))(z) &= \lim_{k\to\infty} \rho M_\phi([f_k])(z) \\
&= \lim_{k\to\infty} \rho([\phi f_k])(z) \\
&= \lim_{k\to\infty} (\phi f_k)(z) \\
&= \phi(z) \lim_{k\to\infty} \rho([f_k])(z) \\
&= \phi(z)\rho([f])(z)
\end{aligned}$$

für alle $z \in \Omega$ gilt. Also ist

$$\phi\mid_{\Omega} \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_A^2(\mu))$$

und $\tilde{M_\phi}$ ist der von $\phi\mid_\Omega$ induzierte Multiplikationsoperator auf $\mathcal{H}_A^2(\mu)$. Wegen $1 \in \mathcal{H}_A^2(\mu)$ folgt wie im Beweis von Lemma 6.4, dass

$$\|M_{\phi|_\Omega}\| = \|\phi\|_{\infty,\Omega}$$

für alle $\phi \in A$ gilt. □

Bevor wir zu den eigentlichen Anwendungen von Satz 6.9 kommen, soll hier noch der Begriff des Peakpunktes definiert werden.

Definition 6.11. *Sei z_0 ein Randpunkt von Ω. Der Punkt z_0 heißt Peakpunkt für A, falls es eine Funktion $\phi \in A$ gibt mit*

$$\phi(z_0) = 1 > |\phi(z)| \text{ für alle } z \in \overline{\Omega} \setminus \{z_0\}.$$

Bei der Arbeit mit Peakpunkten ist ein Satz von Alexander J. Izzo [11] sehr hilfreich, den wir hier der Vollständigkeit halber beweisen wollen. Zunächst benötigen wir dazu das folgende Lemma.

Lemma 6.12. *Sei A eine uniforme Algebra auf einem kompakten Hausdorffraum X und sei x_0 ein Peakpunkt für A. Sei zusätzlich p eine positive stetige Funktion auf X. Dann gibt es eine Funktion g in A mit*

$$g(x_0) = p(x_0)$$

und

$$|g(x)| \leq p(x)$$

für alle $x \in X$.

Beweis. Weil x_0 ein Peakpunkt für A ist, finden wir eine Funktion $h \in A$, die in x_0 einen Peakpunkt hat. Da $p(x_0)$ positiv ist, können wir annehmen, dass

$$p(x_0) = 1,$$

ansonsten gehen wir einfach zu der ebenfalls positiven Funktion

$$p' = \frac{p}{p(x_0)}$$

über und multiplizieren am Schluss das Endergebnis mit $p(x_0)$ durch. Die Positivität von p liefert außerdem die Existenz einer reellen Zahl $\delta > 0$ mit

$$|p(x)| \geq \delta$$

für alle $x \in X$. Wir können zusätzlich annehmen, dass

$$p(x) \geq \frac{2}{3}$$

für alle $x \in X$. Sonst wähle man $k \in \mathbb{N}$ so, dass

$$(\min_{x \in X} p(x))^{\frac{1}{k}} > \frac{2}{3}$$

und bestimme ein $g \in A$ zu $p^{\frac{1}{k}}$. Dann hat $g^k \in A$ die gewünschten Eigenschaften für p. Nun definieren wir für alle $n \in \mathbb{N}^*$ die Menge

$$S_n = \{x \in X; \frac{|h(x)|}{p(x)} \in [1 + \frac{1}{2^{n+1}}, 1 + \frac{1}{2^n}]\}.$$

Da es kein $n \in \mathbb{N}^*$ gibt mit $x_0 \in S_n$, gilt für alle $n \in \mathbb{N}^*$

$$|h(x)| < 1$$

für alle $x \in S_n$. Also findet man für alle $n \in \mathbb{N}^*$ ein k_n in $\mathbb{N}^*$ mit

$$|h(x)|^{k_n} < \frac{2}{3^{n+1}}$$

für alle $x \in S_n$. Nach dem Weierstraßschen Majorantenkriterium und weil $A \subset C(X)$ abgeschlossen ist, liegt die Funktion

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{k_n}}{2^n}$$

in A mit

$$g(x_0) = 1 = p(x_0)$$

und

$$|g| \leq |h|$$

auf X. Wegen

$$|h(x)| \leq 1$$

gilt für alle $n, m \in \mathbb{N}^*$ für alle $x \in S_m$

$$|h(x)|^{k_n} \leq |h(x)| \leq (1 + \frac{1}{2^m})p(x).$$

Für festes $x \in S_m$ gilt also

$$\begin{aligned}
|g(x)| &\leq \sum_n \{(\frac{1}{2^n})(1 + \frac{1}{2^m})(p(x)) : n \neq m\} + \frac{|h^{k_m}(x)|}{2^m} \\
&\leq (1 + \frac{1}{2^m})(1 - \frac{1}{2^m})p(x) + \frac{1}{2^m}\frac{1}{3^m}\frac{2}{3} \\
&\leq (1 - \frac{1}{4^m})p(x) + \frac{1}{6^m}p(x) \leq p(x).
\end{aligned}$$

Für

$$x \in X \setminus \bigcup_n S_n$$

gilt

$$|g(x)| \leq |h(x)| = \frac{|h(x)|}{p(x)} p(x) \leq p(x).$$

Also hat $g \in A$ die gewünschten Eigenschaften. □

Mit Hilfe des gerade bewiesenen Lemmas können wir nun den folgenden Satz beweisen, wobei wir uns am Beweis von Izzo in [11] orientieren.

Satz 6.13. *Sei A eine uniforme Algebra auf einem kompaktem Hausdorffraum X und sei x_0 ein Peakpunkt für A. Dann kann jede Funktion in A als Linearkombination zweier Funktionen dargestellt werden, die im Punkt x_0 einen Peakpunkt besitzen.*

Beweis. Wir wählen uns eine Funktion $f \in A$ und nehmen zunächst an, dass f im Punkt x_0 eine Nullstelle besitzt. Da x_0 ein Peakpunkt für A ist, gibt es eine Funktion $\phi \in A$, die in x_0 einen Peakpunkt besitzt. Defniert man nun die Funktion α als

$$\alpha : X \to \mathbb{R}, \alpha(x) = 1 - |\phi(x)|,$$

so gilt

$$\alpha(x) \geq 0$$

für alle $x \in X$ und die einzige Nullstelle von α ist x_0. Da die Funktionen α und f beide stetig sind auf einem kompakten Hausdorffraum, sind sie beschränkt und man findet ein $M \in \mathbb{R}$ mit

$$M > \|\alpha\|_{\infty,X} + \|f\|_{\infty,X}.$$

Die Abbildung

$$p : X \to \mathbb{R}, p(x) = M - \alpha(x) - |f(x)|$$

ist dann eine positive stetige Funktion auf X, die im Punkt x_0 ein striktes Maximum besitzt. Wendet man Lemma 6.12 auf p an, so erhält man eine Funktion $g \in A$ derart, dass

$$g(x_0) = p(x_0)$$

und

$$|g(x)| \leq p(x)$$

für alle $x \in X$. Insbesondere gilt

$$g(x_0) > 0.$$

Also erhält man für alle $x \neq x_0$

$$|g(x)| \leq p(x) < p(x_0) = g(x_0)$$

und somit besitzt die Funktion

$$\tilde{g} = \frac{g}{g(x_0)} \in A$$

einen Peakpunkt in x_0. Jetzt definieren wir uns eine weitere Funktion

$$h = g + f.$$

Da A eine Algebra ist, liegt h wieder in A und erfüllt

$$h(x_0) = g(x_0) + f(x_0) = g(x_0) = M,$$

sowie

$$\begin{aligned} |h(x)| &\leq |g(x)| + |f(x)| \\ &\leq p(x) + |f(x)| \\ &= M - \alpha(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in X$. Da α in allen Punkten $x \in X \setminus \{x_0\}$ strikt positiv ist, gilt also für alle $x \in X \setminus \{x_0\}$

$$|h(x)| < h(x_0) = M.$$

Damit hat die Abbildung

$$\tilde{h} = \frac{h}{M} \in A$$

einen Peakpunkt in x_0 und man erhält

$$f = h - g = M\tilde{h} - g(x_0)\tilde{g}.$$

Die Funktion f ist also Linearkombination zweier Funktionen aus A, die in x_0 einen Peakpunkt besitzen.
Für den Fall, dass

$$f(x_0) \neq 0$$

ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass

$$f(x_0) > 0,$$

ansonsten multipliziere man einfach mit einem Phasenfaktor. Wir wählen nun zwei Funktionen $g, h \in A$ mit

$$f - f(x_0) = h - g$$

wie im ersten Teil des Beweises. Dann ist

$$f = (h + f(x_0)) - g$$

und $h + f(x_0), g \in A$ sind Funktionen mit

$$h(x_0) + f(x_0) > |h(x)| + f(x_0) \geq |h(x) + f(x_0)|$$

und

$$g(x_0) > |g(x)|$$

für alle $x \in X \setminus \{x_0\}$. Also ist

$$f = (h(x_0) + f(x_0))\frac{h + f(x_0)}{h(x_0) + f(x_0)} + g(x_0)\frac{g}{g(x_0)}$$

eine Darstellung der gewünschten Art. □

In diesem Zusammenhang ist noch erwähnenswert, dass für eine offene und beschränkte Menge $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ jede Algebra

$$A \subset C(\overline{\Omega}),$$

die mindestens die Einschränkungen der Polynome auf $\overline{\Omega}$ enthält, eine uniforme Algebra ist. Das folgende Lemma stellt den Bezug zu Satz 6.9 her.

Satz 6.14. *Sei $z_0 \in \partial\Omega$ ein Peakpunkt für A. Dann gilt mit den Bezeichnungen aus Satz 6.9, dass*

$$A\,|_\Omega \subset \mathrm{LH}(\mathcal{M}_{z_0}).$$

Hieraus folgt insbesondere, dass

$$C^*(\{M_\phi; \phi \in A\,|_\Omega\}) \subset C^*(\{M_\phi; \phi \in \mathcal{M}_{z_0}).$$

Beweis. Dass

$$A\,|_\Omega \subset \mathcal{M}(\mathcal{H}_A^2(\mu))$$

gilt, wurde bereits in Lemma 6.10 gezeigt. Zusätzlich existiert für jedes $\phi \in A\,|_\Omega$ der Grenzwert

$$\lim_{z \to z_0} \phi(z),$$

denn A ist eine Teilmenge der stetigen Funktionen auf $\overline{\Omega}$. Da A eine uniforme Algebra ist, die in z_0 einen Peakpunkt besitzt, kann man nach Satz 6.13 jede Funktion aus A als Linearkombination zweier Funktionen $\phi_1, \phi_2 \in A$ darstellen, die in x_0 einen Peakpunkt besitzen. Diese Funktionen nehmen dann in z_0 ihr Supremum auf $\overline{\Omega}$ an, was nach Lemma 6.10 bedeutet, dass

$$|\phi_i(z_0)| = \|M_{\phi_i}\| \text{ für } i = 1, 2.$$

Da die Menge $\mathcal{M}_{z_0}$ definiert war als die Menge aller Multiplikatoren ϕ, für die der Grenzwert

$$\phi(z_0) = \lim_{z \to z_0} \phi(z)$$

existiert und für die

$$|\phi(z_0)| = \|M_\phi\|$$

ist, gilt

$$A\,|_\Omega \subset \mathrm{LH}(\mathcal{M}_{z_0}).$$

Daraus folgt sofort die Teilmengenbeziehung zwischen den erzeugten C^*-Algebren. □

Definition 6.15. *Wir schreiben*

$$\mathcal{T}_A = C^*(\{M_\phi; \phi \in A\,|_\Omega\}) \subset L(\mathcal{H}_A^2(\mu))$$

für die von allen Multiplikatoren mit Symbol

$$\phi \in A\,|_\Omega$$

erzeugte C^*-Algebra.

Nun soll noch der Begriff des Toeplitzoperators eingeführt werden.

Definition 6.16. *Sei $\phi \in L^\infty(\mu)$. Der Toeplitzoperator mit Symbol ϕ*

$$T_\phi \in L(\mathcal{H}_A^2(\mu))$$

sei definiert durch

$$T_\phi = \rho \circ (P_{H_A^2(\mu)} M_\phi) \circ \rho^{-1}.$$

Hierbei sei $P_{H_A^2(\mu)}$ die Orthogonalprojektion von $L^2(\mu)$ auf $H_A^2(\mu)$.

Es stellt sich heraus, dass unter den gegebenen Voraussetzungen ein interessanter Zusammenhang zwischen Multiplikationsoperatoren und Toeplitzoperatoren besteht.

Lemma 6.17. *Es gilt*

$$\mathcal{T}_A = C^*(\{T_\phi; \phi \in C(\overline{\Omega})\}).$$

Beweis. Für $\phi \in A$ gilt in $L(\mathcal{H}_A^2(\mu))$ nach dem Beweis von 6.10 die Identität

$$M_{\phi|\Omega} = \rho M_\phi \rho^{-1} = \rho(P_{H_A^2(\mu)} M_\phi)\rho^{-1} = T_\phi.$$

Für $\phi \in A$, $\psi \in A^* = \{\bar{g}; g \in A\}$ erhält man die Identität

$$T_\psi T_\phi = \rho(P_{H_A^2(\mu)} M_\psi P_{H_A^2(\mu)} M_\phi)\rho^{-1} = \rho(P_{H_A^2(\mu)} M_{\psi\phi})\rho^{-1} = T_{\psi\phi}.$$

Der Satz von Stone-Weierstraß zeigt, dass die Teilalgebra

$$\{\sum_{i=1}^r \phi_i \psi_i; r \geq 1, \phi_1, \ldots, \phi_r \in A; \psi_1, \ldots \psi_r \in A^*\} \subset C(\overline{\Omega})$$

dicht bezüglich der Supremumsnorm auf $\overline{\Omega}$ liegt.Wegen

$$\|T_f\| = \|\rho(P_{H_A^2(\mu)} M_f)\rho^{-1} \leq \|f\|_{L^\infty(\mu)}$$

für $f \in L^\infty(\mu)$ ist die Abbildung

$$C(\overline{\Omega}) \to L(\mathcal{H}_A^2(\mu)), f \mapsto T_f$$

stetig linear und

$$\{f \in C(\overline{\Omega}); T_f \in \mathcal{T}_A\} \subset C(\overline{\Omega})$$

ein abgeschlossener Teilraum. Da für $\phi \in A$, $\psi \in A^*$

$$T_{\phi\psi} = T_\psi T_\phi = (T_{\overline{\psi}})^* T_\phi = (M_{\overline{\psi}|\Omega})^*(M_{\phi|\Omega}) \in \mathcal{T}_A$$

gilt, erhält man schließlich, dass $T_f \in \mathcal{T}_A$ ist für alle $f \in C(\overline{\Omega})$. □

Nun kann man Satz 6.9 anwenden und erhält das folgende Resultat:

Satz 6.18. *Sei $z_0 \in \partial\Omega$ ein Peakpunkt für A. Dann ist die Abbildung*

$$L_{z_0} : \mathcal{T}_A \to \mathbb{C}, L_{z_0}(T) = \lim_{z \to z_0} \Gamma(T)(z)$$

eine wohldefinierte, nichttriviale multiplikative Linearform mit

$$L_{z_0}(T_\phi) = \phi(z_0)$$

für alle $\phi \in C(\overline{\Omega})$.

Beweis. Wegen Satz 6.14 gilt die Inklusion

$$\mathcal{T}_A \subset C^*(\{M_\phi; \phi \in \mathcal{M}_{z_0}\}).$$

Das erlaubt es uns, Satz 6.9 anzuwenden, woraus folgt, dass

$$L_{z_0} : \mathcal{T}_A \to \mathbb{C}, L(T) = \lim_{z \to z_0} \Gamma(T)(z)$$

ein wohldefinierter, unitaler und demnach insbesondere nichttrivialer C^*-Homomorphismus ist. Nach Lemma 4.1 und dem Beweis von 6.17 gilt

$$\Gamma(T_\phi)(z) = \Gamma(M_{\phi|\Omega})(z) = \phi(z)$$

für $\phi \in A$ und $z \in \Omega$. Also folgt für $\phi \in A$, $\psi \in A^*$

$$\begin{aligned} L_{z_0}(T_{\psi\phi}) &= L_{z_0}(T_\psi T_\phi) \\ &= L_{z_0}(T_\psi) L_{z_0}(T_\phi) \\ &= L_{z_0}(T_{\overline{\psi}})^* L_{z_0}(T_\phi) \\ &= L_{z_0}(M_{\overline{\psi}|\Omega})^* L_{z_0}(M_{\phi|\Omega}) \\ &= (\lim_{z \to z_0} \overline{\psi}(z))^* (\lim_{z \to z_0} \phi(z)) \\ &= (\psi\phi)(z_0). \end{aligned}$$

Da die lineare Hülle der Produkte $\psi\phi$ für $\phi \in A$, $\psi \in A^*$ dicht in $C(\overline{\Omega})$ liegt, folgt hieraus auch der letzte Teil der Behauptung. □

Wir betrachten nun die Abbildung

$$j : (A, \| \cdot \|_\infty) \to \mathcal{T}_A, \phi \mapsto T_\phi = M_{\phi|\Omega},$$

die jedem Element $\phi \in A$ den Toeplitzoperator T_ϕ zuordnet. Nach den Beweisen von 6.10 und 6.17 ist j ein isometrischer Algebrenhomomorphismus.

Lemma 6.19. *Für die Funktion*

$$j : (A, \| \cdot \|_\infty) \to \mathcal{T}_A, \phi \mapsto T_\phi$$

ist die induzierte Abbildung zwischen den Strukturräumen der Banachalgebren $\mathcal{T}_A$ *und* A

$$j^* : \Delta_{\mathcal{T}_A} \to \Delta_A, \Delta \mapsto \Delta \circ j$$

stetig und injektiv, wenn man $\Delta_{\mathcal{T}_A}$ *und* Δ_A *mit den zugehörigen Gelfandtopologien versieht. Für das Bild von* j^* *gilt:*

$$\mathrm{Im}(j^*) = \{\delta \in \Delta_A; \text{es existiert ein } \Delta \in \Delta_{\mathcal{T}_A} \text{ mit } \Delta(T_\phi) = \delta(\phi) \text{ für alle } \phi \in A\}.$$

Beweis. Sei $\Delta_0 \in \Delta_{\mathcal{T}_A}$ und sei Δ_α ein Netz in $\Delta_{\mathcal{T}_A}$, das bezüglich der Gelfandtopologie gegen Δ_0 konvergiert. Sei $\phi \in A$ beliebig. Da $j(\phi) \in \mathcal{T}_A$, folgt

$$j^*(\Delta_\alpha)(\phi) = \Delta_\alpha(j(\phi)) \xrightarrow{\alpha} \Delta_0(j(\phi)) = j^*(\Delta_0)(\phi).$$

Also ist j^* stetig bezüglich der Gelfandtopologien. Für $\Delta_1, \Delta_2 \in \Delta_{\mathcal{T}_A}$ bedeutet

$$j^*(\Delta_1) = j^*(\Delta_2)$$

genau, dass

$$\Delta_1 = \Delta_2$$

auf j(A). Da definitionsgemäß

$$\mathcal{T}_A = C^*(j(A))$$

gilt und da Δ_1, Δ_2 C^*-Homomorphismen sind, folgt direkt, dass

$$\Delta_1 = \Delta_2$$

ist. Dies zeigt die Injektivität von j^*. Liegt eine Linearform $\Delta \in \Delta_A$ im Bild von j^*, so gibt es ein $\Delta' \in \Delta_{\mathcal{T}_A}$ mit

$$\Delta(\phi) = j^*(\Delta')(\phi) = \Delta'(j(\phi)) = \Delta'(T_\phi)$$

für alle $\phi \in A$. Gibt es umgekehrt zu $\Delta \in \Delta_A$ ein solches $\Delta' \in \Delta_{\mathcal{T}_A}$ mit

$$\Delta(\phi) = \Delta'(T_\phi) = \Delta'(j(\phi))$$

für alle $\phi \in A$, so ist

$$\Delta = \Delta' \circ j = j^*(\Delta')$$

und liegt somit im Bild von j^*. Wir haben also auch die Identität

$$\mathrm{Im} j^* = \{\delta \in \Delta_A; \text{ es existiert ein } \Delta \in \Delta_{\mathcal{T}_A} \text{ mit } \Delta(T_\phi) = \delta(\phi) \text{ für alle } \phi \in A\}$$

gezeigt.

□

Lemma 6.20. *Sei*

$$\partial_p A = \{z_0 \in \partial\Omega;\ \text{es existiert ein } \phi \in A \text{ mit } \phi(z_0) = 1 > |\phi(z)| \text{ für alle } z \in \overline{\Omega} \setminus \{z_0\}\}.$$

Dann liegen die Punktauswertungen

$$\delta_{z_0} : A \to \mathbb{C}, \phi \mapsto \phi(z_0)$$

für alle $z_0 \in \partial_p A$ *in* $j^*(\Delta_{\mathcal{T}_A})$.

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus Satz 6.18. □

Lemma 6.21. *Sei*

$$S = \overline{\partial_p A}.$$

Dann liegen auch für $z_0 \in S$ *die Punktauswertungen*

$$\delta_{z_0} : A \to \mathbb{C}, f \mapsto f(z_0)$$

im Bild von j^*.

Beweis. Die Abbildung

$$g : \overline{\Omega} \to \Delta_A, z \mapsto \delta_z$$

ist stetig, denn für eine Folge $z_k \in \overline{\Omega}$ mit Grenzwert $z \in \overline{\Omega}$ konvergiert die Folge δ_{z_k} punktweise auf A gegen δ_z, da $A \subset C(\overline{\Omega})$. Daher konvergiert δ_{z_k} bezüglich der Gelfandtopologie gegen δ_z, was die Stetigkeit von g liefert. Da das Bild von j^* als stetiges Bild der kompakten Menge $\Delta_{\mathcal{T}_A}$ kompakt und damit insbesondere abgeschlossen ist und g stetig ist, enthält $g^{-1}(\mathrm{Im}(j^*))$ zusammen mit $\partial_p A$ auch seinen Abschluss S. Also gilt

$$\{\delta_z; z \in S\} \subset \mathrm{Im}(j^*).$$

□

Satz 6.22. *Die Abbildung*

$$\overline{\Gamma} : \mathcal{T}_A \to C(S), \overline{\Gamma}(T)(z) = (j^*)^{-1}(\delta_z)(T)$$

ist ein wohldefinierter C^**-Homomorphismus mit*

$$\overline{\Gamma}(T_\phi) = \phi\,|_S$$

für $\phi \in C(\overline{\Omega})$ *und*

$$\overline{\Gamma}(T)(z_0) = \lim_{z \to z_0} \Gamma(T)(z)$$

für $T \in \mathcal{T}_A$ *und* $z_0 \in \partial_p(A)$.

Beweis. Nach Lemma 6.21 liegt für alle $z_0 \in S$ die Abbildung δ_{z_0} im Bild von j^*. Die Abbildung j^* ist injektiv mit abgeschlossenem Bild. Daher ist

$$j^* : \Delta_{\mathcal{T}_A} \to \mathrm{Im}(j^*)$$

bijektiv und stetig zwischen kompakten Hausdorffräumen und daher ein Homöomorphismus. Da die Abbildung.

$$g : S \to \mathrm{Im}(j^*), z \mapsto \delta_z$$

stetig ist, ist auch die Abbildung

$$S \to \Delta_{\mathcal{T}_A}, z \mapsto (j^*)^{-1}(\delta_z)$$

stetig, was nach der Definition der Gelfandtopologie bedeutet, dass

$$S \to \mathbb{C}, z \mapsto (j^*)^{-1}(\delta_z)(T)$$

stetig ist für alle $T \in \mathcal{T}_A$. Dies zeigt die Wohldefiniertheit von $\overline{\Gamma}$. Da für jedes $z \in S$ die Abbildung $(j^*)^{-1}(\delta_z)$ ein Element von $\Delta_{\mathcal{T}_A}$ ist, ist die Abbildung $\overline{\Gamma}$ ein C^*-Homomorphismus.
Wegen

$$j^*(L_{z_0}) = \delta_{z_0}$$

für $z_0 \in \partial_p A$ erhält man für alle $\phi \in C(\overline{\Omega})$ als Anwendung von Satz 6.18, dass

$$\overline{\Gamma}(T_\phi)(z_0) = (j^*)^{-1}(\delta_{z_0})(T_\phi) = L_{z_0}(T_\phi) = \phi(z_0)$$

für alle $z_0 \in \partial_p A$. Da $\overline{\Gamma}(T_\phi)$ auf S und ϕ auf $\overline{\Omega}$ stetig sind, folgt

$$\overline{\Gamma}(T_\phi)(z_0) = \phi(z_0)$$

für alle $z_0 \in S$ und $\phi \in C(\overline{\Omega})$.
Für $T \in \mathcal{T}_A$ und $z_0 \in \partial_p A$ rechnet man mit Satz 6.18 nach:

$$\overline{\Gamma}(T)(z_0) = (j^*)^{-1}(\delta_{z_0})(T) = L_{z_0}(T) = \lim_{z \to z_0} \Gamma(T)(z).$$

□

Für eine spezielle Klasse von funktionalen Hilberträumen können wir dieses Ergebnis noch ausbauen:

Korollar 6.23. *Sei $\mathcal{H}^2_A(\mu) \subset \mathbb{C}^\Omega$ ein funktionaler Hilbertraum wie oben für den zusätzlich alle Funktionen $f \in \mathcal{H}^2_A(\mu)$ holomorph auf Ω sind. Dann ist die Abbildung*

$$\overline{\Gamma} : \mathcal{T}_A \to C(\Omega \cup \partial_p A), \overline{\Gamma}(T)(z_0) = \begin{cases} \Gamma(T)(z_0), & z_0 \in \Omega \\ \lim\limits_{z \to z_0} \Gamma(T)(z), & z_0 \in \partial_p A \end{cases}$$

wohldefiniert, linear, kontraktiv und mit den Involutionen verträglich.

Beweis. Lemma 3.3 und Satz 6.22 zeigen, dass $\overline{\Gamma}$ linear, kontraktiv und verträglich mit den Involutionen ist. Außerdem liefert Lemma 3.5 die Stetigkeit von $\overline{\Gamma}(T)$ auf Ω für alle $T \in \mathcal{T}_A$. Für einen Punkt $z_0 \in \partial_p A$, einen Operator $T \in \mathcal{T}_A$ und $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\|\Gamma(T)(z) - \overline{\Gamma}(T)(z_0)\| < \frac{\epsilon}{2}$$

für alle $z \in \Omega \cap B_\delta(z_0)$. Da es zu $\tilde{z} \in B_\delta(z_0) \cap \partial_p A$ eine Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\Omega \cap B_\delta(z_0)$ gibt mit

$$\lim_{k\to\infty} z_k = \tilde{z},$$

findet man wegen

$$\overline{\Gamma}(T)(\tilde{z}) = \lim_{z\to\tilde{z}} \Gamma(T)(z)$$

ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|\Gamma(T)(z_k) - \overline{\Gamma}(T)(\tilde{z})\| < \frac{\epsilon}{2}$$

für alle $k \geq k_0$. Damit folgt

$$\begin{aligned}\|\overline{\Gamma}(T)(\tilde{z}) - \overline{\Gamma}(T)(z_0)\| &\leq \|\overline{\Gamma}(T)(\tilde{z}) - \Gamma(T)(z_{k_0})\| + \|\Gamma(T)(z_{k_0}) - \overline{\Gamma}(T)(z_0)\| \\ &\leq 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon\end{aligned}$$

Dies zeigt die Stetigkeit von $\overline{\Gamma}(T)$ und somit die Wohldefiniertheit von $\overline{\Gamma}$. □

Korollar 6.24. *Sei H^2 der in 2.6 definierte Hardyraum. Dann ist die Abbildung*

$$\overline{\Gamma} : \mathcal{T}_A = C^*(\{T_\phi; \phi \in C(\overline{\mathbb{D}})\}) \to C(\overline{\mathbb{D}}), T \mapsto \overline{\Gamma}(T)$$

mit

$$\overline{\Gamma}(T)(z_0) = \begin{cases} \Gamma(T)(z_0) & z_0 \in \mathbb{D} \\ \lim\limits_{z\to z_0} \Gamma(T)(z) & z_0 \in \partial\mathbb{D} \end{cases}$$

wohldefiniert, linear, kontraktiv und mit den Involutionen verträglich. Die Abbildung

$$\mathcal{T}_A \to C(\partial\mathbb{D}), T \mapsto \overline{\Gamma}(T)\,|_{\partial\mathbb{D}}$$

ist ein C^*-Homomorphismus mit

$$\overline{\Gamma}(T_\phi) = \phi\,|_{\partial\mathbb{D}}$$

für alle $\phi \in C(\overline{\mathbb{D}})$.

Beweis. Sei $\Omega = \mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ der offene Einheitskreis und sei

$$A = A(\mathbb{D})$$

die Diskalgebra aus Definition 2.9. Dann ist

$$A \subset C(\overline{\mathbb{D}})$$

eine abgeschlossene Teilalgebra mit

$$\mathbb{C}[z] \mid_{\overline{\mathbb{D}}} \subset A.$$

Seien wie in Definition 2.8

$$\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$$

das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$ und

$$m : \mathcal{B}(\partial\mathbb{D}) \to [0,1], m(A) = \frac{1}{2\pi}\lambda(\{t \in [-\pi, \pi]; e^{it} \in A\})$$

das normalisierte Lebesguemaß auf $\partial\mathbb{D}$. Wir wenden die Ergebnisse aus Abschnitt 6.3 auf die triviale Fortsetzung

$$\mu : \mathcal{B}(\overline{\mathbb{D}}) \to [0,1], \mu(A) = m(A \cap \partial\mathbb{D})$$

von m auf $\overline{\mathbb{D}}$ an. Da μ gerade als triviale Fortsetzung von m definiert ist, ist der Operator

$$\tilde{\phi} : L^2(\mu) \to L^2(m), \tilde{\phi}([f]) = [f \mid_{\partial\mathbb{D}}]$$

unitär, denn das Innere von $\mathbb{D}$ ist bezüglich μ eine Nullmenge und auf der Einheitskreislinie stimmen μ und m überein. Folglich ist eine Funktion

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$$

genau dann integrierbar bezüglich μ, wenn ihre Einschränkung auf den Rand integrierbar bezüglich m ist und die Integrale sind gleich. Nach dem Cauchyschen Integralsatz erhält man für $k < 0$ und $f \in A$

$$\begin{aligned} \hat{f} \mid_{\partial\mathbb{D}} (k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})e^{i|k|t}dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})e^{i(|k|-1)t}ie^{it}dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} f(z)z^{(|k|-1)}dz = 0, \end{aligned}$$

da der Integrand für alle $k < 0$ holomorph auf $\mathbb{D}$ ist und das letzte Integral ein Kurvenintegral ist. Demnach gilt

$$\tilde{\phi}(A) \subset H^2(\partial\mathbb{D}) = \{f \in L^2(m), \hat{f}(k) = 0 \text{ für alle } k < 0\}.$$

Also induziert $\tilde{\phi}$ eine Isometrie

$$\phi : H^2_A(\mu) \to H^2(\partial\mathbb{D}).$$

Das Bild dieser Isometrie ist ein abgeschlossener Teilraum und enthält die Einschränkungen der Polynome auf die Einheitskreislinie, da A die Einschränkungen der Polynome auf die Einheitskreisscheibe enthält. Man kann sehr leicht zeigen, dass die Funktionen

$$\{z^k, k \in \mathbb{Z}\}$$

eine Orthonormalbasis in $L^2(m)$ bilden. Entwickelt man eine Funktion $f \in L^2(m)$ nach dieser Orthonormalbasis so erhält man

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, z^k \rangle_{L^2(m)} z^k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\int_{\partial\mathbb{D}} f(w)\overline{w}^k dm(w)) z^k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} f(e^{it}) e^{-ikt} dt) z^k. \end{aligned}$$

Die Fourierkoeffizienten von f stimmen also genau mit den Koeffizienten bezüglich der Entwicklung nach dieser Orthonormalbasis überein. Das zeigt, dass die Polynome dicht in $H^2(\partial\mathbb{D})$ liegen. Insgesamt liefert das die Surjektivität von ϕ und ϕ ist somit unitär. In Problem 28 in [10] wird außerdem gezeigt, dass die Abbildung

$$\psi : H^2(\partial\mathbb{D}) \to H^2, f \mapsto F = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) z^k$$

ein wohldefinierter isometrischer Isomorphismus ist. Für $f \in A$ lässt sich der k-te Taylorkoeffizient a_k von f nach Satz 1.16 in [9] darstellen als

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} f(w)\frac{1}{w^{k+1}} dw \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) e^{-ikt} dt \\ &= \hat{f}(k). \end{aligned}$$

Für $k \geq 0$ und $f \in A$ stimmen die Fourierkoeffizienten von f demnach gerade mit den Taylorkoeffizienten von f im Nullpunkt überein. Daher erhält man

$$\psi(\phi([f])) = f\,|_{\mathbb{D}}$$

für $f \in A$. Da die Punktauswertungen auf H^2 stetig sind, sind auch die Abbildungen

$$(A, \|\cdot\|_{L^2(\mu)}) \to \mathbb{C}, [f] \mapsto f(z) = \psi \circ \phi([f])(z)$$

stetig linear für $z \in \mathbb{D}$. Ihre stetig linearen Fortsetzungen auf $H^2_A(\mu)$ sind gerade die Abbildungen

$$H^2_A(\mu) \to \mathbb{C}, [f] \mapsto \psi \circ \phi([f])(z).$$

Damit ist

$$\rho : H^2_A(\mu) \to \mathbb{C}^{\mathbb{D}}, \rho(f) = \psi \circ \phi([f])$$

und die Räume

$$\mathcal{H}^2_A(\mu) = \mathrm{Im}(\rho) = H^2$$

stimmen als Hilberträume überein. Man sieht sehr leicht direkt oder auch als Anwendung von Satz 11.29 aus [9], dass jeder Punkt im Rand von $\mathbb{D}$ ein Peakpunkt für A ist. Man erhält also

$$\partial_p A = \partial\mathbb{D}.$$

Weil alle Elemente des Hardyraumes holomorph sind, liefert Korollar 6.23 dann zusammen mit Satz 6.22 eine wohldefinierte, lineare, kontraktive und mit den Involutionen verträgliche Abbildung

$$\overline{\Gamma} : \mathcal{T}_A = C^*(\{T_\phi; \phi \in C(\overline{\mathbb{D}})\}) \to C(\overline{\mathbb{D}})$$

mit

$$\overline{\Gamma}(T)(z_0) = \begin{cases} \Gamma(T)(z_0), & z_0 \in \mathbb{D} \\ \lim\limits_{z \to z_0} \Gamma(T)(z), & z_0 \in \partial\mathbb{D} \end{cases}$$

und

$$\overline{\Gamma}(T_\phi)(z_0) = \lim_{z \to z_0; z \in \mathbb{D}} \Gamma(T_\phi)(z) = \phi(z_0)$$

für alle $\phi \in C(\overline{\mathbb{D}})$ und $z_0 \in \partial\mathbb{D}$. Nach Satz 6.22 ist die Abbildung

$$\mathcal{T}_A \to C(\partial\mathbb{D}), T \mapsto \overline{\Gamma}(T) \mid_{\partial\mathbb{D}}$$

ein C^*-Homomorphismus. Damit sind alle Behauptungen gezeigt. □

Zum Abschluss möchten wir die Berezin-Transformierte eines Toeplitzoperators T_ϕ mit $\phi \in C(\overline{\mathbb{D}})$ über dem Hardyraum H^2 noch etwas genauer charakterisieren.

Satz 6.25. *Sei $\Omega = \mathbb{D}$ und H^2 der Hardyraum wie in 6.24. Dann gilt für $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$ und $z \in \mathbb{D}$*

$$\Gamma(T_f)(z) = P[\phi \mid_{\partial\mathbb{D}}](z),$$

wobei $P[f \mid_{\partial\mathbb{D}}](z)$ das Poisson-Integral von $f \mid_{\partial\mathbb{D}}$ im Punkt z bezeichnet.

Beweis. Es gilt nach Lemma 3.9

$$V_z : \mathbb{C} \to H^2, \alpha \mapsto \frac{K(\cdot, z)}{\|K(\cdot, z)\|}\alpha$$

und

$$V_z^* : H^2 \to \mathbb{C}, f \mapsto \langle f, \frac{K(\cdot, z)}{\|K(\cdot, z)\|}\rangle.$$

Identifiziert man wie bisher

$$L(\mathbb{C}) = \mathbb{C},$$

so erhält man

$$\begin{aligned}
\Gamma(T_f)(z) &= V_z^* T_f V_z(1) \\
&= \langle T_f \frac{K(\cdot,z)}{\|K(\cdot,z)\|}, \frac{K(\cdot,z)}{\|K(\cdot,z)\|}\rangle_{\mathcal{H}^2_A(\mu)} \\
&= \langle \rho P_{H^2_A(\mu)} M_f \frac{K(\cdot,z)}{\|K(\cdot,z)\|}, \frac{K(\cdot,z)}{\|K(\cdot,z)\|}\rangle_{\mathcal{H}^2_A(\mu)} \\
&= \frac{1}{K(z,z)} \langle P_{H^2_A(\mu)} M_f \rho^{-1}(K(\cdot,z)), \rho^{-1}(K(\cdot,z))\rangle_{H^2_A(\mu)} \\
&= \frac{1}{K(z,z)} \langle f \rho^{-1}(K(\cdot,z)), \rho^{-1}(K(\cdot,z))\rangle_{L^2(\mu)} \\
&= \frac{1}{K(z,z)} \int_{\overline{\mathbb{D}}} f |\rho^{-1}(K(\cdot,z))|^2 d\mu \\
&= (1-|z|^2) \int_{\partial\mathbb{D}} f(w) |\frac{1}{1-w\overline{z}}|^2 dm(w) \\
&= (1-|z|^2) \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} f(e^{it}) |\frac{1}{1-e^{it}\overline{z}}|^2 d\lambda(t)
\end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{D}$. Schreibt man $z = re^{i\theta}$ mit $0 < r < 1$ und $\theta \in \mathbb{R}$, so folgt weiter

$$\begin{aligned}
\Gamma(T_f)(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} f(e^{it}) \frac{1-r^2}{1-2\mathrm{Re}(\mathrm{re}^{\mathrm{i}(\mathrm{t}-\theta)}) + \mathrm{r}^2} d\lambda(t) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} f(e^{it}) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\mathrm{t}-\theta) + \mathrm{r}^2} d\lambda(t) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} f(e^{it}) P_r(\theta - t) d\lambda(t) \\
&= P[f](re^{i\theta}) = P[f](z),
\end{aligned}$$

wobei

$$P_r(\theta - t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\mathrm{t}-\theta) + \mathrm{r}^2}$$

der Poissonkern aus 2.11 ist. □

Da die Funktion

$$P[f\ |_{\partial\mathbb{D}}] : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$$

harmonisch ist für $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$, löst in der Situation des letzten Satzes die Berezin-Transformierte von T_f das Dirichlet-Problem über dem Einheitskreis.

Literaturverzeichnis

[1] J. Arazy, M. Engliš, Iterates and the bounded behavior of the Berezin-Transform, Annales de l'institut Fourier, 51 no. 4 (2001), 1101-1133.

[2] J. A. Ball, T. T. Trent, V. Vinnikov, Interpolation and commutant lifting for multipliers on reproducing kernel Hilbert spaces, Op. Th. Adv. and App. 122 (2001), 89-138.

[3] C. Barbian, Positivitätsbedingungen funktionaler Hilberträume und Anwendungen in der mehrdimensionalen Operatorentheorie, Diplomarbeit, Saarbrücken, 2001.

[4] J.B. Conway, The Theory of Subnormal Operators, Math. Surveys and Monographs, Amer. Math. Soc., Providence, 1991.

[5] S.C. Costea, E.T. Sawyer, B.D. Wick, The Corona Theorem for the Drury-Arveson Hardy space and other holomorphic Besov-Sobolev spaces on the unit ball in $\mathbb{C}^n$, to appear in Anal. PDE, arXiv:0811.0627v7.

[6] K.R. Davidson, R.G Douglas, The generalized Berezin transform and commutator ideals, Pacific J. Math 222(2005), 29-56.

[7] R.G. Douglas, J. Eschmeier, Spectral inclusion theorems, Preprint, Saarbrücken, 2011.

[8] J. Eschmeier, Funktionale Hilberträume und reproduzierende Kerne, Skript, Saarbrücken, 2011.

[9] J. Eschmeier, Komplexe Analysis, Vorlesungsskript, Saarbrücken, 2011.

[10] P.R.Halmos, A Hilbert space problem book, Springer Verlag, New York, 1982.

[11] A.J. Izzo, The linear span of peak functions, Proc. Edinburgh Math. Soc. 48 (2005), 631-634.