Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische
Fakultät I
Fachrichtung Mathematik
Bachelor Studiengang Mathematik

Bachelorarbeit

Das wesentliche numerische Bild von Operatoren auf Banachräumen

zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science

vorgelegt von

Lukas Schneider

nach einem Thema von

Prof. Dr. Jörg Eschmeier

Saarbrücken, 2015

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Statement in Lieu of an Oath

I hereby confirm that I have written this thesis on my own and that I have not used any other media or materials than the ones referred to in this thesis.

Ort,Datum

Unterschrift

Danksagung

Meinen besonderen Dank möchte ich Prof. Dr. Jörg Eschmeier aussprechen. Die Zeit, die er in die Vorbereitung und enge Beratung investiert hat, sowie die kontinuierliche Unterstützung, hat diese Arbeit erst möglich gemacht.

Außerdem möchte meinem Betreuer Sebastian Langendörfer für all die Unterstützung, kompetente Beratung und Zeit danken, die er sich während meiner Bachelorarbeit für mich genommen hat.

Darüber hinaus möchte ich meinen Eltern und meiner Schwester dafür danken, dass sie mich während meiner ganzen bisherigen Studienzeit in jeglicher Hinsicht unterstützt und motiviert haben.

Zudem möchte ich auch meinem gesamten Freundeskreis für jegliche Unterstützung, Motivation und das Verständnis danken, welches mir während meiner Arbeitszeit entgegen gebracht wurde.

Zuletzt danke ich Prof. Dr. Hannah Markwig. Ihr großes Engagement, das sie Studenten entgegenbringt, hat mich während meines Studiums stets motiviert, weiterzumachen.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In seinem Buch [Hal] erklärt Halmos, dass das hauptsächliche Interesse im frühem Stadium der Erforschung von Hilberträumen (durch Hilbert, Hellinger, Toeplitz) sogenannte quadratische Formen waren, die heute allerdings eine eher nachrangige Rolle spielen. Heute ist der Forschungsgegenstand vielmehr ein Operator T auf einem Hilbertraum H und man interessiert sich erst in zweiter Linie für die zugehörigen quadratischen Formen, dass heißt $H \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle Tx, x\rangle$.

Die meisten Fragen, die sich zu quadratischen Formen ergeben, sind Fragen über das numerische Bild

$$W(T) = \{\langle Tx, x\rangle; x \in H, \|x\| = 1\}$$

des zugehörigen Operators. Dieses Bild ist so definiert, dass es mit der algebraischen und der Normstrkuktur des Spektrums zusammenhängt. Für endlich dimensionale Hilberträume wurde diese Definition 1918 von Toeplitz eingeführt.

In dieser Arbeit untersuchen wir das numerische Bild und Verallgemeinerungen davon in verschiedenen Situationen. Als erstes betrachten wir für ein beliebiges Element a aus einer normierten, komplexen, unitalen Algebra A mit Dualraum A' das algebraische numerische Bild

$$V(A, a) = \{f(a); f \in A', f(1) = 1 = \|f\|\}$$

und zeigen, dass diese Menge eine konvexe und kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist. Ist A außerdem vollständig, so enthält das algebraische numerische Bild $V(A, a)$ das Spektrum von a.

Im zweiten Kapitel betrachten wir das räumliche numerische Bild von Operatoren auf normierten Räumen. Außerdem beweisen wir den Satz von Toeplitz-Hausdorff, der besagt, dass das räumliche numerische Bild für Operatoren auf Hilberträumen konvex ist.

Im dritten Kapitel betrachten wir zunächst das algebraische numerische Bild $V_e(T)$ auf der Calkin-Algebra $\mathfrak{C}(X)$, wobei letztere mit der üblichen Quotientennorm $\|\cdot\|_e$ versehen ist. Für Hilberträume geben Fillmore, Stampfli und Williams (vgl. [FSW]) eine äquivalente Definition durch

$$\begin{aligned} W_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \exists \text{ Folge } (x_n) \text{ in } H \text{ mit } \|x_n\| = 1 \text{ für alle} \\ n \in \mathbb{N} \text{ und } (x_n) \overset{n}{\to} 0 \text{ (schwach)},\ \langle Tx_n, x_n\rangle \overset{n}{\to} \lambda\}. \end{aligned}$$

Der Schwerpunkt der Arbeit liegt darin, eine entsprechende Identität für Operatoren auf Banachräumen herzuleiten.

Dazu führen wir in Kapitel 4 die Halbnorm

$$\|\cdot\|_{\mathrm{Cof}} : \mathcal{L}(X) \to [0, \infty), \|T\|_{\mathrm{Cof}} = \inf_{M \in \mathrm{Cof}(X)} \|T|_M\|$$

auf der Calkin-Algebra ein, für die $\|\cdot\|_{\mathrm{Cof}} \leq \|\cdot\|_e$ gilt. Mit

$$V_\mu(T) = V((\mathfrak{C}(X), \|\cdot\|_{\mathrm{Cof},}, [T])$$

und

$$\begin{aligned} W_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \exists \text{ Netze } (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \text{ in } X, (x_\alpha^*)_{\alpha\in\Lambda} \text{ in } X' \text{ mit } \|x_\alpha\| = \|x_\alpha^*\| = \langle x_\alpha, x_\alpha^*\rangle = 1 \\ \text{für alle } \alpha \in \Lambda \text{ und } x_\alpha \overset{\alpha}{\to} 0 \text{ schwach sowie } \langle Tx_\alpha, x_\alpha^*\rangle \overset{\alpha}{\to} \lambda\} \end{aligned}$$

zeigen wir, dass $\mathrm{conv}W_e(T) = V_\mu(T)$ gilt. Dabei orientieren wir uns an der Arbeit [BaM] von Müller und Barraa. Zum Schluss beschäftigen wir uns noch mit reflexiven Banachräumen und werden sehen, dass es in diesem Fall wie bei der Definition von Fillmore, Stampfli und Williams ausreicht, mit Folgen zu arbeiten.

1 Das algebraische numerische Bild

Wir wollen im ersten Kapitel das algebraische numerische Bild untersuchen. Dabei orientieren wir uns an der Monographie von Bonsall und Duncan [BD1]. Es bezeichne im Folgenden A eine normierte, komplexe Algebra mit 1, in der $\|1\| = 1$ gilt und $A' = \{f : A \to \mathbb{C};\ f \text{ linear und beschränkt}\}$ ihren Dualraum.
Für x aus der Einheitssphäre $S(A) = \{a \in A; \|a\| = 1\}$ schreiben wir außerdem $D(A, x) = \{f \in A'; f(x) = 1 = \|f\|\}$.
Aus dem Satz von Hahn-Banach folgt, dass $D(A, x) \neq \emptyset$ für alle $x \in S(A)$ gilt.

Definition 1.1. Seien $a \in A$ und $x \in S(A)$. Wir schreiben $V(A, a, x) = \{f(ax); f \in D(A, x)\}$. Dann definiert man:

(a) das algebraische numerische Bild von a als $V(A, a) = \{f(a); f \in A', f \in D(A, 1)\}$

(b) und den numerischen Radius von a als $v(a) = \sup\{|\lambda|; \lambda \in V(A, a)\}$.

Bemerkung 1.2. Für $a, b \in A,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt:

(a) $V(A, a + b) \subset V(A, a) + V(A, b)$,

(b) $V(A, \alpha + \beta a) = \alpha + \beta V(A, a)$.

Lemma 1.3. *Sei $a \in A$. Dann gilt*

$$V(A, a) = \bigcup_{x \in S(A)} V(A, a, x).$$

Beweis.
Die Inklusion "$\subset$" ist wegen $1 \in S(A)$ klar.
Sei umgekehrt $\lambda \in \bigcup_{x \in S(A)} V(A, a, x)$. Dann existiert ein $y \in S(A)$ und ein $h \in D(A, y)$ mit $\lambda = h(ay)$. Sei $f : A \to \mathbb{C},\ x \mapsto h(xy)$. Dann gilt für alle $x \in A$: $|f(x)| \leq \|h\|\|x\|\|y\| = \|h\|\|x\|$, also $\|f\| \leq \|h\| = 1$. Wegen $\|f\| \geq |f(1)| = |h(y)| = 1$ folgt $f(1) = h(y) = 1 = \|f\|$ und es gilt $\lambda = f(a)$. Somit folgt $\lambda \in V(A, a)$.

□

In einer nicht notwendigerweise unitalen, normierten $\mathbb{C}$-Algebra A definiert man

$$V(A, a) = \bigcup_{x \in S(A)} V(A, a, x)$$

als das algebraische, numerische Bild eines Elementes $a \in A$.

Satz 1.4. *Für alle $a \in A$ gilt*

$$V(A, a) = \bigcap_{\mu \in \mathbb{C}} \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda - \mu| \leq \|a - \mu\|\}.$$

Beweis.
"$\subseteq$": Sei $\gamma \in V(A,a)$. Dann existiert ein $f \in A'$, so dass $\gamma = f(a)$ und $f(1) = \|f\| = 1$. Nach Definition der Operatornorm gilt

$$|\gamma - \mu| = |f(a-\mu)| \leq \|f\|\|a-\mu\| = \|a-\mu\|.$$

"$\supseteq$": Sei $\gamma \in \bigcap_{\mu\in\mathbb{C}} \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda - \mu| \leq \|a-\mu\|\}$. Sei E der von a und 1 erzeugte, lineare Teilraum von A. Ist $a = \alpha 1$ für $\alpha \in \mathbb{C}$, so gilt

$$\bigcap_{\mu\in\mathbb{C}} \overline{D}_{\|a-\mu\|}(\mu) = \bigcap_{\mu\in\mathbb{C}} \overline{D}_{|\alpha-\mu|}(\mu) = \overline{D_0}(\alpha) = \{\alpha\} = V(A,a).$$

Sonst definieren wir $\tilde{f} : E \to \mathbb{C},\ \alpha a + \beta \mapsto \alpha a + \beta$.
Somit sind $\tilde{f}(a) = \gamma$ und $\tilde{f}(1) = 1$. Für alle $\alpha \in \mathbb{C}^*, \beta \in \mathbb{C}$ gilt nach Voraussetzung

$$\begin{aligned}|\tilde{f}(a\alpha + \beta)| &= |\alpha\gamma + \beta| \\ &= |\alpha||\gamma - (-\frac{\beta}{\alpha})| \\ &\leq |\alpha|\|a + \frac{\beta}{\alpha}\| \\ &= \|\alpha a + \beta\|.\end{aligned}$$

Wegen $|f(\beta)| = \beta$ ist $\|\tilde{f}\| \leq 1$ und mit $\tilde{f}(1) = 1$ folgt $\|\tilde{f}\| = 1$.
Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert eine stetige, lineare Fortsetzung $f : A \to \mathbb{C}$ von $\tilde{f}$ mit $\|f\| = 1$. Dann gelten $f(a) = \tilde{f}(a) = \gamma$ und $f(1) = \tilde{f}(1) = 1$.
Insgesamt folgt $\gamma \in V(A,1)$.

□

Da der Durchschnitt beliebiger kompakter und konvexer Mengen in $\mathbb{C}$ wieder kompakt und konvex ist, erhalten wir als Korollar:

Satz 1.5. *Sei $a \in A$. Dann ist $V(A,a)$ eine konvexe, kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$.*

Wir wollen nun das algebraische numerische Bild mit dem Spektrum eines Elements einer Banachalgebra vergleichen. Wie wir im nächsten Satz sehen werden, können wir uns bei der Betrachtung des algebraischen numerischen Bildes auf vollständige Banachräume beschränken.

Satz 1.6. *Seien $B \subset A$ eine Unteralgebra, die das Einselement enthält und $b \in B$. Dann gilt $V(B,b) = V(A,b)$*

Beweis. Nach dem Satz von Hahn-Banach bildet die Einschränkung

$$A' \to B', f \mapsto f|_B$$

die Menge $D(A,1)$ surjektiv auf $D(B,1)$ ab. Somit folgt für $b \in B \subset A$ mit dem Satz von Hahn-Banach:

$$\begin{aligned}V(A,b) &= \{f(b); f \in D(A,1)\}\\ &= \{f|_B(b); f|_B \in D(B,1)\}\\ &= \{f(b); f \in D(B,1)\}\\ &= V(B,b).\end{aligned}$$

□

Sei $\tilde{A}$ die Vervollständigung von A. Dann folgt mit Satz 1.6, dass $V(A,a) = V(\tilde{A},a)$ gilt. Das algebraische numerische Bild von $a \in A$ bleibt also unverändert, wenn wir es bezüglich der Vervollständigung $\tilde{A}$ betrachten.
Ist umgekehrt A_1 die von a und 1 erzeugte Algebra, so liefert Satz 1.6 außerdem, dass $V(A,a) = V(A_1,a)$ für alle $a \in A$ gilt.

Definition 1.7. Seien A vollständig, $a \in A$.

(a) Dann ist $\mathrm{Sp}(A,a) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda - a \text{ ist nicht invertierbar}\}$ das Spektrum von a.

(b) Außerdem definieren wir den Spektralradius von a durch

$$\rho(a) = \sup\{|\lambda|;\ \lambda \in Sp(A,a)\}.$$

Satz 1.8. *Sei A vollständig. Dann gilt $Sp(A,a) \subset V(A,a)$ für alle $a \in A$.*

Beweis. Sei $\lambda \in Sp(A,a)$. Dann ist $\lambda - a$ nicht invertierbar.
Wir betrachten zunächst den Fall, dass kein Linksinverses existiert.
Sei $J = A \cdot (\lambda - a)$. Dann ist J, wegen $1 \notin J$ ein echtes Linksideal von A. Für alle $x \in J$ gilt also

$$\|1 - x\| \geq 1.$$

Darum existiert nach Hahn-Banach ein $f \in A'$, so dass $\|f\| = 1$, $f|_J = 0$ und $f(1) = \mathrm{dist}(1,J) = 1$ gelten.
Dann folgt $f \in D(A,1)$ und $f(\lambda - a) = 0$, also ist $\lambda = f(a) \in V(A,a)$.
Der Fall, dass kein Rechtsinverses existiert folgt analog zum Linksinversen Fall.

□

Alternativ lässt sich Satz 1.8 auch mit Hilfe von Satz 1.4 beweisen, denn ist $\lambda \notin V(A,a)$, so existiert nach Satz 1.4 ein $\mu \in \mathbb{C}$, mit

$$|\lambda - \mu| > \|a - \mu\|.$$

Dann ist aber $\lambda - a = (\lambda - \mu) - (a - \mu)$ in A invertierbar, denn für jedes Element x in einer Banachalgebra A ist $\mathrm{Sp}(A,x) \subset \overline{D}_{\|x\|}(0)$.

Bemerkung 1.9.

(a) Wegen $Sp(A,a) \subset V(A,a)$ gilt für den Spektralradius die Abschätzung

$$\rho(a) \leq v(a).$$

(b) Da $V(A,a) \subset \mathbb{C}$ kompakt ist, gilt

$$\sup_{\lambda \in V(A,a)} |\lambda| = \max_{\lambda \in V(A,a)} |\lambda|.$$

Satz 1.10. *Für alle $a \in A$ gilt*

$$\frac{\|a\|}{e} \leq \sup_{\lambda \in V(A,a)} |\lambda| \leq \|a\|.$$

Beweis. Die zweite Ungleichung ist klar, da für alle $a \in A$ und $f \in A'$

$$|f(a)| \leq \|f\|\|a\|$$

gilt.
Um die erste Ungleichung zu beweisen, dürfen wir wegen der Bemerkung nach Satz 1.5 ohne Einschränkung annehmen, dass A vollständig ist.
Sei $x \in S(A)$. Weiter seien $b \in A$ und $\mu \in \mathbb{C}$ mit:

$$v(b) \leq \mu < 1. \tag{1}$$

Für $f \in D(A,x)$ und für alle $\lambda \in \overline{D_1(0)}$ folgt

$$\|(1-\lambda b)x)\| \geq |f((1-\lambda b)x)| = |f(x) - \lambda f(bx)| \geq 1 - v(b) \geq 1 - \mu.$$

Also folgt durch Normieren für alle $x \in A$ und $\lambda \in \overline{D_1(0)}$, dass

$$\|(1-\lambda b)x)\| \geq (1-\mu)\|x\| \tag{2}$$

gilt.
Wegen Bemerkung 1.9 (a) folgt aus $|\frac{1}{\lambda}| \geq 1$, dass $1/\lambda \in \mathbb{C} \setminus Sp(A,b)$ gilt. Damit ist $\frac{1}{\lambda} - b$ und somit auch $1 - \lambda b$ invertierbar für alle $\lambda \in \overline{D_1(0)}$.
Mit (2) folgt dann

$$\|(1-\lambda b)^{-1}\| \leq (1-\mu)^{-1} \tag{3}$$

für alle $\lambda \in \overline{D_1(0)}$.
Sei $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$. Seien $(w_k)_{k=1}^n$ die n-ten Einheitswurzeln. Die Einheitswurzeln bilden bezüglich der Multiplikation eine Gruppe, denn für $n \geq 1$ sind die n-ten Einheitswurzeln

$$w_k = e^{\frac{ik2\pi}{n}} \text{ für } k = 1, ..., n.$$

Für $j \notin n\mathbb{Z}$ ist $e^{\frac{ij2\pi}{n}} \neq 1$ und daher nach der geometrischen Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} w_k^j = \sum_{k=1}^{n} (e^{\frac{ij2\pi}{n}})^k = \frac{1-(e^{\frac{ij2\pi}{n}})^n}{1-e^{\frac{ij2\pi}{n}}} = 0$$

Ist $j \in n\mathbb{Z}$, so ist $e^{\frac{ij2\pi}{n}} = 1$ und daher

$$\sum_{k=1}^{n} w_k^j = n.$$

Also gilt für alle $j \in \mathbb{Z}$:

$$\sum_{k=1}^{n} w_k^j = \begin{cases} 0, & j \neq 0 \mod n \\ n, & j = 0 \mod n \end{cases}. \tag{4}$$

Da $|w_k^{-1}| = 1$ und $\rho(b) < 1$ gelten, ist $w_k^{-1} - b$ und damit auch $w_k(w_k^{-1} - b)$ invertierbar.
Für $n \in \mathbb{N}$ und $r \in \mathbb{N}^*$ sei dann

$$S(r,n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} w_k^{-1}(1-w_k b)^{-r}.$$

Wir wollen zeigen, dass $S(r,n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} rb$ für alle $r \in \mathbb{N}^*$ gilt.
Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \|b^n\|^{\frac{1}{n}} = \rho(b) < 1$ existieren $R < 1$ und $N \in \mathbb{N}$, mit $\|b^n\| < R^n$ für alle $n \geq N$.
Da $\|(w_k b)^l\| = |w_k^l| \|b^l\| \leq R^l$ für alle $k = 1, ..., n,\ \ l \geq N$ gilt und $\sum_{l=0}^{\infty} R^l$ als geometrische Reihe konvergiert, ist die Reihe $\sum_{l=0}^{\infty} (w_k b)^l$ absolut konvergent, Man rechnet nach, dass $(1-w_k b)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (w_k b)^n$ gilt.
Wir zeigen als nächstes durch Induktion über r, dass

$$((1-w_k b)^{-1})^r = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{r+l-1}{l} (w_k b)^l$$

für alle $r \in \mathbb{N}$ gilt.

Beweis. Den Induktionsanfang $r = 1$ haben wir oben gesehen. Sei die Behauptung also für ein $r \in \mathbb{N}$ wahr. Dann folgt mit der Formel für das Cauchy-Produkt absolut konvergenter Reihen

$$
\begin{aligned}
(\sum_{n=0}^{\infty}(w_k b)^n)^{r+1} &\overset{IV}{=} \sum_{n=0}^{\infty}(w_k b)^n\binom{r+n-1}{n}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(w_k b)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}(w_k b)^l\binom{r+l-1}{l}(w_k b)^{n-l} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(w_k b)^n\sum_{l=0}^{n}\binom{r+l-1}{l} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(w_k b)^n\binom{r+n}{n}.
\end{aligned}
$$

□

Die letzte Gleichheit kann man dabei wieder durch Induktion über alle $n \geq 0$ zeigen. Dabei ist der Induktionsanfang klar und der Induktionsschluss folgt mit der Induktionsvoraussetzung $\sum_{l=0}^{n}\binom{r+l-1}{l} = \binom{r+n}{n}$ aus

$$
\sum_{l=0}^{n+1}\binom{r+l-1}{l} \overset{IV}{=} \binom{r+n}{n} + \binom{r+n}{n+1} = \binom{r+n+1}{n+1}.
$$

Nach Definition von $S(r,n)$ folgt

$$
S(r,n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{r+l-1}{l}w_k^{l-1}b^l = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{r+l-1}{l}(\sum_{k=1}^{n}w_k^{l-1})b^l.
$$

Die Summe unter der Reihe ergibt

$$
\sum_{k=1}^{n}w_k^{l-1} = \begin{cases} n, & l-1 = mn, \text{ für ein } m \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.
$$

Somit folgt

$$
S(r,n) = b\sum_{m=0}^{\infty}\binom{r+mn}{mn+1}b^{mn} = br + b\sum_{m=1}^{\infty}\binom{r+mn}{mn+1}b^{mn}
$$

für alle $r \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$. Für $m,n \in \mathbb{N}$ ist

$$
\binom{r+m}{m+1} = \frac{(r+m)!}{(m+1)!(r-1)!} = \frac{1}{(r-1)!}\prod_{j=2}^{r}(m+j) \leq \frac{(m+r)^{r-1}}{(r-1)!} =: p(m).
$$

Dann gilt

$$\frac{p(m+1)}{p(m)} \frac{R^{m+1}}{R^m} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} R < 1.$$

Für alle $n \geq N$ folgt dann

$$\|\sum_{m=1}^{\infty} \binom{r+mn}{mn+1} b^{mn}\| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \binom{r+mn}{mn+1} \|b^{mn}\| \leq \sum_{m=n}^{\infty} \binom{r+m}{m+1} \|b^m\| \leq \sum_{m=n}^{\infty} p(m) R^m \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Da $(\sum_{m=n}^{\infty} p(m)R^m)_{n\in\mathbb{N}}$ als Reihenrest einer konvergenten Reihe gegen 0 konvergiert, gilt

$$\lim_{n\to\infty} S(r,n) = rb.$$

Unter Benutzung von (3) gilt

$$\|S(r,n)\| = \|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k^{-1}((1-w_k b)^{-1})^r\| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1-\mu)^{-r} = (1-\mu)^{-r}.$$

Für $n \longrightarrow \infty$ folgt daraus

$$r\|b\| \leq (1-\mu)^{-r} \tag{5}$$

für alle $r \in \mathbb{N}^*$. Seien nun $a \in A$, $K > v(a), r \geq 2$ und $\mu = \frac{1}{r} < 1$. Setze $b = \frac{a}{rK}$. Dann gilt

$$v(b) = \frac{v(a)}{rK} \leq \mu < 1,$$

also erfüllen μ und b die Bedingungen aus (1). Mit (5) folgt

$$\|\frac{a}{K}\| = r\|b\| \leq (1-\frac{1}{r})^{-r},$$

für alle $r \in \mathbb{N}^*$ Für $r \to \infty$ folgt $\|\frac{a}{K}\| \leq e$ für alle $K > v(a)$. Also ist $v(a) \geq \frac{\|a\|}{e}$.

□

Lemma 1.11. *Für alle $a \in A$ gilt:*

$$\max_{\lambda\in V(A,a)} Re(\lambda) = \inf_{\alpha>0} \frac{1}{\alpha}(\|1+\alpha a\|-1) = \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{1}{\alpha}(\|1+\alpha a\|-1)$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die erste Gleichheit.
"$\leq$": Seien $\mu = \max_{\lambda\in V(A,a)} \mathrm{Re}(\lambda)$, $\alpha > 0$ und $f \in D(A,1)$. Dann gilt

$$\mathrm{Re}(f(a)) = \mathrm{Re}(\frac{1}{\alpha}(f(\alpha a+1)-1)) = \frac{1}{\alpha}(\mathrm{Re}(f(\alpha a+1))-1) \leq \frac{1}{\alpha}(|f(\alpha a+1)|-1).$$

Für alle $f \in D(A,1)$ und alle $\alpha > 0$ folgt daraus

$$\mathrm{Re}(f(a)) \leq \frac{1}{\alpha}(\|\alpha a + 1\| - 1)$$

und für alle $\alpha > 0$ gilt

$$\mu \leq \inf_{\alpha>0} \frac{1}{\alpha}(\|\alpha a + 1\| - 1).$$

"$\geq$": Ist $a = 0$ so folgt die Gleichheit sofort. Sei also $0 < \alpha < \|a\|^{-1}$.
Für alle $x \in S(A)$ und $f \in D(A,x)$ folgt dann $\mathrm{Re}(f(ax)) \leq \mu$ und somit

$$\begin{aligned}\|(1-\alpha a)x\| &\geq |f((1-\alpha a)x)| \\ &\geq \mathrm{Re} f((1-\alpha a)x) \\ &= 1 - \alpha \mathrm{Re}(f(ax)) \\ &\geq 1 - \alpha\mu \\ &\geq 1 - \alpha\|a\| > 0.\end{aligned}$$

Durch Normieren erhält man

$$\|(1-\alpha a)x)\| \geq (1-\alpha\mu)\|x\|,$$

für alle $x \in A$. Für $x = 1 + \alpha a$ folgt insbesondere

$$\begin{aligned}\|1+\alpha a\| &\leq (1-\alpha\mu)^{-1}\|1-\alpha^2 a^2\| \\ &\leq (1-\alpha\mu)^{-1}(1+\alpha^2\|a^2\|).\end{aligned}$$

Durch Subtrahieren von 1 und Teilen durch α auf beiden Seiten folgt

$$\frac{\|1+\alpha a\| - 1}{\alpha} \leq \frac{\mu + \alpha\|a\|^2}{1-\alpha\mu},$$

für alle $\alpha \in \left]0, \|a\|^{-1}\right[$. Damit folgt die Behauptung, denn ist $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Nullfolge in $(0,\infty)$, so gilt mit obiger Abschätzung

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\|1+\alpha_k a\| - 1}{\alpha_k} \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{\mu + \alpha_k\|a\|}{1-\alpha_k\mu} = \mu \leq \inf_{k\in\mathbb{N}, k\geq k_0} \frac{\|1+\alpha_k a\| - 1}{\alpha_k}$$

für alle $k_0 \in \mathbb{N}$. Somit ist

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\|1+\alpha_k a\| - 1}{\alpha_k} \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{\|1+\alpha_k a\| - 1}{\alpha_k}.$$

Damit gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\|1+\alpha_k a\|-1}{\alpha_k} = \mu$ und insbesondere existiert der Grenzwert $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} \frac{\|1+\alpha_k a\|-1}{\alpha_k}$.

$\square$

2 Das räumliche numerische Bild

Sei im Folgenden X ein normierter Raum über $\mathbb{C}$, X' sein topologischer Dualraum.
Wir wollen nun das Konzept des algebraischen numerischen Bildes auf Operatoren $T \in \mathcal{L}(X)$ übertragen. Aus der Funktionalanalysis ist bekannt, dass $\mathcal{L}(X)$ versehen mit der Operatornorm eine Banachalgebra mit 1 ist. Es ist also möglich das algebraische numerische Bild $V(\mathcal{L}(X), T)$ zu betrachten. Im Unterschied dazu betrachtet man das räumliche numerische Bild $W(T)$. In diesem Kapitel werden wir $W(T)$ mit $V(\mathcal{L}(X), T)$ vergleichen. Dabei halten wir uns wieder an [BD1].
Wir schreiben $S(X) = \{x \in X; \|x\| = 1\}$, $S(X') = \{f \in X';\ \|f\| = 1\}$ und für $x \in S(X)$ setzen wir $D(X, x) = \{f \in X'; \|f\| = f(x) = 1\}$.
Schließlich sei $\Pi = \Pi(X) = \{(x, f); x \in S(X), f \in S(X'), f(x) = 1\}$.

Definition 2.1. Sei $T \in \mathcal{L}(X)$. Das räumliche numerische Bild von T definieren wir als

$$W(T) = \{f(Tx); (x, f) \in \Pi\} = \bigcup_{x \in S(X)} \{f(Tx); f \in D(X, x)\}.$$

Bemerkung 2.2. Es gilt:

(a) $W(T) \subset V(T, \mathcal{L}(X))$.

(b) Ist $X = H$ ein Hilbertraum, so ist $W(T) = \{\langle Tx, x\rangle; x \in X, \|x\| = 1\}$.

Beweis.

(a) Sei $(x, f) \in \Pi$. Dann definiert $F : \mathcal{L}(X) \to \mathbb{C},\ F(S) = Sx$ eine Abbildung in $D(\mathcal{L}(X), I)$. Somit ist $f(Tx) = F(T) \in V(\mathcal{L}(X), T)$ für $T \in \mathcal{L}(X)$.

(b) Mit dem Satz von Riesz folgt für $T \in \mathcal{L}(H)$

$$\begin{aligned} W(T) &= \{x^*(Tx); x^* \in H', x \in H, \|x\| = 1 = \|x^*\| = x^*(x)\} \\ &= \{\langle Tx, y\rangle; x, y \in H, \|x\| = 1 = \|y\| = \langle x, y\rangle\} \\ &= \{\langle Tx, x\rangle; x \in H, \|x\| = 1\}. \end{aligned}$$

□

Wir sehen also, dass $W(T) \subset V(T, \mathcal{L}(X))$ immer gilt. Im weiteren Verlauf wollen wir uns überlegen, unter welchen Bedingungen Gleichheit gilt.

Lemma 2.3. *Sei Γ eine Teilmenge von Π, so dass die Menge*

$$\Pi_1(\Gamma) = \{x; (x, f) \in \Gamma \textit{ für ein } f \in S(X')\}$$

dicht in $S(X)$ liegt. Dann gilt für alle $T \in \mathcal{L}(X)$

$$\inf_{\alpha > 0} \frac{1}{\alpha}(\|I + \alpha T\| - 1) = \sup_{(x,f) \in \Gamma} Re(f(Tx)).$$

Beweis. Sei $\mu = \sup\limits_{(x,f)\in\Gamma} Re(f(Tx))$. Wegen $W(T) \subset V(T, \mathcal{L}(X))$ und nach Lemma 1.11 gilt

$$\mu \leq \inf\{(\frac{1}{\alpha}\|I + \alpha T\| - 1); \alpha > 0\}.$$

Sei $T \in \mathcal{L}(X)$. Der Fall $T = 0$ ist klar. Seien also $T \neq 0$, $\alpha \in]0, \|T\|^{-1}[$, $\epsilon > 0$ und $x \in S(X)$. Da $\Pi_1(\Gamma)$ dicht in $S(X)$ liegt, gibt es ein Paar $(y, g) \in \Gamma$ mit $\|x - y\| < \epsilon$. Dann gilt

$$\mathrm{Re}(g(Ty)) \leq \mu \leq \|T\|$$

und es folgt

$$\|(I - \alpha T)y\| \geq \mathrm{Re}(g((I - \alpha T)y)) = 1 - \alpha\mathrm{Re}(g(Ty)) \geq 1 - \alpha\mu > 0.$$

Mit dieser Abschätzung und $\|x - y\| < \epsilon$ folgt

$$\|(I - \alpha T)x\| \geq 1 - \alpha\mu - \|I - \alpha T\|\epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt $\|(I - \alpha T)x\| \geq 1 - \alpha\mu$. Durch Normieren folgt

$$\|(I - \alpha T)x\| \geq (1 - \alpha\mu)\|x\|$$

für alle $x \in X$. Insbesondere gilt für alle $x \in X$

$$\|(I - \alpha^2 T^2)x\| \geq (1 - \alpha\mu)\|(I + \alpha T)x\|$$

und damit

$$\|I + \alpha T\| \leq (1 - \alpha\mu)^{-1}(1 + \alpha^2\|T^2\|)$$

für alle $\alpha \in]0, \|T\|^{-1}[$. Wie im Beweis von Lemma 1.11 folgt hieraus

$$\inf_{\alpha>0} \frac{1}{\alpha}(\|I + \alpha T\| - 1) \leq \inf_{\alpha\in]0,\|T\|^{-1}[} \frac{\mu + \alpha\|T\|^2}{1 - \alpha\mu} \leq \mu.$$

Somit ist die behauptete Gleichheit gezeigt.

□

Satz 2.4. *Sei $\Gamma \subset \Pi$ so, dass $\Pi_1(\Gamma)$ dicht in $S(X)$ liegt. Dann gilt für alle $T \in \mathcal{L}(X)$*

$$\overline{conv}\{f(Tx); (x, f) \in \Gamma\} = V(\mathcal{L}(X), T).$$

Beweis. Sei $C = \overline{\mathrm{conv}}\{f(Tx); (x, f) \in \Gamma\}$. Da $V(\mathcal{L}(X), T)$ abgeschlossen und konvex folgt die Inklusion " $\subset$ " sofort.
Wir nehmen an, dass die umgekehrte Inklusion nicht gilt.

Dann existiert ein $\lambda_0 \in V(\mathcal{L}(X), T) \setminus C$. Mit einem Trennungssatz für abgeschlossene konvexe Mengen folgt, dass ein $z \in \mathbb{C}$ existiert mit

$$\mathrm{Re}(z\lambda_0) > \mathrm{Re}(zy)$$

für alle $y \in C$. Nach Lemma 2.3 und Lemma 1.11 ist

$$\sup_{(x,f)\in\Gamma} \mathrm{Re}(f(zTx)) = \sup_{\lambda \in V(\mathcal{L}(X), zT)} \mathrm{Re}(\lambda).$$

Da C als abgeschlossene Teilmenge von $V(\mathcal{L}(X), T)$ kompakt ist, folgt

$$\begin{aligned} \sup_{(x,f)\in\Gamma} \mathrm{Re}(f(zTx)) &\leq \sup_{y\in C} \mathrm{Re}(zy) \\ &= \max_{y\in C} \mathrm{Re}(zy) \\ &< \mathrm{Re}(z\lambda_0) \\ &\leq \sup_{\lambda\in V(\mathcal{L}(X), zT)} \mathrm{Re}(\lambda) = \sup_{(x,f)\in\Gamma} \mathrm{Re}(f(zTx)), \end{aligned}$$

also ein Widerspruch. □

Da insbesondere $\Pi_1(\Pi) = S(X)$ ist, erhalten wir als Korollar:

Korollar 2.5. *Für alle $T \in \mathcal{L}(X)$ gilt*

$$\overline{conv} W(T) = V(\mathcal{L}(X), T).$$

Wir wollen nun zeigen, dass das räumliche numerische Bild eines Operators auf einem Hilbertraum konvex ist. Die Idee des Beweises wurde aus [HAL] entnommen. Dazu benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 2.6. *Sei $M \subset \mathbb{C}$ eine Menge, so dass der Schnitt von M mit jeder Geraden G in $\mathbb{C}$ wegzusammenhängend ist. Dann ist M konvex.*

Beweis. Seien $x, y \in M$ mit $x \neq y$. Sei $[x : y]$ die Menge der Punkte, die auf der Strecke zwischen x und y liegen. Wir müssen zeigen, dass $[x : y] \subset M$.
Sei dazu G die Gerade durch x und y. Dann ist nach Voraussetzung $G \cap M$ wegzusammenhängend. Da die Abbildung $\mathbb{R} \to G, t \mapsto x + t(y - x)$ ein Homöomorphismus ist und da die einzigen wegzusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ die Intervalle sind, gibt es ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit

$$G \cap M = \{x + t(y - x); t \in I\}.$$

Wegen $0, 1 \in I$ ist $[0, 1] \subset I$ und damit $[x : y] \subset G \cap M \subset M$.

□

Dass $W(T)$ für $T \in \mathcal{L}(H)$ konvex ist, geht auf den Satz von Toeplitz-Hausdorff zurück. Wir werden zunächst den Satz für Hilberträume der Dimension 2 beweisen, um dann den allgemeinen Fall darauf zurückzuführen. Dafür zeigen wir als erstes folgendes Hilfslemma:

Lemma 2.7. *Sei H ein Hilbertraum mit* $\dim H = 2$, *$A \in L(H)$ selbstadjungiert. Dann ist*

$$\{x \in H; \|x\| = 1, \langle Ax, x\rangle = 0\}$$

wegzusammenhängend.

Beweis. Da für jeden weiteren Hilbertraum K und jede unitäre Abbildung $U : K \to H$ der Operator $\tilde{A} = U^{-1}AU \in \mathcal{L}(K)$ selbstadjungiert ist und da

$$U(\{x \in K; \|x\| = 1, \langle \tilde{A}x, x\rangle = 0\}) = \{x \in H; \|x\| = 1, \langle Ax, x\rangle = 0\}$$

ist, dürfen wir annehmen, dass $H = \mathbb{C}^2$ ist und dass

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$$

ein selbstadjungierter Diagonaloperator ist. Dann ist

$$N := \{x \in \mathbb{C}^2; \|x\| = 1, \langle Ax, x\rangle = 0\} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2; |z|^2 + |w|^2 = 1, a|z|^2 + b|w|^2 = 0\}$$

Für $a = b$ ist $N = \emptyset$ für $a \neq 0$ und $N = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2; \|(z, w)\| = 1\}$ für $a = 0$, also wegzusammenhängend.
Für $a \neq b$ zeigt eine einfache Rechnung, dass

$$N = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2; |z|^2 = \frac{b}{b-a} \text{ und } |w|^2 = \frac{a}{a-b}\}.$$

In diesem Fall ist $N = \emptyset$ oder

$$N = \partial D_{\sqrt{\frac{b}{b-a}}}(0) \times \partial D_{\sqrt{\frac{a}{a-b}}}(0)$$

und damit auch wegzusammenhängend.

□

Satz 2.8. *Sei H ein Hilbertraum mit* $\dim H = 2$, *$T \in L(H)$, Dann ist $W(T)$ konvex.*

Beweis. Sei dafür $G \subset \mathbb{C}$ eine beliebige Gerade. Dann gibt es $p, q, r \in \mathbb{R}$, mit

$$G = \{x + iy \in \mathbb{C}; px + qy + r = 0\}.$$

Sei $T = \mathrm{Re}(T) + i\mathrm{Im}(T)$ die Zerlegung des Operators in Real- und Imaginärteil. Dann gilt

$$\begin{aligned} G\cap W(T) &= \{\langle Tx,x\rangle; \|x\|=1, p\mathrm{Re}(\langle Tx,x\rangle)+q\mathrm{Im}(\langle Tx,x\rangle)+r\langle x,x\rangle=0\} \\ &= \{\langle Tx,x\rangle; \|x\|=1, \langle (p\mathrm{Re}(T)+q\mathrm{Im}(T)+r)x,x\rangle=0\} \end{aligned}.$$

Wir betrachten die stetige Abbildung $\Phi : H \to \mathbb{C}, x \mapsto \langle Tx,x\rangle$. Dann ist

$$G\cap W(T) = \Phi(\{x\in H; \|x\|=1, \langle (p\mathrm{Re}(T)+q\mathrm{Im}(T)+r)x,x\rangle=0\})$$

wegzusammenhängend als Bild einer nach Lemma 2.7 wegzusammenhängenden Menge unter einer stetigen Abbildung. Also ist $W(T)$ nach Lemma 2.6 konvex.

□

Korollar 2.9. *(Satz von Toeplitz-Hausdorff)*
Seien H ein Hilbertraum und $T\in\mathcal{L}(H)$. Dann ist die Menge

$$W(T) = \{\langle Tx,x\rangle; x\in H, \|x\|=1\}$$

konvex.

Beweis. Sei H ein beliebiger Hilbertraum, $T\in\mathcal{L}(H)$.
Seien $y=\langle Tu,u\rangle, z=\langle Tv,v\rangle\in W(T)$ mit $u,v\in H$, so dass $\|u\|=\|v\|=1$. Seien außerdem $E=\mathrm{span}(u,v)$ und $P : H\to E$ die Projektion auf E. Wir betrachten die Kompression

$$PT|_E : E\to E.$$

Falls $\dim(E)=1$ ist, so gibt es $\lambda\in\mathbb{C}$, mit $u=\lambda v$. Aus $1=\|u\|=\|\lambda v\|$ folgt dann $|\lambda|=1$. Somit ist $y=\langle Tu,Tu\rangle=\langle T\lambda v,T\lambda v\rangle=\langle Tv,v\rangle=z$, also ist $[y:z]\subset W(T)$.
Falls $\dim(E)=2$ ist, so zeigt Satz 2.8, dass die Menge

$$C=\{\langle PT|_Ex,x\rangle; x\in E, \|x\|=1\}.$$

konvex ist. Damit ist

$$[y:z]=[\langle PT|_Eu,u\rangle : \langle PT|_Ev,v\rangle]\subset C\subset W(T),$$

womit die Behauptung folgt. □

Auf Hilberträumen ist das räumliche, numerische Bild $W(T)$ also konvex. Mit Korollar 2.5 erhalten wir dann folgendes Korollar

Korollar 2.10. *Sei H ein Hilbertraum. Dann gilt für alle $T\in\mathcal{L}(H)$*

$$\overline{W(T)}=\overline{\{\langle Tx,x\rangle; \|x\|=1\}}=V(\mathcal{L}(H),T).$$

3 Das wesentliche algebraische numerische Bild

In Kapitel 1 haben wir das algebraische numerische Bild für Elemente in Banachalgebren mit 1 untersucht. Bezeichnet man mit $K(X)$ die Menge der kompakten Operatoren, so ist aus der Funktionalanalysis bekannt, dass man durch Bildung des Quotientenraumes $\mathfrak{C}(X) = \mathcal{L}(X)/K(X)$ und der üblichen Quotientennorm eine Banachalgebra mit 1 erhält, die sogenannte Calkin-Algebra. Im ersten Teil des Kapitels werden wir einige Eigenschaften für das wesentliche algebraische numerische Bild von Operatoren auf Banachräumen zeigen. Dazu orientieren wir uns an [BD2]. Außerdem werden wir das sogenannte wesentliche Spektrum eines Operators $T \in \mathcal{L}(X)$ betrachten, welches die Skalare $\lambda \in \mathbb{C}$ enthält, für die $\lambda - T$ nicht Fredholmsch ist.
Sei im Folgenden X ein unendlich dimensionaler Banachraum über $\mathbb{C}$, X' sein topologischer Dualraum und $K(X) = \{T : X \to X\ ; T \text{ kompakt}\}$ die Menge der kompakten Operatoren auf X. Es sei wie vorher $D(\mathcal{L}(X), I) = \{f \in \mathcal{L}(X)'; f(I) = 1 = \|f\|\}$.
Sei $\mathfrak{C}(X) = \mathcal{L}(X)/K(X)$ die Calkin-Algebra, $[T]$ die Restklasse eines Operators $T \in \mathcal{L}(X)$ in $\mathfrak{C}(X)$. Wie üblich, sei $\mathfrak{C}(X)$ mit der Norm

$$\|\cdot\|_e : \mathfrak{C}(X) \to \mathbb{R}, \|[T]\|_e = \|T\|_e = \inf_{C \in K(X)} \|T + C\|$$

versehen.

Definition 3.1. Seien X, Y Banachräume. Ein Operator, mit $\dim(Kern(T)) < \infty$ und $\dim(Y/Im(T)) < \infty$ heißt Fredholmsch. Wir schreiben für die Menge der Fredholm-Operatoren

$$\mathfrak{F}(X, Y) = \{T \in \mathcal{L}(X, Y); T \text{ ist Fredholmsch}\}.$$

Für $T \in \mathcal{L}(X)$ definieren wir das wesentliche Spektrum von T als

$$\sigma_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda - T \notin \mathfrak{F}(X)\}.$$

Weiterhin definieren wir das wesentliche algebraische numerische Bild von $T \in \mathcal{L}(X)$ als

$$V_e(T) = V(\mathfrak{C}(X), [T]),$$

sowie den wesentlichen numerischen Radius als

$$v_e(T) = \sup_{\lambda \in V_e(T)} |\lambda|.$$

Zum Schluss des Kapitels werden wir die Calkin-Algebra auf einem Hilbertraum H betrachten. Wir werden dann sehen, dass wir für einen Operator $T \in \mathcal{L}(H)$ äquivalente Definitionen finden können. Die Äquivalenzen gehen auf Fillmore-Stampfli-Williams zurück.

Lemma 3.2. *Seien A eine unitale Banachalgebra, J ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal von A und Π die Quotientenabbildung $\Pi : A \to A/J$, so gilt für alle $a \in A$*

$$V(A/J, \Pi(a)) = \bigcap_{x \in J} V(A, a + x).$$

Beweis. Mit Satz 1.4 folgt, dass

$$\begin{aligned} V(A/J, \Pi(a)) &= \bigcap_{z \in \mathbb{C}} \{\lambda \in \mathbb{C}; |z - \lambda| \leq \|\Pi(a) - z\|\} \\ &= \bigcap_{z \in \mathbb{C}} \bigcap_{x \in J} \{\lambda \in \mathbb{C}; |z - \lambda| \leq \|a + x - z\|\} \\ &= \bigcap_{x \in J} V(A, a + x). \end{aligned}$$

gilt. □

Korollar 3.3. *Sei $T \in \mathcal{L}(X)$. Dann gilt*

(a) $V_e(T)$ ist eine nichtleere, konvexe, kompakte Menge,

(b) T ist kompakt genau dann, wenn $V_e(T) = \{0\}$ gilt,

(c) $V_e(T) = \bigcap_{C \in K(X)} V(\mathcal{L}(X), T + C)$,

(d) $V_e(T) = \{f(T); f \in D(\mathcal{L}(X), I)$ mit $f|_{K(X)} \equiv 0\}$,

(e) $\frac{1}{e}\|T\|_e \leq \max_{\lambda \in V_e(T)} |\lambda| \leq \|T\|_e$,

(f) $\sigma_e(T) \subset V_e(T)$.

Beweis. Da $\mathfrak{C}(X)$ eine unitale Banachalgebra ist, folgen *(a)* und *(e)* sofort aus den entsprechenden Aussagen über das algebraische numerische Bild.

(b) Es gilt: Es ist $V_e(T) = \{0\}$ genau dann, wenn $v_e(T) = 0$ gilt. Wegen (e) ist $V_e(T) = \{0\}$ genau dann, wenn $\|T\|_e = 0$ ist und dies ist zu $T \in K(X)$ äquivalent.

(c) Folgt aus Lemma 3.2.

(d) "$\subset$" Sei $\lambda \in V_e(T)$. Dann existiert nach Definition ein $\Phi \in D(\mathfrak{C}(X), [I])$ mit $\Phi([T]) = \lambda$. Dann ist $f = \Phi([\cdot])$ in $D(\mathcal{L}(X), I)$, $f(C) = 0$ für alle $C \in K(X)$ und $f(T) = \lambda$.

"$\supset$" Sei $f \in D(\mathcal{L}(X), I)$ mit $f(C) = 0$ für alle $C \in K(X)$. Dann gilt

$$f(T) = f(T + C) \in V(\mathcal{L}(X), T + C),$$

für alle $C \in K(X)$, womit $f(T) \in V_e(T)$ aus (c) folgt.

(f) Bekanntlich ist $T \in \mathcal{L}(X)$ fredholmsch genau dann, wenn $[T]$ in $\mathfrak{C}(X)$ invertierbar ist. Aus Satz 1.8 folgt

$$\sigma_e(T) = \sigma_{\mathfrak{C}(X)}([T]) \subset V_e(T).$$

$\square$

Wir wollen als nächstes das wesentliche algebraische numerische Bild $V_e(T)$ auf Hilberträumen betrachten und mit dem sogenannten wesentlichen numerischen Bild eines Operators vergleichen.

Definition 3.4. Sei H ein unendlichdimensionaler komplexer Hilbertraum, $T \in \mathcal{L}(H)$. Dann definiert man das wesentliche numerische Bild von T als

$$\begin{aligned} W_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \exists \text{ Folge } (x_n) \text{ in } H \text{ mit } \|x_n\| = 1 \text{ für alle} \\ n \in \mathbb{N} \text{ und } (x_n) \overset{n}{\to} 0 \text{ (schwach)}, \ \langle Tx_n, x_n\rangle \overset{n}{\to} \lambda\} \end{aligned}$$

Um mit dieser Definition zu arbeiten, müssen wir uns zunächst ein paar Eigenschaften von orthonormalen Folgen und schwachen Nullfolgen auf Hilberträumen klarmachen. Dazu betrachten wir folgende Lemmata:

Lemma 3.5. *Seien (M, d) ein kompakter metrischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M und $c \in M$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ genau dann, wenn jede konvergente Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen c konvergiert.*

Beweis. Die Hinrichtung ist klar.
Wir nehmen umgekehrt an, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen c konvergiert. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ so, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k \in \mathbb{N}$ existiert mit $n_k > k$ und $d(x_{n_k}, c) \geq \epsilon$. Als unbeschränkte Folge hat $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Teilfolge, sei also o.E. $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ selbst streng monoton wachsend. Da M kompakt ist, finden wir eine konvergente Teilfolge von $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Diese ist auch eine Teilfoge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und konvergiert nicht gegen c. $\square$

Lemma 3.6. *Sei H ein Hilbertraum. Dann gilt*

(a) Für jede orthonormale Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und für alle $x \in H$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \langle e_n, x\rangle = 0.$$

(b) Seien $T \in K(H)$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine schwache Nullfolge in H. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|Tx_n\| = 0.$$

Beweis. (a) Nach der Besselschen Ungleichung konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2$ für alle $x \in H$ absolut.

Daraus folgt insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} \langle x, e_k\rangle = 0,$$

für alle $x \in H$.

(b) Da T nach Vorraussetzung kompakt und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach dem Satz von Banach-Steinhaus beschränkt ist, ist $\overline{\{T(x_n); n \in \mathbb{N}\}}$ kompakt. Seien $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge von $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $y = \lim_{k\to\infty} Tx_{n_k}$. Da $(\|T\|\|x_{n_k}\|)$ beschränkt ist, (Tx_{n_k}) gegen y konvergiert und (x_{n_k}) schwach gegen 0 konvergiert, folgt

$$\begin{aligned}\|Tx_{n_k}\|^2 &= \langle Tx_{n_k} - y, Tx_{n_k}\rangle + \langle y, Tx_{n_k}\rangle \\ &\leq \|T\|\|x_{n_k}\|\|Tx_{n_k} - y\| + |\langle T^*y, x_{n_k}\rangle| \overset{k\to\infty}{\to} 0.\end{aligned}$$

Aus Lemma 3.5 folgt dann, dass $\|Tx_n\| \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

□

Lemma 3.7. *Seien H ein Hilbertraum und $H = H_A \oplus H_B$ eine Orthogonalzerlegung. Für Operatoren $A \in \mathcal{L}(H_A)$, $B \in \mathcal{L}(H_B)$ gilt*

$$W(A \oplus B) = conv(W(A) \cup W(B))$$

Beweis. "$\subset$": Für alle $x \in H_A$ und $y \in H_B$ mit $\|x + y\| = 1$ gilt:

$$\begin{aligned}\langle (A \oplus B)(x + y), (x + y)\rangle &= \langle Ax, x\rangle + \langle By, y\rangle \\ &= \|x\|^2\langle A\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\rangle + \|y\|^2\langle B\frac{y}{\|y\|}, \frac{x}{\|x\|}\rangle\end{aligned}$$

Nach Bemerkung 2.2 (b) sind $\langle A\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\rangle \in W(A)$ und $\langle B\frac{y}{\|y\|}, \frac{x}{\|x\|}\rangle \in W(B)$ mit

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2 = 1.$$

Es folgt, dass $W(A \oplus B) \subset \mathrm{conv}(W(A) \cup W(B))$ gilt.
"$\supset$": Für alle $x \in H_A$ mit $\|x\| = 1$ ist

$$\langle Ax, x\rangle = \langle (A \oplus B)(x + 0), x + 0\rangle \in W(A \oplus B).$$

Analog zeigt man $W(B) \subset W(A \oplus B)$ und es folgt

$$\mathrm{conv}(W(A) \cup W(B)) \subset W(A \oplus B).$$

□

Mit folgendem Satz, bei dem wir uns an [FSW] orientieren, folgt die Äquivalenz der Definitionen von $W_e(T)$ und $V_e(T)$ für einen Operator T auf einem Hilbertraum sofort.

Satz 3.8. *Seien H ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$. Dann sind äquivalent*

(a) $0 \in \bigcap\limits_{\substack{F\in\mathcal{L}(H) \\ F \text{ hat endlichen Rang}}} \overline{W(T+F)}$,

(b) $0 \in V_e(T)$,

(c) Es existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Einheitsvektoren, die schwach gegen 0 konvergiert und $\lim\limits_{n\to\infty} \langle Tx_n, x_n\rangle = 0$ erfüllt,

(d) Es existiert eine orthonormale Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \langle Te_n, e_n\rangle = 0$,

(e) Es existiert eine unendlich dimensionale Orthogonalprojektion P so, dass PTP kompakt ist.

Beweis. $(e) \Rightarrow (d)$: Nach Voraussetzung existiert eine unendlich dimensionale Projektion P auf einen Unterraum $U \subset H$, so dass PTP kompakt ist. Sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalsystem von U. Da PTP kompakt und $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Lemma 3.6 (a) eine schwache Nullfolge ist, impliziert Lemma 3.6 (b), dass

$$\langle Te_n, e_n\rangle = \langle TPe_n, Pe_n\rangle = \langle PTPe_n, e_n\rangle \to 0 \ (n \to \infty)$$

gilt.
$(d) \Rightarrow (c)$ Orthonormale Folgen sind nach Lemma 3.6 (a) schwache Nullfolgen und nach Voraussetzung gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \langle Te_n, e_n\rangle = 0$.
$(c) \Rightarrow (b)$ Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine schwache Nullfolge von Einheitsvektoren mit

$$\langle Tx_n, x_n\rangle \to \ 0 \ (n \to \infty).$$

Für beliebiges $C \in K(H)$ folgt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und Lemma 3.6 (b), dass

$$|\langle (T+C)x_n, x_n\rangle| \leq |\langle Tx_n, x_n\rangle| + \|Cx_n\|\|x_n\| \to 0 \ (n \to \infty)$$

gilt. Also folgt , dass $0 \in \bigcap\limits_{C\in K} \overline{W(T+C)}$ gilt. Mit Korollar 2.5 ist

$$\overline{W(T+C)} \subset \overline{\text{conv}}(W(T+C)) = V(\mathcal{L}(X), T+C)$$

und somit folgt mit Korollar 3.3 (c), dass $0 \in V_e(T)$ gilt.
$(b) \Rightarrow (a)$

Wegen Korollar 3.3 (c) ist

$$0 \in V_e(T) = \bigcap_{C \in K(H)} V(\mathcal{L}(X), T + C).$$

Mit Korollar 2.10 folgt dann, dass

$$0 \in \bigcap_{C \in K(H)} V(\mathcal{L}(X), T + C) = \bigcap_{C \in K(H)} \overline{W(T + C)},$$

und da Operatoren von endlichem Rang kompakt sind, erhalten wir

$$0 \in \bigcap_{C \in K(H)} \overline{W(T + C)} \subset \bigcap_{\substack{F \in \mathcal{L}(H) \\ F \text{ hat endlichen Rang}}} \overline{W(T + C)}.$$

$(a) \Rightarrow (d)$
Wir konstruieren induktiv eine orthonormale Folge $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$|\langle Te_k, e_k \rangle| \leq \frac{\|T\|}{k},$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, also insbesondere $\langle Te_k, e_k \rangle \overset{k \to \infty}{\to} 0$.
Der Induktionsanfang folgt durch Normieren eines beliebigen Elements $0 \neq e_1 \in H$ aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung.
Seien für $n \in \mathbb{N}$ paarweise orthogonale Einheitsvektoren $(e_i)_{i=1}^n$, mit $|\langle Te_k, e_k \rangle| \leq \frac{\|T\|}{k}$ für alle $k = 1, ..., n$ gegeben. Seien dann $M = \operatorname{span}(e_1, ..., e_n)$ und P die Projektion auf M.
Wir zeigen zunächst, dass $0 \in \overline{W((1-P)T|_{M^\perp})}$ gilt. Sei dazu $\mu \in W((1-P)T|_{M^\perp})$ und $F = \mu P - PTP - (I-P)TP - PT(1-P)$. Dann ist F von endlichem Rang und es folgt:

$$\begin{aligned} T + F &= \mu P + T - PTP - (I-P)TP - PT(1-P) \\ &= \mu P + (I-P)T(I-P) \\ &= \mu I_M \oplus (I-P)T|_{M^\perp}. \end{aligned}$$

Mit Lemma 3.7 erhält man

$$0 \in \overline{W(T+F)} = \overline{\{\mu\} \cup W((1-P)T|_{M^\perp}} = \overline{W((1-P)T|_{M^\perp}}.$$

Damit existiert ein $e_{n+1} \in M^\perp$, mit $\|e_{n+1}\| = 1$ und

$$\begin{aligned} \frac{\|T\|}{n+1} &\geq |\langle (1-P)T|_{M^\perp} \rangle e_{n+1}, e_{n+1}| \\ &= |\langle Te_{n+1}, (1-P)e_{n+1} \rangle| \\ &= |\langle Te_{n+1}, e_{n+1} \rangle|. \end{aligned}$$

$(d) \Rightarrow (e)$ Sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine orthonormale Folge mit $\langle Te_n, e_n\rangle \to 0$ $(n \to \infty)$.
Wir können o. E. voraussetzen, dass $|\langle Te_n, e_n\rangle| \leq \frac{1}{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (sonst gehen wir zu einer entsprechenden Teilfolge über), also auch $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle Te_n, e_n\rangle|^2 < \infty$. Setze $n_1 = 1$. Dann folgt mit der Besselschen Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle Te_{n_1}, e_n\rangle|^2 \leq \|Te_{n_1}\|^2 \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} |\langle Te_n, e_{n_1}\rangle|^2 \leq \|T^* e_{n_1}\|^2.$$

Da die Reihen konvergieren existiert $n_2 > n_1$, so dass:

$$\sum_{n=n_2}^{\infty} |\langle Te_{n_1}, e_n\rangle|^2 \leq \frac{1}{2} \text{ und } \sum_{n=n_2}^{\infty} |\langle Te_n, e_{n_1}\rangle|^2 \leq \frac{1}{2}.$$

Iterativ erhält man eine streng monoton wachsende Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so dass

$$\sum_{n=n_{k+1}}^{\infty} |\langle Te_{n_k}, e_n\rangle|^2 \leq 2^{-k} \text{ und } \sum_{n=n_{k+1}}^{\infty} |\langle Te_n, e_{n_k}\rangle|^2 \leq 2^{-k}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gelten. Mit $c = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle Te_i, e_i\rangle|^2 < \infty$ folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{\infty} |\langle Te_{n_i}, e_{n_i}\rangle|^2 &= \sum_{\substack{i,j\in\mathbb{N}\\ i\geq j}}^{\infty} |\langle Te_{n_i}, e_{n_j}\rangle|^2 + \sum_{\substack{i,j\in\mathbb{N}\\ i<j}}^{\infty} |\langle Te_{n_i}, e_{n_j}\rangle|^2 \\
&\leq c + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty} |\langle Te_{n_i}, e_{n_j}\rangle|^2 + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=j+1}^{\infty} |\langle Te_{n_i}, e_{n_j}\rangle|^2 \\
&\leq c + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=n_{i+1}}^{\infty} |\langle Te_{n_i}, e_k\rangle|^2 + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=n_{j+1}}^{\infty} |\langle Te_k, e_{n_j}\rangle|^2 \\
&\leq c + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} < \infty
\end{aligned}$$

Sei P die Projektion auf $\operatorname{span}(e_{n_k}; k \in \mathbb{N})$. Da $\sum_{i=1}^{\infty} \|PTPe_{n_i}\|^2 < \infty$ ist PTP ein Hilbert-Schmidt Operator und somit kompakt. □

Indem wir Satz 3.8 auf $T - \lambda$ anwenden, erhalten wir folgendes Korollar:

Korollar 3.9. *Jede der folgenden Bedingungen ist äquivalent zu $\lambda \in V_e(T)$:*

(a) $\langle Tx_n, x_n\rangle \to \lambda$ $(n \to \infty)$ für eine schwache Nullfolge von Einheitsvektoren $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

(b) $\langle Te_n, e_n\rangle \to \lambda$ $(n \to \infty)$ für eine orthonormale Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

(c) $PTP - \lambda P$ ist kompakt für eine unendlich dimensionale Projektion P.

Somit wurde gezeigt, dass auf unendlichdimensionalen komplexen Hilberträumen $W_e(T) = V_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \exists \text{ Orthonormalsystem } (u_n) \text{ in } H, \text{ mit } \langle Tu_n, u_n\rangle \xrightarrow{n} \lambda\}$ gilt.

4 Das räumliche wesentliche numerische Bild

Wir halten uns in diesem Kapitel an [BaM]. Sei weiterhin X ein unendlichdimensionaler Banachraum über $\mathbb{C}$, X' der zugehörige Dualraum. Wir schreiben

$$\mathrm{Cof}(X) = \{M \subset X \text{ abgeschlossener Teilraum}; \dim(X/M) < \infty\}$$

und für $x \in X, x^* \in X'$: $x^*(x) = \langle x, x^* \rangle$.
Wenn man versucht, die Definition von Philmore-Stampfli-Williams (Definition 3.4) auf Banachräume zu übertragen, dann stößt man auf Probleme. Wir wollen für Banachräume das wesentliche numerische Bild definieren als

$$W_\omega(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \exists \text{ Folgen } (x_n) \text{ in } X, (x_n^*) \text{ in } X' \text{ mit } \|x_n\| = 1 = \|x_n^*\| \\ \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } (x_n) \overset{n}{\to} 0 \text{ (schwach)}, \ (\langle Tx_n, x_n^* \rangle \overset{n}{\to} \lambda\}.$$

Betrachtet man jedoch den Banachraum $X = l^1$, so stellt man fest, dass $W_\omega(T) = \emptyset$ für jeden Operator $T \in \mathcal{L}(X)$. Denn seien $\lambda \in W_\omega(T), (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen wie in obiger Definition, so gilt $x_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$ in schwacher Konvergenz. Aus der schwachen Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 folgt nach Theorem 6.2 in [Car] auch die Konvergenz gegen 0 in Norm. Jedoch ist $\|x_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und wir erhalten einen Widerspruch. Um das wesentliche numerische Bild sinnvoll auf Banachräumen definieren zu können, müssen wir im Allgemeinen mit Netzen arbeiten.

Definition 4.1. Sei $T \in \mathcal{L}(X)$. Wir definieren das räumliche wesentliche numerische Bild von T als

$$W_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \exists \text{ Netze } (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \text{ in } X, (x_\alpha^*)_{\alpha\in\Lambda} \text{ in } X' \text{ mit } \|x_\alpha\| = \|x_\alpha^*\| = \langle x_\alpha, x_\alpha^* \rangle = 1 \\ \text{für alle } \alpha \in \Lambda \text{ und } x_\alpha \overset{\alpha}{\to} 0 \text{ schwach sowie } \langle Tx_\alpha, x_\alpha^* \rangle \overset{\alpha}{\to} \lambda\}.$$

Eine einfache Folgerung aus der Definition von $W_e(T)$ ist, dass $W_e(\alpha T - \beta I) = \alpha W_e(T) - \beta$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt. Ziel des Kapitels ist es, zunächst für $T \in \mathcal{L}(X)$ die Eigenschaften von $W_e(T)$ zu untersuchen. Dazu werden wir den Satz von Bishop-Phelps-Bollobas beweisen. Wir werden auch sehen, dass es auf reflexiven Banachräumen möglich ist, in der Definition von $W_e(T)$ mit Folgen zu arbeiten.

Proposition 4.2. *Die Menge $W_e(T)$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{C}$.*

Beweis. Sei $\lambda \in \overline{W_e(T)}$ und sei $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $W_e(T)$, mit $\lambda_n \to \lambda$ $(n \to \infty)$. Wir betrachten die Indexmenge $\Lambda =]0, \infty[\times \{A \subset X'; A \text{ endlich}\}$ mit der Ordnung, die durch $(\epsilon, F) \leq (\epsilon', \tilde{F}) \Leftrightarrow \epsilon' \leq \epsilon$ und $\tilde{F} \supset F$ gegeben ist. Seien $\epsilon > 0$ und $F = \{v_1^*, ..., v_k^*\}$ eine endliche Teilmenge von X'. Da $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen λ konvergiert, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|\lambda_N - \lambda| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Wegen $\lambda_N \in W_e(T)$ existieren Elemente $u_{\epsilon,F} \in X$ und $u^*_{\epsilon,F} \in X'$ so, dass

$$\|u_{\epsilon,F}\| = 1 = \|u^*_{\epsilon,F}\| = \langle u_{\epsilon,F}, u^*_{\epsilon,F}\rangle, |\langle Tu_{\epsilon,F}, u^*_{\epsilon,F}\rangle - \lambda_N| < \frac{\epsilon}{2} \text{ und } |\langle u_{\epsilon,F}, v^*_j\rangle| < \epsilon$$

für alle $j = 1, ..., k$ gilt. Dann ist

$$|\langle Tu_{\epsilon,F}, u^*_{\epsilon,F}\rangle - \lambda| \leq |\langle Tu_{\epsilon,F}, u^*_{\epsilon,F}\rangle - \lambda_n| + |\lambda_n - \lambda| < \epsilon.$$

Wir betrachten die Netze $(u_{\epsilon,F})_{(\epsilon,F)\in\Lambda}$ und $(u^*_{\epsilon,F})_{(\epsilon,F)\in\Lambda}$ und zeigen als nächstes, dass $(u_{\epsilon,F})_{(\epsilon,F)\in\Lambda}$ schwach gegen 0 konvergiert. Seien dazu $\phi \in X'$. Dann gilt für alle $(\epsilon', \tilde{F}) \geq (\epsilon, \{\phi\})$, dass $|\langle (u_{\epsilon',\tilde{F}}), \phi\rangle| \leq \epsilon' \leq \epsilon$ gilt. Das liefert gerade die schwache Konvergenz von $(u_{\epsilon,F})_{(\epsilon,F)\in\Lambda}$ gegen 0.
Schließlich gilt für $\epsilon > 0$ und $(\epsilon', F) \geq (\epsilon, \emptyset)$, dass

$$|\langle Tu_{\epsilon',F}, u^*_{\epsilon',F}\rangle| < \epsilon' \leq \epsilon$$

ist. Das zeigt $\langle Tu_{\epsilon,F}, u^*_{\epsilon,F}\rangle \overset{(\epsilon,F)}{\rightarrow} \lambda$. Insgesamt folgt $\lambda \in W_e(T)$.

□

Um das räumliche wesentliche numerische Bild zu untersuchen, benötigen wir den Satz von Bishop-Phelps-Bollobas. Um diesen Satz zu beweisen, müssen wir allerdings zunächst etwas Vorarbeit leisten. Dazu orientieren wir uns an [BD2]. Für einen normierten $\mathbb{C}$-Vektorraum seien $X'_{\mathbb{C}} = X' = \{\phi : X \to \mathbb{C};\ \phi \text{ stetig und } \mathbb{C}\text{-linear}\}$ und $X'_{\mathbb{R}} = \{\phi : X \to \mathbb{R};\ \phi \text{ stetig und } \mathbb{R}\text{-linear}\}$.

Lemma 4.3. *Sei X ein normierter $\mathbb{C}$-Vektorraum. Dann definiert die Abbildung $J : X'_{\mathbb{C}} \to X'_{\mathbb{R}}, f \mapsto Re(f)$ eine $\mathbb{R}$-lineare, surjektive Isometrie.*

Beweis. Sei $f \in X'_{\mathbb{C}}$. Dann ist $\mathrm{Re}(f) \in X'_{\mathbb{R}}$ und es gilt $\|\mathrm{Re}(f)\| \leq \|f\|$.
Indem man für $x \in X$ ein $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$ und $cf(x) = |f(x)|$ wählt, sieht man, dass

$$|f(x)| = f(cx) = |\mathrm{Re}(f(cx))| \leq \|\mathrm{Re} f\|\|cx\| = \|\mathrm{Re} f\|\|x\|$$

gilt. Also ist auch $\|f\| \leq \|\mathrm{Re} f\|$. Es ist klar, dass J eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist. Zu zeigen bleibt noch die Surjektivität. Wir geben uns $g \in X'_{\mathbb{R}}$ vor und definieren $f : X \to \mathbb{C}$ durch

$$f(x) = g(x) - ig(ix),$$

für alle $x \in X$. Dann ist $f \in X'_{\mathbb{C}}$, mit $\mathrm{Re}(f) = g$, womit die Behauptung folgt.

□

Mit folgendem Lemma lässt sich der Satz von Bishop-Phelps-Bollobas auf den reellen Fall reduzieren.

Lemma 4.4. *Seien X ein Banachraum über $\mathbb{R}$, $f, g \in S(X'), \epsilon > 0$ und $Y = \{x \in \frac{2}{\epsilon}\overline{B_1(0)}; f(x) = 0\}$. Gilt $|g(x)| \leq 1$ für alle $x \in Y$, so gilt entweder $\|f - g\| \leq \epsilon$ oder $\|f + g\| \leq \epsilon$.*

Beweis. Sei $|g(x)| \leq 1$ für alle $x \in Y$ und sei $X_0 = \{x \in X; f(x) = 0\}$. Dann ist $X_0 \cap \overline{B_1(0)} = \frac{\epsilon}{2}Y$ und somit

$$\sup_{x \in X_0 \cap \overline{B_1(0)}} |g(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Aus $|g(x)| = \|x\| g(\frac{x}{\|x\|}) \leq \|x\| \frac{\epsilon}{2}$ für alle $x \in X_0$ folgt dann $\|g|_{X_0}\| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert eine normgleiche Fortsetzung $h \in X'$ von $g|_{X_0}$, für die also $\|h\| = \|g|_{X_0}\| \leq \frac{\epsilon}{2}$ gilt. Sei $y_0 \in X$, mit $\operatorname{Kern} f \oplus \operatorname{span}(y_0) = X$. Mit $\alpha = \frac{(g-h)(y_0)}{f(y_0)}$ gilt wegen $(g - h)|_{X_0} \equiv 0$, dass

$$g - h = \alpha f \text{ oder äquivalent } g - \alpha f = h. \tag{1}$$

Wir betrachten zunächst den Fall $0 \leq \alpha \leq 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|g - f\| &\leq \|g - \alpha f\| + \|(\alpha - 1)f\| \\
&= \|g - \alpha f\| + 1 - \alpha \\
&= \|g - \alpha f\| + \|g\| - \|\alpha f\| \\
&\leq 2\|g - \alpha f\| = 2\|h\| \leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Als nächstes betrachten wir den Fall $\alpha > 1$. Dann ist $0 < \frac{1}{\alpha} < 1$ da man (1) auch als

$$f - \frac{1}{\alpha} g = -\frac{1}{\alpha} h \tag{2}$$

schreiben kann, folgt ähnlich wie im ersten Fall:

$$\|f - g\| \leq 2\|f - \frac{1}{\alpha} g\| = 2\|h\| \leq \epsilon.$$

Sei schließlich $\alpha < 0$. Mit $g - (-\alpha)(-f) = h$, können wir den ersten Fall anwenden und es folgt $\|g - (-f)\| \leq \epsilon$. □

Nun haben wir alles zusammen, um den Satz von Bishop-Phelps-Bollobas zu zeigen.

Satz 4.5. *(Satz von Bishop-Phelps-Bollobas)*
Seien X ein Banachraum und $0 < \epsilon < 1$. Zu $z \in X$, $h \in S(X')$ mit $\|z\| \leq 1$ und $|1 - h(z)| < \frac{\epsilon^2}{4}$ existiert ein $(m, g) \in \Pi(X)$, so dass

$$\|m - z\| < \epsilon \text{ und } \|g - h\| < \epsilon.$$

gelten.

Beweis. Wir beweisen den Satz zunächst für einen Banachraum über $\mathbb{R}$.
Seien $0 < \epsilon < 1$ und $0 < \delta < \epsilon$. Seien außerdem $z \in \overline{B_1(0)}, h \in S(X')$ mit $|1 - h(z)| < \frac{\delta^2}{4}$ und $Y = \{x \in \frac{2}{\delta}\overline{B_1(0)}; h(x) = 0\}$. Wegen $|1 - h(z)| < \frac{\delta^2}{4}$ gilt dann $h(z) > 0$. Wir definieren $c = \frac{1}{h(z)}(1 + \frac{2}{\delta})$ und eine partielle Ordnung "$\preceq$" auf $\overline{B_1(0)}$ durch

$$x \preceq y \Leftrightarrow \|x - y\| \leq ch(y - x)$$

für alle $x, y \in \overline{B_1(0)}$. Für $x, y \in \overline{B_1(0)}$ mit $x \preceq y$ gilt dann $0 \leq \|x - y\| \leq c(h(y) - h(x))$, also wegen $c > 0$ auch $h(x) \leq h(y)$.
Wir definieren $Z = \{x \in \overline{B_1(0)}; z \preceq x\}$ und zeigen, dass Z ein maximales Element m besitzt. Sei dazu $W \subset Z$ eine Kette. Dann ist $(h(w))_{w \in W}$ ein monotones, durch 1 beschränktes Netz in $\mathbb{R}$ und damit konvergent.
Insbesondere ist $(h(w))_{w \in W}$ ein Cauchy-Netz in $\mathbb{R}$, also ist wegen $\|w'' - w'\| \leq c|h(w'') - h(w')|$ für alle $w', w'' \in W$ auch $(w)_{w \in W}$ ein Cauchy-Netz in $\overline{B_1(0)}$ und konvergiert damit gegen ein $v \in \overline{B_1(0)} \subset X$.
Wir zeigen als nächstes $w_0 \preceq v$ für alle $w_0 \in W$.

Seien dazu $w_0 \in W$ beliebig und $W_0 = \{\tilde{w} \in W; w_0 \preceq \tilde{w}\}$. Dann ist $(w)_{w \in W_0}$ ein Teilnetz von $(w)_{w \in W}$, konvergiert also ebenfalls gegen v. Es gilt

$$\|w - w_0\| \leq c(h(w) - h(w_0))$$

für alle $w \in W_0$. Da h und die Normabbildung stetig sind, folgt durch Übergang zum Grenzwert

$$\|v - w_0\| \leq c(h(v) - h(w_0)),$$

womit die Behauptung folgt. Zusammen mit der Definition von Z erhalten wir

$$z \preceq w \preceq v$$

für alle $w \in W$. Damit ist $v \in Z$ und insbesondere eine obere Schranke von W in Z. Da W beliebig war, besitzt jede Kette von Z eine obere Schranke in Z und somit besitzt Z nach dem Lemma von Zorn ein maximales Element m. Wegen $m \in Z$, ist $z \preceq m$ und wegen $m \in \overline{B_1(0)}$ folgt $h(m) \leq 1$. Auf diese Weise erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|m-z\| &\leq c(h(m)-h(z)) \\
&\leq (1+\frac{2}{\delta})\frac{1}{h(z)}(1-h(z)) \\
&\leq (1+\frac{2}{\delta})\frac{1}{1-(1-h(z))}\frac{\delta^2}{4} \\
&\leq (1+\frac{2}{\delta})\frac{1}{1-\frac{\delta^2}{4}}\frac{\delta^2}{4} \\
&= \frac{\delta}{2}\frac{1}{1-\frac{\delta}{2}} < \delta.
\end{aligned} \tag{1}$$

Sei $C = \operatorname{conv}(\overline{B_1(0)} \cup Y)$ und sei $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ das Minkowski-Funktional $p(x) = \inf_{\alpha>0,\frac{1}{\alpha}x\in C} \alpha$. Da C absolut konvex und beschränkt ist, definiert p eine Norm auf X. Für $x \neq 0$ ist $\frac{x}{\|x\|} \in \overline{B_1(0)} \subset C$, also ist

$$p(x) \leq \|x\|$$

für alle $x \in X$. Wir zeigen als nächstes $p(m) = 1$. Angenommen es würde $p(m) < 1$ gelten. Dann gibt es ein $\alpha \in]0,1[$ mit $\frac{m}{\alpha} \in C$. Da Y und $\overline{B_1(0)}$ konvex sind, existieren $b \in \overline{B_1(0)},\ t \in Y$ und $\ \lambda \in [0,1]$ mit

$$\frac{1}{\alpha}m = \lambda b + (1-\lambda)t. \tag{2}$$

Aus $z \preceq m$ folgt andererseits

$$0 < h(z) \leq h(m) = \alpha\lambda h(b) + (1-\lambda)h(t) = \alpha\lambda h(b) < h(b). \tag{3}$$

Damit ist $0 < h(z) < h(b)$, und wir erhalten

$$h(b-m) = (1-\alpha\lambda)h(b) \geq (1-\alpha\lambda)h(z) \tag{4}$$

oder äquivalent

$$\frac{h(b-m)}{h(z)} \geq (1-\alpha\lambda).$$

Wegen Gleichung (2) gilt $b - m = (1-\alpha\lambda)b - \alpha(1-\lambda)t$ und es folgt

$$\|b-m\| \leq (1-\alpha\lambda) + \alpha(1-\lambda)\|t\| \leq (1-\alpha\lambda) + \alpha(1-\lambda)\frac{2}{\delta} \leq (1-\alpha\lambda)(1+\frac{2}{\delta}). \tag{5}$$

Mit den Ungleichungen (4) und (5) folgt dann

$$\|b-m\| \leq \frac{1}{h(z)}(1+\frac{2}{\delta})h(b-m) = ch(b-m).$$

Somit ist $m \preceq b$. Da m jedoch maximal in Z war, folgt $m = b$. Dies führt aber zu einem Widerspruch in Ungleichung (3). Insgesamt erhalten wir $p(m) = 1$, also insbesondere $\|m\| = 1$.
Nach dem Satz von Hahn-Banach finden wir ein $g \in X'$ mit $|g| \leq p$ und $g(m) = p(m) = 1$. Somit ist $(m, g) \in \Pi(X)$.
Aus $Y \subset C$ folgt

$$|g(x)| \leq p(x) \leq 1 \ (x \in Y),$$

für alle $x \in Y$.
Aus Lemma 4.4 folgt, dass $\|g-h\| \leq \delta$ oder $\|g+h\| \leq \delta$ gilt. Andererseits ist

$$(g+h)(m) = 1 + h(m) > 1$$

und damit $\|g+h\| > 1 > \delta$. Demzufolge kann nur $\|g-h\| \leq \delta < \epsilon$ gelten. Somit folgt der erste Fall.
Sei X nun ein Banachraum über $\mathbb{C}$ und seien $h \in S(X')$, $z \in X$ mit $\|z\| \leq 1$ und $|1-h(z)| < \frac{\epsilon^2}{4}$. Dann gilt

$$|1-\mathrm{Re}(h(z))| = |\mathrm{Re}(1-h(z))| \leq |1-h(z)| < \frac{\epsilon^2}{4}.$$

Da X auch ein Banachraum über $\mathbb{R}$ ist, existiert ein $g \in S(X'_{\mathbb{R}})$ und ein $m \in S(X)$ mit $g(m) = 1$ so, dass $\|m-z\| < \epsilon$ und $\|g-\mathrm{Re}(h)\| < \epsilon$ gelten. Nach Lemma 4.3 existiert ein $f \in X'_{\mathbb{C}}$, mit $g = \mathrm{Re}(f)$ und $\|f\| = \|g\| = 1$. Dann ist $\|f-h\| = \|g-\mathrm{Re}(h)\| < \epsilon$. Weiterhin ist $\mathrm{Re}(f(m)) = g(m) = 1$ und aus $|f(m)| \leq 1$, folgt $\mathrm{Im}(f(m)) = 0$ und somit $f(m) = 1$.

□

Folgendes Lemma wurde modifiziert aus [DW] entnommen.

Lemma 4.6. *(Auerbachs Lemma)*
Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Sei X ein endlich dimensionaler, normierter Raum über $\mathbb{K}$ mit $n = \dim(X)$. Dann existiert eine Basis $b_1, ..., b_n$ von X und eine Basis $b_1^*, ..., b_n^*$ von X' so, dass $b_j^*(b_i) = \delta_{ij}$ und $\|b_i\| = 1 = \|b_j^*\|$ für alle $i, j = 1, ..., n$ gelten.

Beweis. Wegen $X \cong \mathbb{K}^n$ reicht es, das Lemma für $X = \mathbb{K}^n$ bezüglich der induzierten Norm zu beweisen. Sei $\det : (\mathbb{K}^n)^n \to \mathbb{K}$, die Abbildung, die der Matrix mit den Spaltenvektoren $x_1, ..., x_n$ ihre Determinante zuordnet. Die Abbildung $|\det|$ ist stetig und nimmt auf der kompakten Menge $\{(x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{K}^n)^n; \|x_i\| = 1 \text{ für } i = 1, ..., n\}$ ihr Supremum an, etwa in $(b_1, ..., b_n)$ $(\star)$. Da $|\det(b_1, ..., b_n)| > 0$, sind $b_1, ..., b_n$ linear unabhängig und bilden wegen $\dim X = n$ eine Basis von X. Wir definieren

$$b_j^* : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K},\ b_j^*(x) = \frac{\det(b_1, ..., b_{j-1}, x, b_{j+1}, ..., b_n)}{\det(b_1, ..., b_n)}$$

für alle $j = 1, ..., n$. Dann sind $b_1^*, ..., b_n^*$ offensichtlich linear und es gilt

$$|b_j^*(x)| = |\frac{\det(b_1, ..., b_{j-1}, x, b_{j+1}, ..., b_n)}{\det(b_1, ..., b_n)}| = \|x\||\frac{\det(b_1, ..., b_{j-1}, \frac{x}{\|x\|}, b_{j+1}, ..., b_n)}{\det(b_1, ..., b_n)}| \overset{(\star)}{\leq} \|x\|$$

für alle $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ und $j = 1, ..., n$. Wegen $b_j^*(b_j) = 1$ folgt $\|b_j^*\| = 1$ für alle $j = 1, ..., n$. Da det alternierend ist, gilt $b_j^*(b_i) = 0$ für alle $i, j = 1, ..., n$, mit $i \neq j$. □

Proposition 4.7. *Seien $T \in \mathcal{L}(X)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:*

(a) $\lambda \in W_e(T)$.

(b) Für jeden Teilraum $M \in$ Cof(X) und jedes $\epsilon > 0$ existieren $x \in M$ und $x^* \in X'$ so, dass $\|x\| = \|x^*\| = 1 = \langle x, x^* \rangle$ und $|\langle Tx, x^* \rangle - \lambda| \leq \epsilon$ gelten.

Beweis. (b) $\Rightarrow$ (a):
Wähle zu $M \in \mathrm{Cof}(X)$ und $\epsilon > 0$ Elemente $x_{M,\epsilon} \in M,\ x_{M,\epsilon}^* \in X'$, so dass $\|x_{M,\epsilon}\| = \|x_{M,\epsilon}^*\| = 1 = \langle x_{M,\epsilon}, x_{M,\epsilon}^* \rangle$ und $|\langle Tx_{M,\epsilon}, x_{M,\epsilon}^* \rangle - \lambda| \leq \epsilon$ gilt.
Wir betrachten die Indexmenge $\Lambda = \mathrm{Cof}(X) \times]0, \infty[$, versehen mit der partiellen Ordnung

$$(M, \epsilon) \leq (M', \epsilon') \Leftrightarrow M' \subset M \text{ und } \epsilon' \leq \epsilon$$

Sind $\phi \in X'$ und $\epsilon_0 > 0$ gegeben, so gilt für $(M, \epsilon) \geq (\ker(\phi), 1)$

$$|\langle x_{M,\epsilon}, \phi \rangle| = 0 < \epsilon_0,$$

also konvergiert $(x_{M,\epsilon})_{(M,\epsilon)\in\Lambda}$ schwach gegen 0. Sei $\epsilon > 0$ und $M \in \mathrm{Cof}(X)$ beliebig. Dann gilt für $(M', \epsilon') \geq (M, \epsilon)$:

$$|\langle Tx_{M',\epsilon'}, x_{M',\epsilon'}^* \rangle - \lambda| \leq \epsilon' < \epsilon,$$

also konvergiert $(\langle Tx_{M,\epsilon}, x_{M,\epsilon}^* \rangle)_{(M,\epsilon)\in\Lambda}$ gegen λ. Insgesamt folgt $\lambda \in W_e(T)$.
(a) $\Rightarrow$ (b):
Sei $\lambda \in W_e(T)$ und seien $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$ und $(u_\alpha^*)_{\alpha\in A}$ Netze in X beziehungsweise X', wie in der Definition von $W_e(T)$ gefordert. Seien außerdem $M \in \mathrm{Cof}(X)$ und $\epsilon > 0$. Gilt $M = X$, so findet man $u_{\alpha_0} \in X,\ u_{\alpha_0}^* \in X'$ mit den geforderten Eigenschaften.
Sei also $M \subsetneq X$. Wir setzen dann $L = M \cap T^{-1}M \in \mathrm{Cof}(X)$ und $k = \dim(X/L)$. Dabei ist $L \in \mathrm{Cof}(X)$, da die lineare Abbildung $X/T^{-1}(M) \to X/M, [x] \mapsto [Tx]$ injektiv ist und der Durchschnitt von zwei endlich kodimensionalen Teilräumen endlich kodimensional ist.

Sei $L^\perp = \{f \in X^*; f(x) = 0 \text{ für alle } x \in L\}$. Nach dem Auerbach-Lemma gibt es Basen $w_1', ..., w_k' \in X/L$ und $v_1^*, ..., v_k^* \in (X/L)' \cong L^\perp$ so, dass $\|w_i'\|_{X/L} = 1 = \|v_j^*\|$ und $\langle w_i', v_j^* \rangle = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ gelten. Wir wählen $0 < \delta \leq \min\{\frac{1}{32k}, \frac{\epsilon^2}{40^2\|T\|^{2k+1}}\}$.
Für alle $i = 1, ..., k$ wählen wir $v_i \in X$ mit $v_i + L = w_i'$ und $\|v_i\| < 1 + \delta$ für alle $i = 1, ..., k$. Dann ist $\langle v_i, v_j^* \rangle = \langle w_i', v_j^* \rangle = \delta_{ij}$.
Wir zeigen, dass $L = \bigcap_{j=1}^k \operatorname{Kern} v_j^*$ gilt.
"$\subset$": Ist wegen $v_1^*, ..., v_k^* \in L^\perp$ klar.
"$\supset$": Sei $x \notin L$. Dann gilt $[x]_{X/L} \neq [0]_{X/L}$. Da $(w_i')_{i=1}^k$ eine Basis von X/L ist, existiert eine Darstellung $[x]_{X\setminus L} = \sum\limits_{i=1}^k \lambda_i w_i$ mit $\lambda_j \neq 0$ für ein $j \in \{1, ..., k\}$. Mit der Identifikation $(X/L)' \cong L^\perp$ folgt

$$\langle x, v_j^* \rangle = \langle [x]_{X/L}, v_j^* \rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i \langle w_i', v_j^* \rangle = \lambda_j \neq 0.$$

Somit ist $x \notin \operatorname{Kern}(v_j^*) \supset \bigcap_{i=1}^k \operatorname{Kern} v_i^*$.
Nach Wahl von $(u_\alpha)_{\alpha \in A}, (u_\alpha^*)_{\alpha \in A}$ existiert ein $\beta \in A$, so dass

$$|\lambda - \langle Tu_\beta, u_\beta^* \rangle| < \frac{\epsilon}{2} \text{ und } |\langle u_\beta, v_j^* \rangle| \leq \delta \tag{1}$$

für alle $j = 1, ..., k$ gilt. Sei $y = u_\beta - \sum_{i=1}^k \langle u_\beta, v_i^* \rangle v_i$. Dann gilt

$$\langle y, v_j^* \rangle = \langle u_\beta, v_j^* \rangle - \sum_{i=1}^k \langle u_\beta, v_i^* \rangle \langle v_i, v_j^* \rangle = \langle u_\beta, v_j^* \rangle - \langle u_\beta, v_j^* \rangle = 0$$

für alle $j = 1, ..., k$. Somit folgt $y \in L$. Nach Wahl von δ und $v_1, ..., v_k$ gilt außerdem

$$\|y - u_\beta\| = \|\sum_{i=1}^k \langle u_\beta, v_i^* \rangle v_i\| \leq \sum_{i=1}^k |\langle u_\beta, v_i^* \rangle| \|v_i\| < k\delta(\delta + 1) \leq 2k\delta. \tag{2}$$

Sei $y_1 = \frac{y}{\|y\|}$. Dann ist $y_1 \in L \subset M$ mit $\|y_1\| = 1$ und es gilt wegen (2)

$$\|y_1 - y\| = |1 - \|y\|| = |\|u_\beta\| - \|y\|| \leq \|u_\beta - y\| \overset{(2)}{\leq} 2k\delta. \tag{3}$$

Somit folgt mit Gleichung (2) und (3):

$$\|y_1 - u_\beta\| \leq \|y_1 - y\| + \|y - u_\beta\| \overset{(2),(3)}{\leq} 4k\delta. \tag{4}$$

Zusammen mit der Standardabschätzung impliziert dies wiederum

$$|\langle y_1, u_\beta^* \rangle - 1| = |\langle y_1 - u_\beta, u_\beta^* \rangle| \leq \|u_\beta^*\| \|y_1 - u_\beta\| \overset{(4)}{\leq} 4k\delta. \tag{5}$$

Außerdem gilt $\|u_\beta^*|_M\| \geq \|u_\beta^*\| = 1$ und

$$\|u_\beta^*|_M\| \geq |\langle y_1, u_\beta^*|_M\rangle| \geq |\langle u_\beta, u_\beta^*\rangle| - |\langle u_\beta - y_1, u_\beta^*\rangle| \overset{(5)}{\geq} 1 - 4k\delta > 0.$$

Sei $y_1^* = \frac{u_\beta^*|_M}{\|u_\beta^*|_M\|}$. Dann ist $y_1^* \in M'$ mit $\|y_1^*\| = 1$ und es folgt

$$\|y_1^* - u_\beta^*|_M\| = \|\frac{u_\beta^*|_M}{\|u_\beta^*|_M\|} - u_\beta^*|_M\| = |1 - \|u_\beta^*|_M\|| \leq 4k\delta. \tag{6}$$

Aus den Ungleichungen (5), (6) und der Dreiecksungleichung folgt, dass

$$|\langle y_1, y_1^*\rangle - 1| \leq |\langle y_1, u_\beta^*|_M\rangle - 1| + |\langle y_1, y_1^*\rangle - \langle y_1, u_\beta^*|_M\rangle| \overset{(5),(6)}{\leq} 8k\delta.$$

Somit sind die Voraussetzungen für den Satz von Bishop-Phelps-Bollobas erfüllt und für $\epsilon = \sqrt{32k\delta}$ existieren $(x, z^*) \in \Pi(M)(= \{(m, m^*) \in S(M) \times S(M'); \langle m, m^*\rangle = 1\})$ mit

$$\begin{aligned} &\mathrm{i)} \|x - y_1\| \leq \sqrt{32k\delta} \leq 6\sqrt{k\delta} \text{ und} \\ &\mathrm{ii)} \|z^* - y_1^*\| \leq \sqrt{32k\delta} \leq 6\sqrt{k\delta}. \end{aligned}$$

Somit und da $\delta \leq \frac{1}{32k}$ folgt

$$\|z^* - u_\beta^*|_M\| \leq \|z^* - y_1^*\| + \|y_1^* - u_\beta^*|_M\| \leq (6 + 4\sqrt{k\delta})\sqrt{k\delta} \leq 10\sqrt{k\delta}. \tag{7}$$

Wähle nun mit Hahn-Banach eine Fortsetzung x^* von z^* auf X, so dass $\|x^*\| = \|z^*\| = \langle x, x^*\rangle = 1$. Wegen $y_1 \in L \subset T^{-1}(M)$ ist $Ty_1 \in M$ und es folgt

$$\begin{aligned} |\langle Tx, x^*\rangle - \lambda| &\leq |\langle Tx - Ty_1, x^*\rangle| + |\langle Ty_1, x^*\rangle - \lambda| \\ &\leq \|x^*\|\|T\|\|x - y_1\| + |\langle Tu_\beta, u_\beta^*\rangle - \lambda| + |\langle Ty_1, z^*\rangle - \langle Tu_\beta, u_\beta^*\rangle| \\ &\overset{i)}{\leq} \|T\|6\sqrt{k\delta} + |\langle Tu_\beta, u_\beta^*\rangle - \lambda| + |\langle Ty_1, z^* - u_\beta^*\rangle + \langle T(y_1 - u_\beta), u_\beta^*\rangle| \\ &\leq \|T\|6\sqrt{k\delta} + \frac{\epsilon}{2} + \|z^* - u_\beta^*|_M\|\|T\| + \|u_\beta^*\|\|T\|\|y_1 - u_\beta\| \\ &\overset{(4),(7)}{\leq} \|T\|6\sqrt{k\delta} + \frac{\epsilon}{2} + \|T\|10\sqrt{k\delta} + \|T\|4k\delta \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + 20\|T\|\sqrt{k\delta} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir gesehen, dass für jedes $M \in \mathrm{Cof}(X)$ und für alle $\epsilon > 0$, ein $x \in M$ und ein $x^* \in X'$ existieren so, dass $\|x\| = \|x^*\| = \langle x, x^*\rangle = 1$ und $|\langle Tx, x^*\rangle - \lambda| < \epsilon$ gelten.

$\square$

Wir wollen uns nun eine weitere Norm auf der Calkin-Algebra vorgeben. Dazu benötigen wir zunächst noch folgende Aussagen über kompakte Operatoren (vgl. [MV2]).

Lemma 4.8. *Seien X ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)$ Dann sind äquivalent:*

(a) T ist kompakt.

(b) Für jedes in $B_1(0)$ schwach gegen 0 konvergente Netz $(x_\alpha)_\alpha$ gilt

$$\|Tx_\alpha\| \overset{\alpha}{\to} 0.$$

(c) Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein Teilraum $M \in Cof(X)$ mit

$$\|T|_M\| < \epsilon.$$

Beweis. $(a) \Rightarrow (b)$: Sei $(x_\alpha)_\alpha$ ein Netz in $B_1(0)$, das schwach gegen 0 konvergiert. Dann gilt $Tx_\alpha \overset{\alpha}{\to} 0$ (schwach), denn für alle $\phi \in X'$ ist auch $\phi \circ T \in X'$.
Angenommen $\|Tx_\alpha\| \overset{\alpha}{\not\to} 0$. Dann existieren ein $c > 0$ und ein Teilnetz $(x_\beta)_\beta$, mit $\|Tx_\beta\| \geq c$ für alle β. Da $\overline{TB_1(0)}$ kompakt ist, hat $(Tx_\beta)_\beta$ ein konvergentes Teilnetz, o.E. sei $(Tx_\beta)_\beta$ selbst konvergent. Dann ist mit $y = \lim_\beta Tx_\beta$ auch $\|y\| \geq c$. Da $(Tx_\beta)_\beta$ dann auch schwach gegen y konvergiert, ist das ein Widerspruch dazu, dass $(Tx_\beta)_\beta$ schwach gegen 0 konvergiert.
$(b) \Rightarrow (c)$: Angenommen (c) gilt nicht. Dann existiert ein $c > 0$ so, dass für jeden Unterraum $M \in \mathrm{Cof}(X)$ ein $x_M \in M$ existiert, mit $\|x_M\| = 1$ und $\|Tx_M\| \geq c$. Ist $\phi \in X'$, so gilt für alle $M \subset \mathrm{Kern}\,\phi$, dass $\phi(x_M) = 0$ ist. Wie üblich sei $\mathrm{Cof}(X)$ dadurch geordnet, dass $M \geq L$ genau dann gilt, wenn $M \subset L$ ist. Dann konvergiert $(x_M)_{M \in \mathrm{Cof}(X)}$ schwach gegen 0. Das liefert einen Widerspruch zu (b).
$(c) \Rightarrow (a)$: Angenommen T ist nicht kompakt. Dann ist $TB_1(0)$ nicht relativ kompakt und daher auch nicht total beschränkt. Daher existiert ein $c > 0$ so, dass $TB_1(0)$ nicht durch endlich viele offene Kugeln mit Radius c um Punkte aus $TB_1(0)$ überdeckt werden kann. Wähle ein beliebiges $x_1 \in B_1(0)$ und konstruiere induktiv eine Folge von Punkten $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $B_1(0)$ mit $\|Tx_i - Tx_j\| \geq c$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$.
Seien $M \in \mathrm{Cof}(X)$ und $P \in \mathcal{L}(X)$ eine Projektion auf M. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wegen $\dim(I - P)X < \infty$ ist $I - P$ kompakt und man findet $j, k \in \mathbb{N}$ mit $j \neq k$ so, dass $\|(I - P)x_j - (I - P)x_k\| < \epsilon$. Weiterhin folgt

$$\|P(x_j - x_k)\| \leq \|x_j - x_k\| + \|(I - P)(x_j - x_k)\| \leq 2 + \epsilon$$

und mit der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$\|TP(x_j - x_k)\| \geq \|Tx_j - Tx_k\| - \|T(I - P)(x_j - x_k)\| \geq c - \epsilon\|T\|.$$

gilt. Dies impliziert jedoch:

$$\|T|_M\| \geq \frac{\|TP(x_j - x_k)\|}{\|P(x_j - x_k)\|} \geq \frac{c - \epsilon\|T\|}{2 + \epsilon}.$$

Für $\epsilon \to 0$ ist dann $\|T|_M\| \geq \frac{c}{2}$, was zu einem Widerspruch führt. $\square$

Im folgenden Abschnitt, orientieren wir uns wieder an [BaM].

Satz 4.9. *(a) Die Abbildung*

$$\|\cdot\|_{Cof} : \mathcal{L}(X) \to [0,\infty), \|T\|_{Cof} = \inf_{M \in Cof(X)} \|T|_M\|$$

definiert eine submultiplikative Halbnorm mit $\|T\|_{Cof} \leq \|T\|_e$ für alle $T \in \mathcal{L}(X)$. Für $T \in \mathcal{L}(X)$ ist außerdem $\|T\|_{Cof} = 0$ genau dann, wenn T kompakt ist.

(b) Mit der Norm $\|\cdot\|_\mu : \mathfrak{C}(X) \to [0,\infty), \|[T]\|_\mu = \|T\|_{Cof}$ wird die Calkin-Algebra zu einer normierten Algebra. Wir schreiben $\mathfrak{C}(X)_\mu$ für $\mathfrak{C}(X)$ versehen mit dieser Norm.

Beweis. (a) Wir zeigen, dass $\|\cdot\|_{\mathrm{Cof}}$ eine submultiplikative Halbnorm definiert. Die Homogenität ist klar.
Seien $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X)$. Zu $\epsilon > 0$ existieren $M_1, M_2 \in \mathrm{Cof}(X)$ so, dass $\|T_i|_{M_i}\| < \inf_{M \in \mathrm{Cof}(X)} \|T_i|_M\| + \epsilon$ für $i \in \{1,2\}$. Da der Durchschnitt endlich kodimensionaler Räume ebenfalls endlich kodimensional ist, ist auch $M_1 \cap M_2 \in \mathrm{Cof}(X)$ und es gilt

$$\begin{aligned}
\|(T_1+T_2)\|_{\mathrm{Cof}} &\leq \|(T_1+T_2)|_{M_1\cap M_2}\| \\
&\leq \|T_1|_{M_1\cap M_2}\| + \|T_2|_{M_1\cap M_2}\| \\
&\leq \|T_1|_{M_1}\| + \|T_2|_{M_2}\| \\
&< \|T_1\|_{\mathrm{Cof(X)}} + \|T_2\|_{\mathrm{Cof(X)}} + 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Somit folgt die Dreiecksungleichung. Sei außerdem $L = T_2^{-1}M_1 \cap M_2 \in \mathrm{Cof}(X)$. Dabei folgt $L \in \mathrm{Cof}(X)$ wie im Beweis von Proposition 4.7. Dann ist $T_2 L \subset M_1$ und damit folgt

$$\begin{aligned}
\|T_1T_2\|_{\mathrm{Cof}} &= \inf_{M \in \mathrm{Cof}(X)} \|(T_1T_2)|_M\| \\
&\leq \|(T_1T_2)|_L\| \\
&= \|T_1|_{M_1} T_2|_L\| \\
&\leq \|T_1|_{M_1}\|\|T_2|_{M_2}\| \\
&\leq (\|T_1\|_{\mathrm{Cof(X)}} + \epsilon)(\|T_2\|_{\mathrm{Cof(X)}} + \epsilon) \\
&= \|T_1\|_{\mathrm{Cof}}\|T_2\|_{\mathrm{Cof}} + \epsilon\|T_1\|_{\mathrm{Cof}} + \epsilon\|T_2\|_{\mathrm{Cof}} + \epsilon^2.
\end{aligned}$$

Somit folgt die Submultiplikativität.

Sei nun $T \in \mathcal{L}(X)$. Wir zeigen, dass $\|T\|_{\mathrm{Cof}} \leq \|T\|_e$. Seien dazu $C \in K(X)$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Dann existiert nach Lemma 4.8 ein Teilraum $M_{\epsilon,C} \in \mathrm{Cof}(X)$ mit $\|C|_{M_{\epsilon,C}}\| < \epsilon$. Dann ist

$$\|T\|_{\mathrm{Cof}} \leq \|T|_{M_{\epsilon,C}}\| \leq \|(T-C)|_{M_{\epsilon,C}}\| + \|C|_{M_{\epsilon,C}}\| \leq \|T-C\| + \epsilon$$

Da $\epsilon > 0$ und $C \in K(X)$ beliebig sind, folgt $\|T\|_{\mathrm{Cof}} \leq \|T\|_e$.

Wir müssen noch zeigen, dass $\|T\|_{\mathrm{Cof}} = 0$ genau dann gilt, wenn T kompakt ist.

Ist $\|T\|_{\mathrm{Cof}} = 0$, so gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $M_\epsilon \in \mathrm{Cof}(X)$ mit $\|T|_{M_\epsilon}\| < \epsilon$. Also ist T nach Lemma 4.8 kompakt.

Ist umgekehrt T kompakt, so gilt $\|T\|_{\mathrm{Cof}} \leq \|T\|_e = 0$, also $\|T\|_{\mathrm{Cof}} = 0$.

(b) Teil (b) folgt direkt aus Teil (a).

□

Wir haben gesehen, dass die Cof-Norm eines Operators genau dann 0 ist, wenn der Operator kompakt ist. Deswegen wird diese Norm auch als "Maß der nicht-Kompaktheit"bezeichnet. Folgende Behauptungen folgen direkt aus den entsprechenden Aussagen über das algebraische, numerische Bild aus Kapitel 1.

Korollar 4.10. *Die Menge $V_\mu(T) = V((\mathfrak{C}(X), \|\cdot\|_{Cof}), T) = \{f([T]); f \in D(\mathfrak{C}(X)_\mu, 1)\}$ ist eine kompakte, konvexe Teilmenge von $\mathbb{C}$ und es gilt die Abschätzung*

$$\frac{1}{e}\|[T]\|_\mu \leq \max\{|z|; z \in V_\mu(T)\} \leq \|[T]\|_\mu.$$

Als nächstes wollen wir $V_\mu(T)$ mit $V_e(T)$ für einen Operator $T \in \mathcal{L}(X)$ vergleichen.

Korollar 4.11. *Seien X ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)$. Dann gilt $V_\mu(T) \subset V_e(T)$ und die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) $V_\mu(T) = \{0\}$,

(b) $V_e(T) = \{0\}$,

(c) $T \in K(X)$.

Beweis. Wir schreiben $\|\cdot\|_{\mathrm{Op},e}$ bzw. $\|\cdot\|_{\mathrm{Op},\mu}$ für die (Operator-)Normen auf $(\mathfrak{C}(X), \|\cdot\|_e)'$ bzw. $(\mathfrak{C}(X), \|\cdot\|_\mu)'$ Sei $f([T]) \in V_\mu(T)$ für $f \in (\mathfrak{C}(X), \|\cdot\|_\mu)'$ und $T \in \mathcal{L}(X)$ mit $\|f\|_{\mathrm{Op},\mu} = 1 = f([1])$. Für alle $[T] \in \mathfrak{C}(X)$ gilt wegen Satz 4.9

$$|f([T])| \leq \|f\|_{\mathrm{Op},\mu}\|T\|_\mu \leq \|f\|_{\mathrm{Op},\mu}\|[T]\|_e.$$

Dann folgt $\|f\|_{\mathrm{Op},e} \leq \|f\|_{\mathrm{Op},\mu} = 1$. Wegen $\|f\|_{\mathrm{Op},e} \geq f([1]) = 1$ ist $f([T]) \in V_e(T)$. Die Äquivalenzen $(a) \Leftrightarrow (c)$ und $(b) \Leftrightarrow (c)$ sind eine direkte Konsequenz der Ungleichungen aus Korollar 4.10 und der entsprechenden Ungleichungen für $\|[T]\|_e$ und $V_e(T)$.

□

Satz 4.12. *Ist H ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$ so ist $\|T\|_{Cof} = \|T\|_e$ und daher $V_\mu(T) = V_e(T)$.*

Beweis. Sei $M \in \mathrm{Cof}(H)$. Wir zeigen, dass $\|T|_M\| \geq \inf_{C \in K} \|T - K\|$ gilt. Da M endlich kodimensional ist, gibt es eine Zerlegung $H = M \oplus L$ mit $L = M^\perp$. Seien P_M bzw. P_L die Orthogonalprojektionen auf M bzw. L. Dann ist $T = T|_M P_M + T|_L P_L$. Zusammen mit der Standardabschätzung folgt

$$\|T|_M\| \geq \|T|_M P_M\| = \|T - T|_L P_L\| \geq \|T\|_e,$$

Insgesamt folgt $\|T\|_{\mathrm{Cof}} = \inf_{M \in \mathrm{Cof}(X)} \|T|_M\| \geq \|T\|_e$.

□

Als nächstes wollen wir uns wieder dem räumlichen wesentlichen numerischen Bild zuwenden. Wir haben bereits gezeigt, dass $W_e(T)$ abgeschlossen ist. Für $T \in \mathcal{L}(X)$ haben wir in Kapitel 2 gesehen, dass $\overline{\mathrm{conv}} W(T) = V(\mathcal{L}(X), T)$ gilt. Man stellt sich nun die Frage, ob ebenso $\mathrm{conv}(W_e(T)) = V_\mu(T)$ für alle $T \in \mathcal{L}(X)$ gilt. Um dies zu zeigen, werden wir folgendes Lemma benutzen.

Lemma 4.13. *Seien $T \in \mathcal{L}(X)$ und $0 \in V_\mu(T)$. Dann gibt es ein $\eta \in W_e(T)$ mit $Re(\eta) \geq 0$.*

Beweis. Nach Definition von $V_\mu(T)$ gibt es ein $\Phi \in (\mathfrak{C}(X), \|\cdot\|_\mu)'$ so, dass $\Phi(I) = 1$, $\Phi([T]) = 0$ und $|\Phi(R)| \leq \|R\|_\mu$ für alle $R \in \mathfrak{C}(X)$ gelten.
Wir betrachten die Indexmenge $\Lambda = \mathrm{Cof}(X) \times]0,1[$ und schreiben $(M, \epsilon) \succeq (L, \tau)$, falls $M \subset L$ und $\epsilon \leq \tau$. Seien $\epsilon \in]0,1[$ und $M \in \mathrm{Cof}(X)$ beliebig. Sei weiterhin $a > \frac{4(\epsilon + \|T\|)}{\epsilon^2}$. Dann ist

$$a - \epsilon < a = \Phi(aI + [T]))| \leq \|aI + [T]\|_\mu \leq \|(aI + T)|_M\|.$$

Somit gibt es ein $x \in M$ mit $\|x\| = 1$, so dass $\|(aI + T)x\| > a - \epsilon$ gilt. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es ein $x^* \in X'$ mit $\|x^*\| = 1$ und

$$\langle ax + Tx, x^* \rangle = \|ax + Tx\| > a - \epsilon.$$

Mit dieser Ungleichung und der Standardabschätzung erhalten wir

$$\mathrm{Re}\langle Tx, x^* \rangle = \mathrm{Re}\langle ax + Tx, x^* \rangle - \mathrm{Re}\langle ax, x^* \rangle > a - \epsilon - |\langle ax, x^* \rangle| \geq -\epsilon$$

und

$$\mathrm{Re}\langle ax, x^* \rangle = \mathrm{Re}\langle ax + Tx, x^* \rangle - Re\langle Tx, x^* \rangle > a - \epsilon - |\langle Tx, x^* \rangle| \geq a - \epsilon - \|T\|.$$

Teilt man durch a, so erhält man

$$Re\langle x, x^* \rangle > 1 - \frac{\epsilon + \|T\|}{a}.$$

Nach Wahl von a gilt dann $|\mathrm{Re}\langle x, x^* \rangle - 1| < \frac{\epsilon^2}{4}$. Fasst man X als $\mathbb{R}$-Vektorraum auf, so liefert der Satz von Bishop-Phelps-Bollobas zusammen mit Lemma 4.3, dass es ein

$y \in X$ und ein $y^* \in X'$ gibt, für die

$$\|y\| = 1 = \|y^*\| = \langle y, y^* \rangle,\ \|y - x\| < \epsilon \text{ und } \|y^* - x^*\| < \epsilon.$$

gelten. Demzufolge ist $\mathrm{dist}(y, M) \leq \|y - x\| < \epsilon$. Mit der Standardabschätzung folgt

$$\mathrm{Re}\langle Ty, y^* \rangle = \mathrm{Re}\langle Tx, x^* \rangle + \mathrm{Re}\langle T(y-x), x^* \rangle + \mathrm{Re}\langle Ty, y^* - x^* \rangle > -\epsilon - 2\epsilon\|T\|.$$

Deshalb gibt es Netze $(y_{M,\epsilon})_{(M,\epsilon)\in\Lambda}$ in X und $(y^*_{M,\epsilon})_{(M,\epsilon)\in\Lambda}$ in X^* so, dass

$$\|y_{M,\epsilon}\| = 1 = \|y^*_{M,\epsilon}\| = \langle y_{M,\epsilon}, y^*_{M,\epsilon} \rangle,\ \mathrm{dist}(y_{M,\epsilon}, M) < \epsilon \text{ und } \mathrm{Re}\langle Ty_{M,\epsilon}, y^*_{M,\epsilon} \rangle > -\epsilon - 2\epsilon\|T\|$$

für alle $M \in \mathrm{Cof}(X)$ und für alle $\epsilon > 0$ gelten.
Wir zeigen, dass $y_{M,\epsilon}$ schwach gegen 0 konvergiert. Seien dazu $u^* \in X'$, $\tau > 0$ und o.E. sei $\|u^*\| = 1$ (Ist u^* nicht normiert so setze $u' = \frac{u^*}{\|u^*\|}$ und $\tau' = \frac{\tau}{\|u\|}$). Sei außerdem $L = \mathrm{Kern}(u^*)$. Für jedes $(M, \epsilon) \succeq (L, \tau)$ erhalten wir $\mathrm{dist}(y_{M,\epsilon}, L) < \epsilon \leq \tau$. Für alle $x \in L$ gilt $|\langle y_{M,\epsilon}, u^* \rangle| \leq \|u^*\|\|y_{M,\epsilon} - x\|$ und es folgt

$$|\langle y_{M,\epsilon}, u^* \rangle| \leq \mathrm{dist}(y_{M,\epsilon}, L) < \tau.$$

Damit folgt, dass $(y_{M,\epsilon})$ schwach gegen 0 konvergiert. Für (M, ϵ) setzen wir $\eta_{M,\epsilon} = \langle Ty_{M,\epsilon}, y^*_{M,\epsilon} \rangle$. Dann gilt $\mathrm{Re}(\eta_{M,\epsilon}) > -\epsilon - 2\epsilon\|T\|$, für alle $(M, \epsilon) \in \Lambda$. Mit der Standardabschätzung erhalten wir

$$|\eta_{M,\epsilon}| = \langle Ty_{M,\epsilon}, y^*_{M,\epsilon} \rangle \leq \|T\|$$

für alle $(M, \epsilon) \in \Lambda$. Als beschränktes Netz in $\mathbb{C}$ hat $(\eta_{M,\epsilon})$ ein konvergentes Teilnetz $(\eta_\beta) \xrightarrow{\beta} \eta$ in schwacher Konvergenz. Offensichtlich gilt $\mathrm{Re}\eta \geq 0$ und $\eta \in W_e(T)$.

$\square$

Satz 4.14. *Sei $T \in \mathcal{L}(X)$. Dann gilt $V_\mu(T) = conv(W_e(T))$.*

Beweis. Für die Richtung "$\subset$"wollen wir obiges Lemma benutzen.
Da $W_e(T)$ als abgeschlossene und durch $\overline{D}_{\|T\|}(0)$ beschränkte Teilmenge kompakt ist, ist nach [SW] (3.2.18) auch $\mathrm{conv}W_e(T)$ kompakt und somit abgeschlossen. Angenommen es gibt ein $\lambda \in V_\mu(T) \setminus \mathrm{conv}W_e(T)$. Dann gibt es nach den Trennungssätzen $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\mu| = 1$ und $q \in \mathbb{R}$, so dass $\mathrm{Re}(\mu\lambda) > q$ und

$$\mathrm{conv}W_e(T) \subset \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}(\mu z) < q\}$$

gelten. Sei $S = \mu T - \mu\lambda I$. Dann ist $0 \in V_\mu(S)$ und es folgt

$$W_e(S) = \{\mu z - \mu\lambda; z \in W_e(T)\} = \mu W_e(T) - \mu\lambda \subset \{w \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}(w) < 0\},$$

aber dies steht im Widerspruch zu Lemma 4.13.
Sei umgekehrt $\lambda \in W_e(T)$. Ohne Einschränkung sei $T \notin \mathbb{C}I$. Seien $(u_\alpha)_{\alpha\in A} \subset X$, $(u^*_\alpha)_{\alpha\in A} \subset X'$ wie in der Definition von $W_e(T)$ zu λ gewählt. Wir definieren $\phi : \mathrm{span}\{I, T\} \to \mathbb{C}$

durch $\phi(\beta I + \gamma T) = \beta + \gamma\lambda$ $(\beta, \gamma \in \mathbb{C})$ und zeigen, dass

$$|\phi(\beta I + \gamma T)| \leq \|\beta + \gamma T\|_{\mathrm{Cof}}$$

für alle $\beta,\ \gamma \in \mathbb{C}$ gilt. Wir schreiben $S = \beta I + \gamma T$.
Seien $M \in \mathrm{Cof}(X)$ und $\epsilon > 0$. Nach Proposition 4.7 existieren dann $x \in M$ und $x^* \in X'$ so, dass $\|x\| = \|x^*\| = 1 = \langle x, x^*\rangle$ und $|\langle Tx, x^*\rangle - \lambda| < \epsilon$ gelten. Damit und mit der Standardabschätzung folgt, dass

$$\|S|_M\| \geq \|Sx\| \geq |\langle Sx, x^*\rangle| = |\beta + \gamma\langle Tx, x^*\rangle| \geq |\beta + \gamma\lambda| - |\gamma\epsilon|.$$

gilt. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, erhalten wir $\|S|_M\| \geq |\beta + \gamma\lambda|$. Da $M \in \mathrm{Cof}(X)$ beliebig war, folgt daraus wiederum $\|S\|_{\mathrm{Cof}} \geq |\phi(S)|$ für jedes $S \in \mathrm{span}\{I, T\}$.

Nach dem Satz von Hahn-Banach für Halbnormen gibt es eine Linearform $\Phi : \mathcal{L}(X) \to \mathbb{C}$, die ϕ fortsetzt und $|\Phi(R)| \leq \|R\|_{\mathrm{Cof}}$ für alle $R \in \mathcal{L}(X)$ erfüllt. Dann definiert $\tilde{\Phi} : (\mathfrak{C}(X), \|\cdot\|_\mu) \to \mathbb{C}$, $\tilde{\Phi}([R]) = \Phi(R)$ eine stetige Linearform mit $\|\tilde{\Phi}\| = 1 = \tilde{\Phi}(1)$ und

$$\tilde{\Phi}([T]) = \Phi(T) = \phi(T) = \lambda.$$

Da $V_\mu(T)$ konvex ist folgt $\mathrm{conv}(W_e(T)) \subset V_\mu(T)$. $\square$

Wie zuvor, wollen wir auch beim räumlichen wesentlichen numerischen Bild einen Zusammenhang zum Spektrum herstellen.

Satz 4.15. *Sei $T \in \mathcal{L}(X)$. Dann gilt*

$$\sigma_e(T) \subset W_e(T).$$

Beweis. Sei $\lambda \in \sigma_e(T)$. Ist $\dim(\mathrm{Kern}(\lambda - T)) = \infty$ oder $\mathrm{Bild}(\lambda - T)$ nicht abgeschlossen, so gibt es in jedem Raum $M \in \mathrm{Cof}(X)$ eine Folge (x_k) von Einheitsvektoren mit $(\lambda - T)x_k \xrightarrow{k} 0$ (Exercise 1.6.2.3 in [Dal]). Nach dem Hahn-Banach existieren Einheitsvektoren $x_k^* \in X'$ mit $\langle x_k, x_k^*\rangle = 1$ für alle k. Wegen

$$|\langle Tx_k, x_k^*\rangle - \lambda| = |\langle (T - \lambda)x_k, x_k^*\rangle| \leq \|(T - \lambda)x_k\| \xrightarrow{k} 0$$

folgt mit Proposition 4.7, dass $\lambda \in W_e(T)$ ist.
Also dürfen wir annehmen, dass $\dim(\mathrm{Kern}(T - \lambda)) < \infty$ ist und dass $\mathrm{Bild}(\lambda - T) \subset X$ abgeschlossen ist. Dann ist der Raum

$$\mathrm{Kern}(\lambda - T^*) = \mathrm{Bild}(\lambda - T)^\perp = (X/\mathrm{Bild}(\lambda - T))'$$

unendlich dimensional. Seien $u_1^*, ..., u_n^* \in X'$ Einheitsvektoren und sei $F \subset X'$ der von diesen Vektoren aufgespannte Teilraum.
Wegen $\dim(\mathrm{Kern}(\lambda - T^*)) > \dim(F)$ gibt es nach [K] (S.199) einen Vektor $v^* \in \mathrm{Kern}(\lambda - T^*)$ mit $\|v^*\| = 1 = \mathrm{dist}(v^*, F)$. Als endlich dimensionaler Teilraum $F \subset X'$ ist F

schwach* abgeschlossen. Also gibt es bis auf isometrische Isomorphie

$$({}^{\perp}F)' \cong X'/({}^{\perp}F)^{\perp} = X'/F.$$

Wähle $\delta > 0$ mit $\frac{1}{1-\delta} < 1+\epsilon$. Zu δ gibt es einen Einheitsvektor $v_\delta \in {}^{\perp}F$ mit

$$\langle v_\delta, v^* \rangle = \langle v_\delta, v^* + F \rangle > 1 - \delta.$$

Dann ist $v = v_\delta / \langle v_\delta, v^* \rangle \in {}^{\perp}F$ ein Vektor mit $\langle v, v^* \rangle = 1$ und

$$\|v\| = \frac{1}{\langle v_\delta, v^* \rangle} < 1 + \epsilon.$$

Damit folgt

$$\langle \frac{v}{\|v\|}, v^* \rangle = \frac{1}{\|v\|} \geq \frac{1}{1+\epsilon} \geq 1 - \epsilon.$$

Nach dem Satz von Bishop-Phelps-Bollobas (4.5) existieren $w \in X$, $w^* \in X'$ mit $\|w\| = \|w^*\| = 1 = \langle w, w^* \rangle$, $\|w - \frac{v}{\|v\|}\| < 2\sqrt{\epsilon}$ und $\|w^* - v^*\| \leq 2\sqrt{\epsilon}$.
Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
|\langle Tw, w^* \rangle - \lambda| &\leq |\langle T(w - \frac{v}{\|v\|}), w^* \rangle| + |\langle \frac{Tv}{\|v\|}, w^* - v^* \rangle| + |\langle \frac{Tv}{\|v\|}, v^* \rangle - \lambda| \\
&\leq 2\|T\|\sqrt{\epsilon} + 2\|T\|\sqrt{\epsilon} + |\langle \frac{v}{\|v\|}, \lambda v^* \rangle - \lambda| \\
&\leq 4\|T\|\sqrt{\epsilon} + |\lambda| |\frac{1}{\|v\|} - 1| \\
&\leq 4\|T\|\sqrt{\epsilon} + \epsilon|\lambda|.
\end{aligned}$$

Ausserdem gilt da $\|u_i^*\| = 1$ für $i = 1, ..., n$ mit der Standardabschätzung

$$|\langle w, u_i^* \rangle| = |\langle w - v, u_i^* \rangle| \leq \|w - v\| \leq \|w - \frac{v}{\|v\|}\| + \|\frac{v}{\|v\|} - v\| < 2\sqrt{\epsilon} + \epsilon$$

für alle $i = 1, ..., n$. Auf diese Weise erhalten wir Netze $(w_\alpha)_{\alpha \in A}$ in X und $(w_\alpha^*)_{\alpha \in A}$ in X', die die Bedingungen aus der Definition von $W_e(T)$ erfüllen. Also gilt $\sigma_e(T) \subset W_e(T)$. □

In Hilberträumen haben wir $W_e(T)$ über Folgen definiert. Dieses Konzept, lässt sich auf reflexive Banachräume übertragen. Wir orientieren uns an [FHH] und betrachten folgende Definitionen.

Definition 4.16. Sei X ein Banachraum.

(a) Eine Folge $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in X heißt Schauder-Basis, wenn für jedes $x \in X$ eine eindeutige

Folge von Zahlen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ existiert mit

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i.$$

(b) Eine Folge $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ nennt man Basisfolge, wenn $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Schauder-Basis von $\overline{\operatorname{span}}\{e_i; i \in \mathbb{N}\}$ ist.

In [FHH] wird beschrieben, dass es zu einer Schauder-Basis $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in X die sogenannten zu $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in X' assoziierten biorthogonalen Funktionale $(e_i^*)_{i\in\mathbb{N}}$ gibt, die insbesondere $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ erfüllen. In dieser Situation nennen wir $\{(e_i, e_i^*); i \in \mathbb{N}\}$ eine biorthogonale Schauder Basis von X.

Definition 4.17. Sei X ein Banachraum. Sei $\{(e_i, e_i^*); i \in \mathbb{N}\}$ eine biorthogonale Schauder-Basis von X. Dann nennen wir $\{(e_i, e_i^*); i \in \mathbb{N}\}$ schrumpfend, falls $\overline{\operatorname{span}}\{e_i^*;\ i \in \mathbb{N}\} = X'$.

Lemma 4.18. *Sei X ein reflexiver Banachraum. Dann ist jede Basisfolge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\|e_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine schwache Nullfolge.*

Beweis. Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, dass $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Schauder-Basis von X ist. Sonst ersetze man X durch $\overline{\operatorname{span}}\{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ und beachte, dass dieser Raum wieder reflexiv ist. Sei also $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Schauder-Basis des reflexiven Banachraumes X mit $\|e_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und sei $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X' mit $\langle e_m, e_n^*\rangle = \delta_{n,m}$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Man kann zeigen (§ 1.b in [LT]), dass $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Basisfolge in X' ist. Ist X reflexiv, so ist

$$\overline{\operatorname{span}}\{e_n^*; n \in \mathbb{N}\} = X',$$

denn sonst gäbe es ein $x \in X \setminus \{0\}$ mit $\langle x, e_n^*\rangle = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies ist wegen $x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n^*\rangle e_n$ nicht möglich. Also ist für reflexive Räume X die Folge $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Schauder-Basis von X'. Sei $x^* \in X'$ beliebig. Dann hat x^* die Form

$$x^* = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e_n^*,$$

wobei die Reihe norm-konvergent ist. Wegen $\|e_n^*\| \geq |\langle e_n, e_n^*\rangle| = 1$ folgt

$$x^*(e_n) = \alpha_n \xrightarrow{n} 0.$$

Also ist (e_n) eine schwache Nullfolge. □

Nach einem Resultat von Banach (siehe [FHH], Seite 169 Prop 6.13) gilt

Proposition 4.19. *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem Banachraum X mit $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Basisfolge in X genau dann, wenn eine Konstante $k > 0$*

existiert, so dass für alle $r, m \in \mathbb{N}$ mit $r < m$ und $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{C}$

$$\|\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i\| \leq k \|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\|$$

gilt.

Zur Vorbereitung benötigen wir außerdem folgende Lemmata, wobei wir das erste aus [MV1], Lemma 1 zitieren.

Lemma 4.20. *Seien X ein Banachraum, $E \subset X$ ein endlichdimensionaler Teilraum und $\epsilon > 0$. Dann gibt es einen Unterraum $Y \in Cof(X)$, so dass*

$$\|e + y\| \geq (1 - \epsilon) \max\{\|e\|, \frac{\|y\|}{2}\}$$

für alle $e \in E$ und $y \in Y$.

Lemma 4.21. *Seien X ein Banachraum, $T \in \mathcal{L}(X)$, $\lambda \in W_e(T)$ und $0 < \epsilon_n < 1$, $\epsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Dann gibt es Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X, $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ in X' mit $\langle Tx_n, x_n^* \rangle \to \lambda$ und $\|x_n\| = 1 = \|x_n^*\| = \langle x_n, x_n^* \rangle$ für $n \in \mathbb{N}$ und so, dass für alle $m, r \in \mathbb{N}$ mit $r < m$ und für alle komplexen Zahlen $\alpha_1, ..., \alpha_m$ gilt*

$$\|\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i\| \leq (1 - \epsilon_r)^{-1} \|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\|.$$

Insbesondere ist (x_n) eine Basisfolge.

Beweis. Wir setzen $L_0 = X$. Da $\lambda \in W_e(T)$ gibt es ein $x_1 \in X$, $x_1^* \in X'$ so, dass $\|x_1\| = 1 = \|x_1^*\| = \langle x_1, x_1^* \rangle$ und $|\langle Tx_1, x_1^* \rangle - \lambda| < 1$ gelten.
Wir nehmen als Induktionsvoraussetzung an, dass zu festem $k \in \mathbb{N}$ Elemente $x_1, ..., x_k \in X$ und $x_1^*, ..., x_k^* \subset X'$, sowie $L_0, ..., L_{k-1} \in \mathrm{Cof}(X)$ gewählt sind. Wir setzen $F_k = \mathrm{span}(x_1, ..., x_k)$. Nach Lemma 4.20 gibt es ein $M_k \in \mathrm{Cof}(X)$ mit

$$\|f + m\| \geq (1 - \epsilon_k) \max\{\|f\|, \frac{\|m\|}{2}\}$$

für alle $f \in F_k$ und $m \in M_k$. Sei $L_k = L_{k-1} \cap M_k$. Dann ist $L_k \subset L_{k-1}$ und da der Schnitt endlich kodimensionaler Räume ebenfalls endlich kodimensional ist, folgt $L_k \in \mathrm{Cof}(X)$. Nach Proposition 4.7 gibt es $x_{k+1} \in L_k$ und $x_{k+1}^* \in X'$ so, dass

$$\|x_{k+1}\| = \|x_{k+1}^*\| = 1 = \langle x_{k+1}, x_{k+1}^* \rangle \text{ und } |\langle Tx_{k+1}, x_{k+1}^* \rangle - \lambda| < \frac{1}{k+1}.$$

Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ und $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \subset X'$ Folgen mit den oben konstruierten Eigenschaften. Dann ist $\lim_{n\to\infty} \langle Tx_n, x_n^* \rangle = \lambda$. Seien $r, m \in \mathbb{N}$ mit $r < m$ und $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{C}$. Dann ist nach Konstruktion $\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i \in F_r$ und $\sum_{i=r+1}^m \alpha_i x_i \in M_r$. Damit folgt

$$\| \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i \| \leq (1-\epsilon_r)^{-1} \| \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \|.$$

Da $\sup_{k\in\mathbb{N}} (1-\epsilon_k)^{-1} < \infty$, ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Proposition 4.19 eine Basisfolge.

□

In folgendem Satz fassen wir zusammen, was wir oben gezeigt haben.

Satz 4.22. *Sei X ein reflexiver Banachraum und sei $T \in \mathcal{L}(X)$. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $\lambda \in W_e(T)$.

(b) Es existieren Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ und $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \subset X'$ so, dass

$$\|x_n\| = \|x_n^*\| = \langle x_n, x_n^* \rangle = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $x_n \to 0$ schwach und $\langle Tx_n, x_n^* \rangle \to \lambda$.

(c) Es gibt eine Basisfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ und eine Folge $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \subset X'$ mit

$$\|x_n\| = \|x_n^*\| = \langle x_n, x_n^* \rangle = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\langle Tx_n, x_n^* \rangle \to \lambda$.

Beweis. b)⇒a): Klar, nach Definition von $W_e(T)$.
c)⇒b): Nach Lemma 4.18 ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine schwache Nullfolge, womit die Behauptung folgt.
a)⇒c): Folgt aus Lemma 4.21. □

Die Reflexivität von X wurde dabei nur für die Implikation c)⇒b) benötigt. Auf reflexiven Banachräumen kann man also das wesentliche numerische Bild mit Hilfe von Folgen statt Netzen definieren.

5 Literaturverzeichnis

[BaM] M. Barraa, V. Muller: On the essential numerical range, Acta Sci. Math. (Szeged) 71 (2005), 285-298.

[BD1] F. F. Bonsall and J. Duncan, *Numerical Ranges of Operators on Normed Spaces and of Elements of Normed Algebras*, Cambridge University Press, 1971.

[BD2] F. F. Bonsall and J. Duncan, *Numerical Ranges II*, Cambridge University Press, 1973.

[Car] N.L. Carothes: *A short course on Banach space theory*, London Math. Soc. Student Texts 64, Cambridge University Press, 2005 .

[Dal] H.G. Dales, P. Aiena, J. Eschmeier, K. Laursen, G.A. Willis, *Introduction to Banach algebras, operators, and harmonic analysis*, London Mathematical Society Student Texts 57, Cambridge University Press, 2003.

[FHH] M. Fabian, P. Habala, P. Hajek, V. Montesinos, J. Pelant, V. Zizler, *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, CMS Books in Mathematics, Springer, New York, 2001.

[FSW] P. A. Fillmore, J. G. Stampfli, and J. P. Williamsm, *On the essential numerical range, the essential spectrum, and a problem of Halmos*, Acta Sci. Math. (Szeged) 33 (1972), 179–192.

[HAL] P.R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 1982.

[LT] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach spaces I: Sequence spaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer, Berlin, 2013

[MV1] V. Müller, *Local behaviour of the polynomial calculus of operators*, J. reine angew. Math. 430 (1992), 61-68.

[MV2] V. Müller, *Spectral theory of linear operators and spectral systems in Banach algebras*, J. reine angew. Math. 430 (1992), 61-68.

[SW] J. Stoer and C. Witzgall, *Convexity and optimization in finite dimensions*, Springer, Berlin, 1970.

[DW] D. Werner, *Funktionalanalysis*, Springer, Berlin, 2011.