Positivitätsbedingungen funktionaler Hilberträume und Anwendungen in der mehrdimensionalen Operatorentheorie

Diplomarbeit

vorgelegt

der Fachrichtung Mathematik
der Universität des Saarlandes

von

Christoph Barbian

Saarbrücken 2001

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Eine der großen Leistungen der Funktionalanalysis des letzten Jahrhunderts ist der Beweis der Existenz der minimalen unitären bzw. isometrischen Dilatation von Kontraktionen durch Sz.-Nagy ([**SNF70**], Kapitel 1).

Dieser Satz hat eine Vielzahl von Konsequenzen, etwa folgt unmittelbar die Gültigkeit der bekannten von Neumannschen Ungleichung:

Sei T eine Kontraktion über einem Hilbertraum H und p ein Polynom. Dann gilt

$$\|p(T)\| \leq \|p\|_{\infty,\mathbb{D}},$$

wobei $\mathbb{D}$ die offene Kreisscheibe in $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Eng verbunden mit der Existenz von isometrischen Dilatationen ist das Commutant-Lifting-Theorem, das es gestattet, jeden Operator, der zwei Kontraktionen vertauscht, normerhaltend zu einem Operator fortzusetzen, der die minimalen isometrischen Dilatationen dieser Kontraktionen vertauscht.

Eine mögliche Anwendung des Commutant-Lifting-Theorems ist zum Beispiel ein einfacher Beweis des klassischen Interpolationssatzes von Nevanlinna und Pick:

Gegeben seien endlich viele Punkte $z_1, \ldots, z_n$ in der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ von $\mathbb{C}$ sowie komplexe Werte $w_1, \ldots, w_n$. Es existiert dann und nur dann eine durch 1 beschränkte holomorphe Funktion ϕ auf $\mathbb{D}$, die das Interpolationsproblem

$$f(z_i) = w_i \text{ für alle } i = 1, \ldots, n$$

löst, wenn die Matrix

$$\left(\frac{1 - w_i \overline{w_j}}{1 - z_i \overline{z_j}} \right)_{i,j=1}^{n}$$

positiv semidefinit ist.

Nun stellt sich die Frage der Verallgemeinerung dieser Ergebnisse auf den mehrdimensionalen Fall, und zunächst benötigt man eine adäquate Verallgemeinerung des Kontraktionsbegriffes. Eine Möglichkeit besteht darin, von einem Tupel vertauschender Kontraktionen $T \in L(H)^n$ auszugehen. Eine Dilatation wäre dann ein Tupel $U \in L(K)^n$ vertauschender isometrischer bzw. unitärer Abbildungen auf einem größeren Hilbertraum K, so daß die Gleichheit

$$T^\gamma = P_H U^\gamma{}_{|H} \quad (\gamma \in \mathbb{N}_0^n)$$

erfüllt ist. Ando zeigte für den Fall $n = 2$ die Existenz minimaler isometrischer bzw. unitärer Dilatationen ([**And63**]). Von Parrott ([**Par70**]) stammt jedoch ein Gegenbeispiel, das zeigt, daß für $n \geq 3$ im allgemeinen keine unitären Dilatationen eines vertauschenden Tupels von Kontraktionen mehr existieren. Außerdem wurde von Varopoulos ([**Var74**]) gezeigt, daß für hinreichend großes n die von Neumannsche Ungleichung für ein Tupel von vertauschenden Kontraktionen sowohl über dem Polyzylinder als auch über der Kugel falsch ist.

Einen Ausweg aus diesem Dilemma bietet die Einführung eines stärkeren Kontraktivitätsbegriffes:

Ein vertauschendes Tupel $T \in L(H)^n$ heißt sphärische Kontraktion, falls die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} T_i^* T_i \leq 1_H$$

gilt.

Natürlich ist damit jede sphärische Kontraktion ein Tupel von Kontraktionen. Von Müller und Vasilescu ([**MV93**]) stammt nun ein Modellsatz, der es gestattet, jede sphärische Kontraktion $T \in L(H)^n$, die eine zusätzliche C_0.-Bedingung erfüllt, als Einschränkung des Rückwärtsshiftes auf einen invarianten Teilraum in einem geeigneten Raum H-wertiger holomorpher Abbildungen darzustellen:

Ist H_n^2 der funktionale Hilbertraum über der Einheitskugel $\mathbb{B}_n$ im $\mathbb{C}^n$, dessen reproduzierender Kern durch

$$\kappa_n(z, w) = \frac{1}{1 - \langle z, w \rangle}$$

gegeben ist, und bezeichnet M_{z_i} die Multiplikationen mit den Koordinatenfunktionen auf H_n^2, dann existiert eine Isometrie $V : H \to H_n^2 \otimes H$, so daß die Identität

$$VT_i = (M_{z_i}^* \otimes 1_H)V \quad (1 \leq i \leq n)$$

gilt.

In neuerer Zeit wurden auch spezielle Commutant-Lifting-Sätze bewiesen, die es erlauben, einen Operator $X \in L(\mathcal{N})$, der auf einem für alle $M_{z_i}^* \otimes 1_H$ invarianten Teilraum $\mathcal{N}$ von $H_n^2 \otimes H$ definiert ist und dessen Adjungierte die Operatoren

$$(M_{z_i}^* \otimes 1_H)_{|\mathcal{N}} \quad (1 \leq i \leq n)$$

vertauscht, normerhaltend zu einem Operator Y auf $H_n^2 \otimes H$ zu liften, der die Operatoren $M_{z_i}^* \otimes 1_H$ vertauscht.

Kombiniert man nun den obigen Modellsatz und das spezielle Commutant-Lifting-Ergebnis, erhält man eine Art von Commutant-Lifting für sphärische Kontraktionen, die die C_0.-Bedingung erfüllen, wobei das Tupel $M_z \otimes 1_H$ an die Stelle der isometrischen Dilatation tritt, also eine Verallgemeinerung des eindimensionalen Commutant-Lifting-Theorems, die durchaus von praktischem Nutzen ist.

Von Varopoulos wurde ebenfalls gezeigt, daß für großes n die von Neumannsche Ungleichung nicht nur für Tupel von Kontraktionen, sondern auch für sphärische Kontraktionen ihre Gültigkeit über der Einheitskugel verliert. Es liegt nun nahe, eine Norm zu definieren, die eine von Neumannsche Ungleichung erlaubt:

Für eine auf $\mathbb{B}_n$ holomorphe Funktion f und einen beliebigen unendlichdimensionalen separablen Hilbertraum sei die duale Schurnorm durch

$$\|f\|_{S^*} = \sup\{\|f(rT^*)\| \ ; \ 0 < r < 1 \ , \ T \in L(H)^n \text{ sphärische Kontraktion } \}$$

definiert. Man zeigt, daß diese Definition unabhängig von der Wahl von H ist. Der duale Schurraum besteht nun definitionsgemäß aus den holomorphen Funktionen, deren duale Schurnorm endlich ist.

Von Drury ([**Dru78**]) wurde erstmals eine Verbindung zwischen dem dualen Schurraum und dem Multiplierraum von H^2_n hergestellt, und durch Eschmeier und Putinar ([**EP**]) wurde ihre Übereinstimmung bewiesen.

Ziel dieser Arbeit ist es nun unter anderem, diese Resultate für andere funktionale Hilberträume als H^2_n zu etablieren. Von zentraler Bedeutung ist dabei die Erkenntnis, daß sich die Bedingung

$$1_H - \sum_{i=1}^n T_i^* T_i \geq 0,$$

die eine sphärische Kontraktion auszeichnet, sehr einfach durch den reproduzierenden Kern von H^2_n beschreiben läßt, denn bezeichnet

$$\gamma_n(z,w) = \kappa_n(z, \overline{w}),$$

und L_{T^*} bzw. R_T die Tupel der Links- bzw. Rechtsmultiplikationen, dann gilt

$$1_H - \sum_{i=1}^n T_i^* T_i = \frac{1}{\gamma_n}(L_{T^*}, R_T)(1_H),$$

wobei die rechte Seite auch dann Sinn ergibt, wenn wir γ_n etwa durch die Abbildung

$$(z,w) \mapsto K(z, \overline{w})$$

mit geeigneten allgemeineren Kernen K ersetzen.

Da in dieser Arbeit durchgehend alle Ergebnisse vektorwertig formuliert werden, geben wir im ersten Kapitel eine Zusammenfassung aller benötigten Sätze aus der Theorie funktionaler Hilberträume von $\mathcal{E}$-wertigen Funktionen und ihrer Multiplierräume (wobei wir uns auf den Fall beschränken, daß $\mathcal{E}$ ein Hilbertraum ist).

Das zweite Kapitel widmet sich einer allgemeinen angepaßten Definition eines (dualen) Schurraumes.

Im dritten Kapitel stehen solche funktionalen Hilberträume im Vordergrund, deren reproduzierender Kern K nullstellenfrei ist und die Bedingung

$$1 - \frac{1}{K} \quad \text{positiv definit}$$

erfüllt. Solche Räume bezeichnen wir als Nevanlinna-Pick-Räume und ihre Kerne als Nevanlinna-Pick-Kerne. Als Standardbeispiel dient der bereits oben betrachtete Kern κ_n.

Das erste Hauptresultat der Arbeit ist Satz 3.12, der für eine große Klasse von Nevanlinna-Pick-Räumen, die sich unter anderem dadurch auszeichnen, daß das

Inverse ihres reproduzierenden Kernes ein Polynom in $z, \overline{w}$ ist, die Gleichheit von Multiplierraum und dualem Schurraum etabliert.

Im vierten Kapitel wird die Struktur von solchen funktionalen Hilberträumen untersucht, deren Kerne Potenzen von Nevanlinna-Pick-Kernen sind (und damit selbst nicht mehr notwendig Nevanlinna-Pick-Kerne), da solche Räume in natürlicher Weise auftreten, wie etwa der aus der Funktionentheorie bekannte Hardyraum mit reproduzierendem Kern κ_n^n. Das zweite Hauptergebnis dieser Arbeit ist dann ein Commutant-Lifting-Resultat (Satz 4.10) für diese Klasse funktionaler Hilberträume, das als Spezialfall sowohl das Commutant-Lifting-Ergebnis von Eschmeier und Putinar ([**EP**]) als auch dasjenige von Ambrozie und Timotin ([**ATa**]) enthält.

Als Folgerung aus dem Commutant-Lifting-Theorem erhält man dann sofort eine Lösung des Nevanlinna-Pick-Problems. Durch Sarason wurde der klassische Satz von Nevanlinna und Pick erstmals in den Kontext funktionaler Hilberträume gerückt: Und zwar versteht man den Raum $H^\infty(\mathbb{D})$, innerhalb dessen man interpolieren möchte, als Multiplieralgebra des Hardyraumes H^2 auf der Kreisschreibe in $\mathbb{C}$ und überführt die Fragestellung in das Problem, Multiplier des funktionalen Hilbertraumes, der aus den Einschränkungen der Elemente von H^2 auf eine Teilmenge Y von $\mathbb{D}$ besteht, normerhaltend zu Multipliern des ganzen Raumes H^2 fortzusetzen. Dies ist jedoch leicht zu bewältigen, wenn man ein Commutant-Lifting-Theorem wie Satz 4.10 zur Verfügung hat. Wir zeigen in Kapitel 4, Abschnitt 3, daß in Nevanlinna-Pick-Räumen diese Form der Nevanlinna-Pick-Interpolation möglich ist.

Abschließend wird in Kapitel 4 eine Variante des Satzes von Beurling-Lax-Halmos bewiesen, wie er spezieller in [**GRS**] gezeigt wurde. Wir beantworten dabei eine in [**MT00**] aufgeworfene, offene Frage.

Kapitel 5 widmet sich dann der Verallgemeinerung des Modellsatzes, wie er oben beschrieben wurde. Unter Benutzung der Tatsache, daß sich jeder Nevanlinna-Pick-Raum in kanonischer Weise mit einem Teilraum des Raumes H_n^2 identifizieren läßt, folgt unser Modellsatz bereits aus dem Ergebnis von Müller und Vasilescu und stellt insbesondere eine Verallgemeinerung des in [**Pot96**] im Kontext positiver regulärer Polynome bewiesenen Modellsatzes dar.

Das sechste und letzte Kapitel geht schließlich auf die in [**Pot96**] betrachtete Situation ein, und reformuliert die in der vorliegenden Arbeit bewiesenen Resultate in der dort eingeführten Notation. Insbesondere erhalten wir ein Commutant-Lifting-Ergebnis für die Klasse der (P, m)-positiven Operatoren, die in [**Pot96**] als Verallgemeinerung der sphärischen Kontraktionen vorgeschlagen wurden.

Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr. J. Eschmeier für das interessante Thema und die geduldige Betreuung. Mein Dank gilt auch Herrn Dipl. Math. Michael Didas für viele fruchtbare fachliche Diskussionen sowie Frau Ute Staemmler für das Korrekturlesen meiner Arbeit.

Schließlich danke ich meinen Eltern, die mich während des letzten Jahres sowohl moralisch als auch finanziell unterstützt haben.

Notationen

An dieser Stelle erklären wir einige Notationen und Symbole, die durchgehend in der vorliegenden Arbeit verwendet werden.

- Alle vorkommenden Vektorräume haben die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als Grundkörper. Für zwei normierte Räume $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ bezeichnet $L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ den Raum aller stetigen linearen Abbildungen von $\mathcal{X}$ nach $\mathcal{Y}$. Abkürzend verwenden wir auch $L(\mathcal{X})$ anstatt $L(\mathcal{X}, \mathcal{X})$. Für eine Menge $M \subset \mathcal{X}$ sei $\bigvee M$ die abgeschlossene lineare Hülle von M in $\mathcal{X}$. Ferner sind Teilräume von normierten Räumen grundsätzlich per Definition abgeschlossen. Für einen normierten Raum $\mathcal{X}$ sei $1_{\mathcal{X}}$ immer die identische Abbildung von $\mathcal{X}$ nach $\mathcal{X}$. Kern und Bild einer linearen Abbildung T bezeichnen wir mit *ker* T und *ran* T.

- Wir bezeichnen mit
  - $\otimes_\pi$ das π-Tensorprodukt
  - $\otimes_2$ das Hilbertraumtensorprodukt
  - $\hat{\otimes}_2, \hat{\otimes}_\pi$ die vervollständigten Tensorprodukte.

  Abkürzend schreiben wir $H \otimes G$ für das vervollständigte Hilbertraumtensorprodukt von zwei Hilberträumen H und G, also $H \otimes G = H \hat{\otimes}_2 G$. Falls $H_0 \subset H$ und $G_0 \subset G$ zwei abgeschlossene Teilräume sind, so ist $H_0 \otimes G_0$ der Abschluß des algebraischen Tensorproduktes von H_0 und G_0 in der Topologie von $H \otimes G$ (äquivalent: die Vervollständigung des algebraischen Tensorproduktes $H_0 \otimes G_0$).

- In einem Hilbertraum H steht P_M immer für die Orthogonalprojektion auf einen abgeschlossenen Teilraum M von H. Für eine Teilmenge M eines Hilbertraumes H ist $M^\perp$ das orthogonale Komplement von M in H.

- Es bezeichnet $\mathbb{D}$ die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{B}_n$ die offene Einheitskugel in $\mathbb{C}^n$.

- Für eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}^n$ ist $\mathcal{O}(U)$ die Menge der holomorphen Funktionen auf U. Ist $\mathcal{X}$ ein Banachraum, bezeichnet $\mathcal{O}(U, \mathcal{X})$ die Menge der $\mathcal{X}$-wertigen holomorphen Funktionen auf U.

- Ferner ist für $U \subset \mathbb{C}^N$ die Menge $\tilde{U}$ definiert als
$$\tilde{U} = \{\overline{z} \; ; \; z \in U\}.$$
Für eine Abbildung $f : U \to \mathbb{C}$ sei
$$\tilde{f} : \tilde{U} \to \mathbb{C} \; , \; \tilde{f}(z) = \overline{f(\overline{z})}.$$
Für eine Abbildung $f : U \to L(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$ ($\mathcal{E}, \mathcal{E}_*$ Hilberträume) sei
$$\tilde{f} : \tilde{U} \to L(\mathcal{E}_*, \mathcal{E}) \; , \; \tilde{f}(z) = f(\overline{z})^*.$$
Somit ist f analytisch genau dann, wenn $\tilde{f}$ es ist.

- Für einen Multiindex $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ schreiben wir
$$|\gamma| = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \quad \text{und} \quad \gamma! = \gamma_1! \cdot \ldots \cdot \gamma_n!$$
sowie für $z \in \mathbb{C}^n$
$$z^\gamma = z_1^{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{\gamma_n}.$$

Für eine vollständige Auflistung der in der Arbeit verwendeten Symbole verweisen wir auf das Symbolverzeichnis am Ende der Arbeit.

KAPITEL 1

Hilberträume vektorwertiger Funktionen

1. Grundlagen

Im folgenden bezeichne X eine Menge und $\mathcal{E}$ einen Hilbertraum.

Definition 1.1. *Ein Hilbertraum $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}^X$ heißt funktional, falls für jedes $\lambda \in X$ die Punktauswertung*

$$\delta_\lambda : \mathcal{H} \to \mathcal{E} \ , \ f \mapsto f(\lambda)$$

stetig ist.

Satz 1.2. *Sei $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}^X$ ein Hilbertraum. Dann sind äquivalent:*

(i) $\mathcal{H}$ ist funktional.
(ii) Es existiert eine Abbildung $K : X \times X \to L(\mathcal{E})$ mit folgenden Eigenschaften:
- *Für $x \in \mathcal{E}$ und $\mu \in X$ liegt die Abbildung $\lambda \mapsto K(\lambda,\mu)x$ in $\mathcal{H}$.*
- *Es ist $\langle f, K(\cdot,\mu)x\rangle = \langle f(\mu), x\rangle$ für alle $x \in \mathcal{E}$, $\mu \in X$ und $f \in \mathcal{H}$.*

In diesem Fall ist K eindeutig bestimmt und heißt reproduzierender Kern von $\mathcal{H}$.

beweis. Es gelte (i). Für $\mu \in X$ sei δ_μ die stetige lineare Abbildung

$$\delta_\mu : \mathcal{H} \to \mathcal{E} \ , \ f \mapsto f(\mu).$$

Dann definiert

$$K : X \times X \to L(\mathcal{E}) \ , \ (\lambda,\mu) \mapsto \delta_\lambda \delta_\mu^*$$

eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

- Für $x \in \mathcal{E}$ und $\mu \in X$ ist $K(\cdot,\mu)x = \delta_\mu^* x \in \mathcal{H}$.
- Für $x \in \mathcal{E}$ und $\mu \in X$ ist $\langle f, K(\cdot,\mu)x\rangle = \langle \delta_\mu f, x\rangle = \langle f(\mu), x\rangle$.

Also ist K wie gewünscht.
Es gelte nun (ii). Sei $\mu \in X$. Mit

$$\begin{aligned} \|K(\cdot,\mu)x\|^2 &= \langle K(\mu,\mu)x, x\rangle \\ &\leq \|K(\mu,\mu)\| \, \|x\|^2 \quad (x \in \mathcal{E}) \end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned} \|\delta_\mu(f)\| &= \sup_{x \in \mathcal{E}, \|x\| \leq 1} |\langle f(\mu), x\rangle| \\ &= \sup_{x \in \mathcal{E}, \|x\| \leq 1} |\langle f, K(\cdot,\mu)x\rangle| \\ &\leq \|f\| \, \|K(\mu,\mu)\|^{\frac{1}{2}} \quad (f \in \mathcal{H}). \end{aligned}$$

Also ist δ_μ stetig mit $\|\delta_\mu\| \leq \|K(\mu,\mu)\|^{\frac{1}{2}}$, und $\mathcal{H}$ ist funktional.

Es bleibt die Eindeutigkeitsaussage zu zeigen: Seien also $K, \tilde{K}$ wie oben. Dann gilt für $f \in \mathcal{H}, \mu \in X, x \in \mathcal{E}$

$$\langle f, K(\cdot,\mu)x\rangle = \langle f(\mu), x\rangle = \langle f, \tilde{K}(\cdot,\mu), x\rangle$$

und somit $K(\cdot,\mu)x = \tilde{K}(\cdot,\mu)x \quad (\mu \in X, x \in \mathcal{E})$, also $K = \tilde{K}$. □

Wir vereinbaren ferner folgende Schreibweise: Für $x \in \mathcal{E}$ und $\mu \in X$ bezeichne $K_{\mu,x} \in \mathcal{H}$ die Abbildung $X \to \mathcal{E}\ ,\ \lambda \mapsto K(\lambda,\mu)x$. Das folgende Lemma faßt einige wichtige Eigenschaften funktionaler Hilberträume und ihrer reproduzierenden Kerne zusammen.

LEMMA 1.3. *Sei $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}^X$ ein funktionaler Hilbertraum mit reproduzierendem Kern K und Punktauswertung δ_μ $(\mu \in X)$.*

(a) Seien $\lambda, \mu \in X\ ,\ x, y \in \mathcal{E}$. Es gilt $K(\lambda,\mu) = \delta_\lambda \delta_\mu^*$. Insbesondere ist $K(\lambda,\lambda)$ ein positiver Operator, und es gilt

$$\begin{aligned}
K(\lambda,\mu)^* &= K(\mu,\lambda)\\
\|K(\lambda,\mu)\| &\leq \|\delta_\lambda\|\ \|\delta_\mu\|\\
\|K(\lambda,\lambda)\| &= \|\delta_\lambda\|^2\\
\|K(\lambda,\mu)\|^2 &\leq \|K(\lambda,\lambda)\|\ \|K(\mu,\mu)\|\\
|\langle K(\lambda,\mu)x, y\rangle|^2 &\leq \langle K(\mu,\mu)x, x\rangle\langle K(\lambda,\lambda)y, y\rangle\\
\|K_{\mu,x}\| &\leq \|\delta_\mu\|\ \|x\|.
\end{aligned}$$

(b) Die Menge $\{K_{\mu,x}\ ;\ \mu \in X, x \in \mathcal{E}\}$ ist total in $\mathcal{H}$.
(c) Es ist $\mathcal{H} = \bigvee_{\mu \in X} ran(\delta_\mu^*)$.
(d) Falls X ein topologischer Raum und $X, \mathcal{E}$ beide separabel sind und für alle $x \in X$ die Abbildung $X \to \mathcal{H}\ ,\ \mu \mapsto K_{\mu,x}$ stetig ist, ist $\mathcal{H}$ separabel.
(e) Sei $X \subset \mathbb{C}^n$ offen. Dann sind äquivalent:
  (i) $\mathcal{H} \subset \mathcal{O}(X,\mathcal{E})$.
  (ii) Die Abbildung $\tilde{c} : X \to L(\mathcal{H},\mathcal{E})\ ,\ \lambda \mapsto \delta_\lambda$ ist holomorph.
  (iii) Die Abbildung $C : X \times \tilde{X} \to L(\mathcal{E})\ ,\ C(z,w) = K(z,\overline{w})$ ist holomorph.

BEWEIS.

(a) Folgt aus dem Beweis von Satz 1.2.
(b) Sei $f \in \mathcal{H}$ mit $\langle f, K_{\mu,x}\rangle = 0$ für alle $\mu \in X\ ,\ x \in \mathcal{E}$. Dann ist

$$\langle f(\mu), x\rangle = \langle f, K_{\mu,x}\rangle = 0 \quad (\mu \in X\ ,\ x \in \mathcal{E}),$$

also $f = 0$.
(c) Es ist $LH(\bigcup(ran\ \delta_\mu^*\ ;\ \mu \in X)) = LH\{K(\cdot,\mu)x\ ;\ \mu \in X\ ,\ x \in E\}$ dicht in $\mathcal{H}$.
(d) Seien $X_0 \subset X, \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$ abzählbare dichte Teilmengen. Wir zeigen zunächst: Für alle $\mu \in X\ ,\ x \in \mathcal{E}\ ,\ \epsilon > 0$ existieren $\mu_0 \in X_0\ ,\ x_0 \in \mathcal{E}_0$ mit $\|K_{\mu,x} - K_{\mu_0,x_0}\| < \epsilon$.

Man wähle zuerst $x_0 \in \mathcal{E}_0$ mit $\|x - x_0\| < \frac{\epsilon}{2\|\delta_\mu\|+1}$ und dann $\mu_0 \in X_0$ mit $\|K_{\mu,x_0} - K_{\mu_0,x_0}\| < \frac{\epsilon}{2}$ (Stetigkeit der Abbildung $\mu \mapsto K_{\mu,x_0}$). Dann gilt

$$\|K_{\mu,x} - K_{\mu_0,x_0}\| \leq \|\delta_\mu\| \, \|x - x_0\| + \|K_{\mu,x_0} - K_{\mu_0,x_0}\| < \epsilon.$$

Sei nun $f \in \mathcal{H}$, $\epsilon > 0$. Dann existieren endliche Folgen $(\mu_i)_{i=1}^n$, $(x_i)_{i=1}^n$ mit

$$\|f - \sum_{i=1}^n K_{\mu_i,x_i}\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Für alle i existieren nun $\lambda_i \in X_0$, $y_i \in \mathcal{E}_0$ mit $\|K_{\mu_i,x_i} - K_{\lambda_i,y_i}\| < \frac{\epsilon}{2n}$. Dann gilt

$$\|f - \sum_{i=1}^n K_{\lambda_i,y_i}\| \leq \|f - \sum_{i=1}^n K_{\mu_i,x_i}\| + \sum_{i=1}^n \|K_{\mu_i,x_i} - K_{\lambda_i,y_i}\| < \epsilon.$$

Also ist $\{\sum_{i=1}^n K_{\lambda_i,y_i} \ ; \ n \in \mathbb{N} \ , \ \lambda_i \in X_0 \ , \ y_i \in \mathcal{E}_0\} \subset \mathcal{H}$ dicht und abzählbar.

(e) Es gelte (i). Für festes $f \in \mathcal{H}$ ist offenbar die Abbildung

$$X \to \mathcal{E} \ , \ \lambda \mapsto \tilde{c}(\lambda)f = f(\lambda)$$

analytisch, nach dem Satz von Banach-Steinhaus also auch die Abbildung $\tilde{c}$ selbst, also folgt (ii). Damit ist auch die Abbildung

$$X \times \tilde{X} \to L(\mathcal{E}) \ , \ C(z,w) = c(z)\tilde{c}(w)$$

analytisch. Falls (iii) gilt, so ist

$$LH\{K(\cdot,\mu)x \ ; \ \mu \in X \ , \ x \in \mathcal{E}\} \subset \mathcal{O}(X,\mathcal{E}).$$

Aufgrund der Stetigkeit von K sieht man, daß die Topologie der kompakt gleichmäßigen Konvergenz auf X gröber ist als die Normtopologie auf $\mathcal{H}$. Denn für jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ mit $f_n \longrightarrow f \in \mathcal{H}$ folgt

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{\infty,L} &\leq \|f_n - f\| \sup_{\mu \in L} \|K(\mu,\mu)\|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|f_n - f\| \, \|K\|_{\infty,L\times L}^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0 \quad (L \subset X \text{ kompakt}). \end{aligned}$$

Da $LH\{K(\cdot,\mu)x \ ; \ \mu \in X \ , \ x \in \mathcal{E}\} \subset \mathcal{H}$ dicht liegt, muß schon $\mathcal{H} \subset \mathcal{O}(X,\mathcal{E})$ gelten, was den Ringschluß vervollständigt.

□

Nun führen wir den Begriff der positiven Definitheit $L(\mathcal{E})$-wertiger Abbildungen auf $X \times X$ ein, der in dieser Arbeit eine zentrale Rolle spielt. Wir werden sehen, daß solche positiv definiten Abbildungen genau die reproduzierenden Kerne funktionaler Hilberträume $\mathcal{E}$-wertiger Funktionen auf X sind.

Definition 1.4. *Eine Abbildung $K : X \times X \to L(\mathcal{E})$ heißt positiv definit, falls für alle endlichen Folgen (λ_i) in X, (x_i) in $\mathcal{E}$*

$$\sum_{i,j} \langle K(\lambda_j,\lambda_i)x_i, x_j\rangle \geq 0$$

gilt.

Offensichtlich ist eine Abbildung $K : X \times X \to L(\mathcal{E})$ genau dann positiv definit, wenn für alle Folgen $(\lambda_i)_{i=1}^n$ in X der Operator

$$\begin{pmatrix} K(\lambda_1,\lambda_1) & \cdots & K(\lambda_1,\lambda_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K(\lambda_n,\lambda_1) & \cdots & K(\lambda_n,\lambda_n) \end{pmatrix} \in L(\mathcal{E}^n)$$

positiv ist. Im Fall $\mathcal{E} = \mathbb{C}$ ist eine Abbildung $K : X \times X \to \mathbb{C}$ genau dann positiv definit, falls für alle endlichen Folgen (λ_i) in X die Matrix $(K(\lambda_i,\lambda_j))_{i,j}$ positiv semidefinit ist.

Bemerkung. Für eine positiv definite Abbdildung $K : X \times X \to L(\mathcal{E})$ gilt immer

$$K(\lambda,\mu)^* = K(\mu,\lambda) \quad (\lambda,\mu \in X),$$

denn für $\lambda,\mu \in X$ ist der Operator

$$\begin{pmatrix} K(\lambda,\lambda) & K(\lambda,\mu) \\ K(\mu,\lambda) & K(\mu,\mu) \end{pmatrix} \in L(\mathcal{E} \oplus \mathcal{E})$$

positiv, insbesondere selbstadjungiert, und es gilt

$$\begin{pmatrix} K(\lambda,\lambda) & K(\lambda,\mu) \\ K(\mu,\lambda) & K(\mu,\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K(\lambda,\lambda) & K(\lambda,\mu) \\ K(\mu,\lambda) & K(\mu,\mu) \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} K(\lambda,\lambda)^* & K(\mu,\lambda)^* \\ K(\lambda,\mu)^* & K(\mu,\mu)^* \end{pmatrix},$$

woraus sofort die Behauptung folgt.

Wir zeigen nun, daß reproduzierende Kerne von funktionalen Hilberträumen positiv definit sind.

Satz 1.5. *Sei $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}^X$ ein funktionaler Hilbertraum mit reproduzierendem Kern K. Dann ist K positiv definit.*

beweis. Seien $(\lambda_i) \subset X$, $(x_i) \subset \mathcal{E}$ endliche Folgen. Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \langle K(\lambda_j,\lambda_i)x_i, x_j\rangle &= \sum_{i,j} \langle K_{\lambda_i,x_i}, K_{\lambda_j,x_j}\rangle \\ &= \langle \sum_i K_{\lambda_i,x_i}, \sum_j K_{\lambda_j,x_j}\rangle \\ &= \|\sum_i K_{\lambda_i,x_i}\|^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

□

Umgekehrt gehört zu jeder positiv definiten Abbildung $K : X \times X \to L(\mathcal{E})$ ein eindeutig bestimmter funktionaler Hilbertraum $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}^X$ mit reproduzierendem Kern K, was im skalarwertigen Fall ($\mathcal{E} = \mathbb{C}$) von Aronszajn [**Aro50**] gezeigt wurde.

Satz 1.6. *Sei $K : X \times X \to L(\mathcal{E})$ positiv definit. Dann gibt es genau einen funktionalen Hilbertraum $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}^X$ mit reproduzierendem Kern K.*

BEWEIS. Da die Familie $\{K(\cdot,\mu)x \ ; \ \mu \in X \ , \ x \in \mathcal{E}\}$ in $\mathcal{H}$ total sein muß, setzen wir

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 &= LH\{K(\cdot,\mu)x \ ; \ \mu \in X \ , \ x \in \mathcal{E}\} \\ &= \{\sum_{i=1}^{n} K(\cdot,\mu_i)x_i \ ; \ n \in \mathbb{N} \ , \ \mu_i \in X \ , \ x_i \in \mathcal{E}\}.\end{aligned}$$

Wir definieren nun auf $\mathcal{H}_0$ ein Skalarprodukt gemäß der Formel

$$\langle \sum_{i=1}^{n} K(\cdot,\lambda_i)x_i, \sum_{j=1}^{m} K(\cdot,\mu_j)y_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\langle K(\mu_j,\lambda_i)x_i, y_j\rangle.$$

Das ist wohldefiniert; denn gilt

$$\sum_{i=1}^{n} K(\cdot,\lambda_i)x_i = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} K(\cdot,\tilde{\lambda}_i)\tilde{x}_i \text{ und } \sum_{j=1}^{m} K(\cdot,\mu_j)y_j = \sum_{j=1}^{\tilde{m}} K(\cdot,\tilde{\mu}_j)\tilde{y}_j,$$

so erhält man unter Benutzung der Gleichheit $K(\lambda,\mu)^* = K(\mu,\lambda)$ $(\lambda,\mu \in X)$ die gewünschte Unabhängigkeit von der Wahl der Darstellung:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\langle K(\mu_j,\lambda_i)x_i, y_j\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\langle x_i, \sum_{j=1}^{m} K(\mu_j,\lambda_i)^* y_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle x_i, \sum_{j=1}^{m} K(\lambda_i,\mu_j)y_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle x_i, \sum_{j=1}^{\tilde{m}} K(\lambda_i,\tilde{\mu}_j)\tilde{y}_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\tilde{m}}\langle K(\tilde{\mu}_j,\lambda_i)x_i, \tilde{y}_j\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{\tilde{m}}\langle \sum_{i=1}^{n} K(\tilde{\mu}_j,\lambda_i)x_i, \tilde{y}_j\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{\tilde{m}}\langle \sum_{i=1}^{\tilde{n}} K(\tilde{\mu}_j,\tilde{\lambda}_i)\tilde{x}_i, \tilde{y}_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{\tilde{n}}\sum_{j=1}^{\tilde{m}}\langle K(\tilde{\mu}_j,\tilde{\lambda}_i)\tilde{x}_i, \tilde{y}_j\rangle.\end{aligned}$$

Offenbar ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sesquilinear und aufgrund der positiven Definitheit von K positiv semidefinit. Ferner gilt für $f = \sum_{i=1}^{n} K(\cdot,\mu_i)x_i \in \mathcal{H}_0$ mit $\langle f,f\rangle = 0$

$$\begin{aligned}|\langle f(\lambda), y\rangle|^2 &= |\langle \sum_{i=1}^{n} K(\lambda,\mu_i)x_i, y\rangle|^2 \\ &= |\langle f, K(\cdot,\lambda)y\rangle|^2 \\ &\leq \langle f,f\rangle\langle K(\cdot,\lambda)y, K(\cdot,\lambda)y\rangle \\ &= 0 \quad (\lambda \in X \ , \ y \in \mathcal{E}),\end{aligned}$$

da für positiv semidefinite Sesquilinearformen die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung gilt. Somit folgt $f = 0$, also definiert $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt und

$$\|f\|^2 = \langle f,f\rangle \quad (f \in \mathcal{H}_0)$$

eine Norm auf $\mathcal{H}_0$.

Nach Konstruktion gilt für $f = \sum_{i=1}^n K(\cdot,\mu_i)x_i \in \mathcal{H}_0$ und $\lambda \in X$, $y \in \mathcal{E}$

$$\langle f, K(\cdot,\lambda)y\rangle = \sum_{i=1}^n \langle K(\lambda,\mu_i)x, y\rangle = \langle f(\lambda), y\rangle,$$

und die Abbildung $\delta_\lambda : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{E}$, $f \mapsto f(\lambda)$ ist stetig mit $\|\delta_\lambda\| \leq \|K(\lambda,\lambda)\|^{\frac{1}{2}}$, denn

$$\begin{aligned}
\|\delta_\lambda f\| &= \sup_{y\in\mathcal{E},\|y\|\leq 1} |\langle f(\lambda), y\rangle| \\
&\leq \sup_{y\in\mathcal{E},\|y\|\leq 1} \|f\|\ \|K(\cdot,\lambda)y\| \\
&= \|f\| \sup_{y\in\mathcal{E},\|y\|\leq 1} \langle K(\lambda,\lambda)y, y\rangle^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|f\|\ \|K(\lambda,\lambda)\|^{\frac{1}{2}} \quad (\lambda \in X\ ,\ f \in \mathcal{H}_0).
\end{aligned}$$

Nun bezeichne $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ die Vervollständigung von $\mathcal{H}_0$. Wir behaupten, daß die stetigen Fortsetzungen der Abbildungen δ_λ auf $\mathcal{H}$, die wir ebenfalls mit δ_λ bezeichnen wollen, $\mathcal{H}$ zu einem Hilbertraum von Funktionen machen. Dazu müssen wir sicherstellen, daß nicht zwei verschiedene Elemente von $\mathcal{H}$ die gleiche Funktion definieren, also zeigen, daß die lineare Abbildung

$$j : \mathcal{H} \to \mathcal{E}^X\ ,\ f \mapsto (\lambda \mapsto \delta_\lambda(f))$$

eine Einbettung, sprich injektiv ist. Sei also $f \in \mathcal{H}$, so daß $\delta_\lambda(f) = 0$ für alle $\lambda \in X$. Wir müssen zeigen, daß schon $f = 0$ gilt. Dazu wählen wir eine Folge (f_n) in $\mathcal{H}_0$, die in $\mathcal{H}$ gegen f konvergiert. Natürlich ist (f_n) dann eine Cauchyfolge in $\mathcal{H}_0$ und es ist $f_n(\lambda) \longrightarrow 0$ für alle $\lambda \in X$ aufgrund der Stetigkeit von δ_λ. Wir wählen nun Darstellungen der f_n

$$f_n = \sum_{i=1}^{m_n} K(\cdot,\lambda_i^{(n)})x_i^{(n)}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle f_p, f_q\rangle &= \langle f_p, \sum_{j=1}^{m_q} K(\cdot,\lambda_j^{(q)})x_j^{(q)}\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{m_q} \langle f_p(\lambda_j^{(q)}), x_j^{(q)}\rangle \xrightarrow{p} 0
\end{aligned}$$

für jedes $q \in \mathbb{N}$. Sei also nun $\epsilon > 0$. Wir finden zunächst $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$\|f_p - f_q\| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \quad \text{für alle } p, q \geq n_0$$

gilt. Zu n_0 finden wir nach dem eben Gesagten $n_1 \in \mathbb{N}$, so daß $|\langle f_p, f_{n_0}\rangle| < \frac{\epsilon^2}{4}$ für alle $p \geq n_1$ gilt. Wir erhalten somit für alle $p \geq \max\{n_0, n_1\}$

$$\begin{aligned}
\|f_p\|^2 &\leq \|f_p\|^2 + \|f_{n_0}\|^2 \\
&= \|f_p - f_{n_0}\|^2 + 2Re\langle f_p, f_{n_0}\rangle \\
&\leq \|f_p - f_{n_0}\|^2 + 2|\langle f_p, f_{n_0}\rangle| \\
&< \epsilon^2.
\end{aligned}$$

Also ist $\|f\| = \lim \|f_p\| = 0$, also $f = 0$, was zu zeigen war.

Also ist $\mathcal{H}$, identifiziert mit *ran* j, ein Hilbertraum von $\mathcal{E}$-wertigen Funktionen auf X, der aufgrund der Stetigkeit der Punktauswertungen auch funktional ist. Offensichtlich ist K der reproduzierende Kern von $\mathcal{H}$.

Es bleibt die Eindeutigkeit von $\mathcal{H}$ zu zeigen. Seien also

$$(\mathcal{H}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1) \text{ und } (\mathcal{H}_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2) \subset \mathcal{E}^X$$

funktionale Hilberträume mit reproduzierendem Kern K. Dann ist

$$\mathcal{H}_0 = LH\{K(\cdot,\mu)x \ ; \ \mu \in X \ , \ x \in \mathcal{E}\} \subset \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$$

dicht und $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ stimmen offenbar auf $\mathcal{H}_0$ überein. Man sieht, daß dann $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ gelten muß, denn ist $f \in \mathcal{H}_1$, dann existiert eine Folge (f_n) in $\mathcal{H}_0$ mit $f_n \longrightarrow f$ in $\mathcal{H}_1$. Dann ist (f_n) eine Cauchyfolge in $\mathcal{H}_0$, also existiert $g \in \mathcal{H}_2$ mit $f_n \longrightarrow g$ in $\mathcal{H}_2$. Es folgt für alle $\lambda \in X$:

$$\langle f(\lambda), y\rangle = \lim \langle f_n, K(\cdot,\lambda)y\rangle_1 = \lim \langle f_n, K(\cdot,\lambda)y\rangle_2 = \langle g(\lambda), y\rangle \quad (y \in \mathcal{E}).$$

Also gilt schon $f = g \in \mathcal{H}_2$. Umgekehrt folgt $\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_1$, und ebenso sieht man, daß auch die Normen übereinstimmen.

□

Die bijektive Korrespondenz zwischen funktionalen Hilberträumen und positiv definiten Abbildungen erlaubt es, Resultate über Kerne funktionaler Hilberträume auf positiv definite Abbildungen anzuwenden, wovon im folgenden stillschweigend Gebrauch gemacht wird. Nun formulieren wir ein Lemma, das in dieser Arbeit oft benutzt wird, da es den Umgang mit positiv definiten Abbildungen erheblich erleichtert.

LEMMA 1.7. *Seien G, G_1, G_2 Hilberträume, $g_i : X \to L(G, G_i) \quad (i = 1, 2)$ Abbildungen. Dann sind äquivalent:*

(i) Es existiert eine Kontraktion $\Gamma : G_1 \to G_2$ mit $\Gamma(g_1(\lambda)x) = g_2(\lambda)x$ für alle $\lambda \in X \ , \ x \in G$.
(ii) Die Abbildung $\gamma : X \times X \to L(G) \ , \ \gamma(\lambda, \mu) = g_1(\lambda)^* g_1(\mu) - g_2(\lambda)^* g_2(\mu)$ ist positiv definit.

In diesem Fall gilt: Γ ist isometrisch auf $D = \bigvee\{g_1(\lambda)x \ ; \ \lambda \in X \ , \ x \in G\}$ genau dann, wenn $\gamma = 0$ ist.

BEWEIS. Es gelte (i). Seien $(\lambda_i) \subset X \ , \ (x_i) \subset G$ endliche Folgen. Dann ist

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} \langle \gamma(\lambda_j, \lambda_i) x_i, x_j\rangle &= \sum_{i,j} \langle g_1(\lambda_i)x_i, g_1(\lambda_j)x_j\rangle - \langle g_2(\lambda_i)x_i, g_2(\lambda_j)x_j\rangle \\
&= \|\sum_i g_1(\lambda_i)x_i\|^2 - \|\Gamma \sum_i g_1(\lambda_i)x_i\|^2 \\
&\geq 0 \ , \text{ weil } \|\Gamma\| \leq 1.
\end{aligned}$$

Gelte umgekehrt (ii). Dann gilt für alle endlichen Folgen $(\lambda_i) \subset X \ , \ (x_i) \subset G$

$$\|\sum_i g_2(\lambda_i)x_i\| \leq \|\sum_i g_1(\lambda_i)x_i\|.$$

Daraus folgt sofort, daß es eine wohldefinierte kontraktive lineare Abbildung

$$\Gamma : D = \bigvee \{g_1(\lambda)x \ ; \ \lambda \in X \ , \ x \in G\} \to G_2$$

mit

$$\Gamma(g_1(\lambda)x) = g_2(\lambda)x \quad (\lambda \in X \ , \ x \in G)$$

gibt.
Indem man $\Gamma_{|D^\perp} = 0$ setzt, erhält man die gewünschte Abbildung Γ.

Die Rückrichtung des Zusatzes ist klar. Sei umgekehrt Γ isometrisch auf D. Dann folgt insbesondere

$$\langle \gamma(\lambda,\lambda)x, x\rangle = 0 \quad (\lambda \in X \ , \ x \in \mathcal{E}).$$

Da nach Lemma 1.3 $\gamma(\lambda,\lambda)$ selbstadjungiert ist, folgt daraus, daß $\gamma(\lambda,\lambda) = 0$ ist. Damit ist (nach Lemma 1.3)

$$\|\gamma(\lambda,\mu)\|^2 \leq \|\gamma(\lambda,\lambda)\| \ \|\gamma(\mu,\mu)\| = 0 \quad (\lambda,\mu \in X),$$

was zu zeigen war.

□

Lemma 1.8.

(a) Die positiv definiten Abbildungen von $X \times X$ nach $L(\mathcal{E})$ bilden in $L(\mathcal{E})^{X\times X}$ einen spitzen konvexen Kegel.

(b) (Faktorisierungssatz) Sei $K : X \times X \to L(\mathcal{E})$ positiv definit. Dann existieren ein Hilbertraum $\mathcal{F}$ und eine Abbildung $k : X \to L(\mathcal{E},\mathcal{F})$, so daß
- $K(\lambda,\mu) = k(\lambda)^* k(\mu) \quad (\lambda,\mu \in X)$
- $\mathcal{F} = \bigvee_{\mu\in X} ran(k(\mu))$.

In diesem Fall ist das Paar $(\mathcal{F}, k)$ eindeutig bis auf unitäre Äquivalenz.

(c) (Produktsatz) Seien $K : X \times X \to L(\mathcal{E})$, $K' : X \times X \to L(\mathcal{E}')$ positiv definite Abbildungen. Dann ist auch die Abbildung

$$K \otimes K' : X \times X \to L(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}') \ , \ (\lambda,\mu) \mapsto K(\lambda,\mu) \otimes K'(\lambda,\mu)$$

positiv definit.

Beweis.

(a) Offensichtlich, bis auf die Spitzheit. Sei also $K : X \times X \to L(\mathcal{E})$ positiv definit, so daß auch $-K$ positiv definit ist. Daraus folgt unmittelbar, daß $K(\lambda,\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in X$. Nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung für positiv definite Abbildungen aus Lemma 1.3 ist dann schon

$$\|K(\lambda,\mu)\|^2 \leq \|K(\lambda,\lambda)\| \ \|K(\mu,\mu)\| = 0 \quad (\lambda,\mu \in X),$$

also $K = 0$.

(b) Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}^X$ der funktionale Hilbertraum mit reproduzierendem Kern K und sei $\delta_\lambda : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ die Punktauswertung in $\lambda \in X$. Sei dann $k(\lambda) = \delta_\lambda^*$ für $\lambda \in X$. Dann folgt die Behauptung aus Lemma 1.3.

Zum Beweis der Eindeutigkeitsaussage zeigt man leicht mit Hilfe von Lemma 1.7, daß eine unitäre Abbildung $U : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ mit

$$U(k(\lambda)x) = k'(\lambda)x \quad (\lambda \in X \ , \ x \in \mathcal{E})$$

existiert, wann immer $(\mathcal{F}, k)$ und $(\mathcal{F}', k')$ zwei Faktorisierungen von K sind.

(c) Seien $k : X \to L(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, $k' : X \to L(\mathcal{E}', \mathcal{F}')$ Faktorisierungen von K, K'. Seien $(\lambda_i) \subset X \ , \ (x_i) \subset \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}'$ endliche Folgen. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} \langle K \otimes K'(\lambda_j, \lambda_i) x_i, x_j \rangle &= \sum_{i,j} \langle (k(\lambda_j)^* \otimes k'(\lambda_j)^*)(k(\lambda_i) \otimes k'(\lambda_i)) x_i, x_j \rangle \\
&= \| \sum_i (k(\lambda_i) \otimes k'(\lambda_i)) x_i \|^2 \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

□

Nun sind wir in der Lage, die Abbildungen von X nach $\mathcal{E}$, die in einem bestimmten funktionalen Hilbertraum liegen, durch eine positive Definitheitsbedingung zu charakterisieren.

Dazu führen wir folgende Schreibweise ein: für $\xi, \eta \in \mathcal{E}$ sei

$$\xi \odot \eta : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \ , \ x \mapsto \xi \langle x, \eta \rangle$$

der zu ξ, η gehörige Rang-Eins-Operator. Offenbar ist für jede Funktion $f : X \to \mathcal{E}$ die Abbildung

$$X \times X \to L(\mathcal{E}) \ , \ (\lambda, \mu) \mapsto f(\lambda) \odot f(\mu)$$

positiv definit.

Satz 1.9. *Sei $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}^X$ ein funktionaler Hilbertraum mit reproduzierendem Kern K und sei $f : X \to \mathcal{E}$ eine Abbildung.*

(a) Es sind äquivalent:
  - *(i) Die Abbildung f liegt in $\mathcal{H}$ und $\|f\| \leq 1$.*
  - *(ii) Die Abbildung*

$$\gamma : X \times X \to L(\mathcal{E}) \ , \ (\lambda, \mu) \mapsto K(\lambda, \mu) - f(\lambda) \odot f(\mu)$$

ist positiv definit.

(b) Es sind äquivalent:
  - *(i) Die Abbildung f liegt in $\mathcal{H}$.*
  - *(ii) Es existiert ein $c \geq 0$, so daß die Abbildung*

$$\gamma_c : X \times X \to L(\mathcal{E}) \ , \ (\lambda, \mu) \mapsto c^2 K(\lambda, \mu) - f(\lambda) \odot f(\mu)$$

positiv definit ist.

In diesem Fall ist $\|f\| = \min\{c \geq 0 \ ; \ \gamma_c \text{ positiv definit } \}$.

Beweis.

(a) Der Beweis basiert auf Lemma 1.7. Es sei δ_λ die Punktauswertung in $\lambda \in X$. Wir definieren

$$g_1 : X \to L(\mathcal{E}, \mathcal{H}) \ , \ g_1(\lambda) = \delta_\lambda^*$$

sowie

$$g_2 : X \to L(\mathcal{E}, \mathbb{C}) \ , \ g_2(\lambda)x = \langle x, f(\lambda) \rangle.$$

Damit gilt offenbar

$$g_2(\lambda)^*(\zeta) = \zeta \ f(\lambda) \quad (\zeta \in \mathbb{C} \ , \ \lambda \in X).$$

Dann ist (i) äquivalent zu folgender Aussage $(i)'$:
Es existiert eine Kontraktion $\Gamma : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ mit

$$\Gamma(g_1(\lambda)x) = g_2(\lambda)x \quad (\lambda \in X \ , \ x \in \mathcal{E}).$$

Denn falls (i) gilt, wählt man $\Gamma = \langle \cdot, f \rangle$. Gilt $(i)'$, so existiert nach dem Satz von Fréchet-Riesz ein $g \in \mathcal{H}$ mit $\Gamma = \langle \cdot, g \rangle$ und $\|g\| \leq 1$. Damit gilt für $\lambda \in X \ , \ x \in \mathcal{E}$

$$\langle x, f(\lambda) \rangle = \Gamma(\delta_\lambda^* x) = \langle \delta_\lambda^* x, g \rangle = \langle x, g(\lambda) \rangle,$$

also $f = g \in \mathcal{H}$ und $\|f\| = \|g\| \leq 1$.
Ferner ist offensichtlich

$$\gamma(\lambda, \mu) = g_1(\lambda)^* g_1(\mu) - g_2(\lambda)^* g_2(\mu) \quad (\lambda, \mu \in X).$$

Die Äquivalenz von $(i)'$ und (ii) folgt nun gerade aus Lemma 1.7.

(b) Von (i) nach (ii) gelangen wir mit $c = \|f\|$. Gelte umgekehrt (ii). Falls $c = 0$ ist, dann muß schon $f(\lambda) \odot f(\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in X$, also $f = 0$ gelten. Wir setzen also $c > 0$ voraus. Dann ist die Abbildung

$$\gamma : X \times X \to L(\mathcal{E}) \ , \ (\lambda, \mu) \mapsto K(\lambda, \mu) - \left(\frac{1}{c} f(\lambda) \right) \odot \left(\frac{1}{c} f(\mu) \right)$$

positiv definit, also nach (a) $\frac{1}{c} f \in \mathcal{H}$ mit $\|\frac{1}{c} f\| \leq 1$, also $f \in \mathcal{H}$ mit $\|f\| \leq c$. Daraus folgt sofort der Zusatz.

□

2. Multiplier funktionaler Hilberträume

Ein Anliegen dieser Arbeit ist es, die Multiplierklasse bestimmter funktionaler Hilberträume zu charakterisieren. Daher werden an dieser Stelle einige allgemeine Resultate über Multiplier funktionaler Hilberträume bewiesen.

Im folgenden seien X eine Menge, $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ Hilberträume und $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{E}_1^X$, $\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{E}_2^X$ funktionale Hilberträume mit reproduzierenden Kernen K_1 bzw. K_2.

Definition 1.10.

(a) *Wir nennen*

$$\mathcal{M}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) = \{\phi : X \to L(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \ ; \ \phi \cdot f \in \mathcal{H}_2 \ \ \textit{für alle } f \in \mathcal{H}_1\}$$

die Multiplierklasse von $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$. Im Falle $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ schreiben wir $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ statt $\mathcal{M}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$.

(b) *Für $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ bezeichne*

$$M_\phi : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2 \ , \ f \mapsto \phi \cdot f$$

die Multiplikation mit Symbol ϕ.

Bemerkung. Sei $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Es gilt

(a) $M_\phi \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.
(b) $M_\phi^*(K_2(\cdot, \mu)y) = K_1(\cdot, \mu)(\phi(\mu)^* y) \quad (\mu \in X \ , \ y \in \mathcal{E}_2)$.

Beweis. (a) Die Linearität von M_ϕ ist offensichtlich. Wir zeigen, daß der Graph von M_ϕ abgeschlossen ist. Sei (f_n) eine Folge in $\mathcal{H}_1$ mit $f_n \longrightarrow f \in \mathcal{H}_1$ und $M_\phi f_n \longrightarrow g \in \mathcal{H}_2$. Unter Benutzung der Stetigkeit der Punktauswertung sieht man

$$\begin{aligned}
(M_\phi f)(\lambda) &= \phi(\lambda) f(\lambda) \\
&= \phi(\lambda) \lim_n f_n(\lambda) \\
&= \lim_n ((M_\phi f_n)(\lambda)) \\
&= \left(\lim_n M_\phi f_n\right)(\lambda) \\
&= g(\lambda) \quad (\lambda \in X).
\end{aligned}$$

Damit ist $g = M_\phi f$, und nach dem Graphensatz ist M_ϕ stetig.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\langle M_\phi^*(K_2(\cdot, \mu)y), f\rangle &= \langle y, \phi(\mu) f(\mu)\rangle \\
&= \langle \phi(\mu)^* y, f(\mu)\rangle \\
&= \langle K_1(\cdot, \mu)(\phi(\mu)^* y), f\rangle \quad (f \in \mathcal{H}_1 \ , \ \mu \in X \ , \ y \in \mathcal{E}_2),
\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

□

Bemerkung. $\mathcal{M}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ wird mit der von $L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ induzierten Norm zu einem normierten Raum.

Ähnlich wie in Satz 1.9 sind wir jetzt in der Lage, Multiplier durch die positive Definitheit einer zugehörigen Abbildung zu charakterisieren, was den Ausgangspunkt für spätere Untersuchungen der Multiplierklasse darstellt.

SATZ 1.11. *Sei* $\phi : X \to L(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ *eine Abbildung.*

(a) Es sind äquivalent:
- *(i)* $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ *und* $\|M_\phi\| \leq 1$.
- *(ii) Die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \gamma : X \times X & \to & L(\mathcal{E}_2) \\ (\lambda, \mu) & \mapsto & K_2(\lambda, \mu) - \phi(\lambda) K_1(\lambda, \mu) \phi(\mu)^* \end{array}$$

ist positiv definit.

(b) Es sind äquivalent:
- *(i)* $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.
- *(ii) Es existiert ein* $c \geq 0$, *so daß die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \gamma_c : X \times X & \to & L(\mathcal{E}_2) \\ (\lambda, \mu) & \mapsto & c^2 K_2(\lambda, \mu) - \phi(\lambda) K_1(\lambda, \mu) \phi(\mu)^* \end{array}$$

positiv definit ist.

In diesem Fall ist $\|M_\phi\| = \min\{c \geq 0 \; ; \; \gamma_c \text{ positiv definit } \}$.

BEWEIS.

(a) Es seien $\delta_\lambda^{(1)}$ bzw. $\delta_\lambda^{(2)}$ die Punktauswertungen von $\mathcal{H}_1$ bzw. $\mathcal{H}_2$. Ferner seien

$$g_1 : X \to L(\mathcal{E}_2, \mathcal{H}_2) \; , \; g_1(\lambda) = \delta_\lambda^{(2)^*}$$

und

$$g_2 : X \to L(\mathcal{E}_2, \mathcal{H}_1) \; , \; g_2(\lambda) = \delta_\lambda^{(1)^*} \phi(\lambda)^*.$$

Dann ist

$$\gamma(\lambda, \mu) = g_1(\lambda)^* g_1(\mu) - g_2(\lambda)^* g_2(\mu) \quad (\lambda, \mu \in X),$$

und (i) ist äquivalent zu der Aussage $(i)'$:
Es existiert eine Kontraktion $\Gamma : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ mit

$$\Gamma(g_1(\lambda) y) = g_2(\lambda) y \quad (\lambda \in X \; , \; y \in \mathcal{E}_2).$$

Denn falls (i) gilt, setzt man $\Gamma = M_\phi^*$. Dann ist für $\lambda \in X \; , \; y \in \mathcal{E}_2$

$$\Gamma(g_1(\lambda) y) = M_\phi^*(K_2(\cdot, \lambda) y) = K_1(\cdot, \lambda)(\phi(\lambda)^* y) = g_2(\lambda) y.$$

Gilt umgekehrt $(i)'$, so ist für $\lambda \in X \; , \; x \in \mathcal{E}_2 \; , f \in \mathcal{H}_1$

$$\begin{array}{rcl} \langle \phi(\lambda) f(\lambda), x \rangle & = & \langle f, g_2(\lambda) x \rangle \\ & = & \langle \Gamma^* f, g_1(\lambda) x \rangle \\ & = & \langle (\Gamma^* f)(\lambda), x \rangle, \end{array}$$

also $\phi \cdot f = \Gamma^* f \in \mathcal{H}_2$ für alle $f \in \mathcal{H}_1$, somit ist dann $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ und $\|M_\phi\| = \|\Gamma\| \leq 1$. Die Äquivalenz von $(i)'$ und (ii) folgt wieder aus Lemma 1.7.

(b) Wenn (i) gilt, wähle man $c = \|M_\phi\|$; falls $M_\phi = 0$ ist, folgt nämlich

$$\begin{aligned}\phi(\lambda)K_1(\lambda,\mu)\phi(\mu)^*x &= \left(M_\phi M_\phi^* K(\cdot,\lambda)x\right)(\lambda)\\ &= 0 \quad (\lambda,\mu \in X\ ,\ x \in \mathcal{E}_2).\end{aligned}$$

Gelte nun umgekehrt (ii). Ist $c > 0$, folgt aus der positiven Definitheit der Abbildung γ_c mit dem eben Gezeigten, daß $\frac{1}{c}\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ mit $\|M_{\frac{1}{c}\phi}\| \leq 1$, also $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ und $\|M_\phi\| \leq c$. Gilt (ii) mit $c = 0$, dann gilt (ii) erst recht für alle $c > 0$. Dann ist $\|M_\phi\| \leq c$ für alle $c > 0$, also $\|M_\phi\| = 0$. Der Zusatz ist nun offensichtlich.

□

3. Einschränkungen funktionaler Hilberträume

Es seien im folgenden $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}^X$ ein funktionaler Hilbertraum mit reproduzierendem Kern K und $Y \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Offensichtlich sind Einschränkungen positiv definiter Funktionen wieder positiv definit, also ist die Abbildung

$$K_Y : Y \times Y \to L(\mathcal{E})\ ,\ K_Y = K_{|Y\times Y}$$

reproduzierender Kern eines funktionalen Hilbertraumes $\mathcal{H}_Y$, dessen Eigenschaften wir in diesem Abschnitt untersuchen werden. Es wird sich herausstellen, daß sich $\mathcal{H}_Y$ in kanonischer Weise mit dem Teilraum

$$\mathcal{H}(Y) = \bigvee\{K(\cdot,\mu)x\ ;\ \mu \in Y\ ,\ x \in \mathcal{E}\}$$

von $\mathcal{H}$ identifizieren läßt.

Satz 1.12.

(a) Die Einschränkungsabbildung

$$\rho : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_Y\ ,\ f \mapsto f_{|Y}$$

ist eine wohldefinierte Kontraktion.

(b) Für $\mu \in Y$ und $x \in \mathcal{E}$ gilt

$$\rho^*(K_Y(\cdot,\mu)x) = K(\cdot,\mu)x,$$

die Abbildung ρ^* ist isometrisch, und es ist $ran\rho^* = \mathcal{H}(Y)$. Insbesondere ist ρ surjektiv und $\mathcal{H}_Y$ läßt sich isometrisch mit $\mathcal{H}(Y)$ identifizieren.

(c) Es gilt $\mathcal{H} = ker\rho \oplus \mathcal{H}(Y)$. Wir bezeichnen mit P die Orthogonalprojektion von $\mathcal{H}$ auf $(ker\rho)^\perp$. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{H} & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{H}_Y\\ {\scriptstyle P}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho^*}\\ (ker\rho)^\perp & = & \mathcal{H}(Y)\end{array}$$

Insbesondere gilt $\rho^*\rho = P$ und $\rho\rho^* = 1_{H_Y}$. H_Y ist also isometrisch isomorph zum orthogonalen Komplement des Kerns der Einschränkung von X auf Y. Es gilt

$$\|f_{|Y}\|_{H_Y} = \inf\{\|g\|_{\mathcal{H}}\ ;\ g \in \mathcal{H} \text{ mit } g_{|Y} = f_{|Y}\},$$

wobei das Infimum angenommen wird, das heißt, man kann jedes $f \in \mathcal{H}_Y$ normerhaltend zu einem $g \in \mathcal{H}$ fortsetzen.

BEWEIS.

(a) Sei $f \in \mathcal{H}$. Dann ist nach Satz 1.9 die Abbildung

$$X \times X \to L(\mathcal{E}) \ , \ (\lambda, \mu) \mapsto \|f\|^2 K(\lambda, \mu) - f(\lambda) \odot f(\mu)$$

positiv definit. Dann ist erst recht die Einschränkung dieser Abbildung auf $Y \times Y$ positiv definit, also folgt wieder mit Satz 1.9, daß $f_{|Y} \in \mathcal{H}_Y$ mit $\|f_{|Y}\| \leq \|f\|$. Das zeigt die Wohldefiniertheit und die Kontraktivität von ρ.

(b) Für $\mu \in Y \ , \ x \in \mathcal{E}$ gilt

$$\begin{aligned} \langle \rho^*(K_Y(\cdot, \mu)x), K(\cdot, \lambda)y \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle K_Y(\cdot, \mu)x, (K(\cdot, \lambda)y)_{|Y} \rangle_{\mathcal{H}_Y} \\ &= \langle x, K(\mu, \lambda)y \rangle_{\mathcal{E}} \\ &= \langle K(\cdot, \mu)x, K(\cdot, \lambda)y \rangle_{\mathcal{H}} \quad (\lambda \in X \ , \ y \in \mathcal{E}). \end{aligned}$$

Für $f \in \mathcal{H}_Y$ gilt nun

$$\begin{aligned} \langle (\rho^* f)(\mu), x \rangle &= \langle \rho^* f, K(\cdot, \mu)x \rangle \\ &= \langle f, K_Y(\cdot, \mu)x \rangle \\ &= \langle f(\mu), x \rangle \quad (\mu \in Y \ , \ x \in \mathcal{E}), \end{aligned}$$

also $\rho^* f(\mu) = f(\mu)$ für alle $\mu \in Y$, sprich $\rho\rho^* = 1_{\mathcal{H}_Y}$. Somit ist ρ^* eine Isometrie und hat abgeschlossenes Bild, so daß $ran\rho^* = \mathcal{H}(Y)$ gelten muß. Offensichtlich ist ρ surjektiv.

(c) Klar.

□

Während wir also die Funktionen in H_Y genau als die Einschränkungen von Funktionen in $\mathcal{H}$ betrachten können, trifft dies auf die zugehörigen Multiplier im allgemeinen nicht notwendigerweise zu. Es gilt lediglich eine Inklusion. Und zwar ist für zwei funktionale Hilberträume $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{E}_1^X, \mathcal{H}_2 \subset \mathcal{E}_2^X$ und für einen Multiplier $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ nach Satz 1.11 natürlich $\phi_{|Y} \in \mathcal{M}((\mathcal{H}_1)_Y, (\mathcal{H}_2)_Y)$ mit $\|M_{\phi_{|Y}}\| \leq \|M_\phi\|$. Wir werden später sehen, daß für gewisse funktionale Hilberträume eben doch auch die andere Inklusion erfüllt ist.

4. $\mathbb{C}$-wertige positiv definite Abbildungen

Wie bereits angedeutet, enthält das bisher Gesagte den Fall komplexwertiger positiv definiter Abbildungen als Spezialfall vermöge der Identifizierungen

$$\mathbb{C} \to L(\mathbb{C}) \ , \ z \mapsto (w \mapsto w \cdot z) \qquad L(\mathbb{C}) \to \mathbb{C} \ , \ \phi \mapsto \phi(1),$$

bzw. allgemeiner

$$\mathcal{F} \to L(\mathbb{C}, \mathcal{F}) \ , \ x \mapsto (w \mapsto w \cdot x) \qquad L(\mathbb{C}, \mathcal{F}) \to \mathcal{F} \ , \ \phi \mapsto \phi(1),$$

wobei $\mathcal{F}$ einen Hilbertraum bezeichnet.

In diesem skalaren Kontext läßt sich der Faktorisierungssatz aus Lemma 1.8 auch in folgender Form formulieren, von der wir in dieser Arbeit oft Gebrauch machen werden.

SATZ 1.13. *Sei $K : X \times X \to \mathbb{C}$ positiv definit. Dann existieren ein Hilbertraum $\mathcal{F}$, eine Abbildung $d : X \to \mathcal{F}$, so daß*

- $K(\lambda, \mu) = \langle d(\mu), d(\lambda)\rangle \quad (\lambda, \mu \in X)$
- $\mathcal{F} = \bigvee\{d(\mu) \ ; \ \mu \in X\}$.

In diesem Fall ist das Paar $(\mathcal{F}, d)$ eindeutig bis auf unitäre Äquivalenz. Man kann $\mathcal{F}$ als den funktionalen Hilbertraum mit reproduzierendem Kern K wählen. In diesem Fall ist $d(\lambda) = K(\cdot, \lambda)$ $(\lambda \in X)$.

Aufgrund seiner häufigen Verwendung im folgenden geben wir hier auch die skalare Umformulierung von Lemma 1.7 an.

LEMMA 1.14. *Seien G_1, G_2 Hilberträume, $g_i : X \to G_i \quad (i = 1, 2)$ Abbildungen. Dann sind äquivalent:*

(i) Es existiert eine Kontraktion $\Gamma : G_1 \to G_2$ mit $\Gamma(g_1(\lambda)) = g_2(\lambda)$ für alle $\lambda \in X$.
(ii) Die Abbildung $\gamma : X \times X \to \mathbb{C}$, $\gamma(\lambda, \mu) = \langle g_1(\mu), g_1(\lambda)\rangle - \langle g_2(\mu), g_2(\lambda)\rangle$ ist positiv definit.

In diesem Fall gilt: Γ ist isometrisch auf $D = \bigvee\{g_1(\lambda) \ ; \ \lambda \in X\}$ genau dann, wenn $\gamma = 0$ ist.

BEWEIS. Wähle $G = \mathbb{C}$ in Lemma 1.7 und benutze obige Identifizierungen. □

Weiter sei bemerkt, daß der in Lemma 1.8 angegebene Produktsatz sich auf einen klassischen Satz von Schur reduziert, der besagt, daß das Produkt komplexwertiger positiv definiter Abbildungen wieder positiv definit ist.

SATZ 1.15. *Seien $K_1, K_2 : X \times X \to \mathbb{C}$ und $K_3 : X \times X \to L(\mathcal{E})$ positiv definit. Dann sind auch die punktweisen Produkte $K_1 \cdot K_2$ bzw. $K_1 \cdot K_3$ positiv definit.*

Von besonderer Bedeutung im Verlauf dieser Arbeit sind „elementare“ Hilberträume vektorwertiger Funktionen.

Wir bezeichnen einen funktionalen Hilbertraum $\mathcal{H}_\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^X$ als elementar, falls der reproduzierende Kern $K_\mathcal{E}$ von $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ von der Form $K_\mathcal{E} = K \cdot 1_\mathcal{E}$ mit einem skalaren Kern K ist, also $K_\mathcal{E}(\lambda, \mu)x = K(\lambda, \mu) \cdot x \quad (\lambda, \mu \in X \ , \ x \in \mathcal{E})$ gilt. Es bezeichne $\mathcal{H}$ den zu K gehörenden funktionalen Hilbertraum $\mathbb{C}$-wertiger Funktionen.

In diesem Fall läßt sich $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ in kanonischer Weise mit $\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}$ identifizieren.

BEWEIS. Es existiert eine eindeutige isometrische Abbildung $\mathcal{H} \otimes \mathcal{E} \to \mathcal{H}_\mathcal{E}$ mit

$$K(\cdot, \mu) \otimes x \mapsto K_\mathcal{E}(\cdot, \mu)x,$$

denn für endliche Folgen $(\mu_i) \subset X$, $(x_i) \subset \mathcal{E}$ gilt

$$\begin{aligned}
\|\sum_i K_{\mathcal{E}}(\cdot,\mu_i)x_i\|^2 &= \sum_{i,j} K(\mu_j,\mu_i)\langle x_i,x_j\rangle \\
&= \sum_{i,j}\langle K(\cdot,\mu_i),K(\cdot,\mu_j)\rangle\langle x_i,x_j\rangle \\
&= \|\sum_i K(\cdot,\mu_i)\otimes x_i\|^2,
\end{aligned}$$

und $LH\{K(\cdot,\mu)\ ;\ \mu \in X\}$ liegt dicht in $\mathcal{H}$. Diese Abbildung hat offensichtlich abgeschlossenes dichtes Bild, ist also surjektiv. $\square$

Unter dieser Identifizierung gilt für $f \otimes x \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{E}$

$$(f \otimes x)(\lambda) = f(\lambda)x.$$

Man sieht weiter leicht ein, daß für jeden Multiplier $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H})$ die Abbildung

$$X \to L(\mathcal{E})\ ,\ \lambda \mapsto \phi(\lambda)1_{\mathcal{E}},$$

die wir analog mit $\phi \otimes 1_{\mathcal{E}}$ bezeichnen wollen, ein Multiplier auf $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ ist. Vermöge obiger Identifizierung gilt dann offenbar

$$M_{\phi\otimes 1_{\mathcal{E}}} = M_\phi \otimes 1_{\mathcal{E}} \text{ und damit } \|M_{\phi\otimes 1_{\mathcal{E}}}\| = \|M_\phi\|.$$

An dieser Stelle wollen wir abschließend zeigen, daß in vielen natürlichen Situationen die Multipliernorm die Supremumsnorm dominiert.

Bemerkung. Es sei $K : X \times X \to \mathbb{C}$ positiv definit und es gelte

$$K(\lambda,\lambda) \neq 0 \quad (\lambda \in X).$$

Es sei $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}^X$ der von K erzeugte funktionale Hilbertraum und $\mathcal{E}, \mathcal{E}_*$ seien beliebige Hilberträume. Sei $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{E},\mathcal{H}\otimes\mathcal{E}_*)$. Dann gilt

$$\|M_\phi\| \geq \|\phi\|_{\infty,X}$$

und $\mathcal{M}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{E},\mathcal{H}\otimes\mathcal{E}_*)$ ist vollständig.

beweis. Sei $\lambda \in X$ und $Y = \{\lambda\}$. Dann ist $\phi_{|Y} \in \mathcal{M}((\mathcal{H}\otimes\mathcal{E})_Y,(\mathcal{H}\otimes\mathcal{E}_*)_Y)$ mit $\|M_\phi\| \geq \|M_{\phi_{|Y}}\|$. Da Y einelementig ist und $K(\lambda,\lambda) > 0$ gilt, ist nach Satz 1.11 $\phi_{|Y} \in \mathcal{M}((\mathcal{H}\otimes\mathcal{E})_Y,(\mathcal{H}\otimes\mathcal{E}_*)_Y)$ genau dann, wenn der Operator

$$c^2 \cdot 1_{\mathcal{E}_*} - \phi(\lambda)\phi(\lambda)^* \in L(\mathcal{E}_*)$$

für geeignetes $c \geq 0$ positiv ist. Das kleinste $c \geq 0$, für das das der Fall ist, ist jedoch $c = \|\phi(\lambda)\|$. Dann muß schon $\|M_{\phi_{|Y}}\| = \|\phi(\lambda)\|$ gelten.

Wir zeigen nun die Vollständigkeit von $\mathcal{M}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{E},\mathcal{H}\otimes\mathcal{E}_*)$. Sei $(\phi)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{M}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{E},\mathcal{H}\otimes\mathcal{E}_*)$. Dann existieren

$$A = \lim_{n\to\infty} M_{\phi_n} \text{ in } L(\mathcal{H}\otimes\mathcal{E},\mathcal{H}\otimes\mathcal{E}_*)$$

und für $\lambda \in X$

$$\phi(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(\lambda) \text{ in } L(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*),$$

da $(\phi_n(\lambda))_{n\in\mathbb{N}}$ natürlich nach dem oben Gezeigten eine Cauchyfolge in $L(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$ ist. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} Af(\lambda) &= \left(\lim_{n\to\infty} M_{\phi_n} f\right)(\lambda) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\phi_n(\lambda) f(\lambda)) \\ &= \phi(\lambda) f(\lambda) \quad (f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{E}\ ,\ \lambda \in X). \end{aligned}$$

Also liegt für $f \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{E}$ auch $\phi \cdot f$ in $\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}_*$, also $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}, \mathcal{H} \otimes \mathcal{E}_*)$ und $A = M_\phi$. $\square$

Später werden wir sehen, daß die Multipliernorm sehr oft echt größer als die Supremumsnorm ist.

KAPITEL 2

Definition und grundlegende Eigenschaften der Schurklasse

Im folgenden Kapitel werden wir die Schurklasse und die duale Schurklasse einführen und grundlegende Eigenschaften untersuchen. Später wird sich dann unter gewissen Zusatzbedingungen die duale Schurklasse als Einheitskugel des Multiplierraumes funktionaler Hilberträume identifizieren lassen.

1. Ein Kalkül holomorpher operatorwertiger Funktionen

Im folgenden seien $\mathcal{W}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ Banachräume. Sei $T = (T_1, \ldots, T_n) \in L(\mathcal{X})^n$ ein Tupel von Operatoren. Wir nennen T einen vertauschenden Multioperator (kurz: c.m.o.), falls die Komponenten von T vertauschen. Wir schreiben $\sigma(T)$ für das gemeinsame Spektrum von T nach Taylor.

Für einen vertauschenden Multioperator $T \in L(\mathcal{X})^n$ mit $\sigma(T) \subset U$, $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, bezeichne

$$\Phi : \mathcal{O}(U) \to L(\mathcal{X}) \ , \ f \mapsto f(T)$$

den Funktionalkalkül nach Taylor. Wir geben nun zunächst eine Möglichkeit an, einen Funktionalkalkül für $L(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$-wertige holomorphe Funktionen zu definieren. Dazu sei

$$\Psi : \mathcal{O}(U) \otimes_\pi L(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) \to L(\mathcal{X} \hat{\otimes}_\omega \mathcal{Y}, \mathcal{X} \hat{\otimes}_\omega \mathcal{Z})$$

($\omega = 2$, falls $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ Hilberträume, $\omega = \pi$ sonst) die eindeutig bestimmte stetig lineare Abbildung, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(U) \otimes_\pi L(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) & \xrightarrow{\Psi} & L(\mathcal{X} \hat{\otimes}_\omega \mathcal{Y}, \mathcal{X} \hat{\otimes}_\omega \mathcal{Z}) \\ \uparrow & & \uparrow {\scriptstyle (f,S) \mapsto f(T) \otimes S} \\ \mathcal{O}(U) \times L(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) & = \!=\!= & \mathcal{O}(U) \times L(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) \end{array}$$

kommutativ macht. Die Existenz dieser Abbildung ist gewährleistet, da die Abbildung

$$\mathcal{O}(U) \times L(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) \to L(\mathcal{X} \hat{\otimes}_\omega \mathcal{Y}, \mathcal{X} \hat{\otimes}_\omega \mathcal{Z}) \ , \ (f, S) \mapsto f(T) \otimes S$$

offensichtlich stetig bilinear ist. Die Stetigkeit von Ψ folgt nun aus der universellen Eigenschaft des π-Tensorprodukts.

Ψ läßt sich nun offensichtlich stetig auf $\mathcal{O}(U) \hat{\otimes}_\pi L(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ fortsetzen. Diese Fortsetzung bezeichnen wir ebenfalls mit Ψ.

Bekanntlich existiert ein eindeutig bestimmter topologischer Isomorphismus

$$\mathcal{O}(U)\hat{\otimes}_\pi L(\mathcal{Y},\mathcal{Z}) \to \mathcal{O}(U, L(\mathcal{Y},\mathcal{Z}))$$

mit

$$f \otimes S \mapsto (z \mapsto f(z)S) \quad (f \in \mathcal{O}(U)\ ,\ S \in L(\mathcal{Y},\mathcal{Z})).$$

Um unnötige Notationen zu vermeiden, bezeichnen wir die Komposition von Ψ mit dieser Identifikation ebenfalls mit Ψ, was uns den gewünschten Funktionalkalkül liefert. Wie im Fall des skalaren Kalküls schreiben wir mit $f \in \mathcal{O}(U, L(\mathcal{Y},\mathcal{Z}))$ abkürzend $f(T)$ anstelle von $\Psi(f)$.

Dieser Kalkül ist in folgender Weise verträglich mit den punktweisen Kompositionen: Seien $f \in \mathcal{O}(U, L(\mathcal{Z},\mathcal{W}))$ und $g \in \mathcal{O}(U, L(\mathcal{Y},\mathcal{Z}))$. Dann ist sicher $fg \in \mathcal{O}(U, L(\mathcal{Y},\mathcal{W}))$ und es gilt

$$(fg)(T) = f(T)g(T),$$

wie man leicht auf Elementartensoren nachrechnet.

Es gilt außerdem

$$(\mathbf{1} \otimes 1_\mathcal{Y})(T) = 1_\mathcal{X} \otimes 1_\mathcal{Y} = 1_{\mathcal{X}\hat{\otimes}_\omega \mathcal{Y}}.$$

Ist insbesondere $f \in \mathcal{O}(U, L(\mathcal{Y},\mathcal{Z}))$ in jedem Punkt $z \in U$ invertierbar, und bezeichnet $\frac{1}{f} : U \to L(\mathcal{Z},\mathcal{Y})$ die holomorphe Abbildung $z \mapsto f(z)^{-1}$, so gilt

$$\frac{1}{f}(T)f(T) = 1_{\mathcal{X}\hat{\otimes}_\omega \mathcal{Y}} \text{ und } f(T)\frac{1}{f}(T) = 1_{\mathcal{X}\hat{\otimes}_\omega \mathcal{Z}}.$$

Ferner bemerken wir, daß dieser Kalkül operatorwertiger Funktionen tatsächlich eine Erweiterung des bekannten holomorphen Funktionalkalküls darstellt. Sei für $f \in \mathcal{O}(U)$ die $L(\mathbb{C})$-wertige holomorphe Abbildung g gegeben durch

$$g(z)(\zeta) = f(z) \cdot \zeta \quad (z \in U\ ,\ \zeta \in \mathbb{C}),$$

also $g = f \otimes 1_\mathbb{C}$. Dann ist nach Definition des Kalküls

$$g(T) = (f \otimes 1_\mathbb{C})(T) = f(T) \otimes 1_\mathbb{C},$$

was unter kanonischer Identifizierung äquivalent zu $f(T)$ ist. Abschließend erwähnen wir zwei Eigenschaften dieses Kalküls, von denen wir später regen Gebrauch machen werden.

- Sei $f \in \mathcal{O}(U, L(\mathcal{Y},\mathcal{Z}))$, und sei $z \in U$. Wir bezeichnen mit $z \cdot 1_\mathcal{X}$ das vertauschende Tupel $(z_i \cdot 1_\mathcal{X})_{i=1}^n$. Dann ist $\sigma(z \cdot 1_\mathcal{X}) = \{z\}$, und es gilt $f(z \cdot 1_\mathcal{X}) = 1_\mathcal{X} \otimes f(z)$. Da beide Seiten dieser Gleichheit stetig linear in f sind, genügt es, sie für Elementartensoren der Form $f_0 \otimes S$ mit $f_0 \in \mathcal{O}(U)$, $S \in L(\mathcal{Y},\mathcal{Z})$ nachzuprüfen. Durch Taylorentwicklung um z sieht man, daß $f_0(z \cdot 1_\mathcal{X}) = f_0(z)1_\mathcal{X}$ gilt, also

  $$f(z \cdot 1_\mathcal{X}) = f_0(z \cdot 1_\mathcal{X}) \otimes S = f_0(z)1_\mathcal{X} \otimes S = 1_\mathcal{X} \otimes f(z),$$

  was zu zeigen war.

- Falls $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ Hilberträume sind, können wir zu $f \in \mathcal{O}(U, L(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}))$ eine Abbildung $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\tilde{U}, L(\mathcal{Z}, \mathcal{Y}))$ definieren durch $\tilde{f}(z) = f(\overline{z})^*$ (beziehungsweise $\tilde{f}(z) = \overline{f(\overline{z})}$, falls f skalarwertig ist). Dann gilt $\tilde{f}(T^*) = f(T)^*$. Wie oben genügt es, dies skalarwertig nachzuprüfen. Nun definiert die Abbildung
$$\mathcal{O}(U) \to L(\mathcal{X}) \ , \ \phi \mapsto \tilde{\phi}(T^*)^*$$
einen Funktionalkalkül für T, der dem spektralen Abbildungssatz genügt, was man leicht nachrechnet. Aus der Eindeutigkeit des holomorphen Kalküls (vergleiche [**EP96**], Satz 5.2.4) folgt, daß dieser Kalkül schon mit dem Taylorschen Kalkül für T übereinstimmt.

2. Verallgemeinerte sphärische Kontraktionen

Für ein vertauschendes Tupel $T \in L(H)^n$ (H ein Hilbertraum) bezeichnen wir mit T^* das Tupel $(T_1^*, \dots, T_n^*)$. Somit ist T vertauschend genau dann, wenn T^* es ist.

Für $S \in L(H)$ sei
$$R_S : L(H) \to L(H) \ , \ X \mapsto XS$$
$$L_S : L(H) \to L(H) \ , \ X \mapsto SX$$

die Rechts- bzw. Linksmultiplikation mit S. Offensichtlich ist für jeden vertauschenden Multioperator $T \in L(H)^n$ das Tupel
$$(L_{T^*}, R_T) = (L_{T_1{}^*}, \dots, L_{T_n{}^*}, R_{T_1}, \dots, R_{T_n}) \in L(L(H))^{2n}$$
selbst ein vertauschendes Tupel.

Man kann zeigen ([**Esc88**]), daß in diesem Fall
$$\sigma(L_{T^*}, R_T) = \widetilde{\sigma(T)} \times \sigma(T)$$
gilt. Somit läßt sich das Tupel (L_{T^*}, R_T) vermöge des analytischen Funktionalkalküls in Funktionen einsetzen, die auf einer Umgebung von $\widetilde{\sigma(T)} \times \sigma(T)$ holomorph sind. Das motiviert die folgende Definition:

DEFINITION 2.1. *Seien $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, $\gamma \in \mathcal{O}(U \times \tilde{U})$ und H ein beliebiger Hilbertraum.*

(a) Sei $T \in L(H)^n$ ein vertauschendes Tupel. Dann heißt T strikt (γ, U)-positiv, falls
$$\sigma(T) \subset \tilde{U} \text{ und } \gamma(L_{T^*}, R_T)(1_H) \geq r 1_H$$
für ein $r > 0$ gilt.

(b) Es sei
$$\mathcal{C}_0(H, \gamma, U) \quad = \quad \{T \in L(H)^n \text{ c.m.o} \ ; \ T \text{ strikt } (\gamma, U)\text{-positiv}\}.$$

3. Die Schurnorm

Die bekannte von Neumannsche Ungleichung besagt, daß für jede Kontraktion $T \in L(H)$ (H ein Hilbertraum) und für jedes Polynon $p \in \mathbb{C}[z]$

$$\|p(T)\| \leq \|p\|_{\infty,\mathbb{D}}$$

gilt, wobei $\mathbb{D}$ die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Das liefert eine Charakterisierung der $\|\cdot\|_{\infty,\mathbb{D}}$-Norm holomorpher Funktionen auf $\mathbb{D}$; es gilt nämlich für jeden Hilbertraum H

$$\|f\|_{\infty,\mathbb{D}} = \sup\{\|f(T)\| \; ; \; T \in L(H) \; , \; \|T\| < 1\} \quad (f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})).$$

(man beachte, daß das Spektrum einer strikten Kontraktion vollständig in $\mathbb{D}$ liegt). Denn offenbar ist für $z \in \mathbb{D}$ der Operator $z \cdot 1_H$ eine strikte Kontraktion auf H mit $f(z \cdot 1_H) = f(z) \cdot 1_H$.

Umgekehrt existiert für jede Funktion $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ eine Folge von Polynomen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die kompakt gleichmäßig auf $\mathbb{D}$ gegen f konvergiert und $\|p_n\|_{\infty,\mathbb{D}} \leq \|f\|_{\infty,\mathbb{D}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt (siehe [**Con81**], Proposition 4.15 und Proposition 4.16). Man erhält

$$\|f(T)\| = \lim_{n\to\infty} \|p_n(T)\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|p_n\|_{\infty,\mathbb{D}} \leq \|f\|_{\infty,\mathbb{D}} \quad (T \in L(H) \; , \; \|T\| < 1),$$

was die Gültigkeit der obigen Darstellung beweist.

Eine von Neumannsche Ungleichung ist in vielen Situationen wünschenswert, da sie unter anderem Existenz und Kontraktivität bestimmter Funktionalkalküle garantiert. Von Varopolous ([**Var74**], Theorem 2) wurde gezeigt, daß eine von Neumannsche Ungleichung von der Form

$$\|p(T)\| \leq \|p\|_{\infty,\mathbb{B}_n},$$

wobei T eine sphärische Kontraktion über einem Hilbertraum und p ein Polynom in n Variablen ist, für große n falsch ist. Im Anhang geben wir einen Beweis, daß die von Neumannsche Ungleichung in dieser Form für alle $n \geq 2$ scheitert.

Es liegt nun nahe von der $\|\cdot\|_\infty$-Norm zu Normen überzugehen, die eine von Neumannsche Ungleichung erlauben. Dabei ersetzen wir den Begriff der strikten Kontraktion durch die oben eingeführte allgemeiner gefaßte strikte (γ, U)-Positivität eines Tupels.

Im folgenden bezeichnen $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_*$ Hilberträume.

Definition 2.2. *Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, $\gamma \in \mathcal{O}(U \times \tilde{U})$.*

(a) Für $f \in \mathcal{O}(\tilde{U}, L(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*))$ sei die Schurnorm (bezüglich γ) definiert durch

$$\|f\|_{\mathcal{S},\gamma,U} = \sup\{\|f(T)\| \; ; \; H \text{ separabler Hilbertraum} \; , \; T \in \mathcal{C}_0(H, \gamma, U)\}.$$

(b) Für $f \in \mathcal{O}(U, L(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*))$ sei die duale Schurnorm (bezüglich γ)

$$\|f\|_{\mathcal{S}^*,\gamma,U} = \sup\{\|f(T)\| \; ; \; H \text{ separabler Hilbertraum} \; , \; T^* \in \mathcal{C}_0(H, \gamma, U)\}.$$

BEMERKUNG.

(a) Im Falle $n = 1$, $U = \mathbb{D}$, $\gamma(z,w) = 1 - zw \quad (z,w \in \mathbb{D})$ ist nach obiger Vorbemerkung für $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$

$$\|f\|_{\mathcal{S},\gamma,U} = \|f\|_{\mathcal{S}^*,\gamma,U} = \|f\|_{\infty,\mathbb{D}}.$$

(b) Im Falle $U = \mathbb{B}_n$, $\gamma(z,w) = 1 - \sum_{i=1}^n z_i w_i$ stimmt die hier vorgestellte Definition der (dualen) Schurnorm mit derjenigen in [**EP**] überein, was ausführlich in Kapitel 6 dieser Arbeit gezeigt wird.

(c) Allgemein muß (auch wenn $U = \tilde{U}$ ist) keine Gleichheit von $\|\cdot\|_{\mathcal{S},\gamma,U}$ und $\|\cdot\|_{\mathcal{S}^*,\gamma,U}$ gelten, wie etwa im Fall $U = \mathbb{B}_n$, $\gamma(z,w) = 1 - \sum_{i=1}^n z_i w_i \quad (z,w \in \mathbb{B}_n)$ in [**EP**], Korollar 6.6, gezeigt wurde.

DEFINITION 2.3. *Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, $\gamma \in \mathcal{O}(U \times \tilde{U})$.*

(a) Es sei

$$\mathcal{S}(\gamma, U, L(\mathcal{E},\mathcal{E}_*)) = \{f \in \mathcal{O}(\tilde{U}, L(\mathcal{E},\mathcal{E}_*)) \; ; \; \|f\|_{\mathcal{S},\gamma,U} < \infty\}$$

der Schurraum bzw.

$$\mathcal{S}^*(\gamma, U, L(\mathcal{E},\mathcal{E}_*)) = \{f \in \mathcal{O}(U, L(\mathcal{E},\mathcal{E}_*)) \; ; \; \|f\|_{\mathcal{S}^*,\gamma,U} < \infty\}$$

der duale Schurraum.

(b) Weiter bezeichnen wir als Schurklasse $\mathcal{S}_1(\gamma, U, L(\mathcal{E},\mathcal{E}_*))$ (bzw. als duale Schurklasse $\mathcal{S}_1^*(\gamma, U, L(\mathcal{E},\mathcal{E}_*))$) die normabgeschlossenen Einheitskugeln der entsprechenden Räume.

BEMERKUNG.

(a) Offenbar sind der Schurraum und der duale Schurraum Vektorräume, die durch die (duale) Schurnorm halbnormiert sind.

(b) Es gilt für $f \in \mathcal{O}(U, L(\mathcal{E},\mathcal{E}_*))$

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{S}^*,\gamma,U} &= \sup\{\|f(T)\| \; ; \; H \text{ separabler Hilbertraum }, \; T^* \in \mathcal{C}_0(H,\gamma,U)\} \\
&= \sup\{\|\tilde{f}(T^*)\| \; ; \; H \text{ separabler Hilbertraum }, \; T^* \in \mathcal{C}_0(H,\gamma,U)\} \\
&= \sup\{\|\tilde{f}(T)\| \; ; \; H \text{ separabler Hilbertraum }, \; T \in \mathcal{C}_0(H,\gamma,U)\} \\
&= \|\tilde{f}\|_{\mathcal{S},\gamma,U},
\end{aligned}$$

wobei wir die oben angesprochene Gleichheit $f(T^*) = \tilde{f}(T)^*$ benutzt haben. Da die Abbildung $f \mapsto \tilde{f}$ selbstinvers ist, wird ersichtlich, daß durch

$$\mathcal{S}^*(\gamma, U, L(\mathcal{E},\mathcal{E}_*)) \to \mathcal{S}(\gamma, U, L(\mathcal{E}_*,\mathcal{E})) \; , \; f \mapsto \tilde{f}$$

ein antilinearer isometrischer Isomorphismus definiert wird.

SATZ 2.4. *Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen, $\gamma \in \mathcal{O}(U \times \tilde{U})$. Es gelte zusätzlich $\gamma(z,\overline{z}) > 0$ für alle $z \in U$. Dann ist die (duale) Schurnorm eine Norm, die die $\|\cdot\|_\infty$-Norm majorisiert, und der (duale) Schurraum ist vollständig bezüglich dieser Norm.*

BEWEIS. Wir zeigen zunächst, daß für $z \in \tilde{U}$ und einen beliebigen Hilbertraum das Tupel $z \cdot 1_H = (z_i \cdot 1_H)_{i=1}^n$ strikt (γ, U)-positiv ist. Offenbar ist $\sigma(z \cdot 1_H) = \{z\} \subset \tilde{U}$. Ferner ist

$$L_{(z_i \cdot 1_H)^*} = \overline{z_i} \cdot 1_{L(H)} \text{ und } R_{z_i \cdot 1_H} = z_i \cdot 1_{L(H)} \quad (1 \leq i \leq n).$$

Daher ist $\gamma((L_{(z_i \cdot 1)_H^*}, R_{z_i \cdot 1_H}))(1_H) = \gamma(\overline{z}, z) \cdot 1_{L(H)}(1_H) = \gamma(\overline{z}, z) \cdot 1_H$. Nach Voraussetzung ist $\gamma(\overline{z}, z) > 0$ und damit $z \cdot 1_H$ strikt (γ, U)-positiv.

Also folgt für $f \in \mathcal{O}(\tilde{U}, L(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*))$

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{S},\gamma,U} &= \sup\{\|f(T)\| \;;\; H \text{ separabler Hilbertraum },\; T \in \mathcal{C}_0(H, \gamma, U)\} \\
&\geq \sup\{\|f(z \cdot 1_H)\| \;;\; H \text{ separabler Hilbertraum},\; z \in \tilde{U}\} \\
&= \sup\{\|1_H \otimes f(z)\| \;;\; H \text{ separabler Hilbertraum},\; z \in \tilde{U}\} \\
&= \sup\{\|f(z)\| \;;\; z \in \tilde{U}\} \\
&= \|f\|_{\infty, \tilde{U}}.
\end{aligned}$$

Man sieht, daß $\mathcal{S}(\gamma, U, L(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)) \subset H^\infty(\tilde{U}, L(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*))$ gilt, wenn $H^\infty(\tilde{U}, L(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*))$ den Raum der beschränkten holomorphen Funktionen auf $\tilde{U}$ mit Werten in $L(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$ bezeichnet.

Es bleibt die Vollständigkeit des Schurraumes zu zeigen. Dazu sei (f_k) eine $\|\cdot\|_{\mathcal{S},\gamma,U}$-Cauchyfolge. Dann ist (f_k) insbesondere eine $\|\cdot\|_{\infty,\tilde{U}}$-Cauchyfolge.

Da $H^\infty(\tilde{U}, L(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*))$ vollständig ist, existiert eine Funktion $f \in H^\infty(\tilde{U}, L(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*))$, so daß (f_k) gleichmäßig auf $\tilde{U}$ gegen f konvergiert.

Sei nun $\epsilon > 0$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $\|f_k - f_l\|_{\mathcal{S},\gamma,U} < \epsilon$ für alle $k, l \geq k_0$ gilt. Also ist

$$\|f_k(T) - f_l(T)\| < \epsilon$$

für alle $k, l \geq k_0$, alle separablen Hilberträume H und alle $T \in \mathcal{C}_0(H, \gamma, U)$. Da (f_k) insbesondere kompakt gleichmäßig auf $\tilde{U}$ gegen f konvergiert, folgt für alle $k \geq k_0$, alle separablen Hilberträume H und alle $T \in \mathcal{C}_0(H, \gamma, U)$

$$\|f_k(T) - f(T)\| = \lim_{l \to \infty} \|f_k(T) - f_l(T)\| \leq \epsilon.$$

Für alle $k \geq k_0$ ist also $\|f_k - f\|_{\mathcal{S},\gamma,U} \leq \epsilon$, also ist $f \in \mathcal{S}(\gamma, U, L(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*))$ und (f_k) konvergiert auch in der Schurnorm gegen f.

Die entsprechenden Behauptungen über den dualen Schurraum folgen durch Dualisierung (vergleiche Bemerkung nach Definition 2.3). Wir sehen dabei, daß insbesondere auch $\mathcal{S}^*(\gamma, U, L(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)) \subset H^\infty(U, L(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*))$ gilt.

$\square$

KAPITEL 3

Multiplier auf Nevanlinna-Pick-Räumen

Dieses Kapitel widmet sich einer speziellen Klasse von Hilberträumen komplexwertiger Funktionen, die eine zusätzliche Positivitätsbedingung erfüllen, den Nevanlinna-Pick-Räumen. Später werden wir sehen, daß diese Räume eine abstrakte Form der Nevanlinna-Pick-Interpolation erlauben. Das erste Ziel wird es sein, Charakterisierungen der Multiplierklasse dieser Räume zu finden.

DEFINITION 3.1. *Eine positiv definite Abbildung $K : X \times X \to \mathbb{C}$ heißt Nevanlinna-Pick-Kern, falls K nullstellenfrei ist und die Abbildung*

$$X \times X \to \mathbb{C}\ ,\ (\lambda, \mu) \mapsto 1 - \frac{1}{K(\lambda, \mu)}$$

ebenfalls positiv definit ist.
Ein funktionaler Hilbertraum $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}^X$ heißt Nevanlinna-Pick-Raum, wenn sein reproduzierender Kern ein Nevanlinna-Pick-Kern ist.

BEMERKUNG.

(a) Sei K ein Nevanlinna-Pick-Kern, und sei $\mathcal{F}$ ein Hilbertraum, $d : X \to \mathcal{F}$ eine Faktorisierung von $1 - \frac{1}{K}$, also

$$1 - \frac{1}{K(\lambda, \mu)} = \langle d(\mu), d(\lambda) \rangle \quad (\lambda, \mu \in X).$$

Dann gilt

$$\|d(\lambda)\|^2 = 1 - \frac{1}{K(\lambda, \lambda)} < 1 \quad (\lambda \in X).$$

(b) Wann immer $d : X \to \mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ ein Hilbertraum) eine Abbildung ist mit $\|d(\lambda)\| < 1$ für alle $\lambda \in X$, so wird durch

$$K : X \times X \to \mathbb{C}\ ,\ (\lambda, \mu) \mapsto (1 - \langle d(\mu), d(\lambda) \rangle)^{-1}$$

ein Nevanlinna-Pick-Kern definiert. Wegen $|\langle d(\mu), d(\lambda) \rangle| \leq \|d(\lambda)\| \|d(\mu)\| < 1$ ist die obige Abbildung wohldefiniert, und es ist

$$K(\lambda, \mu) = \sum_{j=0}^{\infty} \langle d(\mu), d(\lambda) \rangle^j$$

positiv definit als Summe und Produkt positiv definiter Funktionen. Nun ist

$$X \times X \to \mathbb{C}\ ,\ (\lambda, \mu) \mapsto 1 - \frac{1}{K(\lambda, \mu)} = \langle d(\mu), d(\lambda) \rangle$$

offensichtlich positiv definit, was K zu einem Nevanlinna-Pick-Kern macht.

(c) Natürlich können wir $\mathcal{F}$ als den funktionalen Hilbertraum mit reproduzierendem Kern $1-\frac{1}{K}$ wählen. Ist $d : X \to \mathcal{F}$ eine beliebige Faktorisierung von $1-\frac{1}{K}$, dann besteht aufgrund der Eindeutigkeit der Faktorisierung der von $1-\frac{1}{K}$ erzeugte funktionale Hilbertraum genau aus den Funktionen

$$d_f : X \to \mathbb{C}\ ,\ \lambda \mapsto \langle f, d(\lambda)\rangle \quad (f \in \mathcal{F}).$$

Wir werden jetzt sehen, daß Nevanlinna-Pick-Räume immer die konstanten Funktionen und folglich ihre Multiplieralgebra enthalten.

Lemma 3.2.

(a) Nevanlinna-Pick-Räume enthalten immer die konstante Funktion $\mathbf{1}$*, und es gilt* $\|\mathbf{1}\| \leq 1$*. Insbesondere ist für Nevanlinna-Pick-Räume* $\mathcal{M}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$*, und* $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ *ist vollständig .*

(b) Sei $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}^X$ *ein Nevanlinna-Pick-Raum mit reproduzierendem Kern* K*, und sei* $d : X \to \mathcal{F}$ *eine Faktorisierung von* $1-\frac{1}{K}$*. Dann ist für* $f \in \mathcal{F}$ *die Abbildung*

$$d_f : X \to \mathbb{C}\ ,\ \lambda \mapsto \langle f, d(\lambda)\rangle$$

ein Multiplier auf $\mathcal{H}$ *mit* $\|M_{d_f}\| \leq \|f\|$*. Wenn wir* $\mathcal{F}$ *als den funktionalen Hilbertraum mit reproduzierendem Kern* $1-\frac{1}{K}$ *wählen, ist* $d_f = f$ $(f \in \mathcal{F})$*, und es ergeben sich folgende Inklusionen*

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}.$$

(c) Für $\mu \in X$ *ist* $K(\cdot,\mu) \in \mathcal{M}(\mathcal{H})$*.*

(d) Es sei $\mathcal{A}$ *die von den Abbildungen* $d_{d(\mu)} = (1-\frac{1}{K})(\cdot,\mu)$ $(\mu \in X)$ *erzeugte unitale Algebra komplexwertiger Funktionen auf* X*. Dann liegt* $\mathcal{A}$ *dicht in* $\mathcal{H}$*. Insbesondere liegt also* $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ *dicht in* $\mathcal{H}$*. Fassen wir also* $\mathcal{F}$ *wieder als den funktionalen Hilbertraum mit Kern* $1-\frac{1}{K}$ *auf und schreiben* $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ *für die von* $\mathcal{F}$ *erzeugte unitale Algebra komplexwertiger Funktionen, so ist*

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{M}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$$

und

$$\overline{\mathcal{A}}^{\mathcal{H}} = \overline{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}}^{\mathcal{H}} = \overline{\mathcal{M}(\mathcal{H})}^{\mathcal{H}} = \mathcal{H}.$$

BEWEIS.

(a) Das folgt mit Satz 1.9 daraus, daß die Abbildung

$$X \times X \to \mathbb{C}\ ,\ (\lambda,\mu) \mapsto K(\lambda,\mu) - 1 = K(\lambda,\mu)(1 - \frac{1}{K}(\lambda,\mu))$$

als Produkt der positiv definiten Funktionen K und $1-\frac{1}{K}$ selbst positiv definit ist. Die Vollständigkeit von $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ ergibt sich nun mit der Bemerkung am Ende des ersten Kapitels, da für Nevanlinna-Pick-Kerne natürlich immer

$$K(\lambda,\lambda) > 0 \quad (\lambda \in X)$$

erfüllt ist.

(b) Nach Satz 1.11 ist zu zeigen, daß die Abbildung

$$X \times X \to \mathbb{C}\ ,\ (\lambda, \mu) \mapsto K(\lambda, \mu)(1 - d_f(\lambda)\overline{d_f(\mu)})$$

positiv definit ist. Wir nehmen ohne Einschränkung an, daß $\|f\| = 1$ gilt. Dann können wir eine Orthonormalbasis $(f_i)_{i \in I}$ von $\mathcal{F}$ finden, die f enthält. Wir sehen

$$\begin{aligned} K(\lambda, \mu)(1 - d_f(\lambda)\overline{d_f(\mu)}) &= K(\lambda, \mu)(1 - \sum_{i \in I} \langle f_i, d(\lambda)\rangle\langle d(\mu), f_i\rangle) \\ &\quad + K(\lambda, \mu)(\sum_{i \in I, f_i \neq f} \langle f_i, d(\lambda)\rangle\langle d(\mu), f_i\rangle) \\ &= K(\lambda, \mu)(1 - \langle d(\mu), d(\lambda)\rangle) \\ &\quad + K(\lambda, \mu)(\sum_{i \in I, f_i \neq f} \langle f_i, d(\lambda)\rangle\langle d(\mu), f_i\rangle) \\ &= 1 + K(\lambda, \mu)(\sum_{i \in I, f_i \neq f} \langle f_i, d(\lambda)\rangle\langle d(\mu), f_i\rangle), \end{aligned}$$

was positiv definit ist als Summe und Produkt positiv definiter Abbildungen.

(c) Durch Reihenentwicklung von $K(\cdot, \mu)$ sehen wir

$$K(\lambda, \mu) = \sum_{j=0}^{\infty} \langle d(\mu), d(\lambda)\rangle^j = \sum_{j=0}^{\infty} d_{d(\mu)}(\lambda)^j \quad (\lambda \in X).$$

Nun ist für alle $j \in \mathbb{N}$ die Abbildung $d_{d(\mu)}^j$ ein Multiplier mit

$$\|M_{d_{d(\mu)}^j}\| \leq \|d(\mu)\|^j.$$

Somit konvergiert die Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} M_{d_{d(\mu)}^j}$$

absolut in der Multipliernorm. Da $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ vollständig ist, konvergiert obige Reihe in $\mathcal{M}(\mathcal{H})$, definiert also einen Multiplier, der punktweise mit $K(\cdot, \mu)$ übereinstimmt, also ist $K(\cdot, \mu) \in \mathcal{M}(\mathcal{H})$.

(d) Eben wurde gezeigt, daß für $\mu \in X$

$$\sum_{j=0}^{N} M_{d_{d(\mu)}^j} \xrightarrow{N} M_{K(\cdot, \mu)} \text{ in } \mathcal{M}(\mathcal{H})$$

gilt, also konvergiert erst recht die Folge

$$\left(\sum_{j=0}^{N} d_{d(\mu)}^j\right)_{N \in \mathbb{N}}$$

in $\mathcal{H}$ gegen $K(\cdot, \mu)$. Das heißt, Elemente der Form $K(\cdot, \mu)$ können in der Norm von $\mathcal{H}$ durch Elemente aus $\mathcal{A}$ approximiert werden, also gilt das auch für die lineare Hülle der $K(\cdot, \mu)$ $(\mu \in X)$, also für alle Elemente aus $\mathcal{H}$.

$\square$

1. Die fractional transform

In Satz 1.11 wurde bereits eine universelle Charakterisierung von Multipliern funktionaler Hilberträume gegeben. In diesem Abschnitt wollen wir eine weitere Darstellung von Multipliern auf Nevanlinna-Pick-Räumen untersuchen. Wir betrachten die folgende

SITUATION (A). *Sei $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}^X$ ein Nevanlinna-Pick-Raum mit reproduzierendem Kern K, $d : X \to \mathcal{F}$ sei eine Faktorisierung von $1 - \frac{1}{K}$, also*

$$\left(1 - \frac{1}{K}\right)(\lambda, \mu) = \langle d(\mu), d(\lambda)\rangle \quad (\lambda, \mu \in X).$$

Für einen beliebigen Hilbertraum $\mathcal{K}$ definieren wir die Abbildung

$$Z_{\mathcal{K}} : X \to L(\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}, \mathcal{K}) \ , \ Z_{\mathcal{K}}(\lambda)^* x = d(\lambda) \otimes x \quad (\lambda \in X \ , \ x \in \mathcal{K}).$$

Ferner seien $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}_*$ zwei beliebige Hilberträume.

Für jedes $\lambda \in X$ ist $Z_{\mathcal{K}}(\lambda)$ stetig mit

$$\|Z_{\mathcal{K}}(\lambda)\| = \|Z_{\mathcal{K}}(\lambda)^*\| = \|d(\lambda)\| < 1.$$

Wir können die Abbildung $\lambda \mapsto Z_{\mathcal{K}}(\lambda)^*$ zusammen mit dem Hilbertraum $\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}$ natürlich auch als Faktorisierung des Kernes $(1 - \frac{1}{K}) \cdot 1_{\mathcal{K}}$ auffassen (siehe Lemma 1.8), denn man kann leicht nachprüfen, daß

$$Z_{\mathcal{K}}(\lambda)(\eta \otimes x) = \langle \eta, d(\lambda)\rangle \cdot x = d_\eta(\lambda)x \quad (\lambda \in X \ , \ \eta \in \mathcal{F} \ , \ x \in \mathcal{K})$$

gilt; also ist bei festgehaltenem $\lambda \in X$ und $\eta \in \mathcal{F}$ die Abbildung

$$\mathcal{K} \to \mathcal{K} \ , \ x \mapsto Z_{\mathcal{K}}(\lambda)(\eta \otimes x)$$

nichts anderes als die Multiplikation mit $d_\eta(\lambda)$, und es gilt

$$Z_{\mathcal{K}}(\lambda) Z_{\mathcal{K}}(\mu)^* x = \langle d(\mu), d(\lambda)\rangle x = (1 - \frac{1}{K})(\lambda, \mu)x \quad (\lambda, \mu \in X \ , \ x \in \mathcal{K}).$$

SATZ 3.3. *In Situation (A) sei $\phi : X \to L(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:*

(i) Es existieren ein Hilbertraum $\mathcal{K}$ und eine Kontraktion

$$U : \mathcal{K} \oplus \mathcal{E} \to (\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}) \oplus \mathcal{E}_* \ , \ U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit

$$\phi(\lambda) = d + c(1_{\mathcal{K}} - Z_{\mathcal{K}}(\lambda)a)^{-1} Z_{\mathcal{K}}(\lambda)b.$$

(ii) Die Abbildung

$$\gamma : X \times X \to L(\mathcal{E}_*) \ , \ (\lambda, \mu) \mapsto K(\lambda, \mu)(1_{\mathcal{E}_*} - \phi(\lambda)\phi(\mu)^*)$$

ist positiv definit.

(iii) $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}, \mathcal{H} \otimes \mathcal{E}_*)$ mit $\|M_\phi\| \leq 1$.

BEWEIS.

Es gelte (i). Zunächst sei bemerkt, daß der Ausdruck

$$\phi(\lambda) = d + c(1_{\mathcal{K}} - Z_{\mathcal{K}}(\lambda)a)^{-1} Z_{\mathcal{K}}(\lambda)b$$

wohldefiniert ist, da mit U auch a eine Kontraktion ist, und $Z_{\mathcal{K}}(\lambda)$ für alle $\lambda \in X$ eine strikte Kontraktion definiert. Offensichtlich gilt auch

$$\phi(\lambda)^* x = d^* x + b^* Z_{\mathcal{K}}(\lambda)^* (1_{\mathcal{K}} - a^* Z_{\mathcal{K}}(\lambda)^*)^{-1} c^* x \quad (\lambda \in X \ , \ x \in \mathcal{E}_*).$$

Es sei

$$g(\lambda) = (1_{\mathcal{K}} - a^* Z_{\mathcal{K}}(\lambda)^*)^{-1} c^* \quad (\lambda \in X),$$

also $g(\lambda) \in L(\mathcal{E}_*, \mathcal{K})$. Das erfüllt

$$g(\lambda) - a^* Z_{\mathcal{K}}(\lambda)^* g(\lambda) = (1_{\mathcal{K}} - a^* Z_{\mathcal{K}}(\lambda)^*) g(\lambda) = c^* \quad (\lambda \in X),$$

und somit

$$\begin{pmatrix} g(\lambda)x \\ \phi(\lambda)^* x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{\mathcal{K}}(\lambda)^* g(\lambda) x \\ x \end{pmatrix} \quad (\lambda \in X \ , \ x \in \mathcal{E}_*).$$

Wir sehen, daß ein wohldefinierter kontraktiver Operator

$$T : (\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}) \oplus \mathcal{E}_* \to \mathcal{K} \oplus \mathcal{E}$$

mit

$$T \begin{pmatrix} Z_{\mathcal{K}}(\lambda)^* g(\lambda) x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(\lambda)x \\ \phi(\lambda)^* x \end{pmatrix} \quad (\lambda \in X \ , \ x \in \mathcal{E}_*)$$

existiert, nämlich $T = U^*$. Nach Lemma 1.7 ist dann $\tau : X \times X \to L(\mathcal{E}_*)$,

$$(\lambda, \mu) \mapsto \begin{pmatrix} Z_{\mathcal{K}}(\lambda)^* g(\lambda) \\ 1_{\mathcal{E}_*} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} Z_{\mathcal{K}}(\mu)^* g(\mu) \\ 1_{\mathcal{E}_*} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g(\lambda) \\ \phi(\lambda)^* \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} g(\mu) \\ \phi(\mu)^* \end{pmatrix}$$

positiv definit. Wir sehen, daß

$$\begin{aligned} \tau(\lambda, \mu) &= g(\lambda)^* Z_{\mathcal{K}}(\lambda) Z_{\mathcal{K}}(\mu)^* g(\mu) + 1_{\mathcal{E}_*} - g(\lambda)^* g(\mu) - \phi(\lambda)\phi(\mu)^* \\ &= (1 - \frac{1}{K})(\lambda, \mu) g(\lambda)^* g(\mu) + 1_{\mathcal{E}_*} - g(\lambda)^* g(\mu) - \phi(\lambda)\phi(\mu)^* \\ &= 1_{\mathcal{E}_*} - \phi(\lambda)\phi(\mu)^* - \frac{1}{K}(\lambda, \mu) g(\lambda)^* g(\mu) \quad (\lambda, \mu \in X) \end{aligned}$$

gilt. Ferner ist die Abbildung

$$\sigma : X \times X \to L(\mathcal{E}_*) \ , \ (\lambda, \mu) \mapsto g(\lambda)^* g(\mu)$$

offensichtlich positiv definit. Als Produkt und Summe von positiv definiten Funktionen ist dann auch $\gamma = K \cdot \tau + \sigma$ positiv definit, was zu zeigen war.

Gelte nun umgekehrt (ii). Es sei $g : X \to L(\mathcal{E}_*, \mathcal{K})$ ($\mathcal{K}$ ein geeigneter Hilbertraum) eine Faktorisierung der positiv definiten Funktion γ, also

$$\gamma(\lambda, \mu) = g(\lambda)^* g(\mu) \quad (\lambda, \mu \in X).$$

Durch Umformen erhalten wir

$$1_{\mathcal{E}_*} + \langle d(\mu), d(\lambda) \rangle g(\lambda)^* g(\mu) = g(\lambda)^* g(\mu) + \phi(\lambda)\phi(\mu)^* \quad (\lambda, \mu \in X)$$

beziehungsweise

$$1_{\mathcal{E}_*} + g(\lambda)^* Z_{\mathcal{K}}(\lambda) Z_{\mathcal{K}}(\mu)^* g(\mu) = g(\lambda)^* g(\mu) + \phi(\lambda)\phi(\mu)^* \quad (\lambda, \mu \in X).$$

Mit

$$\omega(\lambda) = Z_{\mathcal{K}}(\lambda)^* g(\lambda) \in L(\mathcal{E}_*, \mathcal{F} \otimes \mathcal{K}) \quad (\lambda \in X)$$

ist das gleichbedeutend damit, daß die Abbildung

$$X \times X \to L(\mathcal{E}_*) \;,\; (\lambda, \mu) \mapsto \begin{pmatrix} \omega(\lambda) \\ 1_{\mathcal{E}_*} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \omega(\mu) \\ 1_{\mathcal{E}_*} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g(\lambda) \\ \phi(\lambda)^* \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} g(\mu) \\ \phi(\mu)^* \end{pmatrix}$$

identisch verschwindet, so daß nach Lemma 1.7 die Abbildung

$$\begin{aligned} V : D = \bigvee \{ \begin{pmatrix} \omega(\lambda)x \\ x \end{pmatrix} \;;\; \lambda \in X \;,\; x \in \mathcal{E}_* \} \quad &\to \quad \bigvee \{ \begin{pmatrix} g(\lambda)x \\ \phi(\lambda)^* x \end{pmatrix} \;;\; \lambda \in X \;,\; x \in \mathcal{E}_* \} \\ \begin{pmatrix} \omega(\lambda)x \\ x \end{pmatrix} \quad &\mapsto \quad \begin{pmatrix} g(\lambda)x \\ \phi(\lambda)^* x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

wohldefiniert und unitär ist.

Um die Aussage (i) zu zeigen, reicht es aus, U^* auf dem Orthokomplement von D in $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}) \oplus \mathcal{E}_*$ gleich Null und auf D gleich V zu setzen. Das macht U^*, also auch U zu einer Kontraktion. Mit

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ und } \omega(\lambda) = Z_{\mathcal{K}}(\lambda)^* g(\lambda) \quad (\lambda \in X)$$

sehen wir

$$\begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{\mathcal{K}}(\lambda)^* g(\lambda) x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(\lambda)x \\ \phi(\lambda)^* x \end{pmatrix} \quad (\lambda \in X \;,\; x \in \mathcal{E}_*),$$

was folgende Identitäten liefert:

- $(1 - a^* Z_{\mathcal{K}}(\lambda)^*) g(\lambda) = c^*$ bzw. $g(\lambda) = (1_{\mathcal{K}} - a^* Z_{\mathcal{K}}(\lambda)^*)^{-1} c^* \quad (\lambda \in X)$
- $\phi(\lambda)^* = b^* Z_{\mathcal{K}}(\lambda)^* g(\lambda) + d^* \quad (\lambda \in X).$

Durch Einsetzen der ersten in die zweite Gleichung und Adjungieren erhält man nun sofort die gewünschte Darstellung von ϕ.

Die Äquivalenz von (ii) und (iii) wurde allgemeiner in Satz 1.11 gezeigt.

$\square$

Bemerkung.

(a) Die Kontraktion

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in L(\mathcal{K} \oplus \mathcal{E}, (\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}) \oplus \mathcal{E}_*),$$

die wir im Beweis konstruiert haben, hat die Eigenschaft, daß U^* eine partielle Isometrie mit dem Initialraum

$$D = \bigvee \{ \begin{pmatrix} d(\lambda) \otimes g_{\mathcal{K}}(\lambda) x \\ x \end{pmatrix} \; ; \; \lambda \in X \; , \; x \in \mathcal{E}_* \}$$

ist, wenn wir

$$g_{\mathcal{K}}(\lambda) = (1_{\mathcal{K}} - a^* Z_{\mathcal{K}}(\lambda)^*)^{-1} c^* \quad (\lambda \in X)$$

setzen.

(b) Man kann sogar zeigen, daß wir die Abbildung U nach eventueller Vergrößerung des Hilbertraumes $\mathcal{K}$ als unitären Operator wählen können. Da wir in dieser Arbeit von dieser Tatsache keinen Gebrauch machen werden, geben wir hier keinen Beweis.

2. Multiplier und Schurklassefunktionen

Die gerade bewiesene Darstellung von Multipliern auf Nevanlinna-Pick-Räumen erlaubt es uns nun, Multiplier als Elemente einer durch den reproduzierenden Kern bestimmten dualen Schurklasse zu identifizieren.

Dazu benötigen wir einige Notationen.

Situation (B). *Sei $D \subset \mathbb{C}^n$ offen und sei $\mathcal{H} \subset \mathcal{O}(D)$ ein Nevanlinna-Pick-Raum mit reproduzierendem Kern K.*

- *Es bezeichne $k : D \to L(\mathbb{C}, \mathcal{F})$ ($\mathcal{F}$ ein geeigneter Hilbertraum) eine Faktorisierung von $(1 - \frac{1}{K}) \cdot 1_{\mathbb{C}}$.*
- *Es sei $c : \tilde{D} \to L(\mathbb{C}, \mathcal{F})$, $c(z) = k(\overline{z})$. Nach Lemma 1.3 und der Eindeutigkeitseigenschaft der Faktorisierung ist c holomorph.*
- *Ferner sei $C(z,w) = K(z, \overline{w})$ ($z \in D$, $w \in \tilde{D}$). Dann ist C holomorph auf $D \times \tilde{D}$.*
- *Es sei $d : D \to \mathcal{F}$ definiert durch $d(z) = k(z)(1)$ $\quad (z \in D)$, also ist*
$$\left(1 - \frac{1}{K}\right)(z,w) = \langle d(w), d(z) \rangle \quad (z, w \in D).$$
- *Für einen Hilbertraum $\mathcal{K}$ sei*
$$Z_{\mathcal{K}}(z)^* x = d(z) \otimes x = (k(z) \otimes 1_{\mathcal{K}})(1 \otimes x) \quad (z \in D \; , \; x \in \mathcal{K}).$$
- *$\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}_*$ seien beliebige Hilberträume.*

Wir entnehmen Lemma 1.3, daß ein funktionaler Hilbertraum $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}^D$ genau dann eine Teilmenge von $\mathcal{O}(D)$ ist, wenn die Abbildung $D \times \tilde{D} \to \mathbb{C}$, $(z,w) \mapsto K(z, \overline{w})$ holomorph ist. Im Falle eines Nevanlinna-Pick-Raumes ist das natürlich äquivalent dazu, daß $D \times \tilde{D} \to \mathbb{C}$, $(z,w) \mapsto (1 - \frac{1}{K})(z, \overline{w})$ holomorph ist. Unter Berücksichtigung der Bemerkung nach Definition 3.1 sehen wir, daß solche holomorphen

Nevanlinna-Pick-Räume in natürlicher Weise existieren, denn sobald $d : D \to \mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ ein Hilbertraum) eine antiholomorphe Funktion mit $\|d(z)\| < 1$ für alle $z \in D$ ist, so wird durch $(1 - \frac{1}{K})(z, w) = \langle d(w), d(z)\rangle$ $(z, w \in D)$ ein Nevanlinna-Pick-Kern K definiert, so daß $(z, w) \mapsto K(z, \overline{w})$ holomorph ist.

Offensichtlich ist in Situation (B) auch die Abbildung $Z_{\mathcal{K}}$ holomorph, denn es gilt

$$\tilde{Z_{\mathcal{K}}}(z)x = Z_{\mathcal{K}}(\overline{z})^* x = (c(z) \otimes 1_{\mathcal{K}})(1 \otimes x) \quad (z \in \tilde{D}\ ,\ x \in \mathcal{K}),$$

also ist $\tilde{Z_{\mathcal{K}}}$ holomorph, also auch $Z_{\mathcal{K}}$ selbst. In diesem Kontext gibt es eine einfachere Möglichkeit, die $(\frac{1}{C}, D)$-Positivität eines Tupels zu charakterisieren.

LEMMA 3.4. *In Situation (B) sei $T \in L(H)^n$ ein vertauschendes Tupel mit Spektrum in $\tilde{D}$. Es sind äquivalent:*

(i) T ist strikt $(\frac{1}{C}, D)$-positiv.
(ii) $\|c(T)\| < 1$.
(iii) Für jeden Hilbertraum $\mathcal{K}$ ist $\|Z_{\mathcal{K}}(T^*)\| < 1$.

BEWEIS. Wir werden die Äquivalenz von (i) und (ii) folgern, indem wir zeigen, daß die Operatoren $1_H - \frac{1}{C}(L_{T^*}, R_T)(1_H)$ und $c(T)^*c(T)$ unitär äquivalent sind. Dazu zeigen wir zunächst die Kommutativität des folgenden Diagramms

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}(D, L(\mathcal{F}, \mathbb{C})) \times \mathcal{O}(\tilde{D}, L(\mathbb{C}, \mathcal{F})) & \xrightarrow{(f,g)\mapsto f\bullet g} & \mathcal{O}(D \times \tilde{D}) \\
{\scriptstyle (f,g)\mapsto f(T^*)g(T)}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle h\mapsto h(L_{T^*}, R_T)(1_H)} \\
L(H \otimes \mathbb{C}) & \xrightarrow{T\mapsto j^{-1}Tj} & L(H)
\end{array}$$

wobei $f \bullet g$ die holomorphe Abbildung

$$D \times \tilde{D} \to \mathbb{C}\ ,\ (z, w) \mapsto f(z)g(w)(1)$$

und $j \in L(H, H \otimes \mathbb{C})$ die unitäre Abbildung $h \mapsto h \otimes 1$ bezeichnet. Da offensichtlich alle Abbildungen in diesem Diagramm stetig linear bzw. bilinear sind, genügt es, die Kommutativität für Elementartensoren der Form

$$f = f_0 \otimes A\ ,\ g = g_0 \otimes B \quad (f_0 \in \mathcal{O}(D)\ ,\ g_0 \in \mathcal{O}(\tilde{D})\ ,\ A \in L(\mathcal{F}, \mathbb{C})\ ,\ B \in L(\mathbb{C}, \mathcal{F}))$$

zu überprüfen.

Dazu benötigen wir die folgenden Identitäten:

$$f_0(L_{T^*}) = L_{f_0(T^*)} \text{ und } g_0(R_T) = R_{g_0(T)},$$

die sich als Konsequenz der Eindeutigkeit des holomorphen Funktionalkalküls ergeben (siehe [**EP96**], Satz 5.2.4), denn die Abbildungen

$$\mathcal{O}(D) \to L(L(H))\ ,\ u \mapsto L_{u(T^*)} \text{ und } \mathcal{O}(\tilde{D}) \to L(L(H))\ ,\ v \mapsto R_{v(T)}$$

definieren Funktionalkalküle für L_{T^*} bzw. R_T, die folgendem spektralen Abbildungssatz genügen: Seien $v_1, \ldots, v_m \in \mathcal{O}(\tilde{D})$ und sei $v = (v_i)_{i=1}^m$. Dann gilt

$$\sigma(R_{v(T)}) = \sigma(v(T)) = v(\sigma(T)) = v(\sigma(R_T))$$

(analog für L_{T^*}), so daß der oben zitierte Eindeutigkeitssatz anwendbar ist.

Mit $f \bullet g(z,w) = f_0(z)g_0(w) \cdot (AB)(1)$ $(z \in D\ ,\ w \in \tilde{D})$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
(f \bullet g)(L_{T^*}, R_T)(1_H)h &= \left(f_0(L_{T^*})g_0(R_T) \cdot (AB)(1)\right)(1_H)h \\
&= L_{f_0(T^*)}R_{g_0(T)}(1_H)h \cdot (AB)(1) \\
&= f_0(T^*)g_0(T)h \cdot (AB)(1) \\
&= j^{-1}(f_0(T^*) \otimes A)(g_0(T) \otimes B)jh \\
&= j^{-1}f(T^*)g(T)jh \quad (h \in H),
\end{aligned}
$$

womit die Kommutativität des Diagramms bewiesen ist.

Schließlich sehen wir unter Benutzung der Identität $\tilde{c}(T^*) = c(T)^*$

$$
\begin{aligned}
1_H - \frac{1}{C}(L_{T^*}, R_T)(1_H) &= (\tilde{c} \bullet c)(L_{T^*}, R_T)(1_H) \\
&= j^{-1}\tilde{c}(T^*)c(T)j \\
&= j^{-1}c(T)^*c(T)j,
\end{aligned}
$$

woraus unmittelbar die Behauptung folgt. Es bleibt die Äquivalenz von (ii) und (iii) zu zeigen. Wir definieren

$$Y_{\mathcal{K}}(z) = k(z)^* \otimes 1_K = \tilde{c}(z) \otimes 1_K \quad (z \in D),$$

also ist $Y_{\mathcal{K}} \in \mathcal{O}(D, L(\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}, \mathbb{C} \otimes \mathcal{K}))$ und es gilt $i \circ Y_{\mathcal{K}}(z) = Z_{\mathcal{K}}(z) \quad (z \in D)$, wobei

$$i : \mathbb{C} \otimes \mathcal{K} \to \mathcal{K}\ ,\ (\zeta \otimes x) \mapsto \zeta x$$

ist; denn bekanntlich ist i unitär mit $i^*(x) = 1 \otimes x \quad (x \in \mathcal{K})$ und daher gilt

$$
\begin{aligned}
Y_{\mathcal{K}}(z)^* i^*(x) &= k(z)(1) \otimes x \\
&= d(z) \otimes x \\
&= Z_{\mathcal{K}}(z)^*(x) \quad (x \in \mathcal{K}).
\end{aligned}
$$

Nach Einsetzen von T^* in $Z_{\mathcal{K}}$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
Z_{\mathcal{K}}(T^*) &= (1_{\mathcal{H}} \otimes i)Y_{\mathcal{K}}(T^*) \\
&= (1_{\mathcal{H}} \otimes i)(\tilde{c}(T^*) \otimes 1_{\mathcal{K}}) \\
&= (1_{\mathcal{H}} \otimes i)(c(T)^* \otimes 1_{\mathcal{K}}),
\end{aligned}
$$

und es folgt $\|Z_{\mathcal{K}}(T^*)\| = \|c(T)\|$, was den Beweis abschließt.

□

Wir benötigen ferner das folgende Lemma.

LEMMA 3.5. *Seien G_i $(i \in \{1 \ldots 4\})$ Hilberträume, und sei*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in L(G_1 \oplus G_2, G_3 \oplus G_4)$$

eine Kontraktion. Dann ist für jede strikte Kontraktion $Z : G_3 \to G_1$ auch

$$d + c(1_{G_1} - Za)^{-1}Zb \in L(G_2, G_4)$$

eine Kontraktion.

BEWEIS. Sei $y \in G_2$. Wir setzen $x = (1_{G_1} - Za)^{-1}Zby$, also $x \in G_1$. Wegen

$$\begin{aligned} Zax + Zby &= Za(1_{G_1} - Za)^{-1}Zby + Zby \\ &= (Za + 1_{G_1} - Za)(1_{G_1} - Za)^{-1}Zby \\ &= x \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{pmatrix} x \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Zax+Zby \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & 1_{G_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

und es folgt

$$\|x\|^2 + \|cx+dy\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$$

oder

$$\|(d + c(1_{G_1} - Za)^{-1}Zb)y\| = \|dy + cx\| \leq \|y\|,$$

was zu zeigen war.

□

Wir können nun den angestrebten Satz formulieren.

SATZ 3.6. *Es gelte Situation (B). Sei $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}, \mathcal{H} \otimes \mathcal{E}_*)$ mit $\|M_\phi\| \leq 1$. Dann liegt ϕ in $\mathcal{S}_1^*(\frac{1}{C}, D, L(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*))$.*

BEWEIS. Nach Satz 3.3 finden wir einen Hilbertraum $\mathcal{K}$ und eine Kontraktion

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in L(\mathcal{K} \oplus \mathcal{E}, (\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}) \oplus \mathcal{E}_*),$$

so daß

$$\phi(z) = d + c(1_{\mathcal{K}} - Z_{\mathcal{K}}(z)a)^{-1}Z_{\mathcal{K}}(z)b \quad (z \in D)$$

gilt. Mit $Z_{\mathcal{K}}$ ist dann auch ϕ holomorph. Sei nun H ein beliebiger (separabler) Hilbertraum, und sei $T^* \in \mathcal{C}_0(H, \frac{1}{C}, D)$. Dann ergibt sich

$$\phi(T) = (1_H \otimes d) + (1_H \otimes c)(1_{H \otimes \mathcal{K}} - Z_{\mathcal{K}}(T)(1_H \otimes a))^{-1}Z_{\mathcal{K}}(T)(1_H \otimes b).$$

Nun ist

$$\begin{pmatrix} 1_H \otimes a & 1_H \otimes b \\ 1_H \otimes c & 1_H \otimes d \end{pmatrix} \in L((H \otimes \mathcal{K}) \oplus (H \otimes \mathcal{E}), (H \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{K}) \oplus (\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}_*))$$

unitär äquivalent zu U, also kontraktiv, und $Z_{\mathcal{K}}(T) \in L(\mathcal{H} \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{K}, \mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ definiert eine strikte Kontraktion nach Lemma 3.4.

Nach Lemma 3.5 ist dann auch $\phi(T)$ eine Kontraktion, was zu zeigen war.

□

Um die Umkehrung von Satz 3.6 beweisen zu können, brauchen wir eine Zusatzbedingung, die eine bessere Kontrollierbarkeit des spektralen Verhaltens von strikt $(\frac{1}{C}, D)$-positiven Operatoren garantiert.

DEFINITION 3.7. *Sei $D \subset \mathbb{C}^n$ offen, und sei $K : D \times D \to \mathbb{C}$ ein Nevanlinna-Pick-Kern. K heißt P-Nevanlinna-Pick-Kern, falls $\frac{1}{K}$ ein Polynom in $z, \overline{w}$ ist. Ein funktionaler Hilbertraum $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}^D$ heißt P-Nevanlinna-Pick-Raum, falls sein reproduzierender Kern ein P-Nevanlinna-Pick-Kern ist. In diesem Fall nennen wir $\mathcal{H}$ maximal, falls*

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n \ ; \ \frac{1}{K}(z,z) > 0\}$$

gilt.

Das folgende Lemma faßt einige wichtige Merkmale von P-Nevanlinna-Pick-Räumen zusammen, insbesondere sehen wir, daß für einen P-Nevanlinna-Pick-Kern K die Abbildung $1 - \frac{1}{K}$ schöne Faktorisierungseigenschaften hat.

LEMMA 3.8. *Sei $D \subset \mathbb{C}^n$ offen.*

(a) Sei $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}^D$ ein P-Nevanlinna-Pick-Raum mit reproduzierendem Kern K. Dann existiert eine Faktorisierung $d = (d_i)_{i=1}^N : D \to \mathbb{C}^N \quad (N \in \mathbb{N})$ von $1 - \frac{1}{K}$ mit der Eigenschaft daß die Funktionen $D \to \mathbb{C} \ , \ z \mapsto d_i(z) \quad (1 \leq i \leq N)$ Polynome in $\overline{z}$ sind. Es gilt dann

$$1 - \frac{1}{K}(z,w) = \langle d(w), d(z) \rangle \quad (z, w \in \mathbb{C}^n),$$

und es ist

$$D \subset \{z \in \mathbb{C}^n \ ; \ \frac{1}{K}(z,z) > 0\} = \{z \in \mathbb{C}^n \ ; \ \|d(z)\| < 1\},$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn $\mathcal{H}$ maximal ist.

(b) Für jedes Tupel $p = (p_i)_{i=1}^N \quad (N \in \mathbb{N})$ von Polynomen in n Veränderlichen definiert

$$D \times D \to \mathbb{C} \ , \ (z,w) \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{N} p_i(\overline{w}) \tilde{p_i}(z) \right)^j = \frac{1}{1 - \langle p(\overline{w}), p(\overline{z}) \rangle}$$

einen P-Nevanlinna-Pick-Kern auf

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n \ ; \ \|(p(\overline{z})\| < 1\}.$$

(c) *Sei $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}^D$ ein P-Nevanlinna-Pick-Raum mit reproduzierendem Kern K und sei $d : D \to \mathbb{C}^N$ eine Faktorisierung wie oben. Es sei*

$$\hat{D} = \{z \in \mathbb{C}^n \ ; \ \|d(z)\| < 1\} \supset D.$$

Dann kann K zu einem P-Nevanlinna-Pick-Kern $\hat{K}$ auf $\hat{D} \times \hat{D}$ fortgesetzt werden. Der zu $\hat{K}$ gehörende funktionale Hilbertraum $\hat{\mathcal{H}}$ ist dann ein maximaler P-Nevanlinna-Pick-Raum.

BEWEIS.

(a) Sei zunächst

$$\mathcal{F}' = LH\{(1 - \frac{1}{K})(\cdot, w) \ ; \ w \in D\}.$$

Dann existiert ein $N' \in \mathbb{N}$, so daß $\mathcal{F}'$ ein Teilraum des Raumes der Polynome in n Variablen vom Grad höchstens N' ist, also endlichdimensional, also vollständig (auch bezüglich der im Beweis von Satz 1.6 definierten kanonischen Norm). $\mathcal{F}'$ ist somit schon der funktionale Hilbertraum mit reproduzierendem Kern $1 - \frac{1}{K}$. Sei $\delta_z : \mathcal{F}' \to \mathbb{C}$ die Punktauswertung in $z \in D$. Dann definiert bekanntlich

$$d' : D \to \mathcal{F}' \ , \ z \mapsto \delta_z^*(1)$$

zusammen mit $\mathcal{F}'$ eine Faktorisierung von $1 - \frac{1}{K}$, also

$$(1 - \frac{1}{K})(z, w) = \langle d'(w), d'(z)\rangle \quad (z, w \in D).$$

Sei nun $u : \mathcal{F}' \to \mathbb{C}^N$ ($N \in \mathbb{N}$ geeignet) unitär. Natürlich definiert auch

$$d = (d_i)_{i=1}^N : D \to \mathcal{F} = \mathbb{C}^N \ , \ z \mapsto u \circ d'(z)$$

eine Faktorisierung von $1 - \frac{1}{K}$ mit

$$\begin{aligned} \overline{d_i(z)} &= \langle e_i, d(z)\rangle \\ &= \langle u^{-1} e_i, d'(z)\rangle \\ &= (u^{-1} e_i)(z) \quad (z \in D), \end{aligned}$$

wobei e_i den i-ten Einheitsvektor in $\mathbb{C}^N$ bezeichnet. Darum liegen die Funktionen $\overline{d_i}$ $(1 \le i \le N)$ in $\mathcal{F}'$, sind also Einschränkungen von Polynomen auf D. Die Abbildungen

$$C^n \times C^n \to \mathbb{C} \ , \ (z, w) \mapsto 1 - \frac{1}{K}(z, \overline{w})$$

und

$$C^n \times C^n \to \mathbb{C} \ , \ (z, w) \mapsto \langle d(\overline{w}), d(z)\rangle$$

sind holomorphe Abbildungen (sogar Polynome), die auf der offenen Menge $D \times \tilde{D}$ übereinstimmen, sind also nach dem Identitätssatz schon überall gleich. Die weiteren Behauptungen folgen aus der Gleichheit

$$\|d(z)\|^2 = \langle d(z), d(z)\rangle = 1 - \frac{1}{K}(z, z) \quad (z \in D).$$

(b) Das ist klar.

(c) Es existieren $N \in \mathbb{N}$ und Polynome $(p_i)_{i=1}^N$, so daß

$$K(z,w) = \sum_{j=0}^{\infty} (\sum_{i=1}^{N} p_i(\overline{w})\tilde{p_i}(z))^j \quad (z,w \in D)$$

gilt. Diese Reihe konvergiert natürlich auf ganz $\hat{D}$.

□

Bemerkung. Man kann natürlich auch direkt mit Methoden der Linearen Algebra beweisen, daß eine positiv definite Abbildung

$$\gamma : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C},$$

die zusätzlich ein Polynom in z und $\overline{w}$ ist, eine Faktorisierung der Form

$$d : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^N \ , \ z \mapsto (p_i(\overline{z}))_{i=1}^N$$

mit geeignetem $N \in \mathbb{N}$ und endlich vielen Polynomen p_i besitzt.

Ferner wird die folgende Aussage über das Taylorspektrum eines vertauschenden Tupels benötigt.

Lemma 3.9. *Seien $q = (q_i)_{i=1}^N$ Polynome in n Veränderlichen, und sei $T \in L(H)^n$ ein vertauschendes Tupel (H ein Hilbertraum). Es bezeichne $q(T)$ die Abbildung*

$$H \to H^N \ , \ h \mapsto (q_i(T)h)_{i=1}^N.$$

Dann gilt für das Taylorspektrum von T

$$\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C}^n \ ; \ \|q(z)\| \leq \|q(T)\|\}.$$

beweis. Wir bezeichnen mit S das vertauschende N-Tupel $(q_i(T))_{i=1}^N$. Wir zeigen zunächst, daß das gemeinsame approximative Punktspektrum $\sigma_\pi(S)$ von S in $\|q(T)\| \cdot \overline{\mathbb{B}_N}$ enthalten ist. Dazu sei $z \in \sigma_\pi(S)$. Dann existiert eine Folge (h_j) von Einheitsvektoren in H, so daß

$$(z_i - S_i)h_j \xrightarrow{j} 0 \quad (1 \leq i \leq N)$$

gilt. Es folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} |z_i|^2 \quad &= \quad \sum_{i=1}^{N} \|z_i h_j\|^2 \\
&\leq \quad \sum_{i=1}^{N} (\|(z_i - q_i(T))h_j\| + \|q_i(T)h_j\|)^2 \\
&= \quad \sum_{i=1}^{N} (\|(z_i - q_i(T))h_j\|^2 + 2\|(z_i - q_i(T))h_j\|\|q_i(T)h_j\|) + \sum_{i=1}^{N} \|q_i(T)h_j\|^2 \\
&= \quad \sum_{i=1}^{N} (\|(z_i - q_i(T))h_j\|^2 + 2\|(z_i - q_i(T))h_j\|\|q_i(T)h_j\|) + \|q(T)h_j\|^2 \\
&\leq \quad \sum_{i=1}^{N} (\|(z_i - S_i)h_j\|^2 + 2\|(z_i - S_i)h_j\|\|S_i\|) + \|q(T)\|^2 \\
&\xrightarrow{j} \quad \|q(T)\|^2.
\end{aligned}$$

Nun ist das Taylorspektrum $\sigma(S)$ von S in der polynomkonvexen Hülle von $\sigma_\pi(S)$ enthalten (vergleiche [**SZ74**]). Da $\|q(T)\| \cdot \overline{\mathbb{B}_N}$ polynomkonvex (sogar konvex) ist, ist $\sigma(S) \subset \|q(T)\| \cdot \overline{\mathbb{B}_N}$. Nach dem spektralen Abbildungssatz ist

$$q(\sigma(T)) = \sigma(S) \subset \|q(T)\| \cdot \overline{\mathbb{B}_N},$$

was behauptet war. □

Wir legen nun folgende Situation fest.

SITUATION (C). *Sei $D \subset \mathbb{C}^n$ offen, und sei $\mathcal{H}$ ein maximaler P-Nevanlinna-Pick-Raum über D mit reproduzierendem Kern K. Mit der bereits früher eingeführten Notation*

$$C : D \times \tilde{D} \to \mathbb{C}\ ,\ (z,w) \mapsto K(z,\overline{w})$$

sehen wir, daß $\frac{1}{C}$ ein Polynom ist. Sei

$$d : D \to \mathbb{C}^N\ ,\ z \mapsto (p_i(\overline{z}))_{i=1}^N$$

eine Faktorisierung von $1 - \frac{1}{K}$ mit Polynomen p_i $(1 \leq i \leq N)$. Ferner seien $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_*$ beliebige Hilberträume.

Damit folgt sofort

$$\frac{1}{C}(z,w) = 1 - (1 - \frac{1}{K}(z,\overline{w})) = 1 - \sum_{i=1}^{N} \tilde{p_i}(z) p_i(w) \quad (z \in D\ ,\ w \in \tilde{D}).$$

Wir können dann zu jedem kommutierenden Tupel $T \in L(H)^n$ (H ein Hilbertraum), ohne Einschränkungen an sein Spektrum, vermöge des polynomiellen Funktionalkalküls das Tupel (L_{T^*}, R_T) in $\frac{1}{C}$ einsetzen. Es gilt

$$\frac{1}{C}(L_{T^*}, R_T)(1) = 1 - \sum_{i=1}^{N} \tilde{p_i}(T^*) p_i(T) = 1 - \sum_{i=1}^{N} p_i(T)^* p_i(T).$$

Das gestattet eine einfachere Charakterisierung $(\frac{1}{C}, D)$-positiver Tupel.

LEMMA 3.10. *In Situation (C) sei H ein Hilbertraum und $T \in L(H)^n$ ein vertauschendes Tupel. Dann sind äquivalent:*

(i) T ist strikt $(\frac{1}{C}, D)$-positiv.
(ii) Die Abbildung $p(T) : H \to H^N\ ,\ h \mapsto (p_i(T)h)_{i=1}^N$ ist strikt kontraktiv.

BEWEIS. Nach obigen Vorbemerkungen ist die Implikation $(i) \Rightarrow (ii)$ klar. Für die umgekehrte Richtung bleibt zu zeigen, daß unter der Voraussetzung (ii) das Spektrum von T in $\tilde{D}$ enthalten ist. Das ist jedoch klar, da nach Lemma 3.9

$$\begin{aligned} \sigma(T) &\subset \{z \in \mathbb{C}^n\ ;\ \|(p_i(z))_{i=1}^N\| \leq \|p(T)\|\} \\ &\subset \{z \in \mathbb{C}^n\ ;\ \|(p_i(z))_{i=1}^N\| < 1\} \\ &= \{\overline{z}\ ;\ z \in \mathbb{C}^n\ ,\ \|d(z)\| < 1\} \\ &= \tilde{D} \end{aligned}$$

aufgrund der Maximalität von $\mathcal{H}$ gilt. □

Wir formulieren nun die Umkehrung von Satz 3.6.

SATZ 3.11. *Es gelte Situation (C). Sei* $\phi \in \mathcal{S}_1^*(\frac{1}{C}, D, L(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*))$. *Dann ist*

$$\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}, \mathcal{H} \otimes \mathcal{E}_*)$$

und es gilt $\|M_\phi\| \leq 1$.

BEWEIS. Aus notationstechnischen Gründen vertauschen wir die Rollen von $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}_*$. Wir nehmen also an, daß $\phi \in \mathcal{S}_1^*(\frac{1}{C}, D, L(\mathcal{E}_*, \mathcal{E}))$ gilt.

Wir wollen zeigen, daß die Abbildung

$$\gamma : D \times D \to L(\mathcal{E}) \ , \ (z, w) \mapsto K(z, w)(1 - \phi(z)\phi(w)^*)$$

positiv definit ist. Denn nach Satz 1.11 folgt daraus die Behauptung.

Wir wählen eine Orthonormalbasis $(e_i)_{i \in I}$ von $\mathcal{E}$. Für eine endliche Teilmenge $s \subset I$ sei $\mathcal{E}_s = LH\{e_i \ ; \ i \in s\}$ und P_s die Orthogonalprojektion von $\mathcal{E}$ auf $\mathcal{E}_s$. Die Menge $\mathfrak{F}$ aller endlichen Teilmengen von I ist durch die Mengeninklusion gerichtet, $(P_s)_{s \in \mathfrak{F}}$ ist dann ein Netz, welches in der starken Operatortopologie gegen $1_\mathcal{E}$ konvergiert.

(1) Wir bemerken zunächst, daß es genügt, die folgende Aussage zu zeigen: Für alle endlichen Teilmengen Ω von D und alle $s \in \mathfrak{F}$ ist die Abbildung

$$\gamma_{\Omega,s} : \Omega \times \Omega \to L(\mathcal{E}_s) \ , \ (z, w) \mapsto K(z, w)P_s(1_\mathcal{E} - \phi(z)\phi(w)^*)_{|\mathcal{E}_s} = P_s\gamma(z, w)_{|\mathcal{E}_s}$$

positiv definit. Denn seien $(z_i)_{i=1}^m \subset D$ und $(x_i)_{i=1}^m \subset \mathcal{E}$ endliche Folgen. Sei $\Omega = \{z_1, \ldots, z_m\}$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \langle \gamma(z_j, z_i)x_i, x_j \rangle &= \lim_{s \in \mathfrak{F}} \sum_{i,j} \langle \gamma(z_j, z_i)P_s x_i, P_s x_j \rangle \\ &= \lim_{s \in \mathfrak{F}} \sum_{i,j} \langle P_s\gamma(z_j, z_i)P_s x_i, P_s x_j \rangle \\ &= \lim_{s \in \mathfrak{F}} \sum_{i,j} \langle \gamma_{\Omega,s}(z_j, z_i)P_s x_i, P_s x_j \rangle \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

(2) Sei also $\Omega \subset D$ endlich, und sei $s \in \mathfrak{F}$. Es sei V der Vektorraum aller Abbildungen von $\Omega \times \tilde{\Omega}$ nach $L(\mathcal{E}_s)$, versehen mit der Supremumsnorm. Dann ist V endlichdimensional, da Ω endlich und auch $L(\mathcal{E}_s)$ endlichdimensional ist. Ferner sei

$$\mathcal{C} = \{f \in V \ ; \ \Omega \times \Omega \to L(\mathcal{E}_s) \ , \ (z, w) \mapsto K(z, w)f(z, \overline{w}) \text{ positiv definit } \}.$$

Somit ist $\mathcal{C}$ ein abgeschlossener spitzer konvexer Kegel in V. Die Abgeschlossenheit folgt direkt aus der Definition der Supremumsnorm. Zum Beweis der Spitzheit sei $f \in \mathcal{C}$, so daß auch $-f$ in $\mathcal{C}$ liegt. Da dann $(z, w) \mapsto \pm K(z, w)f(z, \overline{w})$ positiv definit ist, folgt für alle $z \in \Omega$, $x \in \mathcal{E}_s$

$$\langle K(z, z)f(z, \overline{z})x, x \rangle \geq 0 \text{ und } \langle K(z, z)f(z, \overline{z})x, x \rangle \leq 0,$$

also $\langle K(z, z)f(z, \overline{z})x, x \rangle = 0$. Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung (vergleiche Satz 1.3) folgt für $z, w \in \Omega$ und $x, y \in \mathcal{E}_s$

$$|\langle K(z, w)f(z, \overline{w})x, y \rangle|^2 \leq \langle K(z, z)f(z, \overline{z})y, y \rangle \langle K(w, w)f(w, \overline{w})x, x \rangle = 0.$$

Da aber $K(z,w) \neq 0$ für alle $z, w \in D$ ist, folgt $f = 0$. Nach Definition liegt die Abbildung

$$h_{\Omega,s} : \Omega \times \tilde{\Omega} \to L(\mathcal{E}_s) \ , \ (z,w) \mapsto P_s(1 - \phi(z)\phi(\overline{w})^*)_{|\mathcal{E}_s}$$

in V. Wir müssen zeigen, daß $h_{\Omega,s} \in \mathcal{C}$ gilt. Dazu verwenden wir ein Trennungsargument. Wir zeigen, daß für alle $L \in V'$ (stetiger Dualraum), die $Re\ L(f) > 0$ für $f \in \mathcal{C}\backslash\{0\}$ erfüllen, schon $Re\ L(h_{\Omega,s}) \geq 0$ folgt. Denn da V endlichdimensional ist, existiert nach [**Kle55**], Satz 2.5, falls $h_{\Omega,s} \notin \mathcal{C}$, eine stetige Linearform L auf V mit $Re\ L(f) > 0$ für $f \in \mathcal{C}\backslash\{0\}$ und $Re\ L(h_{\Omega,s}) < 0$. Sei also im folgenden $L \in V'$ wie oben beschrieben.

(3) Zu $f \in V$ definieren wir

$$f^* : \Omega \times \tilde{\Omega} \to L(\mathcal{E}_s) \ , \ (z,w) \mapsto f(\overline{w}, \overline{z})^*,$$

also gilt $f^* \in V$ und $(f^*)^* = f$. Ferner sei

$$L_1 : V \to \mathbb{C} \ , \ f \mapsto \frac{1}{2}(L(f) + \overline{L(f^*)}),$$

also $L_1 \in V'$. Für $f \in V$ mit $f = f^*$ ist offenbar $L_1(f) = Re\ L(f)$. Weiter sei H der Raum aller Abbildungen von $\tilde{\Omega}$ nach $L(\mathcal{E}_s, \mathbb{C})$, also ist H endlichdimensional. Wir wollen nun H mit einem Skalarprodukt versehen. Zu $f, g \in H$ sei

$$f \times g : \Omega \times \tilde{\Omega} \to L(\mathcal{E}_s) \ , \ (z,w) \mapsto f(\overline{z})^* g(w),$$

also $f \times g \in V$. Man rechnet nach, daß für $f, g \in H$ die Identität $f \times g = (g \times f)^*$ gilt. Wir definieren nun

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{C} \ , \ \langle f, g \rangle = L_1(g \times f)$$

und behaupten, daß $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf H ist. Die Linearität im ersten Argument ist klar. Es gilt weiter

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= L_1(g \times f) \\ &= \frac{1}{2}(L(g \times f) + \overline{L((g \times f)^*)}) \\ &= \overline{L_1((g \times f)^*)} \\ &= \overline{L_1(f \times g)} \\ &= \overline{\langle g, f \rangle} \quad (f, g \in H). \end{aligned}$$

Somit ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sesquilinear. Sei nun $f \in H$. Dann ist die Abbildung

$$\Omega \times \Omega \to L(\mathcal{E}_s) \ , \ (z,w) \mapsto f \times f(z, \overline{w})$$

positiv definit, denn für endliche Folgen $(z_i) \subset \Omega$ und $(x_i) \subset \mathcal{E}_s$ gilt

$$\begin{aligned} \sum \langle f \times f(z_j, \overline{z_i}) x_i, x_j \rangle &= \sum \langle f(\overline{z_i}) x_i, f(\overline{z_j}) x_j \rangle \\ &= \| \sum f(\overline{z_i}) x_i \|^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Daher ist die Abbildung

$$\Omega \times \Omega \to L(\mathcal{E}_s) \ , \ (z,w) \mapsto K(z,w)(f \times f)(z, \overline{w})$$

positiv definit als Produkt zweier positiv definiter Funktionen, also liegt $f \times f$ in $\mathcal{C}$. Daher ist

$$\langle f, f\rangle = L_1(f \times f) = Re\ L(f \times f) \geq 0,$$

und aufgrund der Wahl von L gilt $\langle f, f\rangle = 0$ genau dann, wenn $f \times f = 0$ ist. Wegen

$$|f(z)x|^2 = \langle f(z)^* f(z)x, x\rangle = \langle f \times f(\overline{z}, z)x, x\rangle \quad (z \in \tilde{\Omega}\ ,\ x \in \mathcal{E}_s)$$

ist das äquivalent zu $f = 0$, weswegen $\langle\cdot,\cdot\rangle$ positiv definit ist. Mit diesem Skalarprodukt ist H also ein Hilbertraum.

(4) Die Multiplikationen mit den Koordinatenfunktionen

$$T_i : H \to H\ ,\ T_i(f)(z) = z_i f(z) \quad (1 \leq i \leq n)$$

sind stetig, da H endlichdimensional ist. Wir werden zeigen, daß das Tupel $T = (T_i)_{i=1}^n$ strikt $(\frac{1}{C}, D)$-positiv ist. Sei also $f \in H$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N ((p_i \cdot f) \times (p_i \cdot f))(z, \overline{w}) &= \sum_{i=1}^N \overline{p_i(\overline{z})} f(\overline{z})^* p_i(\overline{w}) f(\overline{w}) \\
&= \sum_{i=1}^N \tilde{p_i}(z) p_i(\overline{w})(f \times f)(z, \overline{w}) \\
&= (1 - \frac{1}{K})(z, w)(f \times f)(z, \overline{w}) \quad (z, w \in \Omega).
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}
&K(z,w)(f \times f - \sum_{i=1}^N (p_i \cdot f) \times (p_i \cdot f))(z, \overline{w}) \\
&= K(z,w)\left(f \times f(z, \overline{w}) - f \times f(z, \overline{w}) + \frac{1}{K}(z,w)(f \times f)(z, \overline{w})\right) \\
&= f \times f(z, \overline{w}) \quad (z, w \in \Omega).
\end{aligned}$$

Wie wir bereits sahen, ist die Abbildung

$$\Omega \times \Omega \to L(\mathcal{E}_s)\ ,\ (z, w) \mapsto f \times f(z, \overline{w})$$

positiv definit, so daß $f \times f - \sum_{i=1}^N (p_i \cdot f) \times (p_i \cdot f)$ in $\mathcal{C}$ liegt. Wir sehen außerdem, daß $f \times f - \sum_{i=1}^N (p_i \cdot f) \times (p_i \cdot f) = 0$ genau dann gilt, wenn $f \times f(z, \overline{w}) = 0$ für alle $z, w \in \Omega$ ist, also genau dann, wenn $f = 0$ ist. Schließlich folgt

$$\begin{aligned}
\|f\|^2 - \sum_{i=1}^N \|p_i(T)f\|^2 &= \|f\|^2 - \sum_{i=1}^N \|p_i \cdot f\|^2 \\
&= Re\ L((f \times f) - \sum_{i=1}^N (p_i \cdot f) \times (p_i \cdot f)) \\
&> 0 \quad (\text{ falls } f \neq 0).
\end{aligned}$$

Da H endlichdimensional ist, folgt, daß die Abbildung

$$H \to H^N\ ,\ f \mapsto (p_i(T)f)_{i=1}^N$$

Norm kleiner 1 hat, was nach Lemma 3.10 dazu äquivalent ist, daß T strikt $(\frac{1}{C}, D)$-positiv ist.

(5) Wir zeigen nun einige Hilfsbehauptungen. Wir beobachten zunächst, daß für $u \in \mathcal{O}(\tilde{D})$

$$(u(T)f)(z) = u(z)f(z) \quad (f \in H\ ,\ z \in \tilde{\Omega})$$

gilt (man beachte, daß $\sigma(T) \subset \tilde{D}$ ist). Zum Beweis fixieren wir $z \in \tilde{\Omega}$. Es bezeichne $\delta_z : H \to L(\mathcal{E}_s, \mathbb{C})$ die (automatisch stetige) Punktauswertung in z und S bezeichne das vertauschende Tupel $(z_i \cdot 1_{L(\mathcal{E}_s,\mathbb{C})})_{i=1}^n \in L(L(\mathcal{E}_s, \mathbb{C}))^n$. Offenbar gilt

$$\delta_z T_i(f) = z_i f(z) = S_i \delta_z(f) \quad (f \in H\ ;\ 1 \leq i \leq n).$$

Dann folgt aus der Vertauschungseigenschaft des holomorphen Kalküls

$$(u(T)f)(z) = \delta_z u(T)(f) = u(S)\delta_z(f) = u(z)f(z) \quad (f \in H).$$

Nun behaupten wir, daß für $u, v \in \mathcal{O}(\tilde{D}, L(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*))$, $f, g \in H$ und $x, y \in \mathcal{E}$ folgende Gleichheit gilt:

$$\langle u(T)(f \otimes x), v(T)(g \otimes y)\rangle = L_1((z,w) \mapsto \langle u(w)x, v(\overline{z})y\rangle (g \times f)(z,w)).$$

Da bei festgehaltenem f, g, x, y beide Seiten der Gleichung stetige sesquilineare Abbildungen in u, v definieren, genügt es, die Behauptung für Elementartensoren der Form $u = u_0 \otimes A\ , v = v_0 \otimes B \quad (u, v \in \mathcal{O}(\tilde{D})\ ,\ A, B \in L(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*))$ zu überprüfen:

$$\begin{aligned}
&\langle u(T)(f \otimes x), v(T)(g \otimes y)\rangle \\
&= \langle u_0(T)f, v_0(T)g\rangle \langle Ax, By\rangle \\
&= L_1((v_0(T)g) \times (u_0(T)f))\langle Ax, By\rangle \\
&= L_1\left((z,w) \mapsto (v_0(T)g)(\overline{z})^*(u_0(T)f)(w)\right)\langle Ax, By\rangle \\
&= L_1((z,w) \mapsto \overline{v_0(\overline{z})} g(\overline{z})^* u_0(w) f(w))\langle Ax, By\rangle \\
&= L_1((z,w) \mapsto (g \times f)(z,w)\langle u_0(w)Ax, v_0(\overline{z})By\rangle) \\
&= L_1((z,w) \mapsto \langle u(w)x, v(\overline{z})y\rangle (g \times f)(z,w)).
\end{aligned}$$

(6) Mit dem bisher Gezeigten können wir jetzt den Beweis abschließen. Für $i \in s$ sei $f_i \in H$ definiert durch

$$f_i : \tilde{\Omega} \to L(\mathcal{E}_s, \mathbb{C})\ ,\ f_i(z)x = \langle x, e_i\rangle.$$

Nach Voraussetzung gilt $\tilde{\phi} \in \mathcal{S}_1(\frac{1}{C}, D, L(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*))$. Mit der eben gezeigten Hilfsbehauptung folgt

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|\sum_{i \in s} f_i \otimes e_i\|^2 - \|\tilde{\phi}(T)(\sum_{i \in s} f_i \otimes e_i)\|^2 \\
&= \sum_{i \in s}\langle f_i, f_i\rangle - \sum_{i,j \in s}\langle \tilde{\phi}(T)(f_i \otimes e_i), \tilde{\phi}(T)(f_j \otimes e_j)\rangle \\
&= \sum_{i \in s}\langle f_i, f_i\rangle - \sum_{i,j \in s} L_1((z,w) \mapsto \langle \tilde{\phi}(w)e_i, \tilde{\phi}(\overline{z})e_j\rangle (f_j \times f_i)(z,w)) \\
&= L_1((z,w) \mapsto \sum_{i,j \in s}\langle (1 - \tilde{\phi}(\overline{z})^* \tilde{\phi}(w))e_i, e_j\rangle (f_j \times f_i)(z,w)) \\
&= L_1((z,w) \mapsto \sum_{i,j \in s}\langle (1 - \phi(z)\phi(\overline{w})^*)e_i, e_j\rangle (f_j \times f_i)(z,w)).
\end{aligned}$$

Schließlich gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j\in s} \langle (1-\phi(z)\phi(\overline{w})^*)e_i, e_j\rangle (f_j \times f_i)(z,w)x \\
&= \sum_{i,j\in s} \langle (1-\phi(z)\phi(\overline{w})^*)e_i, e_j\rangle \langle x, e_i\rangle e_j \\
&= \sum_{j\in s} \langle (1-\phi(z)\phi(\overline{w})^*) \sum_{i\in s} \langle x, e_i\rangle e_i, e_j\rangle e_j \\
&= P_s(1-\phi(z)\phi(\overline{w})^*)x \\
&= h_{\Omega,s}(z,w)x \quad (z\in\Omega\ ,\ w\in\tilde{\Omega}\ ,\ x\in\mathcal{E}_s).
\end{aligned}$$

Zusammengenommen ergibt sich also $L_1(h_{\Omega,s}) \geq 0$. Wegen

$$\begin{aligned}
h^*_{\Omega,s}(z,w) &= h_{\Omega,s}(\overline{w},\overline{z})^* \\
&= (P_s(1-\phi(\overline{w})\phi(z)^*)_{|\mathcal{E}_s})^* \\
&= (P_s(1-\phi(z)\phi(\overline{w})^*)_{|\mathcal{E}_s}) \\
&= h_{\Omega,s}(z,w) \quad (z\in\Omega\ ,\ w\in\tilde{\Omega})
\end{aligned}$$

gilt $h_{\Omega,s} = h^*_{\Omega,s}$ und folglich $Re\ L(h_{\Omega,s}) = L_1(h_{\Omega,s}) \geq 0$, was zu zeigen war.

□

Aus Satz 3.6 und Satz 3.11 erhalten wir folgendes Ergebnis.

SATZ 3.12. *Sei $D \subset \mathbb{C}^n$ offen, und sei $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}^D$ ein maximaler P-Nevanlinna-Pick-Raum mit reproduzierendem Kern K. Es sei*

$$C(z,w) = K(z,\overline{w}) \ (z\in D\ ,\ w\in\tilde{D}).$$

Ferner seien $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}_*$ beliebige Hilberträume. Dann stimmen $\mathcal{S}^*(\frac{1}{C}, D, L(\mathcal{E},\mathcal{E}_*))$ und $\mathcal{M}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{E}, \mathcal{H}\otimes\mathcal{E}_*)$ als normierte Räume überein.

BEWEIS. $\mathcal{S}^*(\frac{1}{C}, D, L(\mathcal{E},\mathcal{E}_*))$ und $\mathcal{M}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{E}, \mathcal{H}\otimes\mathcal{E}_*)$ sind zwei normierte Räume mit gleicher abgeschlossener Einheitskugel. Dann müssen sie auch als normierte Räume übereinstimmen. □

KAPITEL 4

Commutant-Lifting auf Nevanlinna-Pick-Räumen

1. Potenzen von Nevanlinna-Pick-Kernen

Im bisherigen Verlauf der Arbeit wurden Eigenschaften von Nevanlinna-Pick-Kernen und den zugehörigen funktionalen Hilberträumen betrachtet. Das Standardbeispiel eines solchen Hilbertraumes ist der Raum H^2_n, der funktionale Hilbertraum mit reproduzierendem Kern

$$\kappa_n : \mathbb{B}_n \times \mathbb{B}_n \to \mathbb{C}\ ,\ (z,w) \mapsto \frac{1}{1 - \langle z, w \rangle}.$$

Es treten in natürlicher Weise jedoch auch funktionale Hilberträume auf, deren Kerne Potenzen von κ_n sind. Etwa ist der Abschluß der Polynome in n Variablen in der Norm von $L^2(\sigma)$, wobei σ das Oberflächenmaß auf dem Rand der Kugel bezeichnet, via Poissontransformation gerade der Hardyraum, das heißt der funktionale Hilbertraum über $\mathbb{B}_n$ mit Kern κ_n^n. Während κ_n ein Nevanlinna-Pick-Kern ist, ist dies für Potenzen von κ_n nicht mehr der Fall. Es erscheint daher sinnvoll, auch solche funktionalen Hilberträume in unsere Überlegungen mit einzubeziehen, deren reproduzierende Kerne Potenzen von Nevanlinna-Pick-Kernen sind.

Für einen funktionalen Hilbertraum $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}^X$ mit reproduzierendem Kern

$$K : X \times X \to \mathbb{C}$$

und $m \in \mathbb{N}$ schreiben wir

$$K_m : X \times X \to \mathbb{C}\ ,\ (\lambda, \mu) \mapsto K(\lambda, \mu)^m.$$

Dann ist K_m als Produkt von positiv definiten Abbildungen wieder positiv definit, also reproduzierender Kern eines eindeutig bestimmten funktionalen Hilbertraums, den wir mit $\mathcal{H}_m$ bezeichnen.

Wir notieren zunächst einige grundlegende Eigenschaften von funktionalen Hilberträumen, die zu Potenzen ein und desselben Kernes gehören.

Lemma 4.1. *Seien $\mathcal{E}, \mathcal{E}_*$ Hilberträume und $l, m \in \mathbb{N}$ mit $l \leq m$.*

(a) Es sei $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}^X$ ein funktionaler Hilbertraum. Dann ist

$$\mathcal{M}(\mathcal{H}_l \otimes \mathcal{E}, \mathcal{H}_l \otimes \mathcal{E}_*) \subset \mathcal{M}(\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{E}, \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{E}_*),$$

und die Einbettung

$$\mathcal{M}(\mathcal{H}_l \otimes \mathcal{E}, \mathcal{H}_l \otimes \mathcal{E}_*) \hookrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{E}, \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{E}_*)$$

ist kontraktiv.

(b) Sei $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}^X$ nun ein Nevanlinna-Pick-Raum. Dann gilt

$$\mathcal{H}_l \otimes \mathcal{E} \subset \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{E},$$

und die Einbettung

$$\mathcal{H}_l \otimes \mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{E}$$

ist kontraktiv.

BEWEIS.

(a) Ist $\psi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_l \otimes \mathcal{E}, \mathcal{H}_l \otimes \mathcal{E}_*)$ und K der reproduzierende Kern von $\mathcal{H}$, so ist nach Satz 1.11 die Abbildung

$$X \times X \to L(\mathcal{E}_*)\ ,\ (\lambda, \mu) \mapsto K_l(\lambda, \mu)(\|M_\psi\|^2_{\mathcal{M}(\mathcal{H}_l \otimes \mathcal{E}, \mathcal{H}_l \otimes \mathcal{E}_*)} - \psi(\lambda)\psi(\mu)^*)$$

positiv definit. Es folgt, daß dann auch die Abbildung

$$X \times X \to \mathbb{C}\ ,\ (\lambda, \mu) \mapsto K_m(\lambda, \mu)(\|M_\psi\|^2_{\mathcal{M}(\mathcal{H}_l \otimes \mathcal{E}, \mathcal{H}_l \otimes \mathcal{E}_*)} - \psi(\lambda)\psi(\mu)^*)$$

als Produkt von positiv definiten Abbildungen positiv definit ist, und nach Satz 1.11 gilt

$$\|M_\psi\|_{\mathcal{M}(\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{E}, \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{E}_*)} \leq \|M_\psi\|_{\mathcal{M}(\mathcal{H}_l \otimes \mathcal{E}, \mathcal{H}_l \otimes \mathcal{E}_*)}.$$

(b) Sei also $f \in \mathcal{H}_l \otimes \mathcal{E}$ und K der reproduzierende Kern von $\mathcal{H}$. Nach Satz 1.9 ist dann die Abbildung

$$X \times X \to L(\mathcal{E})\ ,\ (\lambda, \mu) \mapsto \|f\|^2_{\mathcal{H}_l \otimes \mathcal{E}} K_l(\lambda, \mu) 1_{\mathcal{E}} - f(\lambda) \odot f(\mu)$$

positiv definit. Dann ist aber auch die Abbildung

$$\begin{aligned} &X \times X \to L(\mathcal{E})\ ,\ (\lambda, \mu) \mapsto \|f\|^2_{\mathcal{H}_l \otimes \mathcal{E}} K_m(\lambda, \mu) 1_{\mathcal{E}} - f(\lambda) \odot f(\mu) \\ = \quad & \|f\|^2_{\mathcal{H}_l \otimes \mathcal{E}} (K_m(\lambda, \mu) - K_l(\lambda, \mu)) 1_{\mathcal{E}} + (\|f\|^2_{\mathcal{H}_l \otimes \mathcal{E}} K_l(\lambda, \mu) 1_{\mathcal{E}} - f(\lambda) \odot f(\mu)) \\ = \quad & \|f\|^2_{\mathcal{H}_l \otimes \mathcal{E}} K_l(\lambda, \mu) \left(1 - \frac{1}{K}\right)(\lambda, \mu) \left(\sum_{j=1}^{m-l} K_j(\lambda, \mu)\right) \cdot 1_{\mathcal{E}} \\ & + \left(\|f\|^2_{\mathcal{H}_l \otimes \mathcal{E}} K_l(\lambda, \mu) 1_{\mathcal{E}} - f(\lambda) \odot f(\mu)\right) \end{aligned}$$

positiv definit als Summe und Produkt positiv definiter Abbildungen. Nach Satz 1.9 folgt, daß $f \in \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{E}$ ist und $\|f\|_{\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{E}} \leq \|f\|_{\mathcal{H}_l \otimes \mathcal{E}}$ gilt.

□

Früher wurde bereits bewiesen, daß Nevanlinna-Pick-Räume die konstanten Funktionen enthalten (folglich auch ihre Multiplieralgebra) und daß die Multiplieralgebra sogar dicht liegt. Das bleibt immer noch richtig, wenn wir zu Potenzen von Nevanlinna-Pick-Kernen übergehen.

LEMMA 4.2. *Sei $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}^X$ ein Nevanlinna-Pick-Raum mit reproduzierendem Kern K und $m \in \mathbb{N}$.*

(a) Es liegt $\mathcal{H}$ dicht in $\mathcal{H}_m$.
(b) Jede dichte Teilmenge von $\mathcal{H}$ ist auch dicht in $\mathcal{H}_m$.

(c) *Es sei $\mathcal{A}$ die von den Abbildungen $(1 - \frac{1}{K})(\cdot, \mu)$ $(\mu \in X)$ erzeugte unitale Algebra komplexwertiger Funktionen. Ferner sei $\mathcal{F}$ der funktionale Hilbertraum mit reproduzierendem Kern $1 - \frac{1}{K}$ und $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ die von $\mathcal{F}$ in $\mathbb{C}^X$ erzeugte unitale Algebra von Funktionen (vergleiche Lemma 3.2). Dann gelten die Inklusionen*

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{M}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_m$$

und

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{M}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{H}_m) \subset \mathcal{H}_m,$$

wobei alle angegebenen Teilmengen dicht in $\mathcal{H}_m$ liegen.

BEWEIS.

(a) Nach Lemma 3.2 sind die Abbildungen $K(\cdot, \mu)$ $(\mu \in X)$ Multiplier auf $\mathcal{H}$. Da $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ eine Algebra ist, ist $LH\{K_m(\cdot, \mu)\ ;\ \mu \in X\}$ einerseits eine Teilmenge von $\mathcal{M}(\mathcal{H})$, also auch von $\mathcal{H}$, liegt andererseits aber auch dicht in $\mathcal{H}_m$. Das zeigt, daß auch $\mathcal{H}$ schon dicht in $\mathcal{H}_m$ liegt.
(b) Das ist klar nach Teil (a) und der Stetigkeit der Inklusion $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{H}_m$.
(c) Folgt aus (b) und Lemma 3.2.

□

2. Ein Commutant-Lifting-Theorem

Bekanntlich sind Einschränkungen von Multipliern eines funktionalen Hilbertraumes $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}^X$ (X eine Menge, $\mathcal{E}$ ein Hilbertraum) mit reproduzierendem Kern K auf eine Teilmenge $Y \subset X$ Multiplier des zur Einschränkung K_Y gehörenden Hilbertraumes $\mathcal{H}_Y$, wobei sich die Multipliernorm höchstens verkleinert. Das folgt direkt aus Satz 1.11, da die Eigenschaft der positiven Definitheit einer Abbildung beim Einschränken natürlich erhalten bleibt.

Es stellt sich nun die Frage, ob die Umkehrung ebenfalls gilt, also ob sich Multiplier von $\mathcal{H}_Y$ (mit Kontrolle der Norm) zu Multipliern auf $\mathcal{H}$ fortsetzen lassen. Dies werden wir nun für Nevanlinna-Pick-Räume positiv beantworten. Wir fixieren die folgende Situation.

SITUATION (D). *Sei X eine Menge, und sei $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}^X$ ein Nevanlinna-Pick-Raum mit reproduzierendem Kern K. Es sei $d : X \to \mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ ein geeigneter Hilbertraum) eine Faktorisierung von $1 - \frac{1}{K}$, also*

$$1 - \frac{1}{K}(\lambda, \mu) = \langle d(\mu), d(\lambda) \rangle \quad (\lambda, \mu \in X).$$

Für einen beliebigen Hilbertraum $\mathcal{K}$ sei die Abbildung $Z_{\mathcal{K}} : X \to L(\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}, \mathcal{K})$ definiert durch

$$Z_{\mathcal{K}}(\lambda)^* x = d(\lambda) \otimes x.$$

Schließlich fixieren wir beliebige Hilberträume $\mathcal{E}, \mathcal{E}_*$ und $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$.

Um den Beweis des Commutant-Lifting-Satzes übersichtlich zu halten, zerteilen wir ihn in mehrere Lemmata. Zunächst verschaffen wir uns einen Ersatz für den Shiftoperator.

LEMMA 4.3. *Sei $\mathcal{G}$ ein Hilbertraum. Dann existiert eine eindeutige Kontraktion*

$$S_{\mathcal{G},m} \in L(\mathcal{F} \otimes (\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}), \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G})$$

mit

$$S^*_{\mathcal{G},m}(K_m(\cdot,\lambda)x) = d(\lambda) \otimes K_m(\cdot,\lambda)x \quad (\lambda \in X \ , \ x \in \mathcal{G}).$$

Es gilt

$$S_{\mathcal{G},m}(\eta \otimes f) = M_{d_\eta \otimes 1_\mathcal{G}} f \quad (f \in \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G} \ , \ \eta \in \mathcal{F}),$$

wobei d_η die Abbildung

$$X \to \mathbb{C} \ , \ \lambda \mapsto \langle \eta, d(\lambda) \rangle$$

bezeichnet.

BEWEIS. Sei $\delta_\lambda : \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ die Punktauswertung in λ ($\lambda \in X$). Ferner sei

$$\sigma : X \to L(\mathcal{G}, \mathcal{F} \otimes (\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G})) \ , \ \sigma(\lambda)x = d(\lambda) \otimes K_m(\cdot,\lambda)x.$$

Dann ist nach Lemma 1.7 zu zeigen, daß die Abbildung

$$\gamma : X \times X \to L(\mathcal{G}) \ , \ (\lambda,\mu) \mapsto \delta_\lambda \delta^*_\mu - \sigma(\lambda)^*\sigma(\mu)$$

positiv definit ist. Seien dazu $(\lambda_i) \subset X$ und $(x_i) \subset \mathcal{G}$ endliche Folgen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} \langle \gamma(\lambda_j,\lambda_i)x_i, x_j \rangle &= \sum_{i,j} K_m(\lambda_j,\lambda_i)\langle x_i, x_j\rangle - \langle d(\lambda_i), d(\lambda_j)\rangle K_m(\lambda_j,\lambda_i)\langle x_i,x_j\rangle \\
&= \sum_{i,j} K_m(\lambda_j,\lambda_i)\frac{1}{K}(\lambda_j,\lambda_i)\langle x_i,x_j\rangle \\
&= \sum_{i,j} K_{m-1}(\lambda_j,\lambda_i)\langle x_i,x_j\rangle \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

da K_{m-1} positiv definit ist.

Somit ist $S^*_{\mathcal{G},m}$ wohldefiniert und kontraktiv, also auch $S_{\mathcal{G},m}$.

Der Zusatz ergibt sich aus der Rechnung

$$\begin{aligned}
\langle S_{\mathcal{G},m}(\eta \otimes f)(\lambda), x\rangle &= \langle \eta \otimes f, S^*_{\mathcal{G},m} K_m(\cdot,\lambda)x\rangle \\
&= \langle \eta, d(\lambda)\rangle \langle f, K_m(\cdot,\lambda)x\rangle \\
&= \langle \langle \eta, d(\lambda)\rangle f(\lambda), x\rangle \quad (\lambda \in X \ , \ f \in \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G} \ , \ \eta \in \mathcal{F} \ , \ x \in \mathcal{G})
\end{aligned}$$

und der schon früher (Lemma 3.2) bewiesenen Tatsache, daß d_η ein Multiplier auf $\mathcal{H}$ mit $\|M_{d_\eta}\| \leq \|\eta\|$ ist, also erst recht ein Multiplier auf $\mathcal{H}_m$. □

LEMMA 4.4. *Sei $\mathcal{G}$ ein Hilbertraum. Dann existieren für $0 \le l \le m$ Kontraktionen*

$$P_{\mathcal{G},m,0} : \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G} \to \mathcal{G} \ , \ K_m(\cdot,\lambda)x \mapsto x$$

und

$$P_{\mathcal{G},m,l} : \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G} \to \mathcal{H}_l \otimes \mathcal{G} \ , \ K_m(\cdot,\lambda)x \mapsto K_l(\cdot,\lambda)x \quad (l \ge 1).$$

Es gilt

$$P^*_{\mathcal{G},m,0}x = \mathbf{1} \otimes x$$

und für $l \ge 1$

$$P^*_{\mathcal{G},m,l}f = f \quad (f \in \mathcal{H}_l \otimes \mathcal{G}).$$

BEWEIS. Wir betrachten zunächst den Fall $l = 0$. Da $\mathcal{H}_m$ die konstanten Funktionen enthält, ist durch

$$P^*_{\mathcal{G},m,0} : \mathcal{G} \to \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G} \ , \ x \mapsto \mathbf{1} \otimes x$$

eine Kontraktion definiert, denn es gilt $\|\mathbf{1}\| \le 1$. Dann ist auch $P_{\mathcal{G},m,0}$ kontraktiv, und es gilt

$$\langle P_{\mathcal{G},m,0}(K_m(\cdot,\lambda)x), y\rangle = \langle x, (\mathbf{1} \otimes y)(\lambda)\rangle = \langle x, y\rangle \quad (\lambda \in X \ , \ x, y \in \mathcal{G}),$$

also

$$P_{\mathcal{G},m,0}(K_m(\cdot,\lambda)x) = x \quad (\lambda \in X \ , \ x \in \mathcal{G}).$$

Für den Fall $1 \le l \le m$ definieren wir $P^*_{\mathcal{G},m,l}$ als die Einbettung von $\mathcal{H}_l \otimes \mathcal{G}$ in $\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}$. Nach Lemma 4.1 definiert das eine kontraktive Abbildung $P^*_{\mathcal{G},m,l} : \mathcal{H}_l \otimes \mathcal{G} \to \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}$. Es folgt, daß dann auch $P_{\mathcal{G},m,l}$ kontraktiv ist; es gilt

$$\begin{aligned} \langle P_{\mathcal{G},m,l}K_m(\cdot,\lambda)x, f\rangle_{\mathcal{H}_l \otimes \mathcal{G}} &= \langle K_m(\cdot,\lambda)x, f\rangle_{\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}} \\ &= \langle x, f(\lambda)\rangle_{\mathcal{G}} \\ &= \langle K_l(\cdot,\lambda)x, f\rangle_{\mathcal{H}_l \otimes \mathcal{G}} \quad (\lambda \in X \ , \ x \in \mathcal{G} \ , \ f \in \mathcal{H}_l \otimes \mathcal{G}), \end{aligned}$$

also

$$P_{\mathcal{G},m,l}K_m(\cdot,\lambda)x = K_l(\cdot,\lambda)x \quad (\lambda \in X \ , \ x \in \mathcal{G}).$$

□

BEMERKUNG.

(a) Falls die konstante Funktion $\mathbf{1}$ in $\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}$ Norm 1 hat, dann ist die Abbildung $P^*_{\mathcal{G},m,0}P_{\mathcal{G},m,0}$ gerade die Projektion auf die konstanten Funktionen in $\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}$, denn sie ist offenbar selbstadjungiert und es gilt

$$\begin{aligned} \langle P_{\mathcal{G},m,0}P^*_{\mathcal{G},m,0}x, y\rangle_{\mathcal{G}} &= \langle \mathbf{1} \otimes x, \mathbf{1} \otimes y\rangle_{\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}} \\ &= \|\mathbf{1}\|^2_{\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}}\langle x, y\rangle \quad (x, y \in \mathcal{G}), \end{aligned}$$

also $P_{\mathcal{G},m,0}P^*_{\mathcal{G},m,0} = 1_{\mathcal{G}}$, so daß dann $P^*_{\mathcal{G},m,0}P_{\mathcal{G},m,0}$ auch idempotent ist. Es liegt nun nahe zu vermuten, daß auch für $l \ge 1$ die Abbildungen $P_{\mathcal{G},m,l}$ Orthogonalprojektionen auf $\mathcal{H}_l \otimes \mathcal{G}$ als Teilraum von $\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}$ sind. Diese Erwartung kann sich im allgemeinen aber schon deswegen nicht erfüllen, da nach Lemma

4.2 $\mathcal{H}_l \otimes \mathcal{G}$ als Menge dicht in $\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}$ liegt. Da Orthogonalprojektionen abgeschlossene Bilder haben, müßte dann schon $\mathcal{H}_l \otimes \mathcal{G} = \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}$ (als Menge) gelten, was im allgemeinen nicht erfüllt ist, wie einfache Beispiele zeigen.

(b) Abkürzend wollen wir im folgenden $P_{\mathcal{G},m}$ statt $P_{\mathcal{G},m,0}$ schreiben.

Definition 4.5. *Es sei $\mathcal{G}$ ein Hilbertraum. Ein abgeschlossener Teilraum $\mathcal{N}$ von $\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}$ heißt*

- *invariant, falls $\mathcal{N}$ invariant für alle Operatoren $M_{d_\eta \otimes 1_\mathcal{G}}$ $(\eta \in \mathcal{F})$ ist.*
- *$*$-invariant, falls $\mathcal{N}$ invariant für alle Operatoren $M^*_{d_\eta \otimes 1_\mathcal{G}}$ $(\eta \in \mathcal{F})$ ist.*
- *reduzierend, wenn er invariant und $*$-invariant ist.*

Bemerkung. Sei $\mathcal{G}$ ein Hilbertraum.

(a) Ein abgeschlossener Teilraum $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}$ ist invariant genau dann, wenn $\mathcal{N}^\perp$ $*$-invariant ist.
(b) Sei $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}$ invariant. Dann ist $S_{\mathcal{G},m}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{N}) \subset \mathcal{N}$.
(c) Sei $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}$ $*$-invariant. Dann ist $S^*_{\mathcal{G},m}\mathcal{N} \subset \mathcal{F} \otimes \mathcal{N}$.

beweis.

(a) Klar.
(b) Sei $\eta \in \mathcal{F}$ und $f \in \mathcal{N}$. Dann ist

$$S_{\mathcal{G},m}(\eta \otimes f) = M_{d_\eta \otimes 1_\mathcal{G}} f \in \mathcal{N},$$

also gilt $S_{\mathcal{G},m}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{N}) \subset \mathcal{N}$.

(c) Sei $\mathcal{N}$ $*$-invariant. Dann ist $\mathcal{N}^\perp$ invariant, und es gilt

$$S_{\mathcal{G},m}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{N}^\perp) \subset \mathcal{N}^\perp.$$

Wegen $\mathcal{F} \otimes \mathcal{N}^\perp = (\mathcal{F} \otimes \mathcal{N})^\perp$ folgt die Behauptung.

□

Definition 4.6. *Sei $\mathcal{G}$ ein Hilbertraum, und sei $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}$ ein abgeschlossener Teilraum. Für einen Operator $Y \in L(\mathcal{F} \otimes \mathcal{N}, \mathcal{N})$ definieren wir*

$$\Sigma_Y : L(\mathcal{N}) \to L(\mathcal{N})\ ,\ T \mapsto Y(1_\mathcal{F} \otimes T)Y^*$$

und

$$\Delta_Y : L(\mathcal{N}) \to L(\mathcal{N})\ ,\ \Delta_Y = 1_{L(\mathcal{N})} - \Sigma_Y.$$

Wir zeigen nun einige Eigenschaften der gerade definierten Operatoren.

Lemma 4.7. *Sei $\mathcal{G}$ ein Hilbertraum und $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}$ ein $*$-invarianter Teilraum. Sei $Y \in L(\mathcal{F} \otimes \mathcal{N}, \mathcal{N})$ definiert durch $Y = P_\mathcal{N} S_{\mathcal{G},m|\mathcal{F} \otimes \mathcal{N}}$.*

(a) Es gilt

$$\Sigma^p_{S_{\mathcal{G},m}}(T) \xrightarrow{p} 0\ (SOT) \quad (T \in L(\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G})).$$

(b) Die Abbildung Σ_Y ist positiv.

(c) Es gilt

$$\Sigma_Y^p(N) \xrightarrow{p} 0 \ (SOT) \quad (N \in L(\mathcal{N})).$$

(d) Der Operator Δ_Y ist injektiv.

(e) Sei $N \in L(\mathcal{N})$. Falls $\Delta_Y(N)$ positiv ist, dann ist auch N positiv.

(f) Sei $N \in L(\mathcal{N})$ positiv und $\Delta_Y(N) \leq 0$. Dann ist $N = 0$.

BEWEIS.

(a) Wir zeigen zunächst

$$\Sigma^p_{S_{\mathcal{G},m}}(T)(K_m(\cdot,\lambda)x) \xrightarrow{p} 0 \quad (\lambda \in X \ , \ x \in \mathcal{G}).$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\|\Sigma^p_{S_{\mathcal{G},m}}(T)(K_m(\cdot,\lambda)x)\| &= \|S_{\mathcal{G},m}(1_{\mathcal{F}} \otimes \Sigma^{p-1}_{S_{\mathcal{G},m}}(T))S^*_{\mathcal{G},m}(K_m(\cdot,\lambda)x)\| \\
&= \|S_{\mathcal{G},m}\left(d(\lambda) \otimes \Sigma^{p-1}_{S_{\mathcal{G},m}}(T)(K_m(\cdot,\lambda)x)\right)\| \\
&\leq \|d(\lambda)\|\|\Sigma^{p-1}_{S_{\mathcal{G},m}}(T)(K_m(\cdot,\lambda)x)\| \\
&\ \vdots \\
&\leq \|d(\lambda)\|^p\|T(K_m(\cdot,\lambda)x)\| \xrightarrow{p} 0 \quad (\lambda \in X \ , \ x \in \mathcal{G}),
\end{aligned}$$

da $\|d(\lambda)\| < 1$ für $\lambda \in X$. Somit gilt die Behauptung auch für die lineare Hülle von $\{K_m(\cdot,\lambda)x \ ; \ \lambda \in X \ , \ x \in \mathcal{G}\}$, die dicht in $\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}$ liegt. Wegen

$$\|\Sigma_{S_{\mathcal{G},m}}\| \leq \|S_{\mathcal{G},m}\|^2 \leq 1$$

ist die Folge $(\Sigma^p_{S_{\mathcal{G},m}}(T))_{p\in\mathbb{N}}$ durch $\|T\|$ beschränkt und konvergiert punktweise auf einer dichten Teilmenge gegen 0, also schon überall.

(b) Sei $N \in L(\mathcal{N})$, $N \geq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\langle \Sigma_Y(N)h, h\rangle &= \langle Y(1_{\mathcal{F}} \otimes N)Y^*h, h\rangle \\
&= \langle (1_{\mathcal{F}} \otimes N^{\frac{1}{2}})Y^*h, (1_{\mathcal{F}} \otimes N^{\frac{1}{2}})Y^*h\rangle \\
&\geq 0 \quad (h \in \mathcal{N}),
\end{aligned}$$

und somit $\Sigma_Y(N) \geq 0$.

(c) Wir zeigen, daß

$$\Sigma^p_Y(N) = P_{\mathcal{N}}\Sigma^p_{S_{\mathcal{G},m}}(NP_{\mathcal{N}})_{|\mathcal{N}} \quad (p \in \mathbb{N})$$

gilt. Daraus folgt dann mit (a) die Behauptung. Zunächst folgt für $p = 1$ unter Benutzung der Identitäten $Y^* = (S^*_{\mathcal{G},m})_{|\mathcal{N}}$ und $1_{\mathcal{F}} \otimes P_{\mathcal{N}} = P_{\mathcal{F}\otimes\mathcal{N}}$

$$\begin{aligned}
\Sigma_Y(N)h &= Y(1_{\mathcal{F}} \otimes N)Y^*h \\
&= P_{\mathcal{N}}S_{\mathcal{G},m}(1_{\mathcal{F}} \otimes N)S^*_{\mathcal{G},m}h \\
&= P_{\mathcal{N}}S_{\mathcal{G},m}(1_{\mathcal{F}} \otimes N)(1_{\mathcal{F}} \otimes P_{\mathcal{N}})S^*_{\mathcal{G},m}h \\
&= P_{\mathcal{N}}\Sigma_{S_{\mathcal{G},m}}(NP_{\mathcal{N}})h \quad (h \in \mathcal{N}).
\end{aligned}$$

Für den Induktionsschluß beobachten wir, daß $P_{\mathcal{N}} S_{\mathcal{G},m}(1_{\mathcal{F}} \otimes P_{\mathcal{N}}) = P_{\mathcal{N}} S_{\mathcal{G},m}$ gilt, da $\mathcal{N}$ $*$-invariant ist. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}\Sigma_Y^p(N)h &= P_{\mathcal{N}} S_{\mathcal{G},m}(1_{\mathcal{F}} \otimes \Sigma_Y^{p-1}(N))S_{\mathcal{G},m}^* h \\ &= P_{\mathcal{N}} S_{\mathcal{G},m}(1_{\mathcal{F}} \otimes P_{\mathcal{N}} \Sigma_{S_{\mathcal{G},m}}^{p-1}(NP_{\mathcal{N}}))S_{\mathcal{G},m}^* h \\ &= P_{\mathcal{N}} S_{\mathcal{G},m}(1_{\mathcal{F}} \otimes \Sigma_{S_{\mathcal{G},m}}^{p-1}(NP_{\mathcal{N}}))S_{\mathcal{G},m}^* h \\ &= P_{\mathcal{N}} \Sigma_{S_{\mathcal{G},m}}^{p}(NP_{\mathcal{N}})h \qquad (h \in \mathcal{N}).\end{aligned}$$

(d) Es gelte $\Delta_Y(N) = 0$. Dann ist für $p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}N - \Sigma_Y^p(N) &= \sum_{q=0}^{p-1} \Sigma_Y^q(N) - \Sigma_Y^{q+1}(N) \\ &= \sum_{q=0}^{p-1} \Sigma_Y^q(N - \Sigma(N)) \\ &= \sum_{q=0}^{p-1} \Sigma_Y^q \Delta_Y(N) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Nach (b) konvergiert $(\Sigma_Y^p(N))_{p\in\mathbb{N}}$ SOT gegen 0, also muß auch $N = 0$ sein.

(e) Mit $\Delta_Y(N) \geq 0$ folgt $N \geq \Sigma_Y(N)$. Mit der Monotonie von Σ_Y folgt

$$\Sigma_Y^p(N) \geq \Sigma_Y^{p+1}(N) \quad (p \in \mathbb{N}),$$

also insbesondere

$$N \geq \Sigma_Y^p(N) \quad (p \in \mathbb{N}).$$

Da aber

$$\Sigma_Y^p(N) \xrightarrow{p} 0 \quad (SOT)$$

gilt, muß auch $N \geq 0$ gelten.

(f) Sei jetzt $N \in L(\mathcal{N})$ positiv mit $\Delta_Y(N) \leq 0$. Dann ist $\Delta_Y(-N) \geq 0$, also $-N \geq 0$, also $N \leq 0$. Wegen $N \geq 0$ muß schon $N = 0$ gelten.

□

LEMMA 4.8. *(a) Sei $\mathcal{G}$ ein Hilbertraum und sei $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}$ ein $*$-invarianter Teilraum. Sei*

$$Y = P_{\mathcal{N}} S_{\mathcal{G},m|\mathcal{F}\otimes\mathcal{N}}.$$

Dann gilt für $0 \leq l \leq m$

$$\langle P_{\mathcal{G},m,l}\, g, P_{\mathcal{G},m,l}\, h\rangle = \langle \Delta_Y^{m-l}(1_{\mathcal{N}})g, h\rangle \quad (g, h \in \mathcal{N}).$$

(b) Seien $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{E}$ und $\mathcal{N}_* \subset \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{E}_*$ $*$-invariante Teilräume. Sei ferner $N \in L(\mathcal{N}, \mathcal{N}_*)$ ein Operator, so daß

$$P_{\mathcal{N}_*} M_{d_\eta \otimes 1_{\mathcal{E}_*}} N = N P_{\mathcal{N}} M_{d_\eta \otimes 1_{\mathcal{E}}|\mathcal{N}} \quad (\eta \in \mathcal{F})$$

gilt. Es seien

$$Y = P_{\mathcal{N}} S_{\mathcal{E},m|\mathcal{F}\otimes\mathcal{N}} \text{ und } Y_* = P_{\mathcal{N}_*} S_{\mathcal{E}_*,m|\mathcal{F}\otimes\mathcal{N}_*}.$$

Dann gilt für $0 \leq l \leq m$

$$\langle P_{\mathcal{E},m,l} N^* g, P_{\mathcal{E},m,l} N^* h\rangle = \langle \Delta_{Y_*}^{m-l}(NN^*)g, h\rangle \quad (g, h \in \mathcal{N}_*).$$

Insbesondere ist $\Delta_{Y_*}^{m-l}(NN^*)$ *positiv.*

BEWEIS.

Zum Beweis von (a) sehen wir zunächst, daß für $0 \leq l \leq m$

$$\langle \Delta_{S_{\mathcal{G},m}}^{m-l}(1_{\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}})g, h\rangle = \langle P_{\mathcal{G},m,l} g, P_{\mathcal{G},m,l} h\rangle \quad (g, h \in \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G})$$

gilt:

$$\begin{aligned}
&\langle \Delta_{S_{\mathcal{G},m}}^{m-l}(1_{\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}}) K_m(\cdot,\lambda)x, K_m(\cdot,\mu)y\rangle \\
&\quad = \langle \left(\Delta_{S_{\mathcal{G},m}}^{m-l-1}(1_{H_m \otimes \mathcal{G}}) - S_{\mathcal{G},m}(1_{\mathcal{F}} \otimes \Delta_{S_{\mathcal{G},m}}^{m-l-1}(1_{\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}}))S_{\mathcal{G},m}^*\right) K_m(\cdot,\lambda)x, K_m(\cdot,\mu)y\rangle \\
&\quad = \langle (\Delta_{S_{\mathcal{G},m}}^{m-l-1}(1_{H_m \otimes \mathcal{G}}) K_m(\cdot,\lambda)x, K_m(\cdot,\mu)y\rangle \\
&\quad\quad -\langle d(\lambda), d(\mu)\rangle \langle \Delta_{S_{\mathcal{G},m}}^{m-l-1}(1_{\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}}) K_m(\cdot,\lambda)x, K_m(\cdot,\mu)y\rangle \\
&\quad = \frac{1}{K}(\mu,\lambda) \langle \Delta_{S_{\mathcal{G},m}}^{m-l-1}(1_{\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}}) K_m(\cdot,\lambda)x, K_m(\cdot,\mu)y\rangle \\
&\quad \vdots \\
&\quad = (\frac{1}{K}(\mu,\lambda))^{m-l} \langle K_m(\cdot,\lambda)x, K_m(\cdot,\mu)y\rangle \\
&\quad = (\frac{1}{K}(\mu,\lambda))^{m-l} K_m(\mu,\lambda)\langle x, y\rangle \\
&\quad = \langle K_l(\cdot,\lambda)x, K_l(\cdot,\mu)y\rangle_{\mathcal{H}_l \otimes \mathcal{G}} \\
&\quad = \langle P_{\mathcal{G},m,l} K_m(\cdot,\lambda)x, P_{\mathcal{G},m,l} K_m(\cdot,\mu)y\rangle_{\mathcal{H}_l \otimes \mathcal{G}} \quad (\lambda,\mu \in X \ , \ x, y \in \mathcal{G}).
\end{aligned}$$

Da $\{K_m(\cdot,\lambda)x \ ; \ \lambda \in X \ , \ x \in \mathcal{G}\}$ in $\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}$ total ist, folgt die Behauptung.

Ferner gilt

$$\langle \Delta_Y^j(1_{\mathcal{N}})g, h\rangle = \langle \Delta_{S_{\mathcal{G},m}}^j(1_{\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}})g, h\rangle \quad (g, h \in \mathcal{N} \ , \ j \in \mathbb{N}),$$

wie man nachrechnet:

$$\begin{aligned}
\langle \Delta_Y(1_{\mathcal{N}})g, h\rangle &= \langle g, h\rangle - \langle Y(1_{\mathcal{F}} \otimes 1_{\mathcal{N}})Y^* g, h\rangle \\
&= \langle g, h\rangle - \langle P_{\mathcal{N}} S_{\mathcal{G},m}(1_{\mathcal{F}} \otimes 1_{\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}})S_{\mathcal{G},m}^* g, h\rangle \\
&= \langle g, h\rangle - \langle S_{\mathcal{G},m}(1_{\mathcal{F}} \otimes 1_{\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}})S_{\mathcal{G},m}^* g, h\rangle \\
&= \langle \Delta_{S_{\mathcal{G},m}}(1_{\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}})g, h\rangle \quad (g, h \in \mathcal{N}),
\end{aligned}$$

wobei benutzt wurde, daß $Y^* = (S_{\mathcal{G},m}^*)_{|\mathcal{N}}$ gilt, da $S_{\mathcal{G},m}^*\mathcal{N} \subset \mathcal{F} \otimes \mathcal{N}$ ist. Wir schließen nun induktiv; sei die Behauptung für $j-1$ gezeigt. Dann gilt

$$\langle (1_{\mathcal{F}} \otimes \Delta_Y^{j-1}(1_{\mathcal{N}}))x, y\rangle = \langle (1_{\mathcal{F}} \otimes \Delta_{S_{\mathcal{G},m}}^{j-1}(1_{\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}}))x, y\rangle \quad (x, y \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{N}),$$

wie man auf Elementartensoren nachprüft. Schließlich ergibt sich

$$\begin{aligned}
\langle \Delta_Y^j(1_{\mathcal{N}})g, h\rangle &= \langle \Delta_Y^{j-1}(1_{\mathcal{N}})g, h\rangle - \langle (1_{\mathcal{F}} \otimes \Delta_Y^{j-1}(1_{\mathcal{N}}))Y^* g, Y^* h\rangle \\
&= \langle \Delta_{S_{\mathcal{G},m}}^{j-1}(1_{\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}})g, h\rangle - \langle (1_{\mathcal{F}} \otimes \Delta_{S_{\mathcal{G},m}}^{j-1}(1_{\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}}))S_{\mathcal{G},m}^* g, S_{\mathcal{G},m}^* h\rangle \\
&= \langle \Delta_{S_{\mathcal{G},m}}^j(1_{\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}})g, h\rangle \quad (g, h \in \mathcal{N}).
\end{aligned}$$

Somit ist Teil (a) gezeigt. Mit dem bisher Gesagten können wir nun Teil (b) des Lemmas beweisen. Dazu zeigen wir, daß

$$\Delta^j_{Y_*}(NN^*) = N\Delta^j_Y(1_{\mathcal{N}})N^* \quad (j \in \mathbb{N})$$

gilt. Wir leiten zunächst folgende Vertauschungsrelation her:

$$Y_*(1_{\mathcal{F}} \otimes N) = NY.$$

Es reicht, dies auf Elementartensoren nachzuprüfen.

$$\begin{aligned} Y_*(1_{\mathcal{F}} \otimes N)(\eta \otimes h) &= Y_*(\eta \otimes Nh) \\ &= P_{\mathcal{N}_*} M_{d_\eta \otimes 1_{\mathcal{E}_*}} Nh \\ &= NP_{\mathcal{N}} M_{d_\eta \otimes 1_{\mathcal{E}}} h \\ &= NP_{\mathcal{N}} S_{\mathcal{E},m}(\eta \otimes h) \\ &= NY(\eta \otimes h) \quad (\eta \in \mathcal{F}\ ,\ h \in \mathcal{N}). \end{aligned}$$

Damit folgt unsere ursprüngliche Behauptung durch einen einfachen Induktionsbeweis. Es ist

$$\begin{aligned} \Delta_{Y_*}(NN^*) &= NN^* - Y_*(1_{\mathcal{F}} \otimes NN^*)Y_*^* \\ &= NN^* - NYY^*N^* \\ &= N(1_{\mathcal{N}} - YY^*)N^* \\ &= N\Delta_Y(1_{\mathcal{N}})N^*, \end{aligned}$$

was die Induktion verankert. Der Induktionsschluß erfolgt durch eine analoge Rechnung.

Damit ergibt sich mit Teil (a)

$$\begin{aligned} \langle \Delta^{m-l}_{Y_*}(NN^*)g, h\rangle &= \langle N\Delta^{m-l}_Y(1_{\mathcal{N}})N^*g, h\rangle \\ &= \langle P_{\mathcal{E},m,l}N^*g, P_{\mathcal{E},m,l}N^*h\rangle \quad (g, h \in \mathcal{N}_*). \end{aligned}$$

□

LEMMA 4.9. *Sei $\mathcal{K}$ ein Hilbertraum, und sei*

$$U : \mathcal{K} \oplus \mathcal{E} \to (\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}) \oplus \mathcal{E}_*\ ,\ U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

eine Kontraktion.

(a) Es sei

$$g_{\mathcal{K}} : X \to L(\mathcal{E}_*, \mathcal{K})\ , g_{\mathcal{K}}(\lambda) = (1_{\mathcal{K}} - a^*Z_{\mathcal{K}}(\lambda)^*)^{-1}c^*.$$

Dann ist die Abbildung

$$\Psi_{\mathcal{K},m} : \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{E}_* \to \mathcal{K}\ ,\ K_m(\cdot, \lambda)x \mapsto g_{\mathcal{K}}(\lambda)x$$

wohldefiniert und kontraktiv.

(b) Sei $\phi : X \to L(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$ definiert durch

$$\phi(\lambda) = d + c(1_{\mathcal{K}} - Z_{\mathcal{K}}(\lambda)a)^{-1} Z_{\mathcal{K}}(\lambda)b \quad (\lambda \in X).$$

Dann gelten die Identitäten (vergleiche Satz 3.3)

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathcal{K},m} &= a^*(1_{\mathcal{F}} \otimes \Psi_{\mathcal{K},m})S^*_{\mathcal{E}_*,m} + c^* P_{\mathcal{E}_*,m} \\ P_{\mathcal{E},m} M^*_\phi &= b^*(1_{\mathcal{F}} \otimes \Psi_{\mathcal{K},m})S^*_{\mathcal{E}_*,m} + d^* P_{\mathcal{E}_*,m}. \end{aligned}$$

BEWEIS.

(a) Sei also $\delta_\lambda : \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{E}_* \to \mathcal{E}_*$ die Punktauswertung in $\lambda \in X$. Nach Lemma 1.7 ist zu zeigen, daß die Abbildung

$$\gamma : X \times X \to L(\mathcal{E}_*) \ , \ (\lambda, \mu) \mapsto \delta_\lambda \delta^*_\mu - g_{\mathcal{K}}(\lambda)^* g_{\mathcal{K}}(\mu)$$

positiv definit ist. Wir wählen also endliche Folgen (λ_i) in X und (x_i) in $\mathcal{E}_*$. Unter Benutzung der Identität

$$\begin{aligned} g_{\mathcal{K}}(\lambda)x &= a^* Z_{\mathcal{K}}(\lambda)^* g_{\mathcal{K}}(\lambda)x + c^* x \\ &= \begin{pmatrix} a^* & c^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d(\lambda) \otimes g_{\mathcal{K}}(\lambda)x \\ x \end{pmatrix} \quad (\lambda \in X \ , \ x \in \mathcal{E}_*) \end{aligned}$$

und der Tatsache, daß auch $\begin{pmatrix} a^* & c^* \end{pmatrix}$ kontraktiv ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j} \langle \gamma(\lambda_j, \lambda_i) x_i, x_j \rangle \\ &= \sum_{i,j} K_m(\lambda_j, \lambda_i) \langle x_i, x_j \rangle - \| \sum_i g_{\mathcal{K}}(\lambda_i) x_i \|^2 \\ &\geq \sum_{i,j} K_m(\lambda_j, \lambda_i) \langle x_i, x_j \rangle - \| \sum_i \begin{pmatrix} d(\lambda_i) \otimes g_{\mathcal{K}}(\lambda_i) x_i \\ x_i \end{pmatrix} \|^2 \\ &= \sum_{i,j} K_m(\lambda_j, \lambda_i) \langle x_i, x_j \rangle - \left(\sum_{i,j} \langle d(\lambda_i), d(\lambda_j) \rangle \langle g_{\mathcal{K}}(\lambda_i) x_i, g_{\mathcal{K}}(\lambda_j) x_j \rangle + \langle x_i, x_j \rangle \right) \\ &= \sum_{i,j} (K_m(\lambda_j, \lambda_i) - 1) \langle x_i, x_j \rangle - \sum_{i,j} (1 - \frac{1}{K})(\lambda_j, \lambda_i) \langle g_{\mathcal{K}}(\lambda_i) x_i, g_{\mathcal{K}}(\lambda_j) x_j \rangle \\ &= \sum_{i,j} (1 - \frac{1}{K})(\lambda_j, \lambda_i) \left((\sum_{l=1}^{m} K_l(\lambda_j, \lambda_i)) \langle x_i, x_j \rangle - \langle g_{\mathcal{K}}(\lambda_i) x_i, g_{\mathcal{K}}(\lambda_j) x_j \rangle \right) \\ &= \sum_{i,j} (1 - \frac{1}{K})(\lambda_j, \lambda_i) \left((\sum_{l=1}^{m-1} K_l(\lambda_j, \lambda_i)) \langle x_i, x_j \rangle + \langle \gamma(\lambda_j, \lambda_i) x_i, x_j \rangle \right). \end{aligned}$$

Umformen liefert

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j} \frac{1}{K}(\lambda_j, \lambda_i) \langle \gamma(\lambda_j, \lambda_i) x_i, x_j \rangle \\ &\geq \sum_{i,j} (1 - \frac{1}{K})(\lambda_j, \lambda_i) (\sum_{l=1}^{m-1} K_l(\lambda_j, \lambda_i)) \langle x_i, x_j \rangle \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

da sowohl $1-\frac{1}{K}$ also auch $\sum_{l=1}^{m-1} K_l$ positiv definit sind, und damit auch ihr Produkt. Also ist $\frac{1}{K}\gamma$ positiv definit, also auch γ selbst als Produkt positiv definiter Abbildungen.

(b) Es genügt, die Gleichheiten für alle $K_m(\cdot,\lambda)x$ ($\lambda \in X$, $x \in \mathcal{E}_*$) zu zeigen. Es gilt somit

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathcal{K},m}(K_m(\cdot,\lambda)x) &= g_{\mathcal{K}}(\lambda)x\\ &= a^*(d(\lambda)\otimes g_{\mathcal{K}}(\lambda)x)+c^*x\\ &= a^*(1_{\mathcal{F}}\otimes\Psi_{\mathcal{K},m})S^*_{\mathcal{E}_*,m}(K_m(\cdot,\lambda)x)+c^*P_{\mathcal{E}_*,m}(K_m(\cdot,\lambda)x)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}P_{\mathcal{E},m}M^*_\phi(K_m(\cdot,\lambda)x) &= P_{\mathcal{E},m}(K_m(\cdot,\lambda)\phi(\lambda)^*x)\\ &= \phi(\lambda)^*x\\ &= b^*Z_{\mathcal{K}}(\lambda)^*(1_{\mathcal{K}}-a^*Z_{\mathcal{K}}(\lambda)^*)^{-1}c^*x+d^*x\\ &= b^*(d(\lambda)\otimes g_{\mathcal{K}}(\lambda)x)+d^*x\\ &= b^*(1_{\mathcal{F}}\otimes\Psi_{\mathcal{K},m})S^*_{\mathcal{E}_*,m}(K_m(\cdot,\lambda)x)+d^*P_{\mathcal{E}_*,m}(K_m(\cdot,\lambda)x).\end{aligned}$$

□

Wir sind nun in der Lage, das Commutant-Lifting-Resultat zu beweisen, wie es im skalaren Fall für $m=1$ unter etwas stärkeren Voraussetzungen in [**ATa**] bewiesen wurde.

SATZ 4.10. *Seien $\mathcal{N}\subset\mathcal{H}_m\otimes\mathcal{E}$ und $\mathcal{N}_*\subset\mathcal{H}_m\otimes\mathcal{E}_*$ $*$-invariante Teilräume. Sei $N\in L(\mathcal{N},\mathcal{N}_*)$ ein Operator, so daß*

$$P_{\mathcal{N}_*}M_{d_\eta\otimes 1_{\mathcal{E}_*}}N = NP_{\mathcal{N}}M_{d_\eta\otimes 1_{\mathcal{E}}|\mathcal{N}}\quad(\eta\in\mathcal{F})$$

bzw. äquivalent dazu

$$N^*(M^*_{d_\eta\otimes 1_{\mathcal{E}_*}})_{|\mathcal{N}_*} = M^*_{d_\eta\otimes 1_{\mathcal{E}}}N^*\quad(\eta\in\mathcal{F})$$

gilt. Es seien Y,Y_* definiert durch

$$Y=P_{\mathcal{N}}S_{\mathcal{E},m|\mathcal{F}\otimes\mathcal{N}}\text{ und }Y_*=P_{\mathcal{N}_*}S_{\mathcal{E}_*,m|\mathcal{F}\otimes\mathcal{N}_*}.$$

Dann sind äquivalent:

(i) $\Delta^{m-1}_{Y_*}(1_{\mathcal{N}_*}-NN^*)\geq 0.$

(ii) Es existiert $\phi\in\mathcal{M}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{E},\mathcal{H}\otimes\mathcal{E}_*)$ mit $\|M_\phi\|\leq 1$ derart, daß

$$P_{\mathcal{E},m}N^*=P_{\mathcal{E},m}(M^*_\phi)_{|\mathcal{N}_*}$$

gilt.

(iii) Es existiert $\phi\in\mathcal{M}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{E},\mathcal{H}\otimes\mathcal{E}_*)$ mit $\|M_\phi\|\leq 1$ derart, daß $(M^*_\phi)_{|\mathcal{N}_*}=N^*$.

(iv) Es existiert $\phi\in\mathcal{M}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{E},\mathcal{H}\otimes\mathcal{E}_*)$ mit $\|M_\phi\|\leq 1$ derart, daß $N=P_{\mathcal{N}_*}M_{\phi|\mathcal{N}}$ und $M^*_\phi\mathcal{N}_*\subset\mathcal{N}$.

BEWEIS. Wir weisen darauf hin, daß in den Aussagen (*ii*) bis (*iv*) die Abbildung ϕ ein Multiplier in $\mathcal{M}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{E},\mathcal{H}\otimes\mathcal{E}_*)$ ist, so daß der zugehörige Multiplier

$$M_\phi:\mathcal{H}\otimes\mathcal{E}\to\mathcal{H}\otimes\mathcal{E}_*$$

kontraktiv ist, jedoch liegt ϕ natürlich auch in $\mathcal{M}(\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{E}, \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{E}_*)$, so daß die Aussagen durchaus sinnvoll sind.

Es gelte nun (i). Wir bezeichnen mit Γ den nach Voraussetzung positiven Operator $\Delta_{Y_*}^{m-1}(1_{\mathcal{N}_*} - NN^*)$. Nach Lemma 4.8 gilt

$$\begin{aligned}
&\langle P_{\mathcal{E}_*,m} g, P_{\mathcal{E}_*,m} h\rangle - \langle P_{\mathcal{E},m} N^* g, P_{\mathcal{E},m} N^* h\rangle \\
&= \langle \Delta_{Y_*}^{m}(1_{\mathcal{N}_*} - NN^*) g, h\rangle \\
&= \langle \Delta_{Y_*}^{m-1}(1_{\mathcal{N}_*} - NN^*) g, h\rangle - \langle Y_*(1_{\mathcal{F}} \otimes \Delta_{Y_*}^{m-1}(1_{\mathcal{N}_*} - NN^*)) Y_*^* g, h\rangle \\
&= \langle \Gamma^{\frac{1}{2}} g, \Gamma^{\frac{1}{2}} h\rangle - \langle (1_{\mathcal{F}} \otimes \Gamma^{\frac{1}{2}}) Y_*^* g, (1_{\mathcal{F}} \otimes \Gamma^{\frac{1}{2}}) Y_*^* h\rangle \quad (g, h \in \mathcal{N}_*).
\end{aligned}$$

Nach Lemma 1.7 ist dann die Abbildung

$$V : D = \bigvee\left\{\begin{pmatrix} (1_{\mathcal{F}} \otimes \Gamma^{\frac{1}{2}}) Y_*^* h \\ P_{\mathcal{E}_*,m} h \end{pmatrix} \; ; \; h \in \mathcal{N}_*\right\} \to \bigvee\left\{\begin{pmatrix} \Gamma^{\frac{1}{2}} h \\ P_{\mathcal{E},m} N^* h \end{pmatrix} \; ; \; h \in \mathcal{N}_*\right\}$$
$$\begin{pmatrix} (1_{\mathcal{F}} \otimes \Gamma^{\frac{1}{2}}) Y_*^* h \\ P_{\mathcal{E}_*,m} h \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \Gamma^{\frac{1}{2}} h \\ P_{\mathcal{E},m} N^* h \end{pmatrix}$$

wohldefiniert und unitär. Wir konstruieren nun eine Kontraktion

$$U \in L(\mathcal{N}_* \oplus \mathcal{E}, (\mathcal{F} \otimes \mathcal{N}_*) \oplus \mathcal{E}_*),$$

indem wir $U^* = V$ auf D und $U^* = 0$ auf $D^\perp$ setzen.

Wir schreiben dann

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in L(\mathcal{N}_* \oplus \mathcal{E}, (\mathcal{F} \otimes \mathcal{N}_*) \oplus \mathcal{E}_*)$$

als Operatormatrix und behaupten, daß

$$\phi : X \to L(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*) \; , \; \lambda \mapsto d + c(1_{\mathcal{N}_*} - Z_{\mathcal{N}_*}(\lambda) a)^{-1} Z_{\mathcal{N}_*}(\lambda) b$$

das gesuchte Symbol ist. Nach Satz 3.3 definiert ϕ auf jeden Fall einen Multiplier in $\mathcal{M}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}, \mathcal{H} \otimes \mathcal{E}_*)$ mit $\|M_\phi\| \le 1$.

Aus der Matrixdarstellung von U gewinnen wir für $h \in \mathcal{N}_*$ die folgenden Identitäten

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\frac{1}{2}} h &= a^*(1_{\mathcal{F}} \otimes \Gamma^{\frac{1}{2}}) Y_*^* h + c^* P_{\mathcal{E}_*,m} h \\
P_{\mathcal{E},m} N^* h &= b^*(1_{\mathcal{F}} \otimes \Gamma^{\frac{1}{2}}) Y_*^* h + d^* P_{\mathcal{E}_*,m} h.
\end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, daß $\Gamma^{\frac{1}{2}}$ auf $\mathcal{N}_*$ mit der in Lemma 4.9 definierten zu U gehörenden Abbildung $\Psi_{\mathcal{N}_*,m} \in L(\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{E}_*, \mathcal{N}_*)$ übereinstimmt. Dazu bilden wir die Differenz

$$M = \Gamma^{\frac{1}{2}} - \Psi_{\mathcal{N}_*,m|\mathcal{N}_*} \in L(\mathcal{N}_*),$$

und wir sehen erneut mit Lemma 4.9, daß

$$\Psi_{\mathcal{N}_*,m|\mathcal{N}_*} = a^*(1_{\mathcal{F}} \otimes \Psi_{\mathcal{N}_*,m|\mathcal{N}_*}) Y_*^* + c^* P_{\mathcal{E}_* m|\mathcal{N}_*}$$

gilt, da $Y_*^* = (S_{\mathcal{E}_*,m}^*)_{|\mathcal{N}_*}$ ist. Somit ist

$$M = a^*(1_{\mathcal{F}} \otimes M) Y_*^*$$

und folglich (da $\|a^*\| \leq 1$)

$$\begin{aligned} M^*M &= Y_*(1_{\mathcal{F}} \otimes M^*)aa^*(1_{\mathcal{F}} \otimes M)Y_*^* \\ &\leq Y_*(1_{\mathcal{F}} \otimes M^*M)Y_*^*. \end{aligned}$$

Das heißt aber gerade, daß $\Delta_{Y_*}(M^*M) \leq 0$. Natürlich ist M^*M positiv, so daß nach Lemma 4.7 $M^*M = 0$, also $M = 0$ gelten muß.

Mit Lemma 4.9 erhalten wir nun

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{E},m}(M_\phi^*)_{|\mathcal{N}_*} &= b^*(1_{\mathcal{F}} \otimes \Psi_{\mathcal{N}_*,m|\mathcal{N}_*})Y_*^* + d^*P_{\mathcal{E}_*,m|\mathcal{N}_*} \\ &= b^*(1_{\mathcal{F}} \otimes \Gamma^{\frac{1}{2}})Y_*^* + d^*P_{\mathcal{E}_*,m|\mathcal{N}_*} \\ &= P_{\mathcal{E},m}N^*, \end{aligned}$$

also ist (ii) gezeigt.

Gelte jetzt umgekehrt (ii).

Wir bezeichnen mit Γ den Operator $\Delta_{Y_*}^{m-1}(1_{\mathcal{N}_*} - NN^*)$. Zu ϕ finden wir nach Satz 3.3 und anschließender Bemerkung einen Hilbertraum $\mathcal{K}$ und eine Kontraktion

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in L(\mathcal{K} \oplus \mathcal{E}, (\mathcal{F} \otimes \mathcal{K}) \oplus \mathcal{E}_*)$$

derart, daß $\phi(\lambda) = d + c(1_{\mathcal{K}} - Z_{\mathcal{K}}(\lambda)a)^{-1}Z_{\mathcal{K}}(\lambda)b$ $(\lambda \in X)$ gilt und daß U^* eine partielle Isometrie mit dem Initialraum

$$D = \bigvee\{\begin{pmatrix} d(\lambda) \otimes g_{\mathcal{K}}(\lambda)x \\ x \end{pmatrix} \ ; \ \lambda \in X \ , \ x \in \mathcal{E}_*\}$$

ist, wenn wir $\Psi_{\mathcal{K},m}$ und $g_{\mathcal{K}}$ wie in Lemma 4.9 definieren. Wir wollen zeigen, daß

$$\Delta_{Y_*}(P_{\mathcal{N}_*}\Psi_{\mathcal{K},m}^*\Psi_{\mathcal{K},m|\mathcal{N}_*} - \Gamma) = 0$$

gilt. Nach Lemma 4.7 ist nämlich Δ_{Y_*} injektiv, so daß dann

$$\langle \Gamma h, h \rangle = \langle P_{\mathcal{N}_*}\Psi_{\mathcal{K},m}^*\Psi_{\mathcal{K},m}h, h \rangle = \|\Psi_{\mathcal{K},m}h\|^2 \geq 0 \quad (h \in \mathcal{N}_*)$$

gilt, also $\Gamma \geq 0$.

Wir beobachten zunächst, daß

$$\begin{aligned} &\{\begin{pmatrix} (1_{\mathcal{F}} \otimes \Psi_{\mathcal{K},m})S_{\mathcal{E}_*,m}^*g \\ P_{\mathcal{E}_*,m}g \end{pmatrix} \ ; \ g \in \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{E}_*\} \\ &\subset \bigvee\{\begin{pmatrix} (1_{\mathcal{F}} \otimes \Psi_{\mathcal{K},m})S_{\mathcal{E}_*,m}^*K_m(\cdot,\lambda)x \\ P_{\mathcal{E}_*,m}K_m(\cdot,\lambda)x \end{pmatrix} \ ; \ \lambda \in X \ , \ x \in \mathcal{E}_*\} \\ &\subset \bigvee\{\begin{pmatrix} d(\lambda) \otimes g_{\mathcal{K}}(\lambda)x \\ x \end{pmatrix} \ ; \ \lambda \in X \ , \ x \in \mathcal{E}_*\} \\ &= D \end{aligned}$$

gilt. Wir erhalten nun unter Benutzung der Tatsache, daß U^* auf D isometrisch ist, mit Lemma 4.9 folgende Gleichheit:

$$\begin{aligned}
&\langle \Psi_{\mathcal{K},m} g, \Psi_{\mathcal{K},m} h\rangle + \langle P_{\mathcal{E},m} N^* g, P_{\mathcal{E},m} N^* h\rangle \\
&= \langle \begin{pmatrix} \Psi_{\mathcal{K},m} g \\ P_{\mathcal{E},m} M_\phi^* g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Psi_{\mathcal{K},m} h \\ P_{\mathcal{E},m} M_\phi^* h \end{pmatrix}\rangle \\
&= \langle \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1_{\mathcal{F}} \otimes \Psi_{\mathcal{K},m}) Y_*^* g \\ P_{\mathcal{E}_*,m} g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1_{\mathcal{F}} \otimes \Psi_{\mathcal{K},m}) Y_*^* h \\ P_{\mathcal{E}_*,m} h \end{pmatrix}\rangle \\
&= \langle \begin{pmatrix} (1_{\mathcal{F}} \otimes \Psi_{\mathcal{K},m}) Y_*^* g \\ P_{\mathcal{E}_*,m} g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (1_{\mathcal{F}} \otimes \Psi_{\mathcal{K},m}) Y_*^* h \\ P_{\mathcal{E}_*,m} h \end{pmatrix}\rangle \\
&= \langle (1_{\mathcal{F}} \otimes \Psi_{\mathcal{K},m}) Y_*^* g, (1_{\mathcal{F}} \otimes \Psi_{\mathcal{K},m}) Y_*^* h\rangle + \langle P_{\mathcal{E}_*,m} g, P_{\mathcal{E}_*,m} h\rangle \quad (g,h \in \mathcal{N}_*).
\end{aligned}$$

Außerdem erhalten wir mit Lemma 4.8

$$\begin{aligned}
&\langle P_{\mathcal{E}_*,m} g, P_{\mathcal{E}_*,m} h\rangle - \langle P_{\mathcal{E},m} N^* g, P_{\mathcal{E},m} N^* h\rangle \\
&= \langle \Delta_{Y_*}^m (1_{\mathcal{N}_*} - NN^*) g, h\rangle \\
&= \langle \Gamma g, h\rangle - \langle (1_{\mathcal{F}} \otimes \Gamma) Y_*^* g, Y_*^* h\rangle \quad (g,h \in \mathcal{N}_*).
\end{aligned}$$

Aufsummieren dieser beiden Gleichungen liefert für $g, h \in \mathcal{N}_*$

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \Psi_{\mathcal{K},m} g, \Psi_{\mathcal{K},m} h\rangle - \langle (1_{\mathcal{F}} \otimes \Psi_{\mathcal{K},m}) Y_*^* g, (1_{\mathcal{F}} \otimes \Psi_{\mathcal{K},m} Y_*^* h\rangle \\
&\quad - \langle \Gamma g, h\rangle + \langle (1_{\mathcal{F}} \otimes \Gamma) Y_*^* g, Y_*^* h\rangle \\
&= \langle \Delta_{Y_*}(P_{\mathcal{N}_*} \Psi_{\mathcal{K},m}^* \Psi_{\mathcal{K},m|\mathcal{N}_*}) g, h\rangle - \langle \Delta_{Y_*}(\Gamma) g, h\rangle \\
&= \langle \Delta_{Y_*}(P_{\mathcal{N}_*} \Psi_{\mathcal{K},m}^* \Psi_{\mathcal{K},m|\mathcal{N}_*} - \Gamma) g, h\rangle.
\end{aligned}$$

Somit ist $\Delta_{Y_*}(P_{\mathcal{N}_*} \Psi_{\mathcal{K},m}^* \Psi_{\mathcal{K},m|\mathcal{N}_*} - \Gamma) = 0$, wie wir zeigen wollten.

Wir haben also die Äquivalenz von (i) und (ii) gezeigt. Die Implikation (iii) nach (ii) ist offensichtlich, ebenso wie die Äquivalenz von (iii) und (iv). Es bleibt also zu zeigen, daß (iii) aus (ii) folgt.

Es war vorausgesetzt, daß für alle $\eta \in \mathcal{F}$ die Vertauschungsrelation

$$M_{d_\eta \otimes 1_{\mathcal{E}}}^* N^* = N^* (M_{d_\eta \otimes 1_{\mathcal{E}_*}}^*)_{|\mathcal{N}_*}$$

gilt. Diese folgt dann natürlich auch für die von den Abbildungen d_η $(\eta \in \mathcal{F})$ in $\mathbb{C}^X$ erzeugte unitale Algebra, die wir wie früher mit $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ bezeichnen, und die, wie in Lemma 4.2 gezeigt wurde, dicht in $\mathcal{H}_m$ liegt. Es ist somit

$$\begin{aligned}
\langle N^* g, (\gamma \otimes x)\rangle &= \langle M_{\gamma \otimes 1_{\mathcal{E}}}^* N^* g, P_{\mathcal{E},m}^* x\rangle \\
&= \langle P_{\mathcal{E},m} N^* M_{\gamma \otimes 1_{\mathcal{E}_*}}^* g, x\rangle \\
&= \langle P_{\mathcal{E},m} M_\phi^* M_{\gamma \otimes 1_{\mathcal{E}_*}}^* g, x\rangle \\
&= \langle M_\phi^* g, M_{\gamma \otimes 1_{\mathcal{E}}} (1 \otimes x)\rangle \\
&= \langle M_\phi^* g, (\gamma \otimes x)\rangle \quad (g \in \mathcal{N}_*\ ,\ \gamma \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}}\ ,\ x\ \in \mathcal{E}).
\end{aligned}$$

Da $\mathcal{A}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{H}_m$ dicht liegt, ist natürlich auch $\{\gamma \otimes x \ ; \ \gamma \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}} \ , \ x \in \mathcal{E}\}$ total in $H_m \otimes \mathcal{E}$. Es folgt, wie behauptet, daß $N^* = (M_\phi^*)_{|\mathcal{N}_*}$ gilt.

□

Wir notieren schließlich einige Konsequenzen des Commutant-Lifting-Theorems.

BEMERKUNG.

(a) Im Falle $m = 1$ ist die Bedingung $\Delta_{Y_*}^{m-1}(1 - NN^*) \geq 0$ äquivalent dazu, daß N eine Kontraktion ist. Indem wir das Commutant-Lifting-Theorem auf die Kontraktion $\frac{1}{\|N\|}N$ anwenden, können wir sogar erreichen, daß $\|M_\phi\| \leq \|N\|$ gilt.

(b) Mit $m = 1$, $\mathcal{N} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{E}$ und $\mathcal{N}_* = \mathcal{H} \otimes \mathcal{E}_*$ liefert uns Satz 4.10 insbesondere, daß

$$\{N \in L(\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}, \mathcal{H} \otimes \mathcal{E}_*) \ ; \ M_{d_\eta \otimes 1_{\mathcal{E}_*}} N = N M_{d_\eta \otimes 1_{\mathcal{E}}} \text{ für alle } \eta \in \mathcal{F}\}$$

genau die Multiplieralgebra

$$\mathcal{M}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}, \mathcal{H} \otimes \mathcal{E}_*)$$

ist. gilt, bzw. daß im skalaren Fall der Kommutant von $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ gerade $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ selbst ist.

(c) Wir sahen bereits, daß $\mathcal{M}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}, \mathcal{H} \otimes \mathcal{E}_*) \subset \mathcal{M}(\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{E}, \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{E}_*)$ gilt. Durch Satz 4.10 können wir nun die Multiplier $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{E}, \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{E}_*)$, die auch in $\mathcal{M}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}, \mathcal{H} \otimes \mathcal{E}_*)$ liegen, genau durch die Positivitätsbedingung

$$\Delta_{S_{\mathcal{E}_*,m}}^{m-1}(1 - M_\phi M_\phi^*) \geq 0$$

charakterisieren.

KOROLLAR 4.11. *Sei $\mathcal{G}$ ein Hilbertraum, und sei $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}$ ein (nicht notwendig abgeschlossener) Teilraum. Dann sind äquivalent:*

(i) $\mathcal{N}$ ist reduzierend.

(ii) Es existieren ein Multiplier $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G})$, so daß M_ϕ die Orthogonalprojektion auf $\mathcal{N}$ ist.

(iii) Es existieren ein Multiplier $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G})$ und eine Orthogonalprojektion $Q \in L(\mathcal{G})$, so daß $ran M_\phi = \mathcal{N}$ gilt, und $\phi(\lambda) = Q$ $(\lambda \in X)$ ist.

Insbesondere sind die einzigen reduzierenden Teilräume von $\mathcal{H}_m$ die trivialen.

BEWEIS. Es gelte (i). Da $\mathcal{N}$ reduzierend ist, ist es insbesondere abgeschlossen. Sei $P_\mathcal{N}$ die Orthogonalprojektion auf $\mathcal{N}$. Dann erfüllen $P_\mathcal{N}$ und $1_{\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}} - P_\mathcal{N}$ beide die Voraussetzungen von Lemma 4.8 und Satz 4.10, denn es gilt für $\eta \in \mathcal{F}$

$$M_{d_\eta \otimes 1_\mathcal{G}} P_\mathcal{N} = P_\mathcal{N} M_{d_\eta \otimes 1_\mathcal{G}},$$

wie man leicht nachrechnet. Ferner ist nach Lemma 4.8

$$\begin{aligned}
\Delta_{S_{\mathcal{G},m}}^{m-1}(1_{\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}} - P_\mathcal{N} P_\mathcal{N}^*) &= \Delta_{S_{\mathcal{G},m}}^{m-1}(1_{\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}} - P_\mathcal{N}) \\
&= \Delta_{S_{\mathcal{G},m}}^{m-1}\left((1_{\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}} - P_\mathcal{N})(1_{\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}} - P_\mathcal{N})^*\right)
\end{aligned}$$

positiv. Nach dem Commutant-Lifting-Satz existiert ein Multiplier $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{G})$ derart, daß $P_{\mathcal{N}} = M_\phi$ gilt. Also gilt (ii).

Da M_ϕ dann selbstadjungiert ist, folgt

$$\begin{aligned}\phi(\lambda)K_m(\lambda,\mu)x &= \left(M_\phi(K_m(\cdot,\mu)x)\right)(\lambda)\\ &= \left(M_\phi^*(K_m(\cdot,\mu)x)\right)(\lambda)\\ &= K_m(\lambda,\mu)(\phi(\mu)^*x) \quad (\lambda,\mu \in X\ , x \in \mathcal{G}).\end{aligned}$$

Da K nullstellenfrei ist, ist $\phi(\lambda) = \phi(\mu)^*$ für $\lambda, \mu \in X$, also folgt insbesondere $\phi(\lambda)^* = \phi(\lambda)$ $(\lambda \in X)$, somit ist also ϕ konstant. Außerdem ist M_ϕ eine Projektion; es gilt

$$\phi(\lambda)^2 x = \left(M_\phi^2(\mathbf{1} \otimes x)\right)(\lambda) = \left(M_\phi(\mathbf{1} \otimes x)\right)(\lambda) = \phi(\lambda)x \quad (\lambda \in X\ ,\ x \in \mathcal{G}),$$

und $\phi(\lambda)$ ist ebenfalls idempotent für alle $\lambda \in X$. Also ergibt sich (iii).

Wir wollen nun (ii) aus (iii) folgern. Dazu ist zu zeigen, daß für ϕ wie in (iii) die Multiplikation M_ϕ eine Orthogonalprojektion sein muß. Es gilt aber

$$\begin{aligned}(M_\phi^*(K_m(\cdot,\mu)x))(\lambda) &= K_m(\lambda,\mu)(\phi(\mu)^*x)\\ &= K_m(\lambda,\mu)(Qx)\\ &= \phi(\lambda)K_m(\lambda,\mu)x\\ &= (M_\phi(\mathcal{K}_m(\cdot,\lambda)x))(\lambda) \quad (\lambda,\mu \in X\ ,\ x \in \mathcal{G}).\end{aligned}$$

Da $\{K_m(\cdot,\mu)x\ ;\ \mu \in X\ ,\ x \in \mathcal{G}\}$ total in $H_m \otimes \mathcal{G}$ ist, folgt $M_\phi^* = M_\phi$. Ferner ist

$$M_\phi^2(f)(\lambda) = \phi(\lambda)^2 f(\lambda) = Qf(\lambda) = M_\phi(f)(\lambda) \quad (\lambda \in X\ ,\ f \in \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}),$$

also ist M_ϕ idempotent. Wegen $ranM_\phi = \mathcal{N}$ muß M_ϕ schon die Orthogonalprojektion auf $\mathcal{N}$ sein.

Schließlich folgt (i) aus (ii), denn es gilt

$$M_{d_\eta \otimes 1_{\mathcal{G}}}(\mathcal{N}) = M_{d_\eta \otimes 1_{\mathcal{G}}} M_\phi(\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}) = M_\phi M_{d_\eta \otimes 1_{\mathcal{G}}}(\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}) \subset M_\phi(\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}) = \mathcal{N}$$

sowie

$$M_{d_\eta \otimes 1_{\mathcal{G}}}^*(\mathcal{N}) = M_{d_\eta \otimes 1_{\mathcal{G}}}^* M_\phi^*(\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}) = M_\phi^* M_{d_\eta \otimes 1_{\mathcal{G}}}^*(\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}) \subset M_\phi^*(\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}) = \mathcal{N},$$

so daß $\mathcal{N}$ also reduzierend ist, denn als Bild einer Orthogonalprojektion ist es insbesondere abgeschlossen.

Der Zusatz folgt, da die einzigen Projektionen in $L(\mathbb{C})$ die trivialen sind.

$\square$

3. Nevanlinna-Pick-Interpolation

Das klassische Nevanlinna-Pick-Interpolationsproblem ist folgendes: Gegeben seien endlich viele Punkte $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{D}$, wobei $\mathbb{D}$ die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$ bezeichnet, und komplexe Zahlen $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$. Wann existiert eine Funktion $\psi \in H^\infty(\mathbb{D})$, die $\psi(z_i) = w_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ und $\|\psi\|_\infty \leq 1$ erfüllt? Ein klassisches Resultat von Nevanlinna und Pick besagt, daß das genau dann der Fall ist, wenn die Matrix

$$\left(\frac{1 - w_i \overline{w_j}}{1 - z_i \overline{z_j}} \right)_{i,j=1}^n$$

positiv semidefinit ist.

Wir bezeichnen mit H^2 den Hardyraum holomorpher Funktionen über $\mathbb{D}$, also den funktionalen Hilbertraum mit reproduzierendem Kern

$$\kappa : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{C} \ , \ (z, w) \mapsto \frac{1}{1 - z\overline{w}}.$$

Wir formulieren nun obigen Sachverhalt in der Sprache funktionaler Hilberträume.

Gegeben seien eine endliche Teilmenge $E \subset \mathbb{D}$ und eine Funktion $\phi : E \to \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

(i) ϕ ist ein Multiplier des funktionalen Hilbertraumes H^2_E mit $\|M_\phi\| \leq 1$.
(ii) Es existiert ein Multiplier $\psi \in \mathcal{M}(H^2)$ mit $\|M_\psi\| \leq 1$ und $\psi_{|E} = \phi$.

Die Implikation von (ii) nach (i) ist immer trivial. Umgekehrt sehen wir mit

$$E = \{z_1, \ldots, z_n\} \text{ und } \phi(z_i) = w_i \ (i = 1, \ldots, n),$$

daß (i) nach Satz 1.11 äquivalent dazu ist, daß die Abbildung

$$E \times E \to \mathbb{C} \ , \ (z, w) \mapsto \kappa(z, w)(1 - \phi(z)\overline{\phi(w)})$$

positiv definit ist, was offenbar äquivalent dazu ist, daß die Matrix

$$\left(\frac{1 - w_i \overline{w_j}}{1 - z_i \overline{z_j}} \right)_{i,j=1}^n = \Big(\kappa(z_i, z_j)(1 - \phi(z_i)\overline{\phi(z_j)} \Big)_{i,j=1}^n$$

positiv definit ist. Ferner ist der Multiplierraum von H^2 gerade $H^\infty(\mathbb{D})$, so daß (ii) äquivalent dazu ist, daß eine $H^\infty(\mathbb{D})$-Funktion ψ mit $\|\psi\|_\infty \leq 1$ existiert, die das Interpolationsproblem löst ($\psi_{|E} = \phi$). Dann folgt die Implikation für endliches E gerade aus dem klassischen Resultat von Nevanlinna und Pick.

Dies motiviert die folgende Definition.

DEFINITION 4.12. *Seien $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}^X$ und $\mathcal{H}_* \subset \mathcal{E}_*^X$ funktionale Hilberträume ($\mathcal{E}, \mathcal{E}_*$ beliebige Hilberträume). Wir sagen, daß das Tupel $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_*)$ die Nevanlinna-Pick-Interpolationseigenschaft hat, falls zu jeder Teilmenge $Y \subset X$ und zu jedem Multiplier $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_Y, \mathcal{H}_{*Y})$ ein Multiplier $\psi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_*)$ existiert mit $\psi_{|Y} = \phi$ und $\|M_\psi\| = \|M_\phi\|$.*

Mit Hilfe des in Satz 4.10 bewiesenen Commutant-Lifting-Resultats können wir nun zeigen, daß Nevanlinna-Pick-Räume die Nevanlinna-Pick-Interpolationseigenschaft haben (was auch den Namen rechtfertigt).

SATZ 4.13. *Seien $\mathcal{E}, \mathcal{E}_*$ Hilberträume, und sei $\mathcal{H}$ ein Nevanlinna-Pick-Raum. Dann hat das Tupel $(\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}, \mathcal{H} \otimes \mathcal{E}_*)$ die Nevanlinna-Pick-Interpolationseigenschaft.*

BEWEIS. Sei $Y \subset X$, und sei $\phi \in \mathcal{M}((\mathcal{H} \otimes \mathcal{E})_Y, (\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}_*)_Y)$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß $\|M_\phi\| = 1$, sonst gehen wir zu dem Multiplier $\frac{1}{\|M_\phi\|}\phi$ über. Es sei K der reproduzierende Kern von $\mathcal{H}$ und

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \bigvee \{K(\cdot, \lambda)x \; ; \; \lambda \in Y \; , \; x \in \mathcal{E}\} \subset \mathcal{H} \otimes \mathcal{E} \\ \mathcal{N}_* &= \bigvee \{K(\cdot, \lambda)x \; ; \; \lambda \in Y \; , \; x \in \mathcal{E}_*\} \subset \mathcal{H} \otimes \mathcal{E}_*. \end{aligned}$$

Da ϕ ein Multiplier mit $\|M_\phi\| \leq 1$ ist, ist die Abbildung

$$Y \times Y \to L(\mathcal{E}_*) \; , \; (\lambda, \mu) \mapsto K(\lambda, \mu)(1_{\mathcal{E}_*} - \phi(\lambda)\phi(\mu)^*)$$

positiv definit. Nach Lemma 1.7 existiert daher eine Kontraktion $N \in L(\mathcal{N}\mathcal{N}_*)$ mit

$$N^*(K(\cdot, \lambda)x) = K(\cdot, \lambda)\phi(\lambda)^*x \quad (\lambda \in X \; , \; x \in \mathcal{E}_*).$$

Nach Satz 1.12 wissen wir, daß $(\mathcal{H} \otimes \mathcal{E})_Y$ und $\mathcal{N}$ sowie $(\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}_*)_Y$ und $\mathcal{N}_*$ isometrisch isomorph sind (vermöge der Einschränkungsabbildung). Unter dieser Identifikation ist N^* offenbar nichts anderes als die Adjungierte der Multiplikation mit ϕ, wodurch wir N ebensogut hätten definieren können.

Wir zeigen nun, daß $\mathcal{N}$ und $\mathcal{N}_*$ $*$-invariant sind. Sei dazu $\gamma \in \mathcal{M}(\mathcal{H})$. Es gilt

$$\begin{aligned} M^*_{\gamma \otimes 1_{\mathcal{E}}} K(\cdot, \lambda)x &= K(\cdot, \lambda)\overline{\gamma(\lambda)}x \\ &= \overline{\gamma(\lambda)}K(\cdot, \lambda)x \in \mathcal{N} \quad (\lambda \in Y \; , \; x \in \mathcal{E}). \end{aligned}$$

Nach Definition von $\mathcal{N}$ folgt die Behauptung (entsprechend für $\mathcal{N}_*$).

Um das Commutant-Lifting-Theorem anwenden zu können, genügt es zu zeigen, daß für alle $\gamma \in \mathcal{M}(\mathcal{H})$

$$N P_{\mathcal{N}} M_{\gamma \otimes 1_{\mathcal{E}} | \mathcal{N}} = P_{\mathcal{N}_*} M_{\gamma \otimes 1_{\mathcal{E}_*}} N$$

gilt, oder äquivalent, daß

$$N^* M^*_{\gamma \otimes 1_{\mathcal{E}_*} | \mathcal{N}_*} = M^*_{\gamma \otimes 1_{\mathcal{E}}} N^*$$

ist.

Aus Stetigkeitsgründen genügt es natürlich, diese Identität auf der Menge

$$\{K(\cdot, \lambda)x \; ; \; \lambda \in Y \; , \; x \in \mathcal{E}_*\}$$

zu zeigen. Sei also $\lambda \in Y$, $x \in \mathcal{E}_*$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} M^*_{\gamma \otimes 1_{\mathcal{E}}} N^* K(\cdot, \lambda)x &= \overline{\gamma(\lambda)}K(\cdot, \lambda)\phi(\lambda)^*x \\ &= N^*(K(\cdot, \lambda)\overline{\gamma(\lambda)}x) \\ &= N^* M^*_{\gamma \otimes 1_{\mathcal{E}_*}} K(\cdot, \lambda)x. \end{aligned}$$

Nach Satz 4.10 finden wir nun einen Multiplier $\psi \in M(\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}, \mathcal{H} \otimes \mathcal{E}_*)$ mit

$$\|M_\psi\| \leq 1 = \|M_\phi\| \text{ und } N^* = (M_\psi^*)_{|\mathcal{N}_*}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} K(\lambda, \lambda)\phi(\lambda)^* x &= N^*(K(\cdot, \lambda)x)(\lambda) \\ &= M_\psi^*(K(\cdot, \lambda)x)(\lambda) \\ &= K(\lambda, \lambda)\psi(\lambda)^* x \quad (\lambda \in Y\ ,\ x \in \mathcal{E}_*). \end{aligned}$$

Da $K(\lambda, \lambda) \neq 0$ für alle $\lambda \in X$ ist, folgt $\phi = \psi_{|Y}$. Offensichtlich gilt dann auch $\|M_\psi\| \geq \|M_\phi\|$, was den Beweis abschließt. $\square$

Dies gibt einen alternativen Beweis für ein Resultat von Quiggin [**Qui93**], der zeigte, daß ein nullstellenfreier Kern $K : X \times X \to \mathbb{C}$ die skalarwertige Nevanlinna-Pick-Eigenschaft ($\mathcal{E} = \mathcal{E}_* = \mathbb{C}$) besitzt, wann immer eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ existiert, so daß die Abbildung

$$f \otimes \overline{f} - \frac{1}{K} : X \times X \to \mathbb{C}\ ,\ (\lambda, \mu) \mapsto f(\lambda)\overline{f(\mu)} - \frac{1}{K(\lambda, \mu)}$$

positiv definit ist.

Diese Bedingung verallgemeinert augenscheinlich die Annahme, daß $1 - \frac{1}{K}$ positiv definit ist. Jedoch folgt das Resultat von Quiggin schon aus dem hier untersuchten Spezialfall, daß $1 - \frac{1}{K}$ positiv definit ist:

Sei $f : X \to \mathbb{C}$ also eine Funktion, so daß

$$f \otimes \overline{f} - \frac{1}{K}$$

positiv definit ist. Dann muß f offenbar nullstellenfrei sein, denn es gilt

$$|f(\lambda)|^2 \geq \frac{1}{K(\lambda, \lambda)} > 0 \quad (\lambda \in X).$$

Der transformierte Kern

$$\widetilde{K} : X \times X \to \mathbb{C}\ ,\ (\lambda, \mu) \mapsto f(\lambda)K(\lambda, \mu)\overline{f(\mu)}$$

hat dann offenbar die Eigenschaft, daß die Abbildung $1 - \frac{1}{\widetilde{K}}$ positiv definit ist, ist also ein Nevanlinna-Pick-Kern in unserem Sinne.

Da die Abbildungen

$$X \times X \to \mathbb{C}\ ,\ (\lambda, \mu) \mapsto f(\lambda)\overline{f(\mu)}$$

und

$$X \times X \to \mathbb{C}\ ,\ (\lambda, \mu) \mapsto \frac{1}{f(\lambda)}\overline{\frac{1}{f(\mu)}}$$

offenbar beide positiv definit sind, folgt mit Satz 1.11, daß für beliebige Hilberträume $\mathcal{E}, \mathcal{E}_*$ und eine Teilmenge $Y \subset X$ die Multiplierräume

$$\mathcal{M}((\mathcal{H} \otimes \mathcal{E})_Y, (\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}_*)_Y) \text{ und } \mathcal{M}((\widetilde{\mathcal{H}} \otimes \mathcal{E})_Y, (\widetilde{\mathcal{H}} \otimes \mathcal{E}_*)_Y)$$

als normierte Räume übereinstimmen, wenn $\mathcal{H}$ den von K und $\widetilde{\mathcal{H}}$ den von $\widetilde{K}$ generierten funktionalen Hilbertraum bezeichnen.

Nach dem oben Gezeigten hat das Tupel $(\widetilde{\mathcal{H}} \otimes \mathcal{E}, \widetilde{\mathcal{H}} \otimes \mathcal{E}_*)$ die Nevanlinna-Pick-Interpolationseigenschaft, also auch das Paar $(\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}, \mathcal{H} \otimes \mathcal{E}_*)$, was die Aussage von Quiggin beweist.

Aus einer neueren Arbeit von Agler [**AM00**] folgt nun auch die andere Implikation: Sei $K : X \times X \to \mathbb{C}$ nullstellenfreier Kern des funktionalen Hilbertraumes $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}^X$. Falls für beliebige Hilberträume $\mathcal{E}, \mathcal{E}_*$ das Tupel $(\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}, \mathcal{H} \otimes \mathcal{E}_*)$ die Nevanlinna-Pick-Interpolationseigenschaft hat, dann existiert eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$, so daß die Abbildung $f \otimes \overline{f} - \frac{1}{K}$ positiv definit ist.

Dadurch wird auch die Erkenntnis plausibel, daß wir, obwohl wir im Besitz eines Commutant-Lifting-Theorems für Potenzen von Nevanlinna-Pick-Kernen sind (Satz 4.10), damit nicht das Nevanlinna-Pick-Problem für Potenzen von Nevanlinna-Pick-Kernen lösen können, da für diese im allgemeinen keine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ existiert, so daß $f \otimes \overline{f} - \frac{1}{K_m}$ positiv definit ist.

4. Ein Analogon zum Satz von Beurling

Bekanntlich besitzt der klassische Hardyraum H^2 über der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ in $\mathbb{C}$ eine Reihe verschiedener Charakterisierungen. Die naheliegendste davon ist, ihn als die Menge aller auf $\mathbb{D}$ holomorphen Funktionen mit quadratsummierbaren Taylorkoeffizienten, versehen mit der Hilbertraumnorm

$$\|\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2,$$

zu definieren. Natürlich ist der unilaterale Shift

$$S : H^2 \to H^2 \ , \ Sf(w) = wf(w)$$

eine stetige lineare Abbildung auf H^2 (etwa weil die identische Abbildung einen Multiplier auf H^2 definiert). Ein klassischer Satz von Beurling ([**Hal67**], Problem 125) gibt nun eine vollständige Charakterisierung der invarianten Teilräume des Shifts:

Ein nichttrivialer abgeschlossener Unterraum $\mathcal{N} \subset H^2$ ist invariant unter S genau dann, wenn eine innere Funktion ϕ existiert, das heißt eine Funktion ϕ in $H^\infty(\mathbb{D})$, deren Randwerte σ-fast überall Betrag 1 haben, so daß

$$\mathcal{N} = ran \ M_\phi = \phi \cdot H^2$$

gilt. Dabei bezeichnet σ das normierte Oberflächenmaß auf $\partial\mathbb{D}$. Zur Existenz des nichttangentialen Randwertes verweisen wir auf [**Rud80**], Kapitel 5.

Es ist leicht zu sehen, daß die Multiplikation mit inneren Funktionen auf H^2 eine Isometrie ist. Von Lax und Halmos stammt nun eine Verallgemeinerung des Resultates von Beurling (vergleiche dazu [**RR85**], Satz 1.12). Ein Operator S auf einem beliebigen Hilbertraum H heißt nun Shift, wenn

- S isometrisch ist.
- $S^{*k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (SOT)$ gilt.

Ein Operator $\Phi \in L(H)$ heißt S-inner, wenn er mit S vertauscht und partiell isometrisch ist. Das Resultat lautet nun:

Ein abgeschlossener Unterraum $N \subset H$ ist invariant für den Shift S genau dann, wenn ein S-innerer Operator $\Phi \in L(H)$ existiert mit $ran\ \Phi = N$.

Wir beobachten insbesondere, daß wir in dieser allgemeineren Situation die Isometrie des inneren Operators zugunsten der partiellen Isometrie aufgeben müssen.

Motiviert durch diese Beobachtungen wollen wir nun einen ähnlichen Satz in folgender Situation beweisen.

SITUATION (E). *Sei $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}^X$ ein Nevanlinna-Pick-Raum mit reproduzierendem Kern K, $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E}$ ein Hilbertraum. Wir fixieren eine Faktorisierung $d : X \to \mathcal{F}$ von $1 - \frac{1}{K}$ ($\mathcal{F}$ ein geeigneter Hilbertraum), das heißt, es ist*

$$(1 - \frac{1}{K})(\lambda, \mu) = \langle d(\mu), d(\lambda) \rangle \quad (\lambda, \mu \in X).$$

Weiter sei die Abbildung $S_{\mathcal{E},m} \in L(\mathcal{F} \otimes (\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{E}), \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{E})$ wie in Lemma 4.3 erklärt.

Wir benötigen einige vorbereitende Überlegungen.

DEFINITION 4.14. *Sei $N \in L(\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{E})$ beliebig. Ein Paar $(\mathcal{D}, \phi)$ bestehend aus einem Hilbertraum $\mathcal{D}$ und einer Abbildung $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{D}, \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{E})$ heißt Faktorisierung von N, falls $N = M_\phi M_\phi^*$ gilt. Eine Faktorisierung $(\mathcal{D}, \phi)$ heißt minimal, falls zusätzlich*

$$\mathcal{D} = \bigvee \{\phi(\lambda)^* x \ ; \ \lambda \in X \ , \ x \in \mathcal{E}\}$$

gilt.

BEMERKUNG. Sei $N \in L(\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{E})$ ein Operator.

(a) Sei $(\mathcal{D}, \phi)$ eine Faktorisierung von N. Dann gilt

$$\|M_\phi\|^2 = \|N\| \text{ und } ran\ N \subset ran\ M_\phi \subset \overline{ran\ N}.$$

(b) Seien $(\mathcal{D}, \phi)$ sowie $(\mathcal{D}', \phi')$ zwei Faktorisierungen von N. Dann existiert eine unitäre Abbildung

$$U : \bigvee \{\phi(\lambda)^* x \ ; \ \lambda \in X \ , \ x \in \mathcal{E}\} \to \bigvee \{\phi'(\lambda)^* x \ ; \ \lambda \in X \ , \ x \in \mathcal{E}\}$$

mit

$$U\phi(\lambda)^* = \phi'(\lambda)^* \quad (\lambda \in X),$$

also insbesondere eine partielle Isometrie $V : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$, die isometrisch ist, falls $(\mathcal{D}, \phi)$ minimal ist, und surjektiv, falls $(\mathcal{D}', \phi')$ minimal ist.

BEWEIS. Die Gleichheit $\|M_\phi\|^2 = \|N\|$ in (a) ist klar. Ferner gilt

$$ker\ M_\phi^* = ker\ N = ker\ N^*,$$

wie man leicht verifiziert (N ist notwendigerweise selbstadjungiert). Das ist äquivalent dazu, daß $\overline{ran\ M_\phi} = \overline{ran\ N}$ gilt. Die Inklusion $ran\ N \subset ran\ M_\phi$ ist trivial. Zum Beweis von (b) zeigen wir, daß die Abbildung

$$\gamma : X \times X \to L(\mathcal{E})\ ,\ \gamma(\lambda, \mu) = \phi(\lambda)\phi(\mu)^* - \phi'(\lambda)\phi'(\mu)^*$$

verschwindet, denn es gilt

$$\begin{aligned} K_m(\lambda,\mu)\gamma(\lambda,\mu)x &= \left(M_\phi M_\phi^* K_m(\cdot,\mu)x - M_{\phi'} M_{\phi'}^* K_m(\cdot,\mu)x\right)(\lambda) \\ &= \left(N K_m(\cdot,\mu)x - N K_m(\cdot,\mu)x\right)(\lambda) \\ &= 0 \quad (\lambda, \mu \in X\ ,\ x \in \mathcal{E}), \end{aligned}$$

und $K_m(\lambda, \mu) \neq 0$ für $\lambda, \mu \in X$. Nach Lemma 1.7 folgt die Wohldefiniertheit und Isometrie der Abbildung U. Da U als Isometrie abgeschlossenes Bild hat, ist es auch surjektiv. Die übrigen Behauptungen ergeben sich unmittelbar aus den Definitionen.

□

Lemma 4.15. *Sei $N \in L(\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{E})$. Dann sind äquivalent:*

(i) $\Delta^m_{S_{\mathcal{E},m}}(N)$ ist ein positiver Operator.
(ii) Es existiert eine Faktorisierung von N.
(iii) Es existiert eine minimale Faktorisierung von N.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß (iii) aus (i) folgt. Dazu definieren wir

$$A = (\Delta^m_{S_{\mathcal{E},m}}(N))^{\frac{1}{2}} \in L(\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{E})$$

und $\mathcal{D} = \overline{ranA}$. Es sei ferner $\phi : X \to L(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ gegeben durch

$$\phi(\lambda) = \delta_\lambda \circ A_{|\mathcal{D}},$$

wobei

$$\delta_\lambda : \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{E} \to \mathcal{E}$$

die Punktauswertung in $\lambda \in X$ bezeichnet. Es gilt dann offensichtlich $\phi(\lambda)^* = A\delta_\lambda^*$, also

$$\phi(\lambda)^* x = A(K_m(\cdot, \lambda)x) \quad (\lambda \in X\ ,\ x \in \mathcal{E}).$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\phi(\lambda)\phi(\mu)^*x &= \delta_\lambda A^2(K_m(\cdot,\mu)x)\\
&= \delta_\lambda\left(\Delta^m_{S_{\mathcal{E},m}}(N)\right)(K_m(\cdot,\mu)x)\\
&= \delta_\lambda\left(\Delta^{m-1}_{S_{\mathcal{E},m}}(N) - S_{\mathcal{E},m}(1_{\mathcal{F}}\otimes\Delta^{m-1}_{S_{\mathcal{E},m}}(N))S^*_{\mathcal{E},m}\right)(K_m(\cdot,\mu)x)\\
&= \delta_\lambda\left(\Delta^{m-1}_{S_{\mathcal{E},m}}(N)(K_m(\cdot,\mu)x) - M_{d_{d(\mu)}\otimes 1_{\mathcal{E}}}\Delta^{m-1}_{S_{\mathcal{E},m}}(N)(K_m(\cdot,\mu)x)\right)\\
&= \delta_\lambda\Delta^{m-1}_{S_{\mathcal{E},m}}(N)(K_m(\cdot,\mu)x) - \langle d(\mu),d(\lambda)\rangle\delta_\lambda\Delta^{m-1}_{S_{\mathcal{E},m}}(N)(K_m(\cdot,\mu)x)\\
&= \frac{1}{K(\lambda,\mu)}\delta_\lambda\left(\Delta^{m-1}_{S_{\mathcal{E},m}}(N)\right)(K_m(\cdot,\mu)x)\\
&\;\vdots\\
&= \frac{1}{K_m(\lambda,\mu)}\delta_\lambda N(K_m(\cdot,\mu)x)\\
&= \frac{1}{K_m(\lambda,\mu)}\delta_\lambda N\delta^*_\mu x,
\end{aligned}$$

also

$$\phi(\lambda)\phi(\mu)^* = \frac{1}{K_m(\lambda,\mu)}\delta_\lambda N\delta^*_\mu \quad (\lambda,\mu\in X\ ,\ x\in\mathcal{E}).$$

Wir haben nun zu zeigen, daß ϕ tatsächlich einen Multiplier definiert. Die Abbildung

$$\begin{aligned}
X\times X\to L(\mathcal{E})\ ,\ (\lambda,\mu) &\mapsto K_m(\lambda,\mu)\left(\|N\|\cdot 1_{\mathcal{E}} - \phi(\lambda)\phi(\mu)^*\right)\\
&= K_m(\lambda,\mu)\left(\|N\|\cdot 1_{\mathcal{E}} - \frac{1}{K_m(\lambda,\mu)}\delta_\lambda N\delta^*_\mu\right)\\
&= \delta_\lambda\left(\|N\|\cdot 1_{\mathcal{H}_m\otimes\mathcal{E}} - N\right)\delta^*_\mu
\end{aligned}$$

ist positiv definit, da die Abbildung $\|N\|\cdot 1_{\mathcal{H}_m\otimes\mathcal{E}} - N$ positiv ist, denn durch iteriertes Anwenden von Lemma 4.7 folgt aus der Positivität von $\Delta^m_{S_{\mathcal{E},m}}(N)$, daß auch N positiv ist. Also ist $\phi\in\mathcal{M}(\mathcal{H}_m\otimes\mathcal{D},\mathcal{H}_m\otimes\mathcal{E})$.

Nun gilt

$$\begin{aligned}
\left(M_\phi M^*_\phi(K_m(\cdot,\mu)x)\right)(\lambda) &= \left(M_\phi(K_m(\cdot,\mu)\phi(\mu)^*x)\right)(\lambda)\\
&= \phi(\lambda)K_m(\lambda,\mu)\phi(\mu)^*x\\
&= \delta_\lambda N\delta^*_\mu x\\
&= \left(N(K_m(\cdot,\mu)x)\right)(\lambda) \quad (\lambda,\mu\in X\ ,\ x\in\mathcal{E}),
\end{aligned}$$

also $M_\phi M^*_\phi = N$, da $\{K_m(\cdot,\mu)x\ ;\ \mu\in X\ ,\ x\in\mathcal{E}\}$ in $\mathcal{H}_m\otimes\mathcal{E}$ total ist.

Die behauptete Minimalität folgt aus der Konstruktion von ϕ, denn es gilt

$$\begin{aligned}
\bigvee\{\phi(\lambda)^*x\ ;\ \lambda\in X\ ,\ x\in\mathcal{E}\} &= \bigvee\{A(K_m(\cdot,\lambda)x)\ ;\ \lambda\in X\ ,\ x\in\mathcal{E}\}\\
&= \overline{ran\ A}\\
&= \mathcal{D}.
\end{aligned}$$

Die Implikation von (iii) nach (ii) ist trivial. Gelte nun (ii). Der Operator M_ϕ genügt gewiß der Vertauschungsbedingung

$$M_\phi M_{d_\eta \otimes 1_\mathcal{D}} = M_{d_\eta \otimes 1_\mathcal{E}} M_\phi \quad (\eta \in \mathcal{F}),$$

so daß nach Lemma 4.8 der Operator $\Delta^m_{S_{\mathcal{E},m}}(M_\phi M_\phi^*)$ positiv ist. □

DEFINITION 4.16. *Eine Abbildung $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{D}, \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{E})$ heißt inner, wenn M_ϕ eine partielle Isometrie ist.*

Wir sind jetzt in der Lage, das zentrale Resultat zu formulieren.

SATZ 4.17. *Sei $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{E}$ ein (nicht notwendig abgeschlossener) Teilraum. Dann sind äquivalent:*

(i) $\mathcal{N}$ ist invariant (insbesondere abgeschlossen), und die Orthogonalprojektion $P_\mathcal{N}$ von $\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{E}$ auf $\mathcal{N}$ erfüllt die Positivitätsbedingung $\Delta^m_{S_{\mathcal{E},m}}(P_\mathcal{N}) \geq 0$.
(ii) Es existieren ein Hilbertraum $\mathcal{D}$ und eine innere Abbildung

$$\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{D}, \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{E}),$$

so daß $\mathcal{N} = ran M_\phi$ und $P_\mathcal{N} = M_\phi M_\phi^*$ gilt.

BEWEIS. Die Implikation von (i) nach (ii) folgt unmittelbar mit Lemma 4.15. Denn damit erhalten wir einen Hilbertraum $\mathcal{D}$ und eine Abbildung

$$\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{D}, \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{E})$$

mit $M_\phi M_\phi^* = P_\mathcal{N}$. Da $\mathcal{N} = ran\ P_\mathcal{N}$ abgeschlossen ist, ist $\mathcal{N} = ran\ P_\mathcal{N} = ran\ M_\phi$ (vergleiche die Bemerkung vor Lemma 4.15). Da $M_\phi M_\phi^*$ offensichtlich eine Projektion ist, ist M_ϕ eine partielle Isometrie, also ϕ inner. Gelte umgekehrt (ii). Da M_ϕ eine partielle Isometrie ist, ist $\mathcal{N} = ran M_\phi$ abgeschlossen. Für $\eta \in \mathcal{F}$ gilt

$$\begin{aligned} M_{d_\eta \otimes 1_\mathcal{E}} \mathcal{N} &= M_{d_\eta \otimes 1_\mathcal{E}} M_\phi(\mathcal{H} \otimes \mathcal{D}) \\ &= M_\phi M_{d_\eta \otimes 1_\mathcal{D}}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{D}) \\ &\subset M_\phi(\mathcal{H} \otimes \mathcal{D}) \\ &= \mathcal{N}, \end{aligned}$$

also ist $\mathcal{N}$ invariant. Nach Lemma 4.15 folgt dann

$$\Delta^m_{S_{\mathcal{E},m}}(P_\mathcal{N}) = \Delta^m_{S_{\mathcal{E},m}}(M_\phi M_\phi^*) \geq 0.$$

□

Wir werden nun zeigen, daß im Fall $m = 1$ die Positivitätsbedingung $\Delta^m_{S_{\mathcal{E},m}}(P_\mathcal{N})$ des letzten Satzes automatisch erfüllt ist. Während, wie wir früher (im Beweis zu Korollar 4.11) gesehen haben, Projektionen auf reduzierende Teilräume diese Bedingung auch für $m > 1$ automatisch erfüllen, ist unklar, ob dies auch für Projektionen auf invariante Teilräume richtig ist.

LEMMA 4.18. *Sei $\mathcal{G}$ ein Hilbertraum, und sei $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}$ ein invarianter Teilraum. Sei $P_\mathcal{N}$ die Orthogonalprojektion auf $\mathcal{N}$. Dann ist der Operator $\Delta_{S_{\mathcal{G},m}}(P_\mathcal{N})$ positiv.*

BEWEIS. Da $\mathcal{N}$ invariant ist, ist $S_{\mathcal{G},m}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{N}) \subset \mathcal{N}$; somit gilt

$$P_{\mathcal{N}} S_{\mathcal{G},m}(1_{\mathcal{F}} \otimes P_{\mathcal{N}}) = S_{\mathcal{G},m}(1_{\mathcal{F}} \otimes P_{\mathcal{N}}),$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\Delta_{S_{\mathcal{G},m}}(P_{\mathcal{N}}) &= P_{\mathcal{N}} - \Sigma_{S_{\mathcal{G},m}}(P_{\mathcal{N}}) \\
&= P_{\mathcal{N}} - S_{\mathcal{G},m}(1_{\mathcal{F}} \otimes P_{\mathcal{N}})(1_{\mathcal{F}} \otimes P_{\mathcal{N}})S^*_{\mathcal{G},m} \\
&= P_{\mathcal{N}} - P_{\mathcal{N}} S_{\mathcal{G},m}(1_{\mathcal{F}} \otimes P_{\mathcal{N}})(1_{\mathcal{F}} \otimes P_{\mathcal{N}})S^*_{\mathcal{G},m} P_{\mathcal{N}} \\
&= P_{\mathcal{N}} \left(1_{\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}} - \Sigma_{S_{\mathcal{G},m}}(P_{\mathcal{N}})\right) P_{\mathcal{N}} \\
&= P_{\mathcal{N}} \left(\Delta_{S_{\mathcal{G},m}}(1_{\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}})\right) P_{\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N}} \left(\Sigma_{S_{\mathcal{G},m}}(1_{\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}} - P_{\mathcal{N}})\right) P_{\mathcal{N}},
\end{aligned}$$

was ein positiver Operator ist, da sowohl $\Delta_{S_{\mathcal{G},m}}(1_{\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}})$ als auch $1_{\mathcal{H}_m \otimes \mathcal{G}} - P_{\mathcal{N}}$ positiv sind und $\Sigma_{S_{\mathcal{G},m}}$ positiv ist. □

Aus Satz 4.17 und Lemma 4.18 erhalten wir folgenden Satz vom Typ Beurling-Lax-Halmos, wie er in ähnlicher Form von [**MT00**] und [**GRS**] bewiesen wurde.

KOROLLAR 4.19. *Sei $\mathcal{N} \subset \mathcal{H} \otimes \mathcal{E}$ ein (nicht notwendig abgeschlossener) Teilraum. Dann sind äquivalent:*

(i) $\mathcal{N}$ ist invariant (insbesondere abgeschlossen).
(ii) Es existieren ein Hilbertraum $\mathcal{D}$ und eine innere Abbildung

$$\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{D}, \mathcal{H} \otimes \mathcal{E}),$$

so daß $\mathcal{N} = ranM_\phi$ und $P_{\mathcal{N}} = M_\phi M_\phi^*$ gilt.

In [**MT00**] wird dieser Satz für eine etwas größere Menge von reproduzierenden Kernen direkt bewiesen, jedoch läßt sich das dort gezeigte Resultat zumindest im Fall nullstellenfreier Kerne auch leicht aus Korollar 4.19 ableiten, was wir an dieser Stelle jedoch nicht beweisen werden.

Abschließend beantworten wir eine offene Frage, die von McCullough und Trent in [**MT00**], Conjecture 5.1 aufgeworfen wurde.

Dazu benötigen wir folgendes Lemma über die Verkettung partieller Isometrien.

LEMMA 4.20. *Seien F, G, H Hilberträume und $A \in L(G,H)$ sowie $B \in L(F,G)$ partielle Isometrien. Dann sind äquivalent:*

(i) AB ist eine partielle Isometrie.
(ii) $B^*(kerA) \subset ker(AB)$.
(iii) $(AP_{ranB})_{|kerA} \equiv 0$.

BEWEIS. Bedingung (i) ist äquivalent dazu, daß $AB_{|(kerAB)^\perp}$ isometrisch ist. Da $(kerAB)^\perp \subset (kerB)^\perp$ gilt und B auf $(kerB)^\perp$ isometrisch ist, ist das äquivalent dazu, daß A auf $B\left((kerAB)^\perp\right)$ isometrisch ist. Das wiederum ist äquivalent dazu, daß $B\left((kerAB)^\perp\right) \subset (kerA)^\perp$ gilt, was offensichtlich genau dann der Fall ist, wenn (ii) gilt. Die Äquivalenz von (ii) und (iii) folgt einfach daraus, daß $P_{ranB} = BB^*$ gilt. □

SATZ 4.21. *Seien* $\mathcal{M} \subset \mathcal{N} \subset \mathcal{H} \otimes \mathcal{E}$ *invariante Teilräume. Seien* $\mathcal{D}$ *ein Hilbertraum und* $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{D}, \mathcal{H} \otimes \mathcal{E})$ *eine innere Funktion, so daß* $\mathcal{N} = ran\ M_\phi$ *gilt (nach Korollar* 4.19 *existent). Dann existieren ein Hilbertraum* $\mathcal{D}_*$ *und eine innere Funktion* $\psi \in \mathcal{M}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{D}_*, \mathcal{H} \otimes \mathcal{D})$, *so daß* $\phi\psi \in \mathcal{M}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{D}_*, \mathcal{H} \otimes \mathcal{E})$ *inner ist und* $\mathcal{M} = ran\ M_{\phi\psi}$ *sowie* $P_\mathcal{M} = M_{\phi\psi} M_{\phi\psi}^*$ *gilt.*

BEWEIS. Es bezeichne $\widetilde{\mathcal{M}} = M_\phi^{-1}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{H} \otimes \mathcal{D}$. Dann ist $\widetilde{\mathcal{M}}$ natürlich abgeschlossen und sogar invariant, denn ist $\eta \in \mathcal{F}$ und $f \in \widetilde{\mathcal{M}}$, dann gilt

$$M_\phi M_{d_\eta \otimes 1_\mathcal{D}} f = M_{d_\eta \otimes 1_\mathcal{E}} M_\phi f \in \mathcal{M},$$

da $\mathcal{M}$ invariant ist. Nach Korollar 4.19 existieren ein Hilbertraum $\mathcal{D}_*$ und eine innere Funktion $\psi \in \mathcal{M}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{D}_*, \mathcal{H} \otimes \mathcal{D})$, so daß $\widetilde{\mathcal{M}} = ran\ M_\psi$ und $P_{\widetilde{\mathcal{M}}} = M_\psi M_\psi^*$ gilt.

Da $\mathcal{M}$ eine Teilmenge von $ran\ M_\phi$ ist, gilt $M_\phi(\widetilde{\mathcal{M}}) = \mathcal{M}$ und daher

$$ran M_{\phi\psi} = ran M_\phi M_\psi = M_\phi(\widetilde{\mathcal{M}}) = \mathcal{M}.$$

Wir wollen nun zeigen, daß $M_\phi M_\psi$ eine partielle Isometrie ist. Nach Lemma 4.20 genügt es zu zeigen, daß

$$(M_\phi P_{\widetilde{\mathcal{M}}})_{|ker M_\phi} \equiv 0$$

gilt. Doch das ist offensichtlich der Fall, da $ker M_\phi$ trivialerweise in $\widetilde{\mathcal{M}}$ enthalten ist. Somit ist $M_{\phi\psi}$ eine partielle Isometrie, was zu zeigen war. □

Das beantwortet Conjecture 5.1 in [**MT00**] im Spezialfall, daß $1 - \frac{1}{K}$ positiv definit ist, der dort betrachtete allgemeine Fall folgt jedoch völlig analog.

KAPITEL 5

Modellsätze

1. Der Raum $H^2_{N,m}$

Das wohl am besten studierte Beispiel eines funktionalen Hilbertraumes ist der Hardyraum über der Einheitskugel im $\mathbb{C}^N$. Für $m \geq 1$ definieren wir den Raum $H^2_{N,m}$ als die Menge aller auf $\mathbb{B}_N$ holomorphen Abbildungen, deren Taylorkoeffizienten bezüglich der Gewichte

$$\rho_m(\gamma) = \frac{(m+|\gamma|-1)!}{\gamma!(m-1)!} \quad (\gamma \in \mathbb{N}_0^N)$$

quadratsummierbar sind, also

$$H^2_{N,m} = \{f = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^N} a_\gamma z^\gamma \ ; \ \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^N} \frac{1}{\rho_m(\gamma)} |a_\gamma|^2 < \infty\}.$$

Die Gewichte $\rho_m(\gamma)$ sind nichts anderes als die Koeffizienten der Taylorentwicklung der Funktion

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ , \ x \mapsto \left(\frac{1}{1-\sum_{i=1}^n x_i}\right)^m$$

um den Punkt 0. Es ist leicht zu sehen, daß $H^2_{N,m}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^N} a_\gamma z^\gamma, \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^N} b_\gamma z^\gamma \rangle = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^N} \frac{1}{\rho_m(\gamma)} a_\gamma \overline{b_\gamma}$$

zu einem Hilbertraum wird, der sich vermöge der Abbildung

$$H^2_{N,m} \to l^2(\mathbb{N}_0^N) \ , \ \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^N} a_\gamma z^\gamma \mapsto \left(\frac{a_\gamma}{\rho_m(\gamma)^{\frac{1}{2}}}\right)_{\gamma \in \mathbb{N}_0^N}$$

mit dem Raum der quadratsummierbaren Folgen $l^2(\mathbb{N}_0^N)$ identifizieren läßt.

Ferner liegt für $w \in \mathbb{B}_N$ die Abbildung

$$\kappa_{N,m}(\cdot, w) : \mathbb{B}_N \to \mathbb{C} \ , \ z \mapsto \left(\frac{1}{1-\langle z, w\rangle}\right)^m = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^N} \rho_m(\gamma) \overline{w}^\gamma z^\gamma$$

in $H^2_{N,m}$ mit

$$\|\kappa_{N,m}(\cdot, w)\|^2 = \sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^N} \rho_m(\gamma)|w^\gamma|^2 = \left(\frac{1}{1-|w|^2}\right)^m .$$

Es gilt für $f = \sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^N} a_\gamma z^\gamma \in H^2_{N,m}$

$$\begin{aligned} \langle f, \kappa_{N,m}(\cdot, w)\rangle &= \sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^N} \frac{1}{\rho_m(\gamma)} a_\gamma \rho_m(\gamma) w^\gamma \\ &= \sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^N} a_\gamma w^\gamma \\ &= f(w), \end{aligned}$$

was $H^2_{N,m}$ zu einem funktionalen Hilbertraum mit reproduzierendem Kern

$$\kappa_{N,m} : \mathbb{B}_N \times \mathbb{B}_N \to \mathbb{C}\ ,\ (z,w) \mapsto \left(\frac{1}{1-\langle z,w\rangle}\right)^m$$

macht. Wir schreiben

$$H^2_N \text{ statt } H^2_{N,1} \text{ und } \kappa_N \text{ statt } \kappa_{N,1}$$

und stellen fest, daß κ_N ein P-Nevanlinna-Pick-Kern ist, denn es gilt

$$(1 - \frac{1}{\kappa_N})(z,w) = \sum_{i=1}^N z_i \overline{w_i} \quad (z, w \in \mathbb{B}_N),$$

was offenbar positiv definit ist. Eine Faktorisierung von $1 - \frac{1}{\kappa_N}$ ist

$$d_N : \mathbb{B}_N \to \mathbb{C}^N\ ,\ z \mapsto \overline{z},$$

und man sieht, daß H^2_N ein maximaler P-Nevanlinna-Pick-Raum ist. Wir weisen ferner darauf hin, daß unter Benutzung der früher für Potenzen von Nevanlinna-Pick-Kernen eingeführten Schreibweise

$$\kappa_{N,m} = (\kappa_N)_m = \kappa_N^m$$

sowie

$$H^2_{N,m} = (H^2_N)_m$$

gilt. Wir bemerken außerdem, daß der aus der Funktionentheorie bekannte Hardyraum, das heißt der funktionale Hilbertraum, der sich via Poissontransformation mit dem Abschluß der analytischen Polynome in $L^2(\sigma)$, wobei σ das normalisierte Oberflächenmaß auf $\partial\mathbb{B}_N$ bezeichnet, identifizieren läßt, der Raum $H^2_{N,N}$ ist.

Für einen beliebigen Hilbertraum $\mathcal{E}$ können wir ferner den Raum $H^2_{N,m} \otimes \mathcal{E}$ betrachten, also den funktionalen Hilbertraum mit reproduzierendem Kern $\kappa_{N,m} \cdot 1_{\mathcal{E}}$. Man prüft leicht nach, daß es sich dabei gerade um den Raum aller $\mathcal{E}$-wertigen holomorphen Funktionen auf $\mathbb{B}_N$ handelt, deren Taylorkoeffizienten bezüglich der Gewichte $\rho_m(\gamma)$ absolut quadratsummierbar sind (in vollständiger Analogie zum skalaren Fall). Das Skalarprodukt auf $H^2_{N,m} \otimes \mathcal{E}$ ist gegeben durch

$$\langle \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^N} x_\gamma z^\gamma, \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^N} y_\gamma z^\gamma \rangle = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^N} \frac{1}{\rho_m(\gamma)} \langle x_\gamma, y_\gamma \rangle.$$

2. Einbettungssätze

Wie wir bereits gesehen haben, sind für $m \geq 1$ die Räume $H^2_{N,m}$ Standardbeispiele funktionaler Hilberträume, deren reproduzierende Kerne Potenzen von P-Nevanlinna-Pick-Kernen sind. Wir wollen nun zeigen, daß sich umgekehrt für einen P-Nevanlinna-Pick-Raum $\mathcal{H}$ der Raum $\mathcal{H}_m$ als Teilraum von $H^2_{N,m}$ mit geeigneter Wahl von $N \in \mathbb{N}$ auffassen läßt.

Wir fixieren folgende Situation:

Situation (F). *Sei $D \subset \mathbb{C}^n$ offen und sei $\mathcal{H}$ ein P-Nevanlinna-Pick-Raum über D. Es sei $K : D \times D \to \mathbb{C}$ der reproduzierende Kern von $\mathcal{H}$, und sei*

$$d : D \to \mathbb{C}^N \ , \ d(z) = (p_i(\overline{z}))_{i=1}^N$$

eine Faktorisierung von $1 - \frac{1}{K}$ mit geeigneten Polynomen p_i $(1 \leq i \leq N)$, das heißt, es gilt

$$(1 - \frac{1}{K})(z,w) = \langle d(w), d(z) \rangle \quad (z, w \in D).$$

Wir bezeichnen mit $b \in \mathcal{O}(D, \mathbb{C}^N)$ die Abbildung

$$b : D \to \mathbb{C}^N \ , \ z \mapsto \overline{d(z)} = (\tilde{p_i}(z))_{i=1}^N.$$

Der oben angekündigte Satz lautet nun:

Satz 5.1. *Sei $m \geq 1$. Dann ist die Kompositionsabbildung*

$$\omega : H^2_{N,m} \to \mathcal{H}_m \ , \ f \mapsto f \circ b$$

wohldefiniert und kontraktiv. Die adjungierte Abbildung ω^* ist isometrisch, und es gilt ran $\omega^* = H^2_{N,m}(b(D))$. Es gilt die Identität

$$\omega^* K_m(\cdot, w) = \kappa_{N,m}(\cdot, b(w)) \quad (w \in D).$$

beweis. Sei $f \in H^2_{N,m}$. Dann ist die Abbildung

$$D \times D \to \mathbb{C} \ , \ (z,w) \mapsto \|f\|^2 K_m(z,w) - f(b(z))\overline{f(b(w))}$$

positiv definit, denn es gilt

$$\begin{aligned} \|f\|^2 K_m(z,w) - f(b(z))\overline{f(b(w))} &= \|f\|^2 \left(\frac{1}{1-\langle d(w),d(z)\rangle}\right)^m - f(b(z))\overline{f(b(w))} \\ &= \|f\|^2 \kappa_{N,m}(b(z),b(w)) - f(b(z))\overline{f(b(w))}, \end{aligned}$$

was offensichtlich positiv definit ist, da die Abbildung

$$b(D)\times b(D) \to \mathbb{C}\ ,\ (z,w)\mapsto \|f\|^2\kappa_{N,m}(z,w) - f(z)\overline{f(w)}$$

nach Voraussetzung positiv definit ist. Nach Satz 1.9 ist dann $f\circ b \in \mathcal{H}_m$ mit $\|f\circ b\| \le \|f\|$.

Nun gilt

$$\begin{aligned} \langle f, \omega^* K_m(\cdot,w)\rangle &= \langle f\circ b, K_m(\cdot,w)\rangle \\ &= f(b(w)) \\ &= \langle f, \kappa_{N,m}(\cdot,b(w))\rangle \quad (f\in H^2_{N,m}\ ,\ w\in D), \end{aligned}$$

also

$$\omega^* K_m(\cdot,w) = \kappa_{N,m}(\cdot,b(w)) \quad (w\in D).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle \omega\omega^* K_m(\cdot,z), K_m(\cdot,w)\rangle &= \langle \kappa_{N,m}(\cdot,b(z)), \kappa_{N,m}(\cdot,b(w))\rangle \\ &= \kappa_{N,m}(b(w),b(z)) \\ &= \left(\frac{1}{1-\langle b(w),b(z)\rangle}\right)^m \\ &= \left(\frac{1}{1-\langle d(z),d(w)\rangle}\right)^m \\ &= K_m(w,z) \\ &= \langle K_m(\cdot,z), K_m(\cdot,w)\rangle \quad (z,w\in D). \end{aligned}$$

Da $\{K_m(\cdot,w)\ ;\ w\in D\}$ total in $\mathcal{H}_m$ ist, folgt $\omega\omega^* = 1_{\mathcal{H}_m}$, also ist ω^* isometrisch, hat also abgeschlossenes Bild, also ist $ran\ \omega^* = H^2_{N,m}(b(D))$.

□

Nach Satz 1.12 ist der Raum $H^2_{N,m}(b(D))$ gerade das orthogonale Komplement des Kernes der Einschränkungsabbdildung

$$\rho : H^2_{N,m} \to (H^2_{N,m})_{b(D)}\ ,\ f\mapsto f_{|b(D)}.$$

Wir erinnern daran, daß $(H^2_{N,m})_{b(D)}$ den funktionalen Hilbertraum über $b(D)$ bezeichnet, der von der Einschränkung des Kernes $\kappa_{N,m}$ auf $b(D)\times b(D)$ generiert wird. Da $b(D)$ im allgemeinen eine „kleine" Menge (sogar ein Graph) ist, ist, zumindest aus funktionentheoretischen Gründen, nicht zu erwarten, daß $b(D)$ eine Eindeutigkeitsmenge für Funktionen aus $H^2_{N,m}$ ist. Das heißt, ρ ist im allgemeinen nicht injektiv, also ist $H^2_{N,m}(b(D))$ im Normalfall ein echter Teilraum von $H^2_{N,m}$. Da sich die meisten Ergebnisse über den Raum $H^2_{N,m}$ nicht einfach auf Unterräume übertragen lassen, liefert die hier aufgezeigte Darstellung von $\mathcal{H}_m$ in $H^2_{N,m}$ keinen

Ersatz für Erforschung der P-Nevanlinna-Pick-Räume, gestattet jedoch in manchen Situationen eine deutlichere Sicht der Zusammenhänge. Davon wollen wir im folgenden Gebrauch machen, um Modellsätze, wie sie in [**MV93**] und [**Pot96**] bewiesen wurden, in allgemeiner Form für gewisse P-Nevanlinna-Pick-Räume zu erhalten.

3. Der Modellsatz

Die einfachste Form des Modells, das wir beweisen wollen, ist die wohlbekannte coisometrische Erweiterung von Kontraktionen:

Zu jeder Kontraktion T über einem Hilbertraum H existieren ein Hilbertraum $\mathcal{K}$ und eine unitäre Abbildung $R \in L(\mathcal{K})$ sowie eine Isometrie $V : H \to (H^2 \otimes H) \oplus \mathcal{K}$, so daß

$$VT = ((M_z \otimes 1_H)^* \oplus R)\, V$$

gilt, wobei M_z die Multiplikation mit M_z auf dem Hardyraum $H^2 = H^2_{1,1}$ bezeichnet. Also ist jede Kontraktion unitär äquivalent zu einer Einschränkung der Summe eines Rückwärtsshiftes und eines unitären Anteils auf einen Teilraum, der invariant für diese Summe ist.

Falls die Folge $(T^k)_{k\in\mathbb{N}}$ SOT gegen 0 konvergiert, dann kann man $\mathcal{K} = \{0\}$ wählen, und T ist unitär äquivalent zu einer Einschränkung des Rückwärtsshifts auf $H^2 \otimes H$.

Von Müller und Vasilescu stammt die mehrdimensionale Verallgemeinerung dieses Satzes. Der Begriff der Kontraktivität eines Operators geht dabei über in die sogenannte sphärische Kontraktivität. Ein vertauschendes Tupel $T \in L(H)^n$ heißt sphärische Kontraktion, wenn

$$\sum_{i=1}^n T_i^* T_i \le 1_H$$

gilt, oder äquivalent, wenn die Abbildung

$$H \to H^n\ ,\ h \mapsto (T_i h)_{i=1}^n$$

kontraktiv ist. Es treten ferner höhere Positivitätsbedingungen auf. Es bezeichne $\Sigma_T \in L(L(H))$ die Abbildung

$$L(H) \to L(H)\ ,\ S \mapsto \sum_{i=1}^n T_i^* S T_i.$$

Dann heißt eine Abbildung m-Kontraktion, falls die Abbildungen

$$(1_{L(H)} - \Sigma_T)^m (1_H) \text{ und } (1_{L(H)} - \Sigma_T)(1_H)$$

positiv sind. Damit sind die 1-Kontraktionen genau die sphärischen Kontraktionen. Entsprechend heißt ein Tupel sphärisch isometrisch, falls

$$\sum_{i=1}^n T_i^* T_i = 1_H$$

bzw. (mit $\gamma_n(z, w) = \kappa_n(z, \overline{w})$)

$$\frac{1}{\gamma_n}(L_{T^*}, R_T)(1_H) = 0$$

gilt. Analog zum eindimensionalen Fall, wo ein Operator genau dann unitär ist, wenn er isometrisch und normal ist, heißt ein Tupel sphärisch unitär, wenn es sphärisch isometrisch und normal (das heißt normal in jeder Komponente) ist. Ferner ersetzen Vasilescu und Müller den Raum H^2 durch $H^2_{n,m}$ und M_z durch das vertauschende Tupel $(M_{z_i})_{i=1}^n$ und erhalten den Modellsatz (zum Beweis siehe Theorem 9 und 11 in [**MV93**]).

SATZ 5.2. *Sei $T \in L(H)^n$ eine m-Kontraktion ($m \geq 1$). Dann existieren ein Hilbertraum $\mathcal{K}$ und eine sphärisch unitäre Abbildung $R = (R_i)_{i=1}^n \in L(\mathcal{K})^n$ sowie eine Isometrie $V : H \to (H^2_{n,m} \otimes H) \oplus \mathcal{K}$, so daß*

$$VT_i = ((M_{z_i} \otimes 1_H)^* \oplus R_i)\, V \quad (1 \leq i \leq n)$$

gilt. Gilt

$$\Sigma_T^k(1_H) \xrightarrow{k} 0 \quad (SOT),$$

dann kann man $\mathcal{K} = \{0\}$ wählen, und T ist unitär äquivalent zu einer Einschränkung von $(M_z \otimes 1_H)^*$.

SITUATION (G). *Es sei $D \subset \mathbb{C}^n$ und $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}^D$ ein maximaler Nevanlinna-Pick-Raum mit reproduzierendem Kern K. Es bezeichne $d : D \to \mathbb{C}^N$ (mit $N \in \mathbb{N}$ geeignet) eine polynomielle Faktorisierung von $1 - \frac{1}{K}$, also*

$$\langle d(w), d(z)\rangle = (1 - \frac{1}{K})(z,w) \quad (z, w \in D),$$

und

$$d(z) = (p_i(\overline{z}))_{i=1}^N \quad (z \in D),$$

wobei die p_i Polynome sind. Es sei ferner

$$b : D \to \mathbb{C}^N \ , \ z \mapsto (\tilde{p}_i(z))_{i=1}^N.$$

Wie bisher sei $C : D \times \tilde{D} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$C(z,w) = K(z, \overline{w}) \quad (z \in D \ , \ w \in \tilde{D}).$$

Wir fixieren nun $m \geq 1$. Es bezeichne ω die Kompositionsabbildung

$$H^2_{N,m} \to \mathcal{H}_m \ , \ f \mapsto f \circ b$$

aus Satz 5.1 und ρ die Einschränkungsabbildung

$$H^2_{N,m} \to (H^2_{N,m})_{b(D)} \ , \ f \mapsto f_{|b(D)}.$$

Wir fixieren außerdem einen Hilbertraum H und einen vertauschenden Multioperator $T \in L(H)^n$, so daß

$$\left(\frac{1}{C}(L_{T^*}, R_T)\right)^m (1_H) \text{ und } \frac{1}{C}(L_{T^*}, R_T)(1_H) \geq 0$$

gilt, oder äquivalent, daß das Tupel $(p_i(T))_{i=1}^N$ eine m-Kontraktion ist. Es sei

$$\Sigma_T : L(H) \to L(H) \ , \ S \mapsto (1 - \frac{1}{C})(L_{T^*}, R_T)(S) = \sum_{i=1}^N p_i(T)^* S p_i(T).$$

Es bezeichne ferner $D_T^{(m)} \in L(H)$ den Defekt

$$D_T^{(m)} = \left((1_{L(H)} - \Sigma_T)^m(1_H)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{C^m}(L_{T^*}, R_T)(1_H)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Schließlich notieren wir für einen Multiindex $\gamma \in \mathbb{N}_0^N$ die Abkürzungen

- $p(z)^\gamma = p_1(z)^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot p_N(z)^{\gamma_N} \quad (z \in \mathbb{C}^n)$
- $\tilde{p}(z)^\gamma = \tilde{p_1}(z)^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot \tilde{p_N}(z)^{\gamma_N} \quad (z \in \mathbb{C}^n)$
- $p(T)^\gamma = p_1(T)^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot p_N(T)^{\gamma_N}$.

Wir konstruieren nun in Analogie zu Müller und Vasilescu den zweiten Anteil des Modells.

LEMMA 5.3.

(a) Die Folge $(\Sigma_T^k(1_H))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert SOT gegen einen positiven Operator Q.
(b) Es existieren ein Hilbertraum $\mathcal{K}$, ein vertauschendes Tupel $R \in L(\mathcal{K})^n$ sowie ein stetiger linearer Operator $V_2 : H \to \mathcal{K}$, so daß gilt
- $\frac{1}{C}(L_{R^*}, R_R)(1_H) = 0$ *(das Tupel $(p_i(R))_{i=1}^N$ ist eine sphärische Isometrie).*
- $\|V_2 h\|^2 = \langle Qh, h\rangle \quad (h \in H)$.
- $V_2 T_i = R_i V_2 \quad (1 \le i \le n)$.

BEWEIS. Zum Beweis von (a) zeigen wir, daß die Folge $(\Sigma_T^k(1_H))_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und nach unten durch 0 beschränkt ist, es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \Sigma_T^k(1_H) - \Sigma_T^{k+1}(1_H) &= \Sigma_T^k(1_H - \Sigma_T(1_H)) \\ &\ge 0, \end{aligned}$$

da $1_H - \Sigma_T(1_H)$ nach Voraussetzung positiv und Σ_T offensichtlich ein positiver Operator ist. Also gilt

$$0 \le \Sigma_T^{k+1}(1_H) \le \Sigma_T^k(1_H) \le 1_H \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Somit existiert ein Operator $Q \in L(H)$ mit $0 \le Q \le 1_H$, so daß

$$(\Sigma_T^k(1_H))_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow{k} Q \ (SOT).$$

Das beweist Teil (a).

Sei nun $M = ker\ Q$. Es definiert

$$\langle g + M, h + M\rangle = \langle Qg, h\rangle \quad (g, h \in H)$$

ein Skalarprodukt auf H/M. Wir bezeichnen mit V_2 die kanonische Abbildung

$$H \to H/M\ ,\ g \mapsto g + M.$$

Mit

$$\begin{aligned} \Sigma_T^k(1_H) &= \left((1 - \frac{1}{C})(L_{T^*}, R_T)\right)^k (1_H) \\ &= \left(1 - \frac{1}{C}\right)^k (L_{T^*}, R_T)(1_H) \end{aligned}$$

und

$$(1-\frac{1}{C})^k(z,w) = \sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^N,\ |\gamma|=k} \rho_1(\gamma)\tilde{p}(z)^\gamma p(w)^\gamma$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|V_2T_ih\|^2 &= \langle QT_ih, T_ih\rangle \\
&= \lim_k \langle \Sigma_T^k(1_H)T_ih, T_ih\rangle \\
&= \lim_k \sum_{|\gamma|=k} \rho_1(\gamma)\langle (p(T)^\gamma)^* p(T)^\gamma T_ih, T_ih\rangle \\
&= \lim_k \sum_{|\gamma|=k} \rho_1(\gamma)\|T_ip(T)^\gamma h\|^2 \\
&\leq \|T_i\|^2 \lim_k \sum_{|\gamma|=k} \rho_1(\gamma)\langle (p(T)^\gamma)^* p(T)^\gamma h, h\rangle \\
&= \|T_i\|^2\langle Qh, h\rangle \\
&= \|T_i\|^2\|V_2h\|^2 \quad (h\in H\ ,1\leq i\leq n).
\end{aligned}$$

Das zeigt sofort, daß die Abbildungen

$$R_i : H/M \to H/M\ ,\ h+M \mapsto T_ih+M \quad (1\leq i\leq n)$$

wohldefiniert und stetig sind mit $\|R_i\| \leq \|T_i\|$.

Wir bezeichnen nun mit $\mathcal{K}$ die Vervollständigung von H/M und ebenfalls mit R_i $(1\leq i\leq n)$ und V_2 die stetigen Fortsetzungen der entsprechenden Abbildungen auf $\mathcal{K}$.

Nach Konstruktion gilt

$$V_2T_i = R_iV_2 \quad (1\leq i\leq n),$$

also erst recht

$$V_2p_i(T) = p_i(R)V_2 \quad (1\leq i\leq N).$$

Es bleibt zu zeigen, daß das Tupel $(p_i(R))_{i=1}^N$ eine sphärische Isometrie ist. Zunächst gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \|p_i(R)V_2h\|^2 &= \sum_{i=1}^N \|V_2p_i(T)h\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^N \langle Qp_i(T)h, p_i(T)h\rangle \\
&= \sum_{i=1}^N \lim_k \langle \Sigma_T^k(1_H)p_i(T)h, p_i(T)h\rangle \\
&= \lim_k \langle \sum_{i=1}^N p_i(T)^*\Sigma_T^k(1_H)p_i(T)h, h\rangle \\
&= \lim_k \langle \Sigma_T^{k+1}h, h\rangle \\
&= \langle Qh, h\rangle \\
&= \|V_2h\|^2 \quad (h\in H).
\end{aligned}$$

Da $ranV_2 \subset \mathcal{K}$ dicht liegt, folgt schon für alle $x \in \mathcal{K}$

$$\sum_{i=1}^{N} \|p_i(R)x\|^2 = \|x\|^2,$$

was gerade bedeutet, daß das Tupel $(p_i(R))_{i=1}^N$ eine sphärische Isometrie ist.

□

BEMERKUNG. Das hier erhaltene Tupel $(p_i(R))_{i=1}^N$ ist gerade die sphärische Isometrie, die man im Modell von Müller und Vasilescu für die sphärische Kontraktion $(p_i(T))_{i=1}^N$ erhält.

Wir behandeln nun den ersten Teil des Modells.

LEMMA 5.4.

(a) Es existiert eine stetige lineare Abbildung

$$U : H \to H^2_{N,m} \otimes H \ , \ (Uh)(z) = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^N} \rho_m(\gamma) z^\gamma D_T^{(m)} p(T)^\gamma h.$$

(b) Es sind äquivalent:
  (i) $ran\ U \subset H^2_{N,m}(b(D)) \otimes H$.
  (ii) $(ker \rho) \otimes H \subset ker\ U^*$.
  In diesem Fall gilt für die Abbildung

$$V_1 : H \to \mathcal{H}_m \otimes H \ , \ V_1 = (\omega \otimes 1_H)U$$

- $\|V_1 h\|^2 = \|Uh\|^2 = \|h\|^2 - \lim\langle \Sigma_T^k(1_H)h, h\rangle \quad (h \in H)$.
- $V_1 p_i(T) = (M_{\tilde{p}_i} \otimes 1_H)^* V_1$.

BEWEIS. Zum Beweis von (a) verweisen wir auf [**MV93**], Lemma 8. Es ist leicht einzusehen, daß die dort bezüglich der m-Kontraktion $(p_i(T))_{i=1}^N$ konstruierte Abbildung V gerade die hier definierte Abbildung U ist, wobei die unitäre Identifikation

$$l^2(\mathbb{N}_0^N) \to H^2_{N,m} \ , \ (c_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{N}_0^N} \mapsto \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^N} \rho_m(\gamma)^{\frac{1}{2}} c_\gamma z^\gamma$$

zu berücksichtigen ist. Wir erhalten so, daß U wohldefiniert ist, daß

$$\|Uh\|^2 = \|h\|^2 - \lim\langle \Sigma_T^k(1_H)h, h\rangle \quad (h \in H)$$

(wobei der Limes nach Lemma 5.3 existiert) und

$$Up_i(T) = (M_{z_i} \otimes 1_H)^* U \quad (1 \leq i \leq N)$$

gilt.

Wir zeigen nun die Äquivalenz der Aussagen (i) und (ii). Aus Satz 1.12 wissen wir, daß $(ker\ \rho)^\perp = H^2_{N,m}(b(D))$ gilt. Wegen $(ker\ \rho)^\perp \otimes H = (ker\ \rho \otimes H)^\perp$ und da $(ker\ \rho \otimes H)^\perp$ abgeschlossen ist, ist (i) äquivalent dazu, daß $\overline{ran\ U} \subset (ker\ \rho \otimes H)^\perp$

gilt. Nun gilt aber auch $\overline{ran\ U} = (ker\ U^*)^\perp$, woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

Wenn nun (i) oder (ii) gilt, liegt das Bild von U im Initialraum der partiellen Isometrie $\omega \otimes 1_H$, so daß

$$\|V_1 h\|^2 = \|Uh\|^2 = \|h\|^2 - \lim_k \langle \Sigma_T^k(1_H)h, h\rangle \quad (h \in H)$$

gilt.

Wir bemerken nun, daß nach Lemma 3.2 die Abbildungen $\tilde{p_i} = d_{e_i}$ $(1 \leq i \leq N)$, wobei e_i der i-te Einheitsvektor in $\mathbb{C}^N$ ist, natürlich Multiplier auf $\mathcal{H}$, erst recht auf $\mathcal{H}_m$ definieren, so daß die hier formulierte Aussage Sinn ergibt.

Wir beweisen nun zunächst für $1 \leq i \leq N$ die Identität

$$\omega M^*_{z_i | H^2_{N,m}(b(D))} = M^*_{\tilde{p_i}} \omega_{| H^2_{N,m}(b(D))}.$$

Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \omega M^*_{z_i}(\kappa_{N,m}(\cdot, b(w))) &= \omega(\overline{\tilde{p_i}(w)}\kappa_{N,m}(\cdot, b(w)) \\ &= \overline{\tilde{p_i}(w)} K_m(\cdot, w) \\ &= M^*_{\tilde{p_i}} K_m(\cdot, w) \\ &= M^*_{\tilde{p_i}} \omega(\kappa_{N,m}(\cdot, b(w))) \quad (w \in D). \end{aligned}$$

Da $\{\kappa_{N,m}(\cdot, b(w))\ ;\ w \in D\}$ natürlich total in $H^2_{N,m}(b(D))$ ist, folgt die Behauptung aus Stetigkeitsgründen.

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} V_1 p_i(T) &= (\omega \otimes 1_H) U p_i(T) \\ &= (\omega \otimes 1_H)(M_{z_i} \otimes 1_H)^* U \\ &= (M_{\tilde{p_i}} \otimes 1_H)^* (\omega \otimes 1_H) U \\ &= (M_{\tilde{p_i}} \otimes 1_H)^* V_1 \quad (1 \leq i \leq N), \end{aligned}$$

was den Beweis abschließt.

□

Wir wollen nun Situationen finden, in denen die Bedingungen in Teil (b) von Lemma 5.4 erfüllt sind. Dazu benutzen wir, daß die Abbildungen b, d als Einschränkungen von Tupeln von Polynomen eine natürliche Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}^n$ besitzen, die wir im folgenden ebenfalls mit b, d bezeichnen.

DEFINITION 5.5. *$\mathcal{H}_m$ heißt von außen approximierbar, falls ein Netz $(\phi_i)_{i \in I}$ von holomorphen Abbildungen*

$$\phi_i : U_i \to \mathbb{B}_N \quad (U_i \supset \overline{\mathbb{B}_N} \textit{ offen})$$

existiert, so daß gilt

- $(f \circ \phi_i)_{|\mathbb{B}_N} \in H^2_{N,m}$ *und* $(f \circ \phi_i)_{|\mathbb{B}_N} \xrightarrow{i} f$ *in* $H^2_{N,m}$ *für alle* $f \in H^2_{N,m}$.

- *Für $i \in I$ existiert eine holomorphe Abbildung* $\psi_i : D_i \to \mathbb{C}^n$ *mit* $\phi_i \circ b = b \circ \psi_i$*, wobei* $D_i = b^{-1}(U_i)$ *ist.*

BEMERKUNG.

(a) In diesem Fall gilt automatisch

$$D_i \supset \{z \in \mathbb{C}^n \ ; \ \|d(z)\| \leq 1\} \supset D,$$

denn falls $\|d(z)\| \leq 1$ ist, so ist $b(z) \in \overline{\mathbb{B}_N} \subset U_i$, also $z \in b^{-1}(U_i) = D_i$.

(b) Für alle $i \in I$ gilt $\psi_i(D_i) \subset D$, denn ist $z \in D_i$, dann ist $b(z) \in U_i$ und damit

$$b \circ \psi_i(z) = \phi_i \circ b(z) \in \mathbb{B}_N,$$

und da $\mathcal{H}$ maximal war, folgt $\psi_i(z) \in D$.

LEMMA 5.6.

(a) Sei $\mathcal{H}_m$ von außen approximierbar. Dann ist die Bedingung (ii) aus Teil (b) von Lemma 5.4 erfüllt.

(b) Es seien alle p_i $(1 \leq i \leq N)$ homogene Polynome. Dann ist $\mathcal{H}_m$ von außen approximierbar.

BEWEIS.

(a) Wir zeigen zunächst: für $V \supset \overline{\mathbb{B}_N}$ offen, $f \in \mathcal{O}(V)$ mit $f_{|\mathbb{B}_N} \in H^2_{N,m}$ und $h \in H$ gilt

$$U^*(f_{|\mathbb{B}_N} \otimes h) = f(((p_i(T))_{i=1}^N)^*) D_T^{(m)} h.$$

Dazu wählen wir $r > 1$ so, daß $r\overline{\mathbb{B}_N} \subset V$ gilt. Da $r\mathbb{B}_N$ ein vollständiger Reinhardtbereich ist, existiert eine eindeutige Folge $(a_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{N}_0^N}$ in $\mathbb{C}$, so daß

$$f(z) = \sum_\gamma a_\gamma z^\gamma \quad (z \in r\mathbb{B}_N)$$

ist, wobei die Konvergenz kompakt gleichmäßig auf $r\mathbb{B}_N$ ist. Da $f_{|\mathbb{B}_N} \in H^2_{N,m}$ gilt, ist

$$\begin{aligned}
\langle U^*(f_{|\mathbb{B}_N} \otimes h), g\rangle &= \langle f_{|\mathbb{B}_N} \otimes h, \sum_\gamma \rho_m(\gamma) z^\gamma \otimes D_T^{(m)} p(T)^\gamma g\rangle \\
&= \sum_\gamma \langle f_{|\mathbb{B}_N}, \rho_m(\gamma) z^\gamma\rangle \langle h, D_T^{(m)} p(T)^\gamma g\rangle \\
&= \sum_\gamma a_\gamma \langle (p(T)^\gamma)^* D_T^{(m)} h, g\rangle \\
&= \langle f(((p_i(T))_{i=1}^N)^*) D_T^{(m)} h, g\rangle \quad (g \in H),
\end{aligned}$$

denn als sphärische Kontraktion hat das Tupel $(p_i(T))_{i=1}^N$ nach Lemma 3.9 Spektrum in $\overline{\mathbb{B}_N}$, und die angegebene Entwicklung von f konvergiert kompakt gleichmäßig auf einer Umgebung von $\overline{\mathbb{B}_N}$. Sei nun $f \in ker\rho$ und $h \in H$. Dann gilt

$$\begin{aligned} U^*(f\otimes h) &= \lim_i U^*((f\circ\phi_i)_{|\mathbb{B}_N}\otimes h) \\ &= \lim_i (f\circ\phi_i)(((p_j(T))_{j=1}^N)^*)D_T^{(m)}h \\ &= \lim_i (f\circ\phi_i\circ b)(T^*)D_T^{(m)}h \\ &= \lim_i (f\circ b\circ\psi_i)(T^*)D_T^{(m)}h \\ &= 0, \end{aligned}$$

denn $f\circ b\circ\psi_i = 0$ auf D_i und $\sigma(T^*)\subset D_i$, da nach Lemma 3.9

$$\sigma(T^*)\subset\{z\in\mathbb{C}^n \ ; \ \|d(z)\|\leq 1\}$$

gilt. Somit ist $(ker\rho)\otimes H\subset kerU^*$.

(b) Es sei nun ν_j der Homogenitätsgrad von p_j $(1\leq j\leq N)$. Wir indizieren das gesuchte Netz nun über das Intervall $(0,1)$ mit der gewöhnlichen Ordnung. Mit
- $U_r = \{z\in\mathbb{C}^N \ ; \ (r^{\nu_j}z_j)_{j=1}^N\in\mathbb{B}_N\}$,
- $\phi_r(z) = (r^{\nu_j}z_j)_{j=1}^N \quad (z\in U_r)$,
- $D_r = b^{-1}(U_r)$,
- $\psi_r(z) = r\cdot z \quad (z\in D_r)$

sehen wir dann, daß $\mathcal{H}_m$ von außen approximierbar ist.

□

Wir formulieren nun unseren Modellsatz.

SATZ 5.7. *Es sei $\mathcal{H}_m$ von außen approximierbar. Dann existieren ein Hilbertraum $\mathcal{K}$, eine Isometrie*

$$V: H\to(\mathcal{H}_m\otimes H)\oplus\mathcal{K}$$

sowie ein vertauschendes Tupel $R\in L(\mathcal{K})^n$, so daß gilt

- $\frac{1}{C}(L_{R^*},R_R)(1_H)=0$
- $Vp_i(T) = ((M_{\tilde{p}_i}\otimes 1_H)^*\oplus p_i(R))\,V \quad (1\leq i\leq N)$.

Falls $(\Sigma_T^k(1_H))_{k\in\mathbb{N}}$ SOT gegen 0 konvergiert, dann kann man $\mathcal{K}=\{0\}$ wählen.

BEWEIS. Lemma 5.3, Lemma 5.4, Lemma 5.6. □

Wir setzen im folgenden voraus, daß für alle $m\geq 1$ die Räume $\mathcal{H}_m$ von außen approximierbar sind, oder der Einfachheit halber, daß alle p_i homogene Polynome sind. Im allgemeinen kann man nicht erwarten, einen Modellsatz für die Komponenten T_i $(1\leq i\leq n)$ zu erhalten, da die Koordinatenfunktionen z_i natürlich keine Multiplier in dem zugrundeliegenden Raum $\mathcal{H}$ sein müssen. Es existiert jedoch eine Situation, in der dies der Fall ist und in der zusätzlich gezeigt werden kann, daß das Tupel R sogar normal gewählt werden kann, nämlich wenn die Abbildungen $D\to\mathbb{C}$, $z\mapsto z_i$ $(1\leq i\leq n)$, eventuell mit einem skalaren Vorfaktor $a_i\neq 0$, in der Menge der Polynome p_i $(1\leq i\leq N)$ enthalten sind (insbesondere setzt dies natürlich $n \leq N$ voraus). Das ist im Fall der Kugel trivialerweise erfüllt, aber auch in den in [**Pot96**] betrachteten Situationen.

Wir ordnen nun die Polynome p_i so an, daß $p_1, \ldots, p_n$ den n Koordinatenfunktionen entsprechen.

In diesem Fall liefert der eben gezeigte Modellsatz insbesondere

$$VT_i = ((M_{z_i} \otimes 1_H)^* \oplus R_i)\, V \quad (1 \leq i \leq n).$$

Das vertauschende Tupel $(p_i(R))_{i=1}^N$ ist ja in jedem Fall eine sphärische Isometrie, also nach [**Ath90**], Proposition 2 insbesondere subnormal. Wir finden also eine minimale normale Erweiterung $W = (W_i)_{i=1}^N$ von $(p_i(R))_{i=1}^N$ über einem größeren Hilbertraum $G \supset \mathcal{K}$. Nach [**Ath90**], Proposition 2, ist dann auch das Tupel W sphärisch isometrisch. Da die Operatoren $a_i R_i$ $(1 \leq i \leq n)$ in dem Tupel $(p_i(R))_{i=1}^N$ enthalten sind, sind sie ebenfalls subnormal, also auch das Tupel $R = (R_i)_{i=1}^n$. Sei nun $R' = (R_i')_{i=1}^n$ eine minimale normale Erweiterung von R über einem größeren Hilbertraum $\mathcal{K}'$. Dann ist das Tupel $(p_i(R'))_{i=1}^N \in L(\mathcal{K}')^N$ eine minimale normale Erweiterung von $(p_i(R))_{i=1}^N$ und damit unitär äquivalent zu W, also selbst sphärisch isometrisch.

Bezeichnen wir dann mit $j : \mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{K}'$ die Inklusion, dann ist die Abbildung

$$V' : H \to (\mathcal{H}_m \otimes H) \oplus \mathcal{K}' \ , \ V' = (1_{\mathcal{H}_m \otimes H} \oplus j)V$$

isometrisch und erfüllt die Gleichheit

$$V' p_i(T) = ((M_{\tilde{p}_i} \otimes 1_H)^* \oplus p_i(R'))\, V' \quad (1 \leq i \leq N),$$

was nichts anderes bedeutet, als daß wir das Tupel R auch normal hätten wählen können.

KAPITEL 6

Der Fall positiver regulärer Polynome

1. Überblick

Neben den Räumen $H^2_{N,m}$ über der Einheitskugel im $\mathbb{C}^N$ wurden in [**Pot96**] funktionale Hilberträume studiert, deren reproduzierende Kerne durch positive reguläre Polynome gegeben sind, wobei sich die Räume $H^2_{N,m}$ als Spezialfall ergeben.

Ein Polynom $P = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^n} a_\gamma z^\gamma \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ heißt positives reguläres Polynom, falls

- alle nichtverschwindenden Koeffizienten positiv sind.
- $P(0) = 0$ gilt, das heißt, der konstante Term ist 0.
- alle linearen Terme nicht verschwinden.

Wir wollen nun wie in [**Pot96**] mit I_P die Menge aller Multiindizes $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ bezeichnen, für die $a_\gamma > 0$ gilt, bezeichnen, und mit N die Mächtigkeit von I_P.

Aufgrund dieser speziellen Gestalt eines positiven regulären Polynoms sind die Koeffizienten $\rho_P^m(\gamma)$ der Taylorentwicklung von

$$\left(\frac{1}{1-P(z)}\right)^m = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^n} \rho_P^m(\gamma) z^\gamma \quad (m \geq 1)$$

alle positiv.

Es bezeichne ferner

$$\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C}^n \ ; \ P(|z_1|^2, \ldots, |z_n|^2) < 1\},$$

was ein vollständiger Reinhardtbereich ist, der die 0 enthält, wie man leicht nachprüft. In [**Pot96**] werden nun für einen Hilbertraum H Räume H-wertiger holomorpher Funktionen

$$H^2_H(\rho_P^m) = \{f = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^n} h_\gamma z^\gamma \in \mathcal{O}(\mathcal{P}, H) \ ; \ \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^n} \frac{1}{\rho_P^m(\gamma)} \|h_\gamma\|^2 < \infty\}$$

betrachtet, was mit dem Skalarprodukt

$$\langle \sum_\gamma h_\gamma z^\gamma, \sum_\gamma g_\gamma z^\gamma \rangle = \sum_\gamma \frac{1}{\rho_P^m(\gamma)} \langle h_\gamma, g_\gamma \rangle$$

gerade der funktionale Hilbertraum mit reproduzierendem Kern

$$\mathcal{P} \times \mathcal{P} \to L(H)\ ,\ (z,w) \mapsto \left(\frac{1}{1 - P(z\overline{w})}\right)^m \cdot 1_H$$

ist. Natürlich ist

$$K_{P,m} : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{C}\ ,\ (z,w) \mapsto \left(\frac{1}{1 - P(z\overline{w})}\right)^m$$

der reproduzierende Kern von $H^2(\rho_P^m) = H^2_{\mathbb{C}}(\rho_P^m)$. Damit ist mit der in dieser Arbeit eingeführten Schreibweise $H^2_H(\rho_P^m) = H^2(\rho_P^m) \otimes H$. Abkürzend schreiben wir $K_P = K_{P,1}$.

Wir werden nun sehen, daß $H^2(\rho_P^1)$ ein maximaler P-Nevanlinna-Pick-Raum ist. Es ist

$$(1 - \frac{1}{K_P})(z,w) = P(z\overline{w}) = \sum_\gamma a_\gamma z^\gamma \overline{w}^\gamma \quad (z, w \in \mathcal{P}),$$

was positiv definit ist, da die Koeffizienten von P alle positiv sind. In der Tat ist durch

$$d : \mathcal{P} \to \mathbb{C}^N\ ,\ z \mapsto (\sqrt{a_\gamma}\ \overline{z}^\gamma)_{\gamma \in I_P}$$

eine polynomielle Faktorisierung von $1 - \frac{1}{K_P}$ gegeben. Wir wählen eine Abzählung $\sigma : \{1, \ldots, N\} \to I_P$ und schreiben

$$p_i(z) = \sqrt{a_{\sigma(i)}} z^{\sigma(i)} \quad (z \in \mathcal{P}\ ,\ 1 \le i \le N),$$

so daß dann $d(z) = (p_i(\overline{z}))_{i=1}^N$ $(z \in \mathcal{P})$ gilt.

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \|d(z)\|^2 &= \sum_{i=1}^N |p_i(\overline{z})|^2 \\ &= \sum_{\gamma \in I_P} a_\gamma |z_1|^{2\gamma_1} \cdots |z_n|^{2\gamma_n} \\ &= P(|z_1|^2, \ldots, |z_n|^2), \end{aligned}$$

so daß $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C}^n\ ;\ \|d(z)\| < 1\}$ gilt, was die behauptete Maximalität zeigt.

In der Tat ist nun $K_{P,m}$ die Potenz des Nevanlinna-Pick-Kernes K_P, so daß sich mit der früher eingeführten Bezeichnung $K_{P,m} = (K_P)_m$ ergibt.

Abschließend sei erwähnt, daß sich offensichtlich für

$$P(z) = \sum_{i=1}^N z_i \quad (z \in \mathbb{C}^N)$$

$\mathcal{P} = \mathbb{B}_N$ und $H^2(\rho_P^m) = H^2_{N,m}$ $(m \ge 1)$ ergibt.

2. Die Schurklasse auf $H^2(\rho_P^1)$

Wie üblich bezeichnen wir nun mit C_P die Abbildung

$$C_P : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{C}\ ,\ (z,w) \mapsto K_P(z,\overline{w})$$

(man beachte, daß $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$ gilt).

In Anlehnung an die Definitionen in [**EP**] werden wir nun für den hier vorliegenden Spezialfall eine leicht abgewandelte Charakterisierung der (dualen) Schurklasse geben.

Mit den in [**Pot96**] und in dieser Arbeit eingeführten Bezeichnungen erkennen wir leicht, daß ein vertauschendes Tupel T über einem Hilbertraum H genau dann (P,m)-positiv ist, wenn die Operatoren

$$(\frac{1}{C_P})^m(L_{T^*}, R_T)(1_H) \text{ und } \frac{1}{C_P}(L_{T^*}, R_T)(1_H)$$

positiv sind.

Lemma 6.1. *Es seien H ein unendlichdimensionaler separabler Hilbertraum, $\mathcal{E}, \mathcal{E}_*$ beliebige Hilberträume und $f \in \mathcal{O}(\mathcal{P}, L(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*))$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{S},\frac{1}{C_P},\mathcal{P}} &= \sup\{\|f(rT)\|\ ;\ T \in L(H)^n\ (P,1)\text{-}\mathit{positiv}\ ,\ 0 < r < 1\} \\ \|f\|_{\mathcal{S}^*,\frac{1}{C_P},\mathcal{P}} &= \sup\{\|f(rT^*)\|\ ;\ T \in L(H)^n\ (P,1)\text{-}\mathit{positiv}\ ,\ 0 < r < 1\}. \end{aligned}$$

Die Schurnorm ist also insbesondere unabhängig von der Wahl von H.

beweis. Wir bemerken zunächst, daß für einen $(P,1)$-positiven Multioperator $T \in L(H)^n$ der Operator $(rT_i)_{i=1}^n$ $(0 < r < 1)$ strikt $(\frac{1}{C_P}, \mathcal{P})$-positiv ist, was man leicht nachrechnet. Damit gilt

$$\begin{aligned} &\sup\{\|f(rT)\|\ ;\ T \in L(H)^n\ (P,1)\text{-positiv}\ ,\ 0 < r < 1\} \\ &\quad \le\ \sup\{\|f(T)\|\ ;\ T \in \mathcal{C}_0(H, \frac{1}{C_P}, \mathcal{P})\} \\ &\quad \le\ \|f\|_{S,\frac{1}{C_P},\mathcal{P}}. \end{aligned}$$

Umgekehrt fixieren wir $\epsilon > 0$ beliebig und finden nach Definition der Schurnorm einen separablen Hilbertraum H' sowie ein Tupel $T' \in \mathcal{C}_0(H', \frac{1}{C_P}, \mathcal{P})$ mit

$$\|f\|_{S,\frac{1}{C_P},\mathcal{P}} \ge \|f(T')\| \ge \|f\|_{S,\frac{1}{C_P},\mathcal{P}} - \frac{\epsilon}{2}.$$

Da eine Isometrie $j : H' \to H$ existiert (H ist unendlichdimensional), folgt wie in [**EP**], daß das Tupel $T = (jT_i'j^*)_{i=1}^n \in L(H)^n$ zu der Klasse $\mathcal{C}_0(H, \frac{1}{C_P}, \mathcal{P})$ gehört, denn es gilt

$$
\begin{aligned}
(1-\frac{1}{C_P})(L_{T^*},R_T)(1_H) &= \sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^n} a_\gamma T^{*\gamma}T^\gamma \\
&= j\left(\sum_{\gamma\in\mathbb{N}_0^n} a_\gamma T'^{*\gamma}T'^{\gamma}\right)j^* \\
&= j(1-\frac{1}{C_P})(L_{T'^*},R_{T'})(1_{H'})j^* \\
&\leq j\ r\cdot 1_{H'}j^* \\
&\leq r\cdot 1_H
\end{aligned}
$$

für ein geeignetes $0<r<1$. Nach Satz 3.9 hat das Tupel T schon automatisch Spektrum in $\mathcal{P}$ und erfüllt offensichtlich

$$jT_i' = T_i j \quad (1\leq i\leq n),$$

so daß nach dem Vertauschungssatz für den holomorphen Kalkül $jf(T') = f(T)j$ folgt. Es ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\|f(T')\| &= \|jf(T')\| \\
&= \|f(T)j\| \\
&\leq \|f(T)\|,
\end{aligned}
$$

so daß

$$\|f\|_{S,\frac{1}{C_P},\mathcal{P}} \geq \|f(T)\| \geq \|f\|_{S,\frac{1}{C_P},\mathcal{P}} - \frac{\epsilon}{2}$$

gilt. Ferner sind für $0<r<1$ die Abbildungen

$$f_r:\mathcal{P}\to\mathbb{C}\ ,\ z\mapsto f(rz) \quad (0<r<1)$$

holomorph und konvergieren kompakt gleichmäßig auf $\mathcal{P}$ gegen f. Wir finden also ein $0<r<1$, so daß $\|f(T)-f_r(T)\|<\frac{\epsilon}{2}$ ist, so daß also gilt

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{S,\frac{1}{C_P},\mathcal{P}} &\leq \|f_r(T)\|+\epsilon \\
&\leq \sup\{\|f(rT)\|\ ;\ T\in L(H)^n\ (P,1)\text{-positiv}\ ,\ 0<r<1\}+\epsilon,
\end{aligned}
$$

da T als strikt $(\frac{1}{C_P},\mathcal{P})$-positiver Operator natürlich auch $(P,1)$-positiv ist. Da $\epsilon>0$ beliebig war, folgt die Behauptung. Analog führt man den Beweis für die duale Schurnorm.

□

Nach Satz 3.12 gilt nun

$$M(H^2_{\mathcal{E}}(\rho_P^1), H^2_{\mathcal{E}_*}(\rho_P^1)) = \mathcal{S}^*(\frac{1}{C_P},\mathcal{P},L(\mathcal{E},\mathcal{E}_*)),$$

und mit obigem Lemma erhalten wir im Spezialfall

$$P(z) = \sum_{i=1}^N z_i\ ,\ \mathcal{P}=\mathbb{B}_N$$

die Resultate aus [**EP**].

3. Commutant-Lifting auf $H^2(\rho_P^m)$

Wie wir bereits gesehen haben, ist der Raum $H^2(\rho_P^1)$ ein maximaler P-Nevanlinna-Pick-Raum. Es ist durch

$$d : \mathcal{P} \to \mathcal{F} = \mathbb{C}^N \ , \ z \mapsto (\sqrt{a_\gamma} z^\gamma)_{\gamma \in I_P}$$

eine polynomielle Faktorisierung von $1 - \frac{1}{K_P}$ gegeben.

Aufgrund der positiven Regularität von P kommen alle linearen Terme in P vor, das heißt, alle Einheitsvektoren $e_i \in \mathbb{C}^n$ sind in der Menge I_P enthalten.

Wählen wir wie früher eine Abzählung

$$\sigma : \{1 \dots N\} \to I_P,$$

so finden wir zu $1 \leq i \leq n$ also ein $j(i) \in \{1 \dots N\}$, so daß $\sigma(j(i)) = e_i$ gilt. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} d_{e_{j(i)}}(z) &= \langle e_{j(i)}, d(z) \rangle \\ &= \sqrt{a_{e_i}} z_i \quad (z \in \mathcal{P}), \end{aligned}$$

sprich $d_{e_{j(i)}}$ ist bis auf einen Vorfaktor nichts anderes als die i-te Koordinatenfunktion. Da $\mathcal{F} = \mathbb{C}^N$ endlichdimensional ist, lassen sich alle Funktionen

$$\begin{aligned} d_\eta : \mathcal{P} \to \mathbb{C} \ , \ z &\mapsto \langle \eta, d(z) \rangle \\ &= \sum_{l=1}^{N} \eta_l \sqrt{a_{\sigma(l)}} z^{\sigma(l)} \quad (\eta \in \mathbb{C}^N) \end{aligned}$$

als Polynom in den Koordinatenfunktionen z_i $(1 \leq i \leq n)$ darstellen. Wir können alternativ sagen: Die von den Abbildungen d_η $(\eta \in \mathbb{C}^N)$ erzeugte Algebra komplexwertiger Funktionen auf $\mathcal{P}$ ist die Algebra der auf $\mathcal{P}$ eingeschränkten Polynome in n Variablen.

Im folgenden bezeichnen wir mit M_z das Tupel $(M_{z_i})_{i=1}^n \in L(H^2(\rho_P^m))^n$.

Sei nun $\mathcal{G}$ ein Hilbertraum. Aufgrund des eben Gesagten wird sofort ersichtlich, daß ein abgeschlossener Teilraum $\mathcal{N} \subset H^2(\rho_P^m) \otimes \mathcal{G}$ genau dann invariant ($*$-invariant) ist, wenn er invariant für das Tupel $(M_{z_i} \otimes 1_\mathcal{G})_{i=1}^n$ $\left((M_{z_i}^* \otimes 1_\mathcal{G})_{i=1}^n\right)$ ist.

Unter Benutzung der Tatsache, daß im Falle $\mathcal{F} = \mathbb{C}^N$ die Räume

$$\mathcal{F} \otimes (H^2(\rho_P^m) \otimes \mathcal{G}) \text{ und } (H^2(\rho_P^m) \otimes \mathcal{G})^N$$

unitär isomorph sind, erhalten wir folgende Formulierung des Commutant-Lifting-Resultats.

SATZ 6.2. *Seien $\mathcal{N} \subset H^2(\rho_P^m) \otimes \mathcal{E}$ und $\mathcal{N}_* \subset H^2(\rho_P^m) \otimes \mathcal{E}_*$ für die Operatoren*

$$M_{z_i}^* \otimes 1_\mathcal{E} \text{ bzw. } M_{z_i}^* \otimes 1_{\mathcal{E}_*} \quad (1 \leq i \leq n)$$

invariante Teilräume. Sei $N \in L(\mathcal{N},\mathcal{N}_*)$ ein Operator, so daß

$$P_{\mathcal{N}_*}(M_{z_i} \otimes 1_{\mathcal{E}_*})N = NP_{\mathcal{N}}(M_{z_i} \otimes 1_{\mathcal{E}})_{|\mathcal{N}} \quad (1 \le i \le n)$$

bzw. äquivalent dazu

$$N^*(M_{z_i}^* \otimes 1_{\mathcal{E}_*})_{|\mathcal{N}_*} = (M_{z_i}^* \otimes 1_{\mathcal{E}})N^* \quad (1 \le i \le n)$$

gilt.

Es seien ferner

$$Y_\gamma = P_{\mathcal{N}_*}(M_{\sqrt{a_\gamma}z^\gamma} \otimes 1_{\mathcal{E}_*})_{|\mathcal{N}_*} \in L(\mathcal{N}_*) \quad (\gamma \in I_P)$$

sowie

$$\Delta(A) = A - \sum_{\gamma \in I_P} Y_\gamma A Y_\gamma^* \quad (A \in L(\mathcal{N}_*))$$

definiert. Dann sind äquivalent:

(i) $\Delta^{m-1}(1_{\mathcal{N}_*} - NN^*) \ge 0$.
(ii) Es existiert $\phi \in \mathcal{M}(H^2(\rho_P^1) \otimes \mathcal{E}, H^2(\rho_P^1) \otimes \mathcal{E}_*)$ *mit* $\|M_\phi\| \le 1$ *derart, daß* $(M_\phi^*)_{|\mathcal{N}_*} = N^*$.
(iii) Es existiert $\phi \in \mathcal{M}(H^2(\rho_P^1) \otimes \mathcal{E}, H^2(\rho_P^1) \otimes \mathcal{E}_*)$ *mit* $\|M_\phi\| \le 1$ *derart, daß* $N = P_{\mathcal{N}_*}M_{\phi|\mathcal{N}}$ *und* $M_\phi^*\mathcal{N}_* \subset \mathcal{N}$.

BEWEIS. Zum Beweis bleibt zu bemerken, daß die hier definierte Abbildung Δ mit der Abbildung Δ_{Y_*} aus Satz 4.10 übereinstimmt. Dazu rechnet man nach, daß (mit einer geeigneten Abzählung σ der Menge I_P)

$$Y_*(e_i \otimes g) = Y_{\sigma(i)}g \quad (g \in \mathcal{N}_*\ ,\ 1 \le i \le N)$$

gilt. Dann wird obiger Satz ein Spezialfall des Commutant-Lifting-Theorems 4.10. □

Im Fall des bekannten Hardyraumes über der Einheitskugel mit

$$P(z) = \sum_{i=1}^n z_i \text{ und } \mathcal{P} = \mathbb{B}_n$$

erhalten wir mit $m = n$ exakt das in [**EP**] gezeigte Commutant-Lifting-Ergebnis.

Abschließend demonstrieren wir, wie man den Modellsatz, wie er in [**Pot96**] oder allgemeiner in Satz 5.7 bewiesen wurde, und das Commutant-Lifting-Resultat in 6.2 zusammenführen kann, um im Kommutanten bestimmter $(P,1)$-positiver Tupel zu liften, was eine teilweise Verallgemeinerung des Commutant-Lifting-Satzes von Nagy und Foiaş (siehe [**SN74**], Kapitel 7) darstellt.

KOROLLAR 6.3.

(a) Für ein vertauschendes Tupel $T \in L(H)^n$ *sind äquivalent:*

(i) T^* *ist* (P,m)*-positiv und es gilt*

$$\lim_{k\to\infty}(1-\frac{1}{C_P})^k(L_T,R_{T^*})(1_H)=0 \quad (SOT).$$

(ii) T *ist unitär äquivalent zur Kompression des Tupels*

$$M_z\otimes 1_H\in L(H^2(\rho_P^m)\otimes H)^n$$

auf einen für das Tupel $M_z^*\otimes 1_H$ *invarianten Teilraum.*

(b) Seien $\mathcal{N}\subset H^2(\rho_P^1)\otimes\mathcal{E}$ *und* $\mathcal{N}_*\subset H^2(\rho_P^1)\otimes\mathcal{E}_*$ *abgeschlossene Teilräume und invariant für* $M_z^*\otimes 1_{\mathcal{E}}$ *bzw.* $M_z^*\otimes 1_{\mathcal{E}_*}$*. Seien* S,T *die Kompressionen von* $M_z\otimes 1_{\mathcal{E}}$ *bzw.* $M_z\otimes 1_{\mathcal{E}_*}$ *auf diese Teilräume. Ist dann* $X\in L(\mathcal{N},\mathcal{N}_*)$ *eine Kontraktion, die* S *und* T *vertauscht, so existiert eine Kontraktion*

$$\hat{X}\in L(H^2(\rho_P^1)\otimes\mathcal{E},H^2(\rho_P^1)\otimes\mathcal{E}_*)$$

mit

- $\hat{X}^*\mathcal{N}_*\subset\mathcal{N}$
- $X=P_{\mathcal{N}_*}\hat{X}_{|\mathcal{N}}$
- $\hat{X}(M_{z_i}\otimes 1_{\mathcal{E}})=(M_{z_i}\otimes 1_{\mathcal{E}_*})\hat{X}$.

BEWEIS. Die Implikation (i) nach (ii) in (a) ist genau der in dieser Arbeit oder in [**Pot96**], Satz 2.2.6 bewiesene Modellsatz. Die Implikation von (ii) nach (i) folgt, da das Tupel $M_z^*\otimes 1_H$ (P,m)-positiv ist, und ebenso Einschränkungen dieses Tupels auf Teilräume, die für $M_z^*\otimes 1_H$ invariant sind. Teil (b) folgt aus dem Commutant-Lifting-Resultat 6.2. □

BEMERKUNG. Im Fall der Kugel, also falls

$$P(z)=\sum_{i=1}^n z_i \text{ und } \mathcal{P}=\mathbb{B}_n$$

gilt, ist das Tupel $M_z\otimes 1_H$ sogar sphärisch isometrisch. Im Fall $m=n=1$ folgt dann aus obigem Korollar das bekannte Commutant-Lifting-Theorem von Nagy und Foiaş unter der Zusatzvoraussetzung, daß $((T^*)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ SOT gegen 0 konvergiert.

ANHANG A

Die von Neumannsche Ungleichung über $\mathbb{B}_n$

In [**Var74**], Theorem 2 wurde gezeigt, daß für jedes $K \geq 0$ ein $n \in \mathbb{N}$, ein Hilbertraum H, ein Polynom $q \neq 0$ in n Variablen sowie ein vertauschendes Tupel $T \in L(H)^n$ existieren mit

$$\sum_{i=1}^{n} \|T_i\|^2 \leq 1$$

(insbesondere ist das Tupel damit eine sphärische Kontraktion) und

$$\|q(T)\| \geq K \ \|q\|_{\infty,\mathbb{B}_n}.$$

Allerdings blieb unklar, ob ein solches Tupel für jedes $n \geq 3$ gefunden werden kann.

Im folgenden geben wir ein einfaches Beispiel für das Scheitern der von Neumannschen Ungleichung für sphärische Kontraktionen auf der Einheitskugel im $\mathbb{C}^n$ für alle $n \geq 2$. Wir orientieren uns dabei an einer Konstruktion von Drury ([**Dru78**]) im Falle $n = 2$.

Für alle $n \geq 2$ existieren ein Hilbertraum H und eine sphärische Kontraktion T über H, so daß für alle $K \geq 0$ ein Polynom q in n Variablen existiert, das

$$\|q(T)\| \geq K \cdot \|q\|_{\infty,\mathbb{B}_n}$$

erfüllt.

BEWEIS. Wir wählen $H = H_n^2$ und $T = M_z^*$. Bekanntlich (vergleiche [**EP**]) ist M_z^* eine sphärische Kontraktion. Wir definieren ferner eine Folge von Polynomen q_k durch

$$q_k(z) = \left(n^{\frac{n}{2}} \cdot z_1 \cdot \ldots \cdot z_n\right)^k.$$

Durch Standardverfahren der reellen Analysis sieht man, daß

$$\|q_k\|_{\infty,\mathbb{B}_n} = 1 \quad (k \in \mathbb{N})$$

gilt. Ferner ist offenbar $q_k \in \mathcal{M}(H_n^2)$, also liegt q_k auch in H_n^2 und es gilt

$$\|q_k\|^2 = \frac{(k!)^n}{(kn)!} n^{nk}$$

nach Definition der Norm in H_n^2. Nach der Stirlingschen Formel gilt für große k

$$\begin{aligned} \frac{(k!)^n}{(kn)!} n^{nk} &\approx \frac{\left(\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k\right)^n}{\sqrt{2\pi nk}\left(\frac{kn}{e}\right)^{nk}} n^{nk} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} (2\pi k)^{\frac{n-1}{2}}. \end{aligned}$$

Somit divergiert die Folge $(\|q_k\|)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen unendlich, falls $n \geq 2$ ist. Wir finden also für $K \geq 0$ ein $k \in \mathbb{N}$, so daß $\|q_k\| \geq K$ gilt. Mit $q = q_k$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \|q(T)\| &= \|\tilde{q}(M_z)\| \\ &= \|q(M_z)\| \\ &= \|M_q\| \\ &\geq \|M_q(\mathbf{1})\| \\ &= \|q\| \\ &\geq K \\ &= K\ \|q\|_{\infty,\mathbb{B}_n} \end{aligned}$$

wie gewünscht. □

Symbolverzeichnis

Allgemeine Notationen

Kapitel 1

Kapitel 2

Kapitel 3

Kapitel 4

Kapitel 5

Kapitel 6

Literaturverzeichnis

[AEM] C.-G. Ambrozie, M. Englis, and V. Müller. Operator tuples and analytic models over general domains in $\mathbb{C}^n$. preprint.

[AM00] J. Agler and J.E. McCarthy. Complete Nevanlinna-Pick kernels. *J. Funct. Anal.*, 175:111–124, 2000.

[And63] T. Ando. On a pair of commutative contractions. *Acta Sci. Math.*, 24:88–90, 1963.

[Aro50] N. Aronszajn. Theory of reproducing kernels. *Trans. Am. Math. Soc.*, 68:337–404, 1950.

[Arv] W. Arveson. Subalgebras of C^*-algebras III: Multivariable operator theory.

[ATa] C.-G. Ambrozie and D. Timotin. The intertwining lifting theorem for a class of reproducing kernel spaces. preprint.

[ATb] C.-G. Ambrozie and D. Timotin. A von Neumann type inequality for certain domains in $\mathbb{C}^n$. preprint.

[Ath90] A. Athavale. On the intertwining of joint isometries. *J. Operator Theory*, 23:339–350, 1990.

[BB84] F. Beatrous jun. and J. Burbea. Positive-definiteness and its applications to interpolation problems for holomorphic functions. *Trans. Am. Math. Soc.*, 284(1):247–270, 1984.

[Con81] J.B. Conway. *Subnormal Operators*. Pitman Advanced Publishing Program, 1981.

[Con85] J.B. Conway. *A Course in Functional Analysis*. Springer-Verlag, 1985.

[Dru78] S.W. Drury. A generalization of von Neumann's inequality to the complex ball. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 68(3):300–304, 1978.

[EP] J. Eschmeier and M. Putinar. Spherical isometries and function theory on the unit ball in $\mathbb{C}^n$. *J. reine angew. Math.* to appear.

[EP96] J. Eschmeier and M. Putinar. *Spectral decompositions and analytic sheaves*. London Mathematical Society Monographs. Clarendon Press, Oxford, 1996.

[Esc88] J. Eschmeier. Tensor products and elementary operators. *J. reine angew. Math.*, 390:47–66, 1988.

[GRS] D. Greene, S. Richter, and C. Sundberg. The structure of inner multipliers on spaces with complete Nevanlinna-Pick kernels. preprint.

[Hal67] P. Halmos. *A Hilbert space problem book*. D. van Nostrand Company, Ltd., 1967.

[Kle55] V.L. Klee jun. Separation properties of convex cones. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 6:313–318, 1955.

[Kra82] S.G. Krantz. *Function Theory of Several Complex Variables*. Wiley-Interscience Publication, 1982.

[MP89] M. Martin and M. Putinar. *Lectures on Hyponormal Operators*. Birkhäuser Verlag, 1989.

[MT00] S. McCullough and T.T. Trent. Invariant subspaces and Nevanlinna-Pick kernels. *J. Funct. Anal.*, 178:226–249, 2000.

[MV93] V. Müller and F.-H. Vasilescu. Standard models for some commuting multioperators. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 117:979–989, 1993.

[Par70] S. Parrott. Unitary dilations for commuting contractions. *Pacific J. Math.*, 34:481–490, 1970.

[Pot96] S. Pott. Modelle und Funktionalkalküle kommutierender Operatoren unter polynomialen Positivitätsbedingungen. Dissertation, Universität des Saarlandes, 1996.

[Qui93] P. Quiggin. For which reproducing kernel hilbert spaces is Pick's theorem true ? *Integr. Eq. Op. Th.*, 16:244–266, 1993.

[Ran86] R. M. Range. *Holomorphic Functions and Integral Represenations in Several Complex Variables*. Springer-Verlag, 1986.

[RR85] M. Rosenblum and J. Rovnyak. *Hardy Classes and Operator Theory*. Oxford University Press New York, 1985.

[Rud80] W. Rudin. *Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$. Springer-Verlag New York, 1980.

[Rud91] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill International Editions, 1991.

[Sch66] H.H. Schaefer. *Topological Vector Spaces*. Macmillan series in advanced mathematics and theoretical physics. The Macmillan company, New York. Collier-Macmillan Limited, London, 1966.

[SN74] B. Sz.-Nagy. *Unitary Dilations of Hilbert Space Operators and related Topics*. American Mathematical Society, 1974.

[SNF70] B. Sz.-Nagy and C. Foiaş. *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Spaces*. North-Holland Publishing Company, 1970.

[SZ74] Z. Slodowski and W. Żelazko. On joint spectra of commuting families of operators. *Studia Math.*, 50:127–148, 1974.

[Var74] N.Th. Varopoulos. On an inequality of von Neumann and an application of the metric theory of tensor products to operators theroy. *J. Funct. Anal.*, 16:83–100, 1974.

Hiermit erkläre ich an Eides Statt, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die ausdrücklich angegebenen Hilfsmittel benutzt habe.

Saarbrücken, den 10. Dezember 2001