Dilatationssätze und Wold-Zerlegung für nichtvertauschende Kontraktionen

Diplomarbeit
zur Erlangung des Grades eines
Diplom-Mathematikers
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät I
der Universität des Saarlandes

von

Dominik Faas

Betreuer: Prof. Dr. J. Eschmeier

Saarbrücken
Januar 2003

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In [18] (Chapter 1) zeigen Nagy und Foiaş die Existenz der minimalen isometrischen Dilatation von Kontraktionen und die Wold-Zerlegung für Isometrien. Als Konsequenz daraus erhält man die bekannte Von-Neumann-Ungleichung

$$||p(T)|| \ \leq ||p||_{\infty,\mathbb{D}}$$

für Polynome $p \in \mathbb{C}[z]$ und Hibertraum-Kontraktionen T. Dabei bezeichne $\mathbb{D}$ die offene Kreisscheibe in $\mathbb{C}$.
Ando verallgemeinerte in [1] die Existenz der minimalen isometrischen Dilatation und die Gültigkeit der Von-Neumann-Ungleichung für Tupel $T = (T_1, T_2)$ zweier vertauschender Kontraktionen. Allerdings bleiben diese Resultate für höhere Dimensionen nicht mehr richtig. Parrott ([14]) widerlegte für $n \geq 3$ die Existenz von isometrischen Dilatationen für Tupel vertauschender Kontraktionen und Varopoulos zeigte in [19], dass die Von-Neumann-Ungleichung für Tupel vertauschender Kontraktionen falsch ist, falls n hinreichend groß ist.
Um dennoch eine Verallgemeinerung für den mehrdimensionalen Fall zu erhalten, braucht man daher einen geeigneteren Kontraktionsbegriff. Wir bezeichnen Tupel $T = (T_1, ..., T_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ von stetigen Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ als n-Kontraktion, falls

$$\sum_{i=1}^{n} T_i T_i^* \ \leq \ I_{\mathcal{H}}$$

gilt. Mit dieser Definition zeigt Arveson in [5] (Theorem 8.1), dass für eine n-Kontraktion T, deren Komponenten $T_1, ..., T_n$ miteinander kommmutieren, und ein Polynom $p \in \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$ in n Variablen die Abschätzung

$$||p(T)|| \ \leq \ ||p||_{\mathcal{M}}$$

gilt. Dabei ist $||p||_{\mathcal{M}}$ die Norm des Multiplikationsoperators mit p auf einem geeigneten funktionalen Hilbertraum analytischer Funktionen über der Einheitskugel, den man mit dem symmetrischen Fockraum $\mathcal{F}_+^2$ identifizieren kann. Offenbar ist dieses Resultat eine Verallgemeinerung der ursprünglichen Von-Neumann-Ungleichung auf den Fall von Tupeln vertauschender Operatoren.
Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit mit n-Kontraktionen, deren Komponenten nicht notwendigerweise miteinander kommutieren. Popescu beweist in [11] (Theorem 2.1) die Existenz der minimalen isometrischen Dilatation für eine solche n-Kontraktion. Diese ist dabei gegeben als Tupel $V = (V_1, ..., V_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{K})^n$ von Isometrien mit paarweise orthogonalen Bildern auf einem Hilbertraum $\mathcal{K}$, der $\mathcal{H}$ umfasst.

Weiterhin enthält [11] einen Beweis der Wold-Zerlegung eines Tupels von Isometrien mit paarweise orthogonalen Bildern (Theorem 1.3).
Davon ausgehend zeigt Popescu in [12] (Theorem 2.1) eine Version der Von-Neumann-Ungleichung für beliebige n-Kontraktionen. An die Stelle des Polynoms $p \in \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$ tritt dabei ein Polynom aus dem Fockraum

$$\mathcal{F}^2 \;=\; \mathcal{F}_n^2 \;=\; \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} (\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$$

und die Norm des Multiplikationsoperators mit p auf dem symmetrischen Fockraum $\mathcal{F}_+^2$ wird ersetzt durch die Norm des (Links-)Multiplikationsoperators mit p auf dem vollen Fockraum $\mathcal{F}^2$.
Im kommutativen Fall betrachtet Arveson ([5]) die Multiplikationsoperatoren $S_i = M_{z_i}$ mit den Koordinaten z_i $(i = 1, ..., n)$ und definiert die Toeplitz-Algebra τ als die von $S_1, ..., S_n$ erzeugte C^*-Algebra. Als entscheidendes Mittel zum Beweis der Von-Neumann-Ungleichung für eine n-Kontraktion $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ mit vertauschenden Komponenten benutzt er einen unitalen, vollständig positiven und vollständig kontraktiven Operator

$$\Phi_T : \tau \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

von der Toeplitz-Algebra in die stetig linearen Operatoren auf $\mathcal{H}$, der

$$\Phi_T(S_i) \;=\; T_i \quad (i = 1, ..., n)$$

erfüllt (vergleiche [5], Theorem 6.2).
Analog dazu konstruieren Arias und Popescu in [3] (Chapter 3) einen entsprechenden Operator

$$\Phi_T : C^*(S_1, ..., S_n) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

für beliebige n-Kontraktionen $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ und nennen diesen Operator die Poisson-Transformation von T. Dabei entspricht S_i dem Multiplikationsoperator mit e_i auf dem Fockraum $\mathcal{F}^2$ $(i = 1, ..., n)$ und $C^*(S_1, ..., S_n)$ ist die von $S_1, ..., S_n$ erzeugte C^*-Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$.
Wir geben in dieser Arbeit einen Beweis der (nichtkommutativen) Von-Neumann-Ungleichung mit Hilfe der Poisson-Transformation Φ_T. Dabei orientieren wir uns am Beweis von Arveson ([5]) im kommutativen Fall. Darüber hinaus erhalten wir neue Beweise für die Existenz der minimalen isometrischen Dilatation und der Wold-Zerlegung mit Hilfe der Poisson-Transformation.
Im ersten Kapitel geben wir zunächst eine für unsere Zwecke geeignete Darstellung des Fockraums $\mathcal{F}^2$ an. Dann beschäftigen wir uns mit Multiplikatoren auf $\mathcal{F}^2$. Wir geben verschiedene Darstellungen der Menge der Multiplikatoren beziehungsweise der Menge der zugehörigen Multiplikationsoperatoren in $\mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$ an. Außerdem wird eine allgemeine Definition des Shiftbegriffs (n-Shift) gegeben und speziell der Vorwärtsshift $S = (S_1, ..., S_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)^n$, dessen Komponenten $S_i = M_{e_i}$ $(i = 1, ..., n)$ die (Links-)Multiplikationsoperatoren mit e_i auf $\mathcal{F}^2$ sind, näher untersucht.
Im zweiten Kapitel führen wir die Konstruktion der Poisson-Transformation einer n-Kontraktion T aus und erhalten damit die Von-Neumann-Ungleichung für T. Der Dilatationssatz von Stinespring, angewendet auf die Poisson-Transformation, erlaubt es uns, die minimale isometrische Dilatation von T zu konstruieren.

Wir zeigen, dass die Toeplitz C^*-Algebra $C^*(S_1, ..., S_n)$ alle kompakten Operatoren auf $\mathcal{F}^2$ enthält, und benutzen Zerlegungssätze für Darstellungen von C^*-Algebren von Operatoren, die die kompakten Operatoren enthalten, um die Wold-Zerlegung für Tupel von Isometrien mit paarweise orthogonalen Bildern zu konstruieren. Schließlich benutzen wir die Wold-Zerlegung, um zu zeigen, dass jede n-Kontraktion $T = (T_1, ..., T_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ bis auf unitäre Äquivalenz Kompression der direkten Summe aus einem n-Shift und einem sphärisch unitären Tupel auf einen $*$-invarianten Unterraum ist. Es stellt sich heraus, dass die Vielfachheit des Shiftanteils durch die Hilbertraum-Dimension des Defektraums von T gegeben ist.

Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr. J. Eschmeier für das interessante Thema und die geduldige Betreuung. Weiterhin bedanke ich mich bei Herrn Dipl. Math. Christoph Barbian und Herrn Jochen Haupenthal für zahlreiche fachliche Diskussionen, Frau Ute Staemmler für das Korrekturlesen meiner Arbeit und Herrn Dipl. Kfm. Martin Becker für die wertvolle Hilfe beim Layout.

Außerdem danke ich meiner Familie für die finanzielle und moralische Unterstützung, ohne die mein Studium nicht möglich gewesen wäre.

Kapitel 1

Multiplikationsoperatoren auf dem Fockraum

1.1 Bezeichnungen und Grundlegendes

Sei $n \in \mathbb{N}^*$ eine natürliche Zahl.
Im folgenden bezeichne

$$F = F_n = \{0\} \ \cup \ \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \{1, ..., n\}^k$$

die freie Halbgruppe über den Erzeugern $1, ..., n$.
Dabei ist 0 neutrales Element von F und für $a = (a_1, ...a_k), \ b = (b_1, ..., b_l) \in F$ definiert

$$a \cdot b \ = \ (a, b) \ = \ (a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_l)$$

das Produkt von a und b in F.
Weiter sei für $a \in F$ der Betrag von a definiert durch

$$|a| = k, \text{ falls } a \in \{1, ..., n\}^k, \text{ und } |0| = 0 \ .$$

Man sieht sofort, dass $|(a, b)| = |a| + |b|$ für alle $a, b \in F$ gilt.
Wir schreiben außerdem

$$F^* \ = \ F \setminus \{0\} \ .$$

Weiterhin sei $H_n = \mathbb{C}^n$ mit dem üblichen Skalarprodukt

$$\langle \ (x_i)_{i=1}^n \ , \ (y_i)_{i=1}^n \ \rangle \ = \ \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$$

versehen. Wir definieren

$$H_n^{\otimes m} \ = \ \underbrace{H_n \otimes \cdots \otimes H_n}_{m-\text{mal}} \quad (m \in \mathbb{N}^*)$$

und

$$H_n^{\otimes 0} = \mathbb{C} \ .$$

Es bezeichne

$$\mathcal{F} \; = \; \mathcal{F}(\mathbb{C}) \; = \; \{(x_m)_{m\in\mathbb{N}};\; x_m \in H_n^{\otimes m}\} \; .$$

Mit der komponentenweisen Addition und skalaren Multiplikation ist $\mathcal{F}$ dann ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Im folgenden definieren wir eine Multiplikation auf $\mathcal{F}$.
Für $k, l \in \mathbb{N}$ sei

$$\otimes : H_n^{\otimes k} \oplus H_n^{\otimes l} \;\; \rightarrow \;\; H_n^{\otimes k} \otimes H_n^{\otimes l} \cong H_n^{\otimes(k+l)}$$

die kanonische bilineare Abbildung, die durch

$$(x, y) \mapsto x \otimes y \quad (x \in H_n^{\otimes k},\; y \in H_n^{\otimes l})$$

gegeben ist.
Für $x = (x_m)_{m\in\mathbb{N}},\; y = (y_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ definieren wir dann

$$x \odot y \;\; = \;\; (\sum_{k+l=m} x_k \otimes y_l \;)_{m\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F} \; .$$

Mit diesem Produkt wird $\mathcal{F}$ zu einer (für $n \geq 2$ nichtkommutativen) $\mathbb{C}$-Algebra mit Einselement $e_0 = (\delta_{0,m})_{m\in\mathbb{N}}$, das durch $\delta_{0,0} = 1$ und $\delta_{0,m} = 0$ $(m \in \mathbb{N}^*)$ gegeben ist.
Für $1 \leq p < \infty$ definieren wir

$$\mathcal{F}^p \;\; = \;\; \mathcal{F}^p(\mathbb{C}) \;\; = \;\; \{x = (x_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F};\; \|x\|_p^p = \sum_{m=0}^{\infty} \|x_m\|^p < \infty\} \; .$$

Damit ist $(\mathcal{F}^p, \|\cdot\|_p)$ $(1 \leq p < \infty)$ ein Banachraum. Im Fall $p = 2$ erhält man einen Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle \; (x_m)_{m\in\mathbb{N}} \; , \; (y_m)_{m\in\mathbb{N}} \; \rangle \;\; = \;\; \sum_{m\in\mathbb{N}} \langle x_m, y_m \rangle_{H_n^{\otimes m}} \quad (\; (x_m)_{m\in\mathbb{N}},\; (y_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^2 \;).$$

Dieser Hilbertraum $\mathcal{F}^2$ heißt Fockraum.
Aus der Standardorthonormalbasis $(e_1, ..., e_n)$ von H_n erhält man für $m \in \mathbb{N}^*$ die Orthonormalbasis $(e_a;\; a \in \{1, ..., n\}^m)$ von $H_n^{\otimes m}$.
(Dabei ist $e_a = e_{a_1} \otimes ... \otimes e_{a_m}$ für $a = (a_1, ..., a_m) \in \{1, ..., n\}^m$.)
Wegen $\{1, ..., n\}^m = \{a \in F;\; |a| = m\}$ kann man $(e_a;\; a \in \{1, ..., n\}^m)$ auch als Orthonormalbasis der endlichen Hilbertraum-direkten Summe

$$\bigoplus_{a\in F, |a|=m} \mathbb{C} \;\; = \;\; \{ \; (x_a)_{|a|=m};\; x_a \in \mathbb{C} \; \}$$

auffassen und so $H_n^{\otimes m}$ mit $\bigoplus\limits_{|a|=m} \mathbb{C}$ identifizieren.
Damit kann man $\mathcal{F} = \prod\limits_{m\in\mathbb{N}} H_n^{\otimes m}$ algebraisch mit

$$\prod_{m\in\mathbb{N}} \bigoplus_{|a|=m} \mathbb{C} \;\; = \;\; \prod_{a\in F} \mathbb{C} \;\; = \;\; \{(x_a)_{a\in F};\; x_a \in \mathbb{C} \text{ für } a \in F\}$$

identifizieren.
Wie man leicht nachrechnet erhält man vermöge dieser Identifizierung für das Produkt auf $\mathcal{F}$ die Darstellung

$$(x_a)_{a\in F} \odot (y_b)_{b\in F} \;\; = \;\; (\sum_{(a,b)=c} x_a \cdot y_b \;)_{c\in F}$$

und der Fockraum ergibt sich als

$$\mathcal{F}^2 \;=\; \{x = (x_a)_{a\in F} \in \mathcal{F};\; \|x\|_2^2 = \sum_{a\in F} |x_a|^2 < \infty\} \;\subset\; \mathcal{F}$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle\, (x_a)_{a\in F} \;,\; (y_a)_{a\in F}\, \rangle \;=\; \sum_{a\in F} x_a \overline{y_a} \;.$$

Wir benutzen im folgenden für $(x_a)_{a\in F} \in \mathcal{F}$ auch die Schreibweise $\sum_{a\in F} x_a e_a$.
Sei nun $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und seien $T_1, ..., T_n \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ stetig lineare Operatoren auf $\mathcal{H}$. Wir definieren für $a \in F$ den Operator $T_a \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ durch

$$\begin{aligned} T_a &= T_{a_1} \cdots T_{a_k}, \text{ falls } a = (a_1, ..., a_k) \in \{1, ..., n\}^k \\ &\text{und} \\ T_a &= I_{\mathcal{H}}, \text{ falls } a = 0 \;. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für $a, b \in F$ die Beziehung

$$T_a\, T_b \;=\; T_{(a,b)} \;.$$

1.2 Multiplikatoren auf $\mathcal{F}^2$

Wir haben gesehen, dass $\mathcal{F}$ eine Algebra bezüglich dem Faltungsprodukt $\odot$ ist. Multipliziert man aber zwei Elemente aus $\mathcal{F}^2$, so erhält man im allgemeinen nicht wieder ein Element aus $\mathcal{F}^2$. Wir interessieren uns nun für die Elemente $x \in \mathcal{F}$, für die die zugehörige Linksmultiplikation mit x

$$M_x : \mathcal{F} \to \mathcal{F} \;;\; y \mapsto x \odot y$$

den Fockraum $\mathcal{F}^2$ invariant lässt (das heißt, es gilt $M_x(\mathcal{F}^2) \subset \mathcal{F}^2$).

Definition 1.2.1.
Sei $x \in \mathcal{F}$. Wir nennen x einen Multiplikator (von $\mathcal{F}^2$), falls $x \odot y \in \mathcal{F}^2$ für alle $y \in \mathcal{F}^2$ gilt. Schreibe $\mathcal{M}$ für die Menge der Multiplikatoren, also

$$\mathcal{M} \;=\; \{x \in \mathcal{F};\; x \text{ ist Multiplikator von } \mathcal{F}^2\} \;.$$

Für $x \in \mathcal{M}$ heißt der Operator

$$M_x : \mathcal{F}^2 \to \mathcal{F}^2 \;;\; y \mapsto x \odot y \text{ (Linksmultiplikation mit } x \text{ auf } \mathcal{F}^2)$$

der zu x gehörige Multiplikationsoperator. Die Menge der Multiplikationsoperatoren bezeichnen wir mit

$$M = \{M_x;\; x \in \mathcal{M}\} \;.$$

Man sieht sofort, dass $\mathcal{M}$ ein Untervektorraum von $\mathcal{F}$ ist. Außerdem gilt $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}^2$, denn für $x \in \mathcal{M}$ ist $x = x \odot e_0 \in \mathcal{F}^2$, da $e_0 \in \mathcal{F}^2$.
Wir wollen nun zeigen, dass alle Multiplikationsoperatoren M_x $(x \in \mathcal{M})$ schon stetig sind. Dies ist Gegenstand des nächsten Satzes. Wie üblich bezeichnen wir den Raum der stetig linearen Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Satz 1.2.2.
Sei $x \in \mathcal{M}$. Dann ist $M_x \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$.

Beweis.
Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen genügt es zu zeigen, dass für jede Folge $(y^m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{F}^2$ und für $y, \tilde{y} \in \mathcal{F}^2$ mit

$$\lim_{m\to\infty} y^m = y \text{ und } \lim_{m\to\infty} M_x y^m = \tilde{y}$$

bereits $M_x y = \tilde{y}$ gilt.
Man beachte zunächst, dass aus Konvergenz in $\mathcal{F}^2$ komponentenweise Konvergenz folgt, das heißt es gilt

$$\lim_{m\to\infty} (y^m)_a = y_a \text{ und } \lim_{m\to\infty} (M_x y^m)_a = \tilde{y}_a \quad (a \in F)\ .$$

Daher folgt für alle $c \in F$:

$$\begin{aligned}
(M_x y)_c &= \sum_{(a,b)=c} x_a y_b \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{(a,b)=c} x_a (y^m)_b \quad \text{(denn die Summe ist endlich)} \\
&= \lim_{m\to\infty} (M_x y^m)_c \\
&= \tilde{y}_c\ .
\end{aligned}$$

Also ergibt sich $M_x y = \tilde{y}$, was zu zeigen war. □

Im nächsten Lemma zeigen wir, dass alle Elemente aus $\mathcal{F}^1$ Multiplikatoren auf $\mathcal{F}^2$ sind, das heißt also, es gilt

$$x \odot y \in \mathcal{F}^2 \text{ für } x \in \mathcal{F}^1 \text{ und } y \in \mathcal{F}^2\ .$$

Lemma 1.2.3.
(a) Seien $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ und $(\mu_l)_{l\in\mathbb{N}} \in \ell^2$. Definiere die Folge

$$(\nu_m)_{m\in\mathbb{N}} \ = \ (\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \ * \ (\mu_l)_{l\in\mathbb{N}}$$

durch

$$\nu_m \ = \ \sum_{k+l=m} \lambda_k \cdot \mu_l \quad \text{für } m \in \mathbb{N}\ .$$

Dann ist $(\nu_m)_m \in \ell^2$ und es gilt

$$\|(\nu_m)_m\|_{\ell^2} \ \le \ \|(\lambda_k)_k\|_{\ell^1} \cdot \|(\mu_l)_l\|_{\ell^2}\ .$$

(b) Es gilt $\mathcal{F}^1 \subset \mathcal{M}$ und $\|M_x\| \le \|x\|_1$ für alle $x \in \mathcal{F}^1$.

Beweis.
Die Aussage in Teil (a) ist bekannt, man vergleiche etwa [9] (Theorem 276) .
Für (b) ist zu zeigen, dass

$$\|x \odot y\|_2 \ \le \ \|x\|_1 \cdot \|y\|_2$$

für alle $x \in \mathcal{F}^1$ und $y \in \mathcal{F}^2$ gilt.
Seien also $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^1$ und $y = (y_l)_{l\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|x \odot y\|_2 &= \Big(\sum_{m=0}^{\infty} \| \sum_{k+l=m} x_k \otimes y_l \|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \Big(\sum_{m=0}^{\infty} \Big(\sum_{k+l=m} \|x_k \otimes y_l\| \Big)^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \Big(\sum_{m=0}^{\infty} \Big(\sum_{k+l=m} \|x_k\| \cdot \|y_l\| \Big)^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \| (\|x_k\|)_{k\in\mathbb{N}} * (\|y_l\|)_{l\in\mathbb{N}} \|_{\ell^2} \\
&\overset{\text{(a)}}{\leq} \|(\|x_k\|)_{k\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1} \cdot \|(\|y_l\|)_{l\in\mathbb{N}}\|_{\ell^2} \\
&= \|x\|_1 \cdot \|y\|_2 \ .
\end{aligned}$$

Da $y \in \mathcal{F}^2$ beliebig war, folgt nun, dass $x \in \mathcal{M}$ und $\|M_x\| \leq \|x\|_1$ gilt, was zu zeigen war. □

Definition 1.2.4.
Es bezeichne

$$\begin{aligned}
P &= \{ \sum_{a\in F, |a|\leq m} p_a e_a;\ m \in \mathbb{N},\ p_a \in \mathbb{C} \text{ für } a \in F \text{ mit } |a| \leq m \} \\
&= \mathrm{LH}\{e_a;\ a \in F\} \subset \mathcal{F}
\end{aligned}$$

die Menge der Polynome in $\mathcal{F}$.
Für ein Polynom $p \in P$ mit $p \neq 0$ sei der Grad von p definiert als

$$\mathrm{grad}(p) = \max\{m \in \mathbb{N};\ \text{es existiert ein } a \in F \text{ mit } |a| = m \text{ und } p_a \neq 0\} \ .$$

(Außerdem sei $\mathrm{grad}(0) = -\infty$.)
Weiterhin sei $(P)_1$ der Schnitt der Polynome mit der abgeschlossenen Einheitskugel in $\mathcal{F}^2$, also

$$(P)_1 = \{p \in P;\ \|p\|_2 \leq 1\} \ .$$

Offenbar liegt die Menge der Polynome P dicht in $\mathcal{F}^2$, da für $x = \sum_{a\in F} x_a e_a \in \mathcal{F}^2$ die Folge

$$\Big(\sum_{|a|\leq m} x_a e_a \Big)_{m\in\mathbb{N}}$$

in P liegt und bezüglich $\|\cdot\|_2$ gegen x konvergiert.
Da offensichtlich $P \subset \mathcal{F}^1$ gilt, folgt wie in 1.2.3, dass $x \odot p \in \mathcal{F}^2$ für alle $x \in \mathcal{F}^2$ und $p \in P$ gilt. Wir zeigen nun, dass ein $x \in \mathcal{F}^2$ genau dann Multiplikator von $\mathcal{F}^2$ ist, wenn $\{x \odot p;\ p \in (P)_1\}$ beschränkt in $\mathcal{F}^2$ ist. Diese Charakterisierung von $\mathcal{M}$ enthält der nächste Satz.

Satz 1.2.5.
Sei $x \in \mathcal{F}^2$. Dann gilt

$$x \in \mathcal{M} \iff \|x\|_\infty := \sup_{p\in(P)_1} \|x \odot p\|_2 < \infty \ .$$

In diesem Fall gilt $\|x\|_\infty = \|M_x\|$.

Beweis.
Sei zunächst $x \in \mathcal{M}$. Dann gilt für alle $p \in (P)_1$

$$\|x \odot p\|_2 = \|M_x p\|_2 \leq \|M_x\| \cdot \|p\|_2 \leq \|M_x\| \ .$$

Also folgt

$$\|x\|_\infty = \sup_{p \in (P)_1} \|x \odot p\|_2 \leq \|M_x\| < \infty \ .$$

Umgekehrt nehmen wir nun an, dass $\|x\|_\infty < \infty$ gilt, und betrachten ein beliebiges $y = \sum_{c \in F} y_c e_c \in \mathcal{F}^2$.
Wir wollen zeigen, dass $x \odot y \in \mathcal{F}^2$ mit $\|x \odot y\|_2 \leq \|x\|_\infty \cdot \|y\|_2$ gilt.
Für $y = 0$ ist dies klar. Sei also $y \neq 0$.
Für $k \in \mathbb{N}$ betrachte man

$$y^k = \sum_{|c| \leq k} y_c e_c \ .$$

Offenbar ist $y^k \in P$ und wegen

$$\|y^k\|_2 \ = \ (\sum_{|c| \leq k} |y_c|^2)^{\frac{1}{2}} \ \leq \ (\sum_{c \in F} |y_c|^2)^{\frac{1}{2}} \ = \ \|y\|_2$$

ist $\frac{y^k}{\|y\|_2} \in (P)_1$.
Nach Definition von $\| \cdot \|_\infty$ gilt also

$$\|x \odot (\frac{y^k}{\|y\|_2})\|_2 \leq \|x\|_\infty < \infty$$

und damit

$$\|x \odot y^k\|_2 \leq \|x\|_\infty \cdot \|y\|_2 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Man beachte nun weiter, dass sich für $k \in \mathbb{N}$ und $c \in F$ mit $|c| \leq k$ die Komponenten von $x \odot y$ und von $x \odot y^k$ an der Stelle c nicht unterscheiden, denn es gilt

$$(x \odot y)_c = \sum_{(a,b)=c} x_a y_b = (x \odot y^k)_c \quad \text{für } |c| \leq k \ .$$

Damit folgt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{|c| \leq k} |(x \odot y)_c|^2 \ &= \ \sum_{|c| \leq k} |(x \odot y^k)_c|^2 \\ &\leq \ \|x \odot y^k\|_2^2 \\ &\leq \ \|x\|_\infty^2 \cdot \|y\|_2^2 \end{aligned}$$

und mit $k \to \infty$ erhält man $x \odot y \in \mathcal{F}^2$ und

$$\|x \odot y\|_2^2 \ \leq \ \|x\|_\infty^2 \cdot \|y\|_2^2 \ .$$

Daraus ergibt sich

$$x \in \mathcal{M} \text{ und } \|M_x\| \leq \|x\|_\infty \ .$$

□

Nun wollen wir zeigen, dass die Funktion

$$\|\cdot\|_\infty : \mathcal{M} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto \|x\|_\infty = \sup_{p\in(P)_1} \|x \odot p\|_2$$

eine Norm definiert, die $\mathcal{M}$ zu einem Banachraum macht.

Satz 1.2.6.
Die Menge $\mathcal{M}$ der Multiplikatoren von $\mathcal{F}^2$ ist mit $\|\cdot\|_\infty$ ein Banachraum.

Beweis.
Da die Abbildung

$$\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)\ ;\ x \mapsto M_x$$

offensichtlich linear und injektiv ist und nach 1.2.5 $\|x\|_\infty = \|M_x\|$ $(x \in \mathcal{M})$ gilt, ist $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf $\mathcal{M}$. Zum Beweis der Vollständigkeit orientieren wir uns an der Arbeit [12] von Popescu.
Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_\infty)$.
Für alle $y \in \mathcal{M}$ gilt

$$\|y\|_\infty \;=\; \sup_{p\in(P)_1} \|y \odot p\|_2 \;\geq\; \|y \odot e_0\|_2 \;=\; \|y\|_2$$

und daher ist $(x_k)_k$ auch eine Cauchy-Folge in dem Hilbertraum $(\mathcal{F}^2, \|\cdot\|_2)$. Also existiert ein $x \in \mathcal{F}^2$ mit $\|x - x_k\|_2 \xrightarrow{k} 0$. Es bleibt zu zeigen, dass $x \in \mathcal{M}$ und $\|x - x_k\|_\infty \xrightarrow{k} 0$ gilt.
Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wähle $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\|x_k - x_l\|_\infty < \epsilon$ für alle $k, l \geq k_0$ gilt. Dann folgt für alle $k, l \geq k_0$ und für alle Polynome $p = \sum\limits_{|a|\leq m} p_a e_a \in P$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|(x - x_k) \odot p\|_2 &\leq \|(x - x_l) \odot p\|_2 \;+\; \|(x_k - x_l) \odot p\|_2 \\
&\leq \sum_{|a|\leq m} |p_a| \cdot \|(x - x_l) \odot e_a\|_2 \;+\; \|x_k - x_l\|_\infty \cdot \|p\|_2 \\
&\leq \sum_{|a|\leq m} |p_a| \cdot \|x - x_l\|_2 \;+\; \epsilon \cdot \|p\|_2\ .
\end{aligned}$$

Für $l \to \infty$ konvergiert der erste Summand gegen 0 und man erhält

$$\|(x - x_k) \odot p\|_2 \;\leq\; \epsilon \cdot \|p\|_2 \quad (k \geq k_0).$$

Dies zeigt, dass $x - x_k \in \mathcal{M}$ und $\|x - x_k\|_\infty \leq \epsilon$ für alle $k \geq k_0$ gilt. Man erhält also $x \in \mathcal{M}$ und $\|x - x_k\|_\infty \xrightarrow{k} 0$, was zu zeigen war. □

Die Abbildung

$$\Phi : (\mathcal{M}, \|\cdot\|_\infty) \to \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)\ ;\ x \mapsto M_x$$

definiert nach 1.2.5 eine Isometrie, deren Bild M ist. Daher folgt nach 1.2.6, dass M mit der Operatornorm ein Banachraum und somit $M \subset \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$ abgeschlossen ist.

1.3 Der Vorwärtsshift auf $\mathcal{F}^2$

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit dem Tupel $S \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)^n$ aus den zu $e_i \in \mathcal{F}^2$ $(i = 1, ..., n)$ gehörigen Multiplikationsoperatoren und mit der von S erzeugten, norm-abgeschlossenen, unitalen Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$. Wir definieren zunächst allgemein den Begriff eines n-Shifts.

Definition 1.3.1.
(a) Für einen Hilbertraum $\mathcal{H}$ und ein Tupel $V = (V_i)_{i=1}^n$ von Isometrien auf $\mathcal{H}$ heißt ein abgeschlossener Unterraum $L \subset \mathcal{H}$ wandernd für V, falls $V_a L \perp V_b L$ für $a, b \in F$ mit $a \neq b$ gilt. In diesem Fall definiert man

$$M_F(L, V) \ = \ \bigoplus_{a \in F} V_a L \ \subset \ \mathcal{H} \ .$$

(Dabei bezeichne $\bigoplus$ die ℓ^2-direkte Summe.)
(b) Ein Tupel $V = (V_i)_{i=1}^n$ von Isometrien auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ heißt n-Shift auf $\mathcal{H}$, falls es einen wandernden Unterraum $L \subset \mathcal{H}$ für V gibt mit $\mathcal{H} = M_F(L, V)$.

Das folgende technische Lemma beschäftigt sich mit einigen elementaren Aussagen über Tupel von Isometrien und n-Shifts.

Lemma 1.3.2.
(a) Ein Tupel $V = (V_i)_{i=1}^n$ von Isometrien auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ hat genau dann paarweise orthogonale Bilder, wenn

$$\sum_{i=1}^n V_i V_i^* \ \leq \ I_{\mathcal{H}}$$

gilt.
(b) Für ein Tupel $V = (V_i)_{i=1}^n$ von Isometrien auf $\mathcal{H}$ mit paarweise orthogonalen Bildern ist

$$L \ = \ \mathcal{H} \ominus \bigoplus_{i=1}^n V_i \mathcal{H}$$

ein wandernder Unterraum für V und

$$P_L \ = \ I_{\mathcal{H}} - \sum_{i=1}^n V_i V_i^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

ist die Orthogonalprojektion auf L in $\mathcal{H}$.
(c) Für einen n-Shift $V = (V_i)_{i=1}^n$ auf $\mathcal{H}$ sind die Bilder der V_i paarweise orthogonal. Der wandernde Unterraum $L \subset \mathcal{H}$ für V mit $\mathcal{H} = M_F(L, V)$ ist eindeutig bestimmt, es gilt

$$L \ = \ \mathcal{H} \ominus \bigoplus_{i=1}^n V_i \mathcal{H} \ .$$

Beweis.
(a) Für jede Isometrie $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist $V^* V = I_{\mathcal{H}}$ und damit rechnet man leicht

nach, dass VV^* die Orthogonalprojektion auf $V\mathcal{H}$ ist. Damit ist $\sum\limits_{i=1}^{n} V_iV_i^*$ die Summe der Orthogonalprojektionen auf die Bilder der V_i.
Also gilt $\sum\limits_{i=1}^{n} V_iV_i^* \leq I_{\mathcal{H}}$ genau dann, wenn die Bilder der V_i $(i = 1, ..., n)$ paarweise orthogonal sind.
(b) Seien $a, b \in F$ mit $a \neq b$. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass $|a| \geq |b|$ gilt und betrachten zunächst den Fall, dass ein $c \in F$ existiert mit $a = (b, c)$. Dann gilt $c \neq 0$ (sonst $a = b$) und damit

$$\langle V_a l, V_b \tilde{l}\rangle \;=\; \langle V_b V_c l, V_b \tilde{l}\rangle \;=\; \langle V_c l, \tilde{l}\rangle \;=\; 0$$

für alle $l, \tilde{l} \in L$, denn V_b ist isometrisch und $V_c l \in V_c\mathcal{H} \perp L$. Also ist $V_a L \perp V_b L$.
Falls kein solches $c \in F$ existiert, folgt mit $a = (a_1, ..., a_k)$ und $b = (b_1, ..., b_m)$ $(k = |a|,\ m = |b|,\ a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_m \in \{1, ..., n\})$, dass $a_j \neq b_j$ für ein geeignetes $j \in \{1, ..., m\}$ gilt. Für minimales j mit dieser Eigenschaft folgt

$$\begin{aligned}
\langle\ V_a l\ ,\ V_b \tilde{l}\ \rangle &= \langle\ V_{(a_1,...a_{j-1})} V_{a_j} V_{(a_{j+1},...,a_k)} l\ ,\ V_{(a_1,...a_{j-1})} V_{b_j} V_{(b_{j+1},...,b_m)} \tilde{l}\ \rangle \\
&= \langle\ V_{a_j} V_{(a_{j+1},...,a_k)} l\ ,\ V_{b_j} V_{(b_{j+1},...,b_m)} \tilde{l}\ \rangle \\
&= 0 \quad (\text{denn } V_{a_j}\mathcal{H} \perp V_{b_j}\mathcal{H})
\end{aligned}$$

für alle $l, \tilde{l} \in L$, also gilt $V_a L \perp V_b L$. Damit ist gezeigt, dass L ein wandernder Unterraum für V ist.
Da $V_iV_i^*$ die Orthogonalprojektion auf $V_i\mathcal{H}$ ist $(i = 1, ..., n)$ und $V_i\mathcal{H} \perp V_j\mathcal{H}$ für $i \neq j$ gilt, ist $I_{\mathcal{H}} - \sum\limits_{i=1}^{n} V_iV_i^*$ die Orthogonalprojektion auf $\mathcal{H} \ominus \bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i\mathcal{H} = L$.
(c) Sei $V = (V_i)_{i=1}^n$ ein n-Shift auf $\mathcal{H}$ und L ein wandernder Unterraum für V mit $\mathcal{H} = M_F(L, V)$. Für $h, \tilde{h} \in \mathcal{H}$ gibt es dann $(l_a)_{a\in F}, (\tilde{l}_b)_{b\in F} \in \ell^2(F, L)$ mit $h = \sum\limits_{a\in F} V_a l_a$ und $\tilde{h} = \sum\limits_{b\in F} V_b \tilde{l}_b$.
Da $V_1, ...V_n$ linear und stetig sind, folgt dann

$$\begin{aligned}
\langle\ V_i h\ ,\ V_j \tilde{h}\ \rangle &= \sum_{a,b\in F} \langle\ V_i V_a l_a\ ,\ V_j V_b \tilde{l}_b\ \rangle \\
&= \sum_{a,b\in F} \langle\ V_{(i,a)} l_a\ ,\ V_{(j,b)} \tilde{l}_b\ \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

für $i, j \in \{1, ..., n\}$ mit $i \neq j$, denn es gilt $(i, a) \neq (j, b)$ und somit $V_{(i,a)} L \perp V_{(j,b)} L$. Insgesamt folgt $V_i\mathcal{H} \perp V_j\mathcal{H}$ für $i \neq j$.
Es bleibt noch die Eindeutigkeit von L zu zeigen. Sei $h \in \mathcal{H} \ominus \bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i\mathcal{H}$. Dann existiert $(l_a)_{a\in F} \in \ell^2(F, L)$ mit $h = \sum\limits_{a\in F} V_a l_a$ und für alle $b \in F^*$ gilt

$$\begin{aligned}
0 &= \langle\ h\ ,\ V_b l_b\ \rangle \\
&= \sum_{a\in F} \langle\ V_a l_a\ ,\ V_b l_b\ \rangle \\
&= \langle V_b l_b\ ,\ V_b l_b\ \rangle \;=\; \langle\ l_b\ ,\ l_b\ \rangle \;=\; \|l_b\|^2\ .
\end{aligned}$$

(Man beachte, dass $h \perp \bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i\mathcal{H}$ und $V_a L \perp V_b L$ für $a \neq b$ gilt.)
Also folgt $h = V_0 l_0 = l_0 \in L$ und damit gilt $L \supset \mathcal{H} \ominus \bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i\mathcal{H}$.

Umgekehrt sei $l \in L$ und $i \in \{1, ..., n\}$. Dann lässt sich jedes $h \in \mathcal{H}$ in der Form $h = \sum\limits_{a \in F} V_a l_a$ mit $(l_a)_{a \in F} \in \ell^2(F, L)$ schreiben und es folgt

$$\begin{aligned} \langle\, l \,,\, V_i h \,\rangle &= \sum_{a \in F} \langle\, l \,,\, V_i V_a l_a \,\rangle \\ &= \sum_{a \in F} \langle\, l \,,\, V_{(i,a)} l_a \,\rangle \\ &= 0 \,, \end{aligned}$$

denn $L \perp V_{(i,a)} L$. Also ist $l \in \mathcal{H} \ominus \bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i \mathcal{H}$ gezeigt und insgesamt folgt

$$L \;=\; \mathcal{H} \ominus \bigoplus_{i=1}^{n} V_i \mathcal{H} \;.$$

□

Bemerkung 1.3.3.
Für einen n-Shift V auf $\mathcal{H}$ nennt man die (Hilbertraum-)Dimension des eindeutig bestimmten (vergleiche 1.3.2) wandernden Unterraums $L \subset \mathcal{H}$ für V mit $\mathcal{H} = M_F(L, V)$ die Vielfachheit des n-Shifts V.

Für $i = 1, ..., n$ definieren wir nun $S_i = M_{e_i} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$ als Multiplikationsoperator von links mit dem Einheitsvektor $e_i \in \mathcal{F}^2$ und setzen $S = (S_1, ...S_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)^n$. Wir bezeichnen S als den (Links-)Vorwärtsshift auf $\mathcal{F}^2$. Im nächsten Lemma fassen wir einige Eigenschaften von S zusammen, unter anderem die Tatsache, dass S ein n-Shift auf $\mathcal{F}^2$ mit wanderndem Unterraum $\langle e_0 \rangle \subset \mathcal{F}^2$ ist.

Lemma 1.3.4.
(a) Für $x = \sum\limits_{a \in F} x_a e_a \in \mathcal{F}^2$ und $i \in \{1, ..., n\}$ gilt

$$\begin{aligned} (S_i x)_0 &= 0 \\ &\textit{und} \\ (S_i x)_{(j,a)} &= \delta_{i,j} \cdot x_a \quad (a \in F,\ j \in \{1, ..., n\}) \;. \end{aligned}$$

(b) Für die adjungierten Abbildungen zu den S_i $(i = 1, ..., n)$ gilt

$$S_i^* x \;=\; \sum_{a \in F} x_{(i,a)} e_a$$

für alle $x = \sum\limits_{a \in F} x_a e_a \in \mathcal{F}^2$.
(c) Für $i, j \in \{1, ..., n\}$ gilt

$$S_j^* S_i \;=\; \delta_{i,j} I_{\mathcal{F}^2}$$

und somit sind $S_1, ..., S_n$ Isometrien auf $\mathcal{F}^2$ mit paarweise orthogonalen Bildern.
(d) Wir definieren nun den Unterraum

$$L \;=\; \mathcal{F}^2 \ominus \bigoplus_{i=1}^{n} S_i \mathcal{F}^2$$

von $\mathcal{F}^2$ als das orthogonale Komplement der Bilder der S_i. Dann gilt $L = \langle e_0 \rangle$.
(e) Es gilt $\sum_{i=1}^{n} S_i S_i^* \leq I_{\mathcal{F}^2}$ und $P_0 = I_{\mathcal{F}^2} - \sum_{i=1}^{n} S_i S_i^*$ ist die Orthogonalprojektion auf L in $\mathcal{F}^2$.
(f) Der Unterraum $L \subset \mathcal{F}^2$ ist ein wandernder Unterraum für S und es gilt $M_F(L,S) = \mathcal{F}^2$. Somit ist S ein n-Shift auf $\mathcal{F}^2$ mit Vielfachheit 1.

Beweis.
(a) Es gilt

$$S_i\Big(\sum_{a\in F} x_a e_a \Big) \;=\; e_i \odot \sum_{a\in F} x_a e_a \;=\; \sum_{a\in F} x_a e_{(i,a)} \; .$$

Durch Vergleich der Komponenten folgt die Behauptung.
(b) Für alle $x = \sum_{a\in F} x_a e_a,\ y = \sum_{a\in F} y_a e_a \in \mathcal{F}^2$ gilt

$$\begin{aligned}
\Big\langle \sum_{a\in F} x_{(i,a)} e_a \;,\; y \Big\rangle &= \sum_{a\in F} x_{(i,a)} \overline{y_a} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{a\in F} \delta_{i,j} x_{(j,a)} \overline{y_a} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{a\in F} x_{(j,a)} \overline{\delta_{i,j} y_a} \\
&\overset{(a)}{=} \sum_{j=1}^{n} \sum_{a\in F} x_{(j,a)} \overline{(S_i y)_{(j,a)}} \;+\; x_0 \overline{(S_i y)_0} \\
&= \sum_{a\in F} x_a \overline{(S_i y)_a} \\
&= \langle\, x \;,\; S_i y \,\rangle \; .
\end{aligned}$$

Daraus folgt die behauptete Darstellung von S_i^*.
(c) Aus (a) und (b) folgt für alle $x = \sum_{a\in F} x_a e_a$ die Beziehung

$$(S_j^* S_i x)_a \;=\; (S_i x)_{(j,a)} \;=\; \delta_{i,j} x_a \quad (a \in F)$$

und somit gilt $S_j^* S_i = \delta_{i,j} I_{\mathcal{F}^2}$. Damit ist klar, dass $S_1, ..., S_n$ Isometrien mit paarweise orthogonalen Bildern sind.
(d) Für alle $i \in \{1,..,n\}$ und $x \in \mathcal{F}^2$ gilt

$$\langle\, S_i x \;,\; e_0 \,\rangle \;=\; (S_i x)_0 \;\overset{(a)}{=}\; 0 \; .$$

Also steht e_0 senkrecht auf den Bildern der S_i $(i = 1, ..., n)$ und damit gilt $\langle e_0 \rangle \subset L$.
Sei umgekehrt $x = \sum_{a\in F} x_a e_a \in L$. Dann folgt $x_a = \langle x, e_a \rangle = 0$ für alle $a = (a_1, ..., a_k) \in F^*$, denn

$$e_a \;=\; e_{a_1} \odot e_{(a_2,...,a_k)} \;=\; S_{a_1} e_{(a_2,...,a_k)} \;\in S_{a_1}\mathcal{F}^2 \subset L^{\perp}$$

und $x \in L$.
Also ist

$$x \;=\; x_0 \cdot e_0 \;\in \langle\, e_0 \,\rangle$$

und damit ist auch die umgekehrte Inklusion gezeigt.
(e) Nach (c) sind $S_1, ..., S_n$ Isometrien mit paarweise orthogonalen Bildern. Daher folgt (e) aus 1.3.2.
(f) Nach 1.3.2 ist L ein wandernder Unterraum für S. Zudem gilt

$$S_a L \;=\; S_a\langle e_0\rangle \;=\; \{e_a \odot (\lambda \cdot e_0);\; \lambda \in \mathbb{C}\} \;=\; \{\lambda e_a;\; \lambda \in \mathbb{C}\} \;=\langle e_a\rangle \quad (a \in F)$$

und damit

$$M_F(L,S) \;=\; \ell^2 - \bigoplus_{a\in F} S_a L \;=\; \ell^2 - \bigoplus_{a\in F}\langle e_a\rangle \;=\; \mathcal{F}^2 \;.$$

Also ist S ein n-Shift auf $\mathcal{F}^2$. □

Bemerkung 1.3.5.
Aus dem obigen Lemma 1.3.4 überlegt man sich leicht die folgenden Aussagen für die Operatoren S_a^* und S_b $(a, b \in F)$.
(a) Es gilt $S_b e_c = e_{(b,c)}$ für alle $b, c \in F$.
(b) Es gilt

$$S_a^* e_c \;=\; \begin{cases} e_d & ; \text{ falls ein } d \in F \text{ existiert mit } c = (a,d) \\ 0 & ; \text{ sonst} \end{cases}$$

für alle $a, c \in F$.
(c) Es gilt

$$S_a^* S_b \;=\; \begin{cases} S_d & ; \text{ falls ein } d \in F \text{ existiert mit } b = (a,d) \\ S_d^* & ; \text{ falls ein } d \in F \text{ existiert mit } a = (b,d) \\ 0 & ; \text{ sonst} \end{cases}$$

für alle $a, b \in F$. Insbesondere gilt also $S_a^* S_a = I_{\mathcal{F}^2}$ $(a \in F)$.

Wir interessieren uns im folgenden für die von S erzeugte, norm-abgeschlossene, unitale Unteralgebra A von $\mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$, also

$$A \;=\; \overline{\mathrm{Alg}(S_1, ..., S_n, I_{\mathcal{F}^2})}^{\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}^2)}} \;.$$

Wir wollen zeigen, dass A genau aus den Multiplikationsoperatoren von Multiplikatoren aus dem $\|\cdot\|_\infty$-Abschluss von P besteht. Später werden wir sehen, dass der schwache Abschluss von A gleich der Menge M aller Multiplikationsoperatoren ist.
Zunächst definieren wir

$$\mathcal{A} \;=\; \overline{P}^{\|\cdot\|_\infty} \;\subset \mathcal{M} \;.$$

Satz 1.3.6.
Es gilt

$$A \;=\; \{M_x;\; x \in \mathcal{A}\} \;.$$

Beweis.
Für die von $S_1, ..., S_n$ und $I_{\mathcal{F}^2}$ erzeugte Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$ gilt

$$\mathrm{Alg}(S_1, ..., S_n, I_{\mathcal{F}^2}) \;=\; \mathrm{LH}(S_a;\; a \in F) \;.$$

Offensichtlich ist aber S_a gleich dem Multiplikationsoperator mit e_a, denn für $a = (a_1, ..., a_k) \in F^*$ ist

$$S_a \;=\; S_{a_1} \cdots S_{a_k} \;=\; M_{e_{a_1}} \cdots M_{e_{a_k}} \;=\; M_{(e_{a_1} \odot \ldots \odot e_{a_k})} \;=\; M_{e_a}$$

und es gilt

$$S_0 \;=\; I_{\mathcal{F}^2} \;=\; M_{e_0} \;.$$

Damit sind die Linearkombinationen der S_a $(a \in F)$ genau die Multiplikationsoperatoren zu Linearkombinationen der e_a, also zu Polynomen $p \in P$. Es folgt also

$$\mathrm{Alg}(S_1, ..., S_n, I_{\mathcal{F}^2}) \;=\; \{M_p;\; p \in P\} \;=\; \Phi(P) \;.$$

Dabei sei Φ die Abbildung, die jedem Multiplikator den zugehörigen Multiplikationsoperator zuordnet, also

$$\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{L}(\mathcal{F}^2) \;;\; x \mapsto M_x \;.$$

Nach 1.2.5 ist Φ ein isometrischer Isomorphismus von $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_\infty)$ nach M mit der Operatornorm. Daher ist

$$\overline{\Phi(P)}^{\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}^2)}} \;=\; \Phi(\overline{P}^{\|\cdot\|_\infty}) \;.$$

Zusammen folgt die Behauptung. $\square$

1.4 Der Raum $\mathcal{H}^\infty$

Für $x = \sum_{a \in F} x_a e_a \in \mathcal{F}$ und $0 < r < 1$ definiere man das Element $x_r \in \mathcal{F}$ durch

$$x_r \;=\; \sum_{a \in F} (\; r^{|a|} x_a \;) e_a \;.$$

Daraus ergeben sich unmittelbar einige Rechenregeln.

Propostion 1.4.1.
Seien $x, y \in \mathcal{F}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ und $r, s \in (0,1)$. Dann gelten die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} (x_r)_s &= x_{(r \cdot s)} \\ (x+y)_r &= x_r + y_r \\ (\lambda \cdot x)_r &= \lambda \cdot x_r \\ (x \odot y)_r &= x_r \odot y_r \;. \end{aligned}$$

Beweis.
Wir wollen exemplarisch die letzte Gleichung beweisen.

Seien dazu also $x = \sum\limits_{a \in F} x_a e_a, \; y = \sum\limits_{b \in F} y_b e_b \in \mathcal{F}$ und $0 < r < 1$. Dann folgt

$$\begin{aligned} x_r \odot y_r &= \sum_{c \in F} \Big(\sum_{(a,b)=c} (x_r)_a \cdot (y_r)_b \Big) \, e_c \\ &= \sum_{c \in F} \Big(\sum_{(a,b)=c} r^{|a|} x_a \cdot r^{|b|} y_b \Big) \, e_c \\ &= \sum_{c \in F} \Big(\sum_{(a,b)=c} r^{|a|+|b|} x_a y_b \Big) \, e_c \\ &= \sum_{c \in F} \Big(r^{|c|} \cdot \sum_{(a,b)=c} x_a y_b \Big) \, e_c \\ &= \sum_{c \in F} \big((x \odot y)_r \big)_c \, e_c \\ &= (x \odot y)_r \; . \end{aligned}$$

(Man beachte, dass $|a| + |b| = |c|$ für $(a,b) = c$ gilt.)
Die ersten drei Gleichungen ergeben sich analog unmittelbar aus der Definition von x_r. □

Wir wollen im folgenden zeigen, dass $x_r \in \mathcal{M}$ für alle $x \in \mathcal{F}^2$ gilt. Nach 1.2.3 genügt es, $x_r \in \mathcal{F}^1$ zu zeigen. Dies tun wir im folgenden Lemma.

Lemma 1.4.2.
Für $x \in \mathcal{F}^2$ und $0 < r < 1$ ist $x_r \in \mathcal{F}^1$ und es gilt

$$\|x_r\|_1 \;\le\; (1 - r^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \|x\|_2 \; .$$

Beweis.
Seien $x = (x_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^2$ ($x_m \in \mathcal{H}_n^{\otimes m}$ für $m \in \mathbb{N}$) und $0 < r < 1$ gegeben. Damit ergibt sich $x_r = (r^m x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ und für $M \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{M} \|r^m x_m\| \\ = \;& \sum_{m=0}^{M} r^m \cdot \|x_m\| \\ \le \;& \Big(\sum_{m=0}^{M} (r^m)^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\sum_{m=0}^{M} \|x_m\|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \quad \text{(Cauchy-Schwarz-Ungleichung)} \\ \le \;& \Big(\sum_{m=0}^{\infty} r^{2m} \Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\sum_{m=0}^{\infty} \|x_m\|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \\ = \;& (1 - r^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \|x\|_2 \; . \end{aligned}$$

Für $M \to \infty$ folgt nun $x_r \in \mathcal{F}^1$ und $\|x_r\|_1 \le (1 - r^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \|x\|_2$, was zu zeigen war. □

Aus obigem Lemma 1.4.2 ergibt sich zusammen mit 1.2.3 unmittelbar der folgende Satz.

Satz 1.4.3.
Seien $x \in \mathcal{F}^2$ und $0 < r < 1$. Dann ist $x_r \in \mathcal{M}$ und es gilt

$$\|x_r\|_\infty \;\leq\; (1-r^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \|x\|_2 \;.$$

Also ist für $x \in \mathcal{F}^2$ die Abbildung M_{x_r} ein stetig linearer Operator auf $\mathcal{F}^2$ für jedes $0 < r < 1$.
Wir betrachten nun die Elemente $x \in \mathcal{F}^2$, für die $\|M_{x_r}\|$ (beziehungsweise $\|x_r\|_\infty$) für $0 < r < 1$ beschränkt bleibt, und definieren

$$\mathcal{H}^\infty \;=\; \{x \in \mathcal{F}^2;\; \|x\|_{\mathcal{H}^\infty} = \sup_{0<r<1} \|M_{x_r}\| < \infty\} \;.$$

Ziel dieses Abschnittes ist es, zu zeigen, dass dies lediglich eine neue Charakterisierung von $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_\infty)$ darstellt, das heißt

$$\mathcal{H}^\infty = \mathcal{M} \text{ und } \|\cdot\|_{\mathcal{H}^\infty} = \|\cdot\|_\infty$$

soll gezeigt werden.
Dazu zeigen wir zunächst, dass $(\mathcal{H}^\infty, \|\cdot\|_{\mathcal{H}^\infty})$ ein normierter Raum ist.

Propostion 1.4.4.
Die Funktion

$$\|\cdot\|_{\mathcal{H}^\infty} : \mathcal{H}^\infty \to \mathbb{R} \;;\; x \mapsto \sup_{0<r<1} \|M_{x_r}\|$$

ist eine Norm auf dem Unterraum $\mathcal{H}^\infty$ von $\mathcal{F}^2$.

Beweis.
Es ist klar, dass $0 \in \mathcal{H}^\infty$ mit $\|0\|_{\mathcal{H}^\infty} = 0$ ist.
Ist $x \in \mathcal{H}^\infty$, so ist offensichtlich $\|x\|_{\mathcal{H}^\infty} \geq 0$ und aus $\|x\|_{\mathcal{H}^\infty} = 0$ folgt $x = 0$.
Seien nun $x \in \mathcal{H}^\infty$ und $\lambda \in \mathbb{C}$.
Dann gilt $(\lambda \cdot x)_r = \lambda \cdot x_r$ für alle $r \in (0,1)$ und damit

$$\begin{aligned}
\sup_{0<r<1} \|M_{(\lambda\cdot x)_r}\| &= \sup_{0<r<1} \|M_{(\lambda\cdot x_r)}\| \\
&= \sup_{0<r<1} \|\lambda M_{x_r}\| \\
&= \sup_{0<r<1} |\lambda| \cdot \|M_{x_r}\| \\
&= |\lambda| \cdot \|x\|_{\mathcal{H}^\infty} < \infty \;.
\end{aligned}$$

Also folgt

$$\lambda \cdot x \in \mathcal{H}^\infty \text{ und } \|\lambda \cdot x\|_{\mathcal{H}^\infty} = |\lambda| \cdot \|x\|_{\mathcal{H}^\infty} \;.$$

Nun ist noch die Abgeschlossenheit von $\mathcal{H}^\infty$ bezüglich der Addition und die Dreiecksungleichung zu zeigen.
Seien also $x, y \in \mathcal{H}^\infty$.
Dann gilt $(x+y)_r = x_r + y_r$ für alle $r \in (0,1)$ und damit folgt

$$\begin{aligned}
\sup_{0<r<1} \|M_{(x+y)_r}\| &= \sup_{0<r<1} \|M_{(x_r+y_r)}\| \\
&= \sup_{0<r<1} \|M_{x_r} + M_{y_r}\| \\
&\leq \sup_{0<r<1} (\|M_{x_r}\| + \|M_{y_r}\|) \\
&\leq \sup_{0<r<1} \|M_{x_r}\| \;+\; \sup_{0<r<1} \|M_{y_r}\| \\
&= \|x\|_{\mathcal{H}^\infty} \;+\; \|y\|_{\mathcal{H}^\infty} \;< \infty \;.
\end{aligned}$$

Also ist $x + y \in \mathcal{H}^\infty$ mit $\|x + y\|_{\mathcal{H}^\infty} \leq \|x\|_{\mathcal{H}^\infty} + \|y\|_{\mathcal{H}^\infty}$.
Damit ist gezeigt, dass $(\mathcal{H}^\infty, \|\cdot\|_{\mathcal{H}^\infty})$ ein normierter Raum ist. $\square$

Als nächstes zeigen wir die Abschätzung $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_{\mathcal{H}^\infty}$ und damit die Inklusion $\mathcal{H}^\infty \subset \mathcal{M}$. Außerdem kann der Operator M_x für $x \in \mathcal{H}^\infty$ in der schwachen Operatortopologie durch die Operatoren M_{x_r} für $r \uparrow 1$ approximiert werden. Zum Beweis brauchen wir noch die folgende Bemerkung.

Bemerkung 1.4.5.
In [17] (Theorem 1.8) wird gezeigt, dass die abgeschlossene Einheitskugel in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ (für einen Hilbertraum $\mathcal{H}$) WOT-kompakt ist und damit sind beliebige abgeschlossene Kugeln in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ WOT-kompakt. Jede beschränkte Teilmenge von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist in einer abgeschlossenen Kugel enthalten und daher relativ kompakt in der WOT-Topologie.

Satz 1.4.6.
Für $x \in \mathcal{H}^\infty$ gilt

- $x \in \mathcal{M}$ *und* $\|x\|_\infty \leq \|x\|_{\mathcal{H}^\infty}$,
- $M_x = \lim\limits_{r\uparrow 1} M_{x_r}$ *in der WOT-Topologie auf* $\mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$.

Beweis.
Sei $x = \sum\limits_{a\in F} x_a e_a \in \mathcal{H}^\infty$ gegeben. Wir zeigen zunächst, dass für jeden Operator $B \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$, der WOT-Limes eines Teilnetzes von $(M_{x_r})_{0<r<1}$ ist, bereits $By = x \odot y$ für alle $y \in \mathcal{F}^2$ gilt.
Sei also $B \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$ und $(M_{x_{(r_\alpha)}})_{\alpha\in\Lambda}$ ein Teilnetz von $(M_{x_r})_{0<r<1}$ mit

$$\mathrm{WOT} - \lim_{\alpha\in\Lambda} M_{x_{(r_\alpha)}} \;=\; B$$

und sei $y = \sum\limits_{b\in F} y_b e_b \in \mathcal{F}^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(By)_c &= \langle\, By \;,\; e_c \,\rangle \\
&= \lim_{\alpha\in\Lambda} \langle\, M_{x_{(r_\alpha)}} y \;,\; e_c \,\rangle \\
&= \lim_{\alpha\in\Lambda} \langle\, x_{(r_\alpha)} \odot y \;,\; e_c \,\rangle \\
&= \lim_{\alpha\in\Lambda} \sum_{(a,b)=c} r_\alpha^{|a|} x_a y_b \\
&= \sum_{(a,b)=c} x_a y_b \quad \text{(denn die Summe ist endlich und } r_\alpha \xrightarrow{\alpha\in\Lambda} 1 \text{)} \\
&= (x \odot y)_c
\end{aligned}$$

für alle $c \in F$ und somit gilt $By = x \odot y$.
Nach Definition von $\mathcal{H}^\infty$ ist die Menge $\{M_{x_r};\ 0 < r < 1\} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ normbeschränkt und damit relativ WOT-kompakt. Somit hat $(M_{x_r})_{0<r<1}$ ein WOT-konvergentes Teilnetz, das — wie wir oben gesehen haben — gegen einen Operator $B \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$ mit $By = x \odot y$ $(y \in \mathcal{F}^2)$ konvergiert. Also ist $x \odot y \in \mathcal{F}^2$ für $y \in \mathcal{F}^2$ und damit ist $x \in \mathcal{M}$. Da auch jedes Teilnetz von $(M_{x_r})_{0<r<1}$ ein WOT-konvergentes Teilnetz hat und dessen WOT-Limes ebenfalls M_x sein muss, folgt

schließlich, dass $(M_{x_r})_{0<r<1}$ selbst WOT gegen M_x konvergiert.
Da die Kugel $\{B \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2);\ \|B\| \leq \|x\|_{\mathcal{H}^\infty}\} \subset \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$ abgeschlossen in der WOT-Topologie von $\mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$ ist, überträgt sich die Abschätzung

$$\|M_{x_r}\| \;\leq\; \|x\|_{\mathcal{H}^\infty} \quad (0 < r < 1)$$

auf den WOT-Limes M_x, das heißt es gilt

$$\|x\|_\infty \stackrel{1.2.5}{=} \|M_x\| \;\leq\; \|x\|_{\mathcal{H}^\infty} \;.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

□

Damit sind eine Inklusion zwischen $\mathcal{H}^\infty$ und $\mathcal{F}^\infty$ und eine Ungleichung zwischen den entsprechenden Normen gezeigt. Für die umgekehrten Beziehungen benutzen wir einen Operator $\Psi_T : \mathcal{L}(\mathcal{F}^2) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ für eine $C_{\cdot 0}$-Kontraktion $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, den Arias und Popescu in [3] (Abschnitt 3) entwickeln. Wir beginnen mit der Definition einer $C_{\cdot 0}$-Kontraktion.

Definition 1.4.7.
Seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T_1, ..., T_n \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.
Das Tupel $T = (T_1, ..., T_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ heißt n-Kontraktion auf $\mathcal{H}$, falls

$$\sum_{i=1}^{n} T_i T_i^* \;\leq I_{\mathcal{H}}$$

gilt.
Eine n-Kontraktion $T = (T_1, ..., T_n)$ heißt $C_{\cdot 0}$-Kontraktion, falls

$$\text{SOT} - \lim_{k\to\infty} \sum_{|a|=k} T_a T_a^* \;=\; 0$$

ist.

Eine andere Charakterisierung für $C_{\cdot 0}$-Kontraktionen wird im folgenden Lemma gegeben.

Lemma 1.4.8.
(a) Sei $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Falls SOT-$\lim\limits_{k\to\infty} T_k^{\frac{1}{2}} = 0$ gilt, so folgt auch SOT-$\lim\limits_{k\to\infty} T_k = 0$.
(b) Eine n-Kontraktion $T = (T_1, ..., T_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist genau dann eine $C_{\cdot 0}$-Kontraktion, wenn

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{|a|=k} \|T_a^* h\|^2 \;=\; 0$$

für alle $h \in \mathcal{H}$ gilt.

Beweis.
(a) Es gelte SOT-$\lim\limits_{k\to\infty} T_k^{\frac{1}{2}} = 0$. Sei $h \in \mathcal{H}$. Nach dem Satz von Fischer-Riesz

und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} \|T_k h\| &= \sup_{\|g\|=1} |\langle T_k h, g\rangle| \\ &= \sup_{\|g\|=1} |\langle T_k^{\frac{1}{2}} h, T_k^{\frac{1}{2}} g\rangle| \\ &\leq \sup_{\|g\|=1} \|T_k^{\frac{1}{2}} h\| \cdot \|T_k^{\frac{1}{2}} g\| \\ &= \|T_k^{\frac{1}{2}}\| \cdot \|T_k^{\frac{1}{2}} h\| \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Folge $(T_k^{\frac{1}{2}})_k$ ist punktweise beschränkt (sie ist SOT-konvergent) und damit nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit auch normbeschränkt.
Da außerdem $\lim\limits_{k\to\infty} \|T_k^{\frac{1}{2}} h\| = 0$ gilt, folgt insgesamt $\lim\limits_{k\to\infty} \|T_k h\| = 0$, was zu zeigen war.
(b) Sei T zunächst eine $C_{\cdot 0}$-Kontraktion. Dann gilt für alle $h \in \mathcal{H}$ und $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{|a|=k} \|T_a^* h\|^2 \;=\; \langle \sum_{|a|=k} T_a T_a^* h \;,\; h \rangle \;\stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow}\; 0 \;,$$

denn nach Vorraussetzung gilt $\sum\limits_{|a|=k} T_a T_a^* h \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Umgekehrt setzen wir voraus, dass $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{|a|=k} \|T_a^* h\|^2 = 0$ $(h \in \mathcal{H})$ gilt.
Da $\sum\limits_{|a|=k} T_a T_a^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ positiv ist, existiert $(\sum\limits_{|a|=k} T_a T_a^*)^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ $(k \in \mathbb{N})$ und es folgt für $h \in \mathcal{H}$ und $k \in \mathbb{N}$

$$\|(\sum_{|a|=k} T_a T_a^*)^{\frac{1}{2}} h\|^2 \;=\; \langle \sum_{|a|=k} T_a T_a^* h \;,\; h \rangle \;=\; \sum_{|a|=k} \|T_a^* h\|^2 \;\stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow}\; 0 \;.$$

Mit (a) folgt, dass SOT$-\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{|a|=k} T_a T_a^* = 0$ gilt, T ist also eine $C_{\cdot 0}$-Kontraktion. □

Sei nun eine solche $C_{\cdot 0}$-Kontraktion $T = (T_1, ..., T_n)$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ gegeben. Wir definieren den zu T gehörigen Defektoperator

$$\Delta \;=\; \Delta_T \;=\; (\; I_{\mathcal{H}} - \sum_{i=1}^{n} T_i T_i^* \;)^{\frac{1}{2}} \;\in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \;.$$

Damit ist Δ offenbar ein positiver Operator auf $\mathcal{H}$.
Weiter sei der zu T gehörige Poisson-Kern $K = K_T$ definiert als die lineare Abbildung

$$K : \mathcal{H} \to \mathcal{F}^2 \otimes \mathcal{H} \;;\; h \mapsto \sum_{a\in F} (\; e_a \otimes \Delta T_a^* h \;) \;.$$

Damit gilt das folgende Lemma.

Lemma 1.4.9.
Der Poisson-Kern K ist eine (wohldefinierte) Isometrie, die die Bedingung

$$K^*(\; S_a S_b^* \otimes I_{\mathcal{H}} \;)K \;=\; T_a T_b^*$$

für alle $a, b \in F$ erfüllt.

Beweis.
Sei $h \in \mathcal{H}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{a\in F} \|e_a \otimes \Delta T_a^* h\|^2 &= \sum_{a\in F} \|e_a\|_2^2 \cdot \|\Delta T_a^* h\|^2 \\
&= \sum_{a\in F} \langle\ \Delta^2 T_a^* h\ ,\ T_a^* h\ \rangle \\
&= \sum_{a\in F} \langle\ (I_H - \sum_{i=1}^{n} T_i T_i^*) T_a^* h\ ,\ T_a^* h\ \rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|a|=k} (\ \langle\ T_a^* h\ ,\ T_a^* h\ \rangle\ -\ \sum_{i=1}^{n} \langle\ T_i^* T_a^* h\ ,\ T_i^* T_a^* h\ \rangle\ ) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (\ \sum_{|a|=k} \langle\ T_a^* h\ ,\ T_a^* h\ \rangle\ -\ \sum_{|a|=k+1} \langle\ T_a^* h\ ,\ T_a^* h\ \rangle\ ) \\
&= \|T_0^* h\|^2\ -\ \lim_{k\to\infty} \sum_{|a|=k+1} \|T_a^* h\|^2 \\
&= \|h\|^2 \quad \text{(denn } T \text{ ist eine } C_{\cdot 0}\text{-Kontraktion)}\ .
\end{aligned}$$

Für $a, b \in F$ mit $a \neq b$ gilt $e_a \perp e_b$ und somit auch $(e_a \otimes \Delta T_a^* h) \perp (e_b \otimes \Delta T_b^* h)$. Mit obiger Rechnung folgt daraus, dass $\sum\limits_{a\in F} (\ e_a \otimes \Delta T_a^* h\ )$ in $\mathcal{F}^2 \otimes \mathcal{H}$ konvergiert und

$$\|\sum_{a\in F} (\ e_a \otimes \Delta T_a^* h\ )\|\ =\ \|h\|$$

gilt. Also ist K eine wohldefinierte Isometrie.
Es bleibt zu zeigen, dass $K^*(\ S_a S_b^* \otimes I_{\mathcal{H}}\ )K\ =\ T_a T_b^*\ (a, b \in F)$ gilt.
Seien dazu zunächst $a \in F$ und $h \in \mathcal{H}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(\ S_a^* \otimes I_H\ )Kh &= (\ S_a^* \otimes I_{\mathcal{H}})(\sum_{c\in F} e_c \otimes \Delta T_c^* h\ ) \\
&= \sum_{c\in F} S_a^* e_c \otimes \Delta T_c^* h \\
&\overset{1.3.5}{=} \sum_{d\in F} e_d \otimes \Delta T_{(a,d)}^* h \\
&= \sum_{d\in F} e_d \otimes \Delta T_d^* T_a^* h \\
&= K T_a^* h
\end{aligned}$$

und es folgt $(S_a^* \otimes I_{\mathcal{H}})K = KT_a^*$. Damit erhält man nun

$$\begin{aligned}
K^*(\ S_a S_b^* \otimes I_{\mathcal{H}}\ )K &= K^*(\ S_a \otimes I_{\mathcal{H}}\ )(\ S_b^* \otimes I_{\mathcal{H}}\ )K \\
&= (\ (\ S_a^* \otimes I_{\mathcal{H}}\ )K\ )^*\ (\ S_b^* \otimes I_{\mathcal{H}}\ )K \\
&= (KT_a^*)^* K T_b^* \\
&= T_a K^* K T_b^* \\
&= T_a T_b^* \quad (K \text{ ist Isometrie})
\end{aligned}$$

für alle $a, b \in F$. Damit ist die Behauptung gezeigt. $\square$

Wir definieren nun

$$\Psi \ = \ \Psi_T : \mathcal{L}(\mathcal{F}^2) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}) \ ; \ B \mapsto K^*(\ B \otimes I_{\mathcal{H}} \ )K \ .$$

Mit dem nächsten Satz werden grundlegende Eigenschaften dieser Abbildung gezeigt.

Satz 1.4.10.
Der Operator Ψ ist unital, vollständig kontraktiv, vollständig positiv und erfüllt

$$\Psi(S_a S_b^*) \ = \ T_a T_b^*$$

für alle $a, b \in F$.

Beweis.
Es gilt

$$\Psi(I_{\mathcal{F}^2}) \ = \ K^*(\ I_{\mathcal{F}^2} \otimes I_{\mathcal{H}} \ )K \ = \ K^*K \ = \ I_{\mathcal{H}} \ ,$$

denn K ist eine Isometrie. Also ist Ψ unital.
Die Abbildung

$$\pi : \mathcal{L}(\mathcal{F}^2) \to \mathcal{L}(\mathcal{F}^2 \otimes \mathcal{H}) \ ; \ B \mapsto B \otimes I_{\mathcal{H}}$$

ist offensichtlich ein $*$-Homomorphismus und es gilt $K \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2, \mathcal{F}^2 \otimes \mathcal{H})$ mit $\|K\| = 1$. Wegen $\Psi(B) = K^*\pi(B)K$ $(B \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2))$ folgt nach [15] (Seite 28), dass Ψ vollständig positiv und vollständig kontraktiv ist.
Die Bedingung $\Psi(S_a S_b^*) = T_a T_b^*$ $(a, b \in F)$ folgt unmittelbar aus 1.4.9. $\square$

Wir wollen nun diesen Operator Ψ_T im Fall $T = rS$ anwenden, wobei S der Vorwärtsshift auf $\mathcal{F}^2$ und $0 < r < 1$ ist. Dazu benötigt man zunächst, dass rS eine $C_{\cdot 0}$-Kontraktion ist. Wir definieren für $T = (T_1, ..., T_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ ($\mathcal{H}$ ein Hilbertraum) die Abbildung

$$\Sigma_T : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}) \ ; \ X \mapsto \sum_{i=1}^{n} T_i X T_i^* \ .$$

Damit ist offensichtlich $\Sigma_T \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ und es gilt das folgende Lemma.

Lemma 1.4.11.
(a) Es ist T genau dann eine n-Kontraktion auf $\mathcal{H}$, wenn $\|\Sigma_T\| \leq 1$ gilt.
(b) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt $(\Sigma_T)^k(I_{\mathcal{H}}) = \sum\limits_{|a|=k} T_a T_a^*$.
(c) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $\Sigma_{\lambda T} = |\lambda|^2 \Sigma_T$.

Beweis.
Offensichtlich ist Σ_T ein positiver Operator. Es gilt also

$$\|\Sigma_T\| = \|\Sigma_T(I_{\mathcal{H}})\| = \|\sum_{i=1}^{n} T_i T_i^*\| \ .$$

(Vergleiche etwa [15], Corollary 2.9.)
Da $\sum\limits_{i=1}^{n} T_i T_i^*$ positiv ist, gilt $\sum\limits_{i=1}^{n} T_i T_i^* \leq I_{\mathcal{H}}$ genau dann, wenn $\|\sum\limits_{i=1}^{n} T_i T_i^*\| \leq 1$ ist, und damit folgt Teil (a).
Die Teile (b) und (c) lassen sich leicht nachrechnen. $\square$

Lemma 1.4.12.
(a) Für eine n-Kontraktion $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ auf $\mathcal{H}$ und $0 < r < 1$ ist rT eine $C_{\cdot 0}$-Kontraktion auf $\mathcal{H}$.
(b) Ist $S = (S_1, ..., S_n) = (M_{e_1}, ..., M_{e_n}) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)^n$ der Vorwärtsshift auf $\mathcal{F}^2$ und $0 < r < 1$, so ist rS eine $C_{\cdot 0}$-Kontraktion auf $\mathcal{F}^2$.

Beweis.
(a) Nach 1.4.11 ist
$$\|\Sigma_{rT}\| \;=\; r^2\|\Sigma_T\| \;\leq\; r^2 \;<\; 1 \;.$$
Damit gilt $(\Sigma_{rT})^k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ in $\mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ und somit insbesondere
$$\sum_{|a|=k} (rT)_a (rT)_a^* \;=\; (\Sigma_{rT})^k (I_{\mathcal{H}}) \;\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}\; 0 \;.$$
Somit ist rT eine $C_{\cdot 0}$-Kontraktion auf $\mathcal{H}$.
(b) In 1.3.4 (e) haben wir gesehen, dass
$$\sum_{i=1}^n S_i S_i^* \;\leq\; I_{\mathcal{F}^2}$$
gilt. Also ist S eine n-Kontraktion.
Mit (a) folgt die Behauptung. □

Also ist rS $(0 < r < 1)$ eine $C_{\cdot 0}$-Kontraktion auf $\mathcal{F}^2$. Man kann also wie oben den Defektoperator Δ_{rS}, den Poisson-Kern K_{rS} und den Operator Ψ_{rS} bilden. Für einen Multiplikator $x \in \mathcal{M}$ kann man dann den stetig linearen Operator M_x in Ψ_{rS} einsetzen. Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass das Ergebnis dann der zu x_r gehörige Multiplikationsoperator M_{x_r} ist, es soll also die Beziehung
$$\Psi_{rS}(M_x) \;=\; M_{x_r} \quad (x \in \mathcal{M},\; 0 < r < 1)$$
gezeigt werden.
Dann folgt die Abschätzung
$$\|M_{x_r}\| \;\leq\; \|M_x\| \;=\; \|x\|_\infty$$
aus der Tatsache, dass Ψ_{rS} kontraktiv ist.
Schließlich ergibt sich daraus
$$\mathcal{M} \subset \mathcal{H}^\infty \text{ und } \|x\|_{\mathcal{H}^\infty} \leq \|x\|_\infty \text{ für } x \in \mathcal{H}^\infty \;.$$
Zunächst berechnen wir den Defektoperator Δ_{rS}.

Lemma 1.4.13.
Sei S der Vorwärtsshift auf $\mathcal{F}^2$ und $0 < r < 1$.
Sei $\Delta_{rS} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$ der Defektoperator zu der $C_{\cdot 0}$-Kontraktion rS. Dann gilt
$$\Delta_{rS}^2 \;=\; (1-r^2)I_{\mathcal{F}^2} + r^2 P_0 \;,$$
wobei $P_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$ die orthogonale Projektion in $\mathcal{F}^2$ auf den Unterraum $\langle\, e_0 \,\rangle$ ist, also
$$P_0 : \mathcal{F}^2 \to \mathcal{F}^2 \;;\; \sum_{a\in F} x_a e_a \mapsto x_0 e_0 \;.$$

Beweis.
Nach 1.3.4 (e) gilt

$$\sum_{i=1}^{n} S_i S_i^* \;=\; I_{\mathcal{F}^2} - P_0$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned} \Delta_{rS}^2 &= I_{\mathcal{F}^2} - \sum_{i=1}^{n} rS_i rS_i^* \\ &= I_{\mathcal{F}^2} - r^2(\; I_{\mathcal{F}^2} - P_0 \;) \\ &= (1-r^2) I_{\mathcal{F}^2} + r^2 P_0 \;, \end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Satz 1.4.14.
Sei $0 < r < 1$ *und* $x \in \mathcal{M}$. *Dann gilt*

$$\Psi_{rS}(M_x) \;=\; M_{x_r} \;.$$

Beweis.
Nach Definition des Kalküls Ψ_{rS} gilt

$$\Psi_{rS}(M_x) \;=\; K_{rS}^*(\; M_x \otimes I_{\mathcal{F}^2} \;) K_{rS} \;,$$

wobei der Poisson-Kern

$$K_{rS} : \mathcal{F}^2 \to \mathcal{F}^2 \otimes \mathcal{F}^2$$

durch

$$K_{rS}\; y \;=\; \sum_{a \in F} (\; e_a \otimes \Delta_{rS} (rS)_a^* y \;) \;=\; \sum_{a \in F} r^{|a|} \cdot (\; e_a \otimes \Delta_{rS} S_a^* y \;) \quad (y \in \mathcal{F}^2)$$

gegeben ist. Es genügt zu zeigen, dass die Beziehung

$$\langle\; \Psi_{rS}(M_x) y \;,\; z \;\rangle \;=\; \langle\; M_{x_r} y \;,\; z \;\rangle$$

für alle $y, z \in \mathcal{F}^2$ gilt.
Seien also $y = \sum\limits_{a \in F} y_a e_a,\; z = \sum\limits_{b \in F} z_b e_b \in \mathcal{F}^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \langle\; \Psi_{rS}(M_x) y \;,\; z \;\rangle \\ =\;& \langle\; K_{rS}^*(\; M_x \otimes I_{\mathcal{F}^2} \;) K_{rS}\; y \;,\; z \;\rangle \\ =\;& \langle\; (\; M_x \otimes I_{\mathcal{F}^2} \;) K_{rS}\; y \;,\; K_{rS}\; z \;\rangle \\ =\;& \langle\; (\; M_x \otimes I_{\mathcal{F}^2} \;)(\sum_{a \in F} r^{|a|} \cdot (\; e_a \otimes \Delta_{rS} S_a^* y \;) \;) \;,\; \sum_{b \in F} r^{|b|} \cdot (\; e_b \otimes \Delta_{rS} S_b^* z \;) \;\rangle \\ =\;& \sum_{a,b \in F} r^{|a|+|b|} \cdot \langle\; (\; x \odot e_a \;) \otimes \Delta_{rS} S_a^* y \;,\; e_b \otimes \Delta_{rS} S_b^* z \;\rangle \\ =\;& \sum_{a,b \in F} r^{|a|+|b|} \cdot \langle\; x \odot e_a \;,\; e_b \;\rangle \cdot \langle\; \Delta_{rS} S_a^* y \;,\; \Delta_{rS} S_b^* z \;\rangle \;. \end{aligned}$$

Für $a, b \in F$ gilt

$$x \odot e_a \;=\; \sum_{c \in F} x_c e_{(c,a)}$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned} \langle\, x \odot e_a \;,\; e_b \,\rangle &= x_c, \quad \text{falls ein } c \in F \text{ existiert mit } b = (c,a), \\ &\text{und} \\ \langle\, x \odot e_a \;,\; e_b \,\rangle &= 0 \quad \text{sonst.} \end{aligned}$$

Außerdem gilt im Fall $b = (c,a)$ mit $c \in F$

$$|a| + |b| \;=\; 2|a| + |c|$$

sowie

$$\begin{aligned} & \langle\, \Delta_{rS} S_a^* y \;,\; \Delta_{rS} S_b^* z \,\rangle \\ = \;& \langle\, \Delta_{rS}^2 S_a^* y \;,\; S_a^* S_c^* z \,\rangle \\ \overset{1.4.13}{=} \;& \langle\, (\,(1-r^2) I_{\mathfrak{F}^2} + r^2 P_0\,) S_a^* y \;,\; S_a^* S_c^* z \,\rangle \\ = \;& (1-r^2) \cdot \langle\, S_a^* y \;,\; S_a^* S_c^* z \,\rangle \;+\; r^2 \cdot \langle\, P_0 S_a^* y \;,\; S_a^* S_c^* z \,\rangle \\ = \;& (1-r^2) \cdot \sum_{d \in F} y_{(a,d)} \overline{z_{(c,a,d)}} \;+\; r^2 \cdot y_a \overline{z_{(c,a)}} \\ = \;& y_a \overline{z_{(c,a)}} \;+\; (1-r^2) \cdot \sum_{d \in F^*} y_{(a,d)} \overline{z_{(c,a,d)}} \;. \end{aligned}$$

(Man beachte dabei, dass Δ_{rS} selbstadjungiert ist und dass $S_{(c,a)}^* \;=\; S_a^* S_c^*$ gilt.)
Setzt man dies alles in obige Gleichung ein, so erhält man

$$\begin{aligned} & \langle\, \Psi_{rS}(M_x) y \;,\; z \,\rangle \\ = \;& \sum_{a,c \in F} \left[r^{2|a|+|c|} \cdot x_c \cdot (\; y_a \overline{z_{(c,a)}} \;+\; (1-r^2) \cdot \sum_{d \in F^*} y_{(a,d)} \overline{z_{(c,a,d)}} \;) \right] \\ = \;& \sum_{c \in F} \left[r^{|c|} x_c \sum_{a \in F} (\; r^{2|a|} y_a \overline{z_{(c,a)}} \;+\; r^{2|a|} (1-r^2) \sum_{d \in F^*} y_{(a,d)} \overline{z_{(c,a,d)}} \;) \right] \\ = \;& \sum_{c \in F} (x_r)_c \Big[\sum_{m=0}^{\infty} r^{2m} \sum_{|a|=m} y_a \overline{z_{(c,a)}} \\ & \qquad + \sum_{m=0}^{\infty} (\; r^{2m} - r^{2(m+1)} \;) \sum_{|a|=m} \sum_{d \in F^*} y_{(a,d)} \overline{z_{(c,a,d)}} \;\Big] \;. \end{aligned}$$

Nun berechnen wir die zweite Summe über m in diesem Ausdruck. Durch eine

Indexverschiebung im zweiten Teil ergibt sich

$$
\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{\infty} (\ r^{2m} - r^{2(m+1)} \ ) \sum_{|a|=m} \sum_{d \in F^*} y_{(a,d)} \overline{z_{(c,a,d)}} \\
= & \sum_{m=0}^{\infty} r^{2m} \sum_{|a|=m} \sum_{d \in F^*} y_{(a,d)} \overline{z_{(c,a,d)}} \ - \ \sum_{m=1}^{\infty} r^{2m} \sum_{|a|=m-1} \sum_{d \in F^*} y_{(a,d)} \overline{z_{(c,a,d)}} \\
= & \sum_{m=0}^{\infty} r^{2m} \sum_{|a|=m} \sum_{d \in F^*} y_{(a,d)} \overline{z_{(c,a,d)}} \ - \ \sum_{m=1}^{\infty} r^{2m} \sum_{|a|=m} \sum_{d \in F} y_{(a,d)} \overline{z_{(c,a,d)}} \\
= & \sum_{d \in F^*} y_d \overline{z_{(c,d)}} \ - \ \sum_{m=1}^{\infty} r^{2m} \sum_{|a|=m} y_a \overline{z_{(c,a)}} \ .
\end{aligned}
$$

Beim zweiten Gleichheitszeichen beachte man dabei, dass für $m \in \mathbb{N}^*$ der Index (a,d) auf beiden Seiten die selben Elemente durchläuft, denn für $a \in F$ mit $|a| = m-1$ und $d = (d_1, ..., d_k) \in F^*$ ist

$$(a,d) \ = \ (a, d_1, d_2, ..., d_k) \ = \ (\tilde{a}, \tilde{d})$$

mit $\tilde{a} = (a, d_1)$ und $\tilde{d} = (d_2, ..., d_k)$, also $\tilde{a} \in F$ mit $|\tilde{a}| = m$ und $\tilde{d} \in F$ (umgekehrt analog).
Nun kann man dieses Ergebnis in die Berechnung von $\langle \ \Psi_{rS}(M_x)y \ , \ z \ \rangle$ einsetzen.
Man erhält

$$
\begin{aligned}
& \langle \ \Psi_{rS}(M_x)y \ , \ z \ \rangle \\
= & \sum_{c \in F} (x_r)_c [\ \sum_{m=0}^{\infty} r^{2m} \sum_{|a|=m} y_a \overline{z_{(c,a)}} \ + \ \sum_{d \in F^*} y_d \overline{z_{(c,d)}} \ - \ \sum_{m=1}^{\infty} r^{2m} \sum_{|a|=m} y_a \overline{z_{(c,a)}} \ ] \\
= & \sum_{c \in F} (x_r)_c [\ y_0 \overline{z_c} \ + \ \sum_{d \in F^*} y_d \overline{z_{(c,d)}} \ ] \\
= & \sum_{c \in F} \sum_{d \in F} (x_r)_c \ y_d \ \overline{z_{(c,d)}} \\
\overset{(*)}{=} & \sum_{a \in F} (\ \sum_{(c,d)=a} \ (x_r)_c y_d \ ) \cdot \overline{z_a} \\
= & \sum_{a \in F} (x_r \odot y)_a \cdot \overline{z_a} \\
= & \ \langle \ x_r \odot y \ , \ z \ \rangle \\
= & \ \langle \ M_{x_r} y \ , \ z \ \rangle \ .
\end{aligned}
$$

(Für $(*)$ benutzen wir, dass man $F \times F$ als disjunkte Vereinigung

$$F \times F = \bigcup_{a \in F} \{(c,d); \ (c,d) = a\}$$

schreiben kann.)
Da $y, z \in \mathcal{F}^2$ beliebig waren, folgt schließlich

$$\Psi_{rS}(M_x) \ = \ M_{x_r} \ ,$$

was zu zeigen war. $\square$

Aus diesem Satz folgt nun, wie bereits oben angedeutet, die Gleichheit der Räume

$$(\mathcal{M}, \|\cdot\|_\infty) \text{ und } (\mathcal{H}^\infty, \|\cdot\|_{\mathcal{H}^\infty}) .$$

Korollar 1.4.15.
Es gilt $\mathcal{M} = \mathcal{H}^\infty$ und $\|x\|_\infty = \|x\|_{\mathcal{H}^\infty}$ für alle $x \in \mathcal{M}$.

Beweis.
Nach 1.4.6 gilt $\mathcal{H}^\infty \subset \mathcal{M}$ und $\|x\|_\infty \leq \|x\|_{\mathcal{H}^\infty}$ für alle $x \in \mathcal{H}^\infty$. Sei also $x \in \mathcal{M}$. Dann gilt für $0 < r < 1$

$$\|M_{x_r}\| \overset{1.4.14}{=} \|\Psi_{rS}(M_x)\| \leq \|M_x\| \overset{1.2.5}{=} \|x\|_\infty ,$$

denn Ψ_{rS} ist kontraktiv nach 1.4.10.
Also folgt

$$\sup_{0<r<1} \|M_{x_r}\| \leq \|x\|_\infty < \infty$$

und damit ist $x \in \mathcal{H}^\infty$ mit

$$\|x\|_{\mathcal{H}^\infty} \leq \|x\|_\infty .$$

□

1.5 Die vom Shift erzeugte, WOT-abgeschlossene, unitale Algebra

In Abschnitt 1.3 wurde die vom Vorwärtsshift $S = (S_1, ..., S_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)^n$ erzeugte, abgeschlossene, unitale Unteralgebra A von $\mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$ untersucht, also

$$A = \overline{\mathrm{Alg}(S_1, ..., S_n, I_{\mathcal{F}^2})}^{\mathcal{L}(\mathcal{F}^2)} .$$

In 1.3.6 wurde gezeigt, dass A gleich der Menge der Multiplikationsoperatoren zu Multiplikatoren aus der Menge

$$\mathcal{A} = \overline{P}^{\|\cdot\|_\infty} \subset \mathcal{M}$$

ist, das heißt es gilt

$$A = \{M_x;\ x \in \mathcal{A}\} .$$

Also folgt insbesondere

$$A \subset M = \{M_x;\ x \in \mathcal{M}\} .$$

Ziel dieses Abschnitts ist es, zu zeigen, dass der Abschluss von A in der schwachen Operatortopologie gleich M ist. Man erhält eine Inklusion, indem man zeigt, dass M WOT-abgeschlossen ist.

Satz 1.5.1.
M ist abgeschlossen in der WOT-Topologie von $\mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$.

Beweis.
Sei $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in $\mathcal{M}$ und $B \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$, so dass

$$\mathrm{WOT} - \lim_{i\in I} M_{x_i} \;=\; B$$

ist, das heißt es gilt

$$\lim_{i\in I}\langle\, M_{x_i}y \;,\; z\,\rangle \;=\; \langle\, By \;,\; z\,\rangle$$

für alle $y, z \in \mathcal{F}^2$.
Wir müssen zeigen, dass $B \in M$ gilt, es muss also einen Multiplikator $x \in \mathcal{M}$ mit $B = M_x$ geben.
Dazu betrachten wir zunächst ein festes $a \in F$ und untersuchen das Bild von e_a unter B. Wir wollen zeigen, dass es ein Element $x^a \in \mathcal{F}^2$ mit

$$Be_a \;=\; x^a \odot e_a$$

gibt.
Definiere

$$E_a \;=\; \{x \odot e_a;\; x \in \mathcal{F}^2\} \;\subset\; \mathcal{F}^2 \;.$$

Zu zeigen ist, dass $Be_a \in E_a$ gilt.
Da E_a ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{F}^2$ ist, genügt es für $z \in \mathcal{F}^2$ die Implikation

$$z \perp E_a \;\Rightarrow\; z \perp Be_a$$

zu zeigen.
Für $z \in \mathcal{F}^2$ mit $z \perp E_a$ gilt aber für alle $i \in I$

$$\langle\, x_i \odot e_a \;,\; z\,\rangle \;=\; 0$$

und demzufolge

$$\langle\, Be_a \;,\; z\,\rangle \;=\; \lim_{i\in I}\langle\, x_i \odot e_a \;,\; z\,\rangle \;=\; 0\;.$$

Also ist $z \perp Be_a$ und daher gibt es für jedes $a \in F$ ein $x^a \in \mathcal{F}^2$ mit

$$Be_a \;=\; x^a \odot e_a\;.$$

Als nächstes wollen wir zeigen, dass x^a unabhängig von a ist.
Für alle $a, b \in F$ gilt

$$\begin{aligned}
0 \;&=\; \lim_{i\in I}\langle\, (\, M_{x_i} - B\,)e_a \;,\; e_{(b,a)}\,\rangle \\
&=\; \lim_{i\in I}\langle\, (\, x_i - x^a\,) \odot e_a \;,\; e_{(b,a)}\,\rangle \\
&=\; \lim_{i\in I}\langle\, x_i - x^a \;,\; e_b\,\rangle \\
&=\; \lim_{i\in I}\langle\, x_i \;,\; e_b\,\rangle \;-\; \langle\, x^a \;,\; e_b\,\rangle\;.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\langle\, x^a \;,\; e_b\,\rangle \;=\; \lim_{i\in I}\langle\, x_i \;,\; e_b\,\rangle$$

und daher ist $\langle\, x^a \;,\; e_b\,\rangle$ für alle $b \in F$ unabhängig von a.
Also ist auch x^a unabhängig von a.
Es gibt also ein $x \in \mathcal{F}^2$ mit

$$Be_a \;=\; x \odot e_a$$

für alle $a \in F$.
Weiter gilt für alle Polynome $p = \sum_{|a| \leq m} p_a e_a \in (P)_1$ in der abgeschlossenen Einheitskugel von $\mathcal{F}^2$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|x \odot p\|_2 &= \|x \odot \sum_{|a| \leq m} p_a e_a\|_2 \\ &= \| \sum_{|a| \leq m} p_a (x \odot e_a)\|_2 \\ &= \| \sum_{|a| \leq m} p_a (B e_a)\|_2 \\ &= \|Bp\|_2 \\ &\leq \|B\| \cdot \|p\|_2 \\ &\leq \|B\| \ . \end{aligned}$$

Damit ist

$$\sup_{p \in (P)_1} \|x \odot p\|_2 \ \leq \ \|B\| \ < \ \infty \ ,$$

also ist $x \in \mathcal{M}$ nach 1.2.5.
Damit ist nach 1.2.2 der zu x gehörige Multiplikationsoperator M_x stetig.
Wie oben sieht man, dass M_x und B auf den Polynomen übereinstimmen. Diese liegen aber dicht in $\mathcal{F}^2$. Da auch B stetig ist, folgt schließlich

$$B \ = \ M_x \ ,$$

was zu zeigen war. □

Also ist M WOT-abgeschlossen.
Wegen $A \subset M$ erhält man unmittelbar das folgende Korollar.

Korollar 1.5.2.
Es gilt

$$\overline{A}^{WOT} \subset M \quad .$$

Für die umgekehrte Inklusion betrachte man einen Multiplikationsoperator M_x zu einem Multiplikator $x \in \mathcal{M}$. Nach 1.4.6 gilt

$$M_x \ = \ \mathrm{WOT} - \lim_{r \uparrow 1} M_{x_r} \ .$$

Kann man zeigen, dass $M_{x_r} \in A$ für alle $0 < r < 1$ gilt, so folgt damit $M_x \in \overline{A}^{\mathrm{WOT}}$ und man hat die umgekehrte Inklusion gezeigt.
Nach 1.3.6 ist A gegeben als die Menge der Multiplikationsoperatoren zu Elementen aus

$$\mathcal{A} \ = \ \overline{P}^{\|\cdot\|_\infty} \ .$$

Es genügt also zu zeigen, dass $x_r \in \mathcal{A}$ gilt, das heißt, dass sich x_r bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ durch Polynome approximieren lässt $(0 < r < 1)$.
Im nächsten Lemma wird dies sogar für alle $x \in \mathcal{F}^2$ gezeigt.

Lemma 1.5.3.
Für $x \in \mathcal{F}^2$ und $0 < r < 1$ gilt $x_r \in \mathcal{A}$.

Beweis.
Sei $x \in \mathcal{F}^2$ und $0 < r < 1$.
Da die Polynome dicht in $\mathcal{F}^2$ liegen, gibt es eine Folge $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in P mit

$$\lim_{k\to\infty} \|x - p_k\|_2 \ = \ 0 \ .$$

Es gilt weiter

$$(x - p_k)_r \ = \ x_r - (p_k)_r$$

und nach 1.4.3 folgt

$$\|x_r - (p_k)_r\|_\infty \ = \ \|(x - p_k)_r\|_\infty \ \leq \ (1 - r^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \|x - p_k\|_2 \ \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \ 0 \ .$$

Wegen $p_k \in P$ ist auch $(p_k)_r \in P$ $(k \in \mathbb{N})$. Daher ist $((p_k)_r)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Polynomen, die bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ gegen x_r konvergiert, und damit ist

$$x_r \in \overline{P}^{\|\cdot\|_\infty} \ = \ \mathcal{A} \ .$$

□

Es wurde bereits gezeigt, dass hieraus die umgekehrte Inklusion in 1.5.2 folgt. Damit ist der folgende Satz bewiesen.

Satz 1.5.4.
Der Abschluss von A in der schwachen Operatortopologie ist gleich der Menge aller Multiplikationsoperatoren, also

$$\overline{A}^{WOT} \ = \ M \ .$$

Bemerkung 1.5.5.
(a) Nach Definition ist A der Operatornorm-Abschluss der von $S_1, ..., S_n$ und $I_{\mathcal{F}^2}$ erzeugten Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$. Da die WOT-Topologie gröber als die Normtopologie ist, folgt für den WOT-Abschluss von A

$$\overline{A}^{\text{WOT}} \ = \ \overline{\overline{\text{Alg}(S_1, ..., S_n, I_{\mathcal{F}^2})}^{\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}^2)}}}^{\text{WOT}} \ = \ \overline{\text{Alg}(S_1, ..., S_n, I_{\mathcal{F}^2})}^{\text{WOT}} \ .$$

Also besagt 1.5.4, dass die Menge M der Multiplikationsoperatoren die kleinste WOT-abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$ ist, die $S_1, ..., S_n$ und $I_{\mathcal{F}^2}$ enthält.
(b) Sei τ_{ω^*} die ultraschwache Topologie auf $\mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$. Da diese stets feiner als die WOT-Topologie ist, folgt aus 1.5.4 unmittelbar

$$\overline{A}^{\tau_{\omega^*}} \ \subset \ \overline{A}^{\text{WOT}} \ = \ M \ .$$

In 1.4.6 wurde für $x \in \mathcal{H}^\infty = \mathcal{M}$ gezeigt, dass WOT-$\lim\limits_{r\uparrow 1} M_{x_r} = M_x$ gilt. Da die ultraschwache Topologie und die WOT-Topologie auf normbeschränkten Teilmengen übereinstimmen (vergleiche [17], Lemma in 1.3) und

$$\sup_{0<r<1} \|M_{x_r}\| \ = \ \|x\|_{\mathcal{H}^\infty} \ < \ \infty$$

gilt, folgt sogar

$$\tau_{\omega^*} - \lim_{r\uparrow 1} M_{x_r} \ = \ M_x \quad (x \in \mathcal{M}) \ .$$

Mit 1.5.3 erhält man

$$\overline{A}^{\tau_{\omega^*}} \ = \ M \ .$$

1.6 Der Kommutant der Rechtsmultiplikationsoperatoren

Wir haben in 1.5.4 gesehen, dass M als unitale, WOT-abgeschlossene Unteralgebra in $\mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$ vom Linksvorwärtsshift S erzeugt wird. Wir definieren nun den Rechtsvorwärtsshift $R = (R_1, ..., R_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)^n$ auf $\mathcal{F}^2$ als Tupel der Rechtsmultiplikationsoperatoren

$$R_i : \mathcal{F}^2 \to \mathcal{F}^2 \; ; \; x \mapsto x \odot e_i \quad (i = 1, ..., n) \; .$$

Damit ist R — ebenso wie S — ein n-Shift auf $\mathcal{F}^2$ und wie für S ist $L = \langle e_0 \rangle$ wandernd für R mit $M_F(L, R) = \mathcal{F}^2$. Zunächst bemerken wir, dass S und R miteinander kommutieren und folglich ist M im Kommutant von R enthalten.

Lemma 1.6.1.
(a) Für $i, j \in \{1, ..., n\}$ gilt $S_i R_j = R_j S_i$.
(b) Der Kommutant

$$(R)' \;=\; (R_1, ..., R_n)' \;=\; \{B \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2);\; R_i B = B R_i \text{ für } i = 1, ..., n\}$$

von R enthält die Menge M der Multiplikationsoperatoren.

Beweis.
(a) Seien $i, j \in \{1, ..., n\}$ und $x \in \mathcal{F}^2$. Dann folgt

$$S_i R_j x \;=\; S_i(x \odot e_j) \;=\; e_i \odot x \odot e_j \;=\; R_j(e_i \odot x) \;=\; R_j S_i x \; .$$

(b) Wegen (a) gilt $S_1, ..., S_n \in (R)'$ und da Kommutanten stets unitale, WOT-abgeschlossene Unteralgebren der Algebra der stetig linearen Operatoren sind, folgt

$$M \overset{1.5.4}{=} \overline{\mathrm{Alg}(S_1, ..., S_n, I_{\mathcal{F}^2})}^{\mathrm{WOT}} \;\subset\; (R)' \; .$$

(Alternativ dazu sieht man auch direkt, dass für $x \in \mathcal{M}$ und $j = 1, ..., n$

$$M_x R_j y \;=\; x \odot y \odot e_j \;=\; R_j M_x y \quad (y \in \mathcal{F}^2)$$

gilt und damit $M_x \in (R)'$ ist.) □

Wir wollen im folgenden zeigen, dass auch die umgekehrte Inklusion gilt, es gibt also zu jedem Operator $B \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$, der mit $R_1, ..., R_n$ kommutiert, einen Multiplikator $x \in \mathcal{M}$ mit $B = M_x$. Wir führen zunächst einige Bezeichnungen ein.

Definition 1.6.2.
(a) Für $a \in F$ sei $\overline{a} \in F$ definiert durch

$$\overline{(a_1, ..., a_k)} \;=\; (a_k, ..., a_1) \quad (k \in \mathbb{N},\; a_1, ..., a_k \in \{1, ..., n\})$$

und $\overline{0} = 0$.
(b) Der Operator

$$f : \mathcal{F}^2 \to \mathcal{F}^2 \; ; \; \sum_{a \in F} x_a e_a \mapsto \sum_{a \in F} x_{\overline{a}} e_a$$

heißt Flipoperator auf $\mathcal{F}^2$.

Damit erhält man die folgenden Rechenregeln.

Propostion 1.6.3.
(a) Für alle $a \in F$ gilt $\overline{\overline{a}} = a$.
(b) Für alle $a, b \in F$ gilt $\overline{(a,b)} = (\overline{b}, \overline{a})$.
(c) Der Flipoperator f auf $\mathcal{F}^2$ ist unitär (Insbesondere ist f linear und stetig.) mit $f^2 = I_{\mathcal{F}^2}$.
(d) Für alle $x, y \in \mathcal{F}^2$ gilt $f(x \odot y) = f(y) \odot f(x)$.
(e) Für den Rechtsvorwärtsshift $R = (R_1, ..., R_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)^n$ gilt

$$R_a x = x \odot e_{\overline{a}} \quad (a \in F) \ ,$$

das heißt, der Operator R_a wirkt auf $\mathcal{F}^2$ durch Multiplikation von rechts mit $e_{\overline{a}}$.
(f) Für $a \in F$ gilt $S_a = fR_af$ und $R_a = fS_af$.
(g) Für $a \in F$ gilt $S_a^* = fR_a^*f$ und $R_a^* = fS_a^*f$.

Beweis.
(a)-(c) ergeben sich unmittelbar aus der Definition 1.6.2.
(d) Seien $x = \sum\limits_{a \in F} x_a e_a, \ y = \sum\limits_{b \in F} y_b e_b \in \mathcal{F}^2$ gegeben. Dann gilt für alle $c \in F$

$$\begin{aligned} (\ f(x \odot y)\ )_c &= (x \odot y)_{\overline{c}} \\ &= \sum_{(a,b)=\overline{c}} x_a y_b \\ &\overset{(a),(b)}{=} \sum_{(b,a)=c} x_{\overline{a}} y_{\overline{b}} \\ &= \sum_{(b,a)=c} (fx)_a (fy)_b \\ &= (\ (fy) \odot (fx)\ )_c \end{aligned}$$

und somit folgt die Behauptung.
(e) Für $a = 0$ ist die Behauptung klar, sei also $a = (a_1, ..., a_k) \in F^*$. Dann gilt

$$\begin{aligned} R_a x &= R_{a_1} \cdots R_{a_k} x \\ &= (\ R_{a_2} \cdots R_{a_k} x\ ) \odot e_{a_1} \\ &= ... \\ &= x \odot e_{a_k} \odot ... \odot e_{a_1} \\ &= x \odot e_{(a_k, ..., a_1)} \\ &= x \odot e_{\overline{a}} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathcal{F}^2$.
(f) Für $a \in F$ gilt

$$R_a x \overset{(e)}{=} x \odot e_{\overline{a}} \overset{(c),(d)}{=} f(e_a \odot (fx)) \ = \ fS_afx$$

für alle $x \in \mathcal{F}^2$. Damit folgt $R_a = fS_af$ und damit

$$fR_af \ = \ f^2S_af^2 \overset{(c)}{=} \ S_a \quad (a \in F) \ .$$

(g) ist klar nach (f) und (c). □

Wir definieren weiterhin den Operator

$$Q : \mathcal{F}^2 \to \mathbb{C} \ ; \ \sum_{a \in F} x_a e_a \mapsto e_0$$

als die Projektion von $\mathcal{F}^2$ auf die e_0-Komponente. Mit den Rechenregeln aus 1.3.5 für den Linksvorwärtsshift S ergibt sich damit für $x = \sum\limits_{a \in F} x_a e_a \in \mathcal{F}^2$ und $c \in F$

$$QS_c^* x \ = \ x_c \ .$$

Offensichtlich gilt $Qf = Q$ und man erhält mit 1.6.3 (g)

$$QR_c^* x \ = \ QfS_c^* fx \ = \ QS_c^* fx \ = \ (fx)_c \ = \ x_{\overline{c}}$$

für $x = \sum\limits_{a \in F} x_a e_a \in \mathcal{F}^2$ und $c \in F$.
Nun können wir zu einem Operator $B \in (R)'$ einen Multiplikator $x \in \mathcal{M}$ mit $B = M_x$ konstruieren und damit den folgenden Satz beweisen.

Satz 1.6.4.
(a) Sei $B \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$ mit $BR_i = R_i B$ für $i = 1, ..., n$. Setzt man $x_a = QR_{\overline{a}}^* Be_0 \in \mathbb{C}$ für $a \in F$ und $x = \sum\limits_{a \in F} x_a e_a \in \mathcal{F}$, so gilt $x \in \mathcal{M}$ und $B = M_x$.
(b) Der Kommutant von R ist gleich der Menge der Multiplikationsoperatoren zu Multiplikatoren von $\mathcal{F}^2$, es gilt also

$$(R)' \ = \ M \ .$$

Beweis.
(a) Sei $y = \sum\limits_{b \in F} y_b e_b \in \mathcal{F}^2$. Nach 1.6.3 (a),(e) gilt $e_b = e_0 \odot e_{\overline{\overline{b}}} = R_{\overline{b}} e_0$ und es folgt

$$y \ = \ \sum_{b \in F} y_b e_b \ = \ \sum_{b \in F} y_b R_{\overline{b}} e_0 \ .$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
(By)_c \quad &= \quad QR_{\overline{c}}^* By \\
&= \quad \sum_{b \in F} y_b QR_{\overline{c}}^* BR_{\overline{b}} e_0 \\
&\overset{B \in (R)'}{=} \quad \sum_{b \in F} y_b QR_{\overline{c}}^* R_{\overline{b}} Be_0 \\
&\overset{(*)}{=} \quad \sum_{(a,b)=c} y_b QR_{\overline{a}}^* Be_0 \\
&= \quad \sum_{(a,b)=c} x_a y_b \\
&= \quad (x \odot y)_c
\end{aligned}$$

für alle $c \in F$.

(Man beachte in $(*)$, dass

$$
\begin{aligned}
QR_{\overline{c}}^*R_{\overline{b}} &\overset{1.6.3}{=} QfS_{\overline{c}}^*f^2S_{\overline{b}}f \\
&= QS_{\overline{c}}^*S_{\overline{b}}f \qquad (\text{denn } Qf = Q \text{ und } f^2 = I_{\mathcal{F}^2}) \\
&\overset{1.3.5}{=} \begin{cases} QS_{\overline{a}}f = 0 & ; \ \text{falls ein } a \in F^* \text{ existiert mit } \overline{b} = (\overline{c}, \overline{a}) \\ QS_{\overline{a}}^*f = QR_{\overline{a}}^* & ; \ \text{falls ein } a \in F \text{ existiert mit } \overline{c} = (\overline{b}, \overline{a}) \\ 0 & ; \ \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} QR_{\overline{a}}^* & ; \ \text{falls ein } a \in F \text{ existiert mit } c = (a, b) \\ 0 & ; \ \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

für $b, c \in F$ gilt.)
Also gilt $x \odot y = By \in \mathcal{F}^2$ für alle $y \in \mathcal{F}^2$ und damit ist x ein Multiplikator und der zu x gehörige Multiplikationsoperator M_x ist gleich B.
(b) ist klar nach (a) und 1.6.1. $\square$

Kapitel 2

Minimale isometrische Dilatation und Wold-Zerlegung

2.1 Poisson-Transformation und Von-Neumann-Ungleichung

Wir definieren für ein Polynom $p = \sum_{|a| \leq m} p_a e_a \in P \subset \mathcal{M}$ $(m \in \mathbb{N},\ p_a \in \mathbb{C})$ in $\mathcal{F}$ (vergleiche 1.2.4) und ein Tupel $T = (T_1, ..., T_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ von Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ den Operator

$$p(T) \ = \ \sum_{|a| \leq m} p_a T_a \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \ .$$

In [12], Theorem 2.1 hat Popescu gezeigt, dass dann die Von-Neumann-Ungleichung

$$\|p(T)\| \ \leq \ \|p\|_\infty$$

für n-Kontraktionen T und Polynome $p \in P$ gilt.

In diesem Abschnitt zeigen wir diese Ungleichung mit Hilfe der Poisson-Transformation Φ_T zu einer n-Kontraktion T (vergleiche dazu auch [3]). Wir beginnen mit der Konstruktion der Poisson-Transformation.
Es sei $S = (S_1, ..., S_n)$ der Vorwärtsshift auf $\mathcal{F}^2$ und $C^*(S_1, ..., S_n)$ die von $S_1, ..., S_n$ und $I_{\mathcal{F}^2}$ in $\mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$ erzeugte C^*-Algebra. Zunächst geben wir eine Charakterisierung von $C^*(S_1, ..., S_n)$ an.

Lemma 2.1.1.
Die von S erzeugte, unitale C^*-Algebra $C^*(S_1, ..., S_n) \subset \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$ ist die abgeschlossene lineare Hülle der Operatoren

$$S_a S_b^* \quad (a, b \in F) \ .$$

Beweis.
Offensichtlich sind alle Operatoren der Form

$$S_a S_b^* \quad (a, b \in F)$$

in $C^*(S_1, ..., S_n)$ enthalten, also ist auch die abgeschlossene lineare Hülle

$$\mathcal{B} \;=\; \bigvee (S_a S_b^*;\; a, b \in F)$$

eine Teilmenge von $C^*(S_1, ..., S_n)$.
Da außerdem

$$S_1, ..., S_n, I_{\mathcal{F}^2} \in \mathcal{B}$$

gilt, genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{B}$ eine abgeschlossene, $*$-abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$ ist, um die umgekehrte Inklusion zu zeigen. Es ist klar, dass $\mathcal{B}$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$ ist, und wegen

$$(S_a S_b^*)^* \;=\; S_b S_a^* \in \mathcal{B} \quad (a, b \in F)$$

ist $\mathcal{B}$ auch $*$-abgeschlossen.
Die Abgeschlossenheit von $\mathcal{B}$ bezüglich der Multiplikation folgt, weil nach 1.3.5 für $b, c \in F$

$$S_b^* S_c \;=\; \begin{cases} S_f^* & ; \text{ falls ein } f \in F \text{ existiert mit } b = (c, f) \\ S_f & ; \text{ falls ein } f \in F \text{ existiert mit } c = (b, f) \\ 0 & ; \text{ sonst} \end{cases}$$

gilt, denn damit ist das Produkt zweier Erzeuger von $\mathcal{B}$

$$(S_a S_b^*)(S_c S_d^*) \quad (a, b, c, d \in F)$$

von einer der Formen

$$S_a S_{(d,f)}^* \; (f \in F),\; S_{(a,f)} S_d^* \; (f \in F),\; 0$$

und damit sicherlich wieder in $\mathcal{B}$, also ist $\mathcal{B}$ multiplikativ abgeschlossen. $\square$

Sei nun T eine n-Kontraktion auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Nach 1.4.12 ist dann rT für jedes $r \in (0, 1)$ eine $C_{\cdot 0}$-Kontraktion mit zugehörigem Poisson-Kern

$$K_{rT} : \mathcal{H} \to \mathcal{F}^2 \otimes \mathcal{H} \;;\; h \mapsto \sum_{a \in F} (e_a \otimes r^{|a|} \Delta_{rT} T_a^* h)$$

und

$$\Psi_{rT} : \mathcal{L}(\mathcal{F}^2) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}) \;;\; B \mapsto K_{rT}^* (B \otimes I_{\mathcal{H}}) K_{rT} \;.$$

Mit dem nächsten Satz zeigen wir, dass $\Psi_{rT}(B)$ für $r \uparrow 1$ in der Normtopologie auf $\mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$ konvergiert, falls $B \in C^*(S_1, ..., S_n)$ ist, und erhalten dadurch die zu T gehörige Poisson-Transformation Φ_T.

Satz 2.1.2.
Für jedes $B \in C^*(S_1, ..., S_n)$ existiert der Grenzwert

$$\Phi_T(B) \;=\; \lim_{r \uparrow 1} \Psi_{rT}(B) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

bezüglich der Operatornorm auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.
Die Abbildung

$$\Phi = \Phi_T : C^*(S_1, ..., S_n) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}) \ ; \ B \mapsto \Phi_T(B)$$

ist ein unitaler, vollständig positiver und vollständig kontraktiver Operator, der die Bedingung

$$\Phi_T(S_a S_b^*) \ = \ T_a T_b^*$$

für alle $a, b \in F$ *erfüllt.*
Man nennt Φ_T *die zu* T *gehörige Poisson-Transformation.*

Beweis.
Zunächst gilt nach 1.4.10 für alle $a, b \in F$ und $0 < r < 1$

$$\Psi_{rT}(S_a S_b^*) \ = \ (rT)_a (rT)_b^* \ = \ r^{|a|+|b|} T_a T_b^* \ \xrightarrow{r \uparrow 1} \ T_a T_b^* \quad (\text{bezüglich } \|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}) \ .$$

Damit ist $\Phi_T(S_a S_b^*)$ wohldefiniert und gleich $T_a T_b^*$.
Da Ψ_{rT} linear ist $(0 < r < 1)$, existiert $\lim\limits_{r \uparrow 1} \Psi_{rT}(B) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ bezüglich der Operatornorm auch für alle $B \in LH(S_a S_b^*;\ a, b \in F)$.
Da $\{\Psi_{rT};\ 0 < r < 1\}$ beschränkt in der Operatornorm ist (denn $\|\Psi_{rT}\| \leq 1$ nach 1.4.10) und $LH(S_a S_b^*;\ a, b \in F)$ nach 2.1.1 dicht in $C^*(S_1, ..., S_n)$ liegt, existiert $\lim\limits_{r \uparrow 1} \Psi_{rT}(B)$ für alle $B \in C^*(S_1, ..., S_n)$.
Also ist Φ_T wohldefiniert und offensichtlich linear. Nach 1.4.10 ist Ψ_{rT} für $0 < r < 1$ unital, vollständig positiv und vollständig kontraktiv. Man sieht leicht, dass sich diese Eigenschaften auf Φ_T übertragen. □

Für $a \in F$ erhält man aus $\Phi_T(S_a) = T_a$ (vergleiche 2.1.2) mit der Linearität von Φ_T

$$\begin{aligned} p(T) \ &= \ \sum_{|a| \leq m} p_a T_a \\ &= \ \Phi_T\Big(\sum_{|a| \leq m} p_a S_a\Big) \\ &= \ \Phi_T(M_p) \end{aligned}$$

für beliebige Polynome $p = \sum\limits_{|a| \leq m} p_a e_a \in P$.
(Man beachte, dass $S_a = M_{e_a}$ $(a \in F)$ und damit

$$\sum_{|a| \leq m} p_a S_a = \sum_{|a| \leq m} p_a M_{e_a} = M_{(\sum_{|a| \leq m} p_a e_a)} = M_p$$

gilt.)
Nun folgt aus der Kontraktivität der Poisson-Transformation

$$\|p(T)\| \ = \ \|\Phi_T(M_p)\| \ \leq \ \|M_p\| \ \stackrel{1.2.5}{=} \ \|p\|_\infty \ ,$$

die Von-Neumann-Ungleichung ist also gezeigt.

Korollar 2.1.3. *(Von-Neumann-Ungleichung)*
Für ein Polynom $p \in P$ *und eine* n*-Kontraktion* $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ *auf einem Hilbertraum* $\mathcal{H}$ *gilt*

$$\|p(T)\| \ \leq \ \|p\|_\infty \ .$$

2.2 Minimale isometrische Dilatation

Gegeben seien $n \in \mathbb{N}$, ein Hilbertraum $\mathcal{H}$, sowie eine n-Kontraktion $T = (T_1, ..., T_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ auf $\mathcal{H}$, das heißt es gilt

$$\sum_{i=1}^{n} T_i T_i^* \;\leq\; I_{\mathcal{H}} \; .$$

Wir definieren zunächst den Begriff einer minimalen isometrischen Dilatation für T.

Definition 2.2.1.
Sei T eine n-Kontraktion auf $\mathcal{H}$.
Für einen Hilbertraum $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ und Isometrien $V_1, ..., V_n \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ heißt das Tupel

$$V \;=\; (V_1, ..., V_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{K})^n$$

minimale isometrische Dilatation für T, falls

- $\sum\limits_{i=1}^{n} V_i V_i^* \;\leq\; I_{\mathcal{K}}$
- $V_i^* \mathcal{H} \subset \mathcal{H}$ und $V_i^*|_{\mathcal{H}} = T_i^* \quad (i = 1, ..., n)$
- $\mathcal{K} = \bigvee\limits_{a \in F} V_a \mathcal{H}$

gilt.

Bemerkung 2.2.2.
(a) Die erste Bedingung in 2.2.1 ist äquivalent dazu, dass

$$(V_i \mathcal{K}) \perp (V_j \mathcal{K}) \quad (i, j = 1, ..., n, \; i \neq j)$$

gilt (vergleiche dazu 1.3.2), und damit äquivalent dazu, dass $V_j^* V_i = \delta_{i,j} I_{\mathcal{K}}$ für $i, j \in \{1, ..., n\}$ gilt.
(b) Eine minimale isometrische Dilatation für T erfüllt

$$P_{\mathcal{H}} V_a|_{\mathcal{H}} \;=\; T_a \quad (a \in F)$$

und damit

$$P_{\mathcal{H}} p(V)|_{\mathcal{H}} \;=\; p(T) \quad (p \in P) \; ,$$

wobei $P_{\mathcal{H}} : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ die Projektion von $\mathcal{K}$ auf $\mathcal{H}$ ist.

Beweis.
Für alle $h, \tilde{h} \in \mathcal{H}$ gilt

$$\langle P_{\mathcal{H}} V_a h, \tilde{h} \rangle \;=\; \langle h, V_a^* P_{\mathcal{H}}^* \tilde{h} \rangle \;=\; \langle h, T_a^* \tilde{h} \rangle \;=\; \langle T_a h, \tilde{h} \rangle \; .$$

(Man beachte dabei, dass $P_{\mathcal{H}}^* : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ die Inklusionsabbildung ist und dass $V_a^* \tilde{h} = T_a^* \tilde{h}$ gilt.) □

In [11] (Theorem 2.1) hat Popescu gezeigt, dass jede n-Kontraktion T eine (bis auf Isomorphie eindeutige) minimale isometrische Dilatation besitzt. Ein Ziel dieses Kapitels ist es, diese minimale isometrische Dilatation durch Konstruktion der minimalen Stinespring-Dilatation für die Poisson Transformation

$$\Psi_T : C^*(S_1, ..., S_n) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}) \quad \text{(vergleiche 2.1.2)}$$

zu erhalten.
Wir brauchen zunächst einen Dilatationssatz für vollständig positive Abbildungen, der in [15] (Theorem 4.1 und anschließende Bemerkung) gezeigt wird.

Satz 2.2.3. *(Minimale Stinespring-Dilatation)*
Seien $\mathcal{B}$ eine unitale C^*-Algebra, H ein Hilbertraum und

$$\phi : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(H)$$

ein vollständig positiver Operator.
Dann existiert ein Hilbertraum K, ein unitaler $*$-Homomorphismus

$$\pi : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(K)$$

und eine stetig lineare Abbildung

$$V : H \to K \ ,$$

so dass

- $\|\phi(1_{\mathcal{B}})\| \ = \ \|V\|^2$
- $\phi(\beta) \ = \ V^*\pi(\beta)V$ *für alle* $\beta \in \mathcal{B}$
- $K \ = \ \bigvee \ (\ \pi(\beta)VH; \ \beta \in \mathcal{B} \ )$

gilt.

Geht man in 2.2.3 zusätzlich davon aus, dass ϕ unital ist, so ist die Abbildung V eine Isometrie. Identifiziert man H in diesem Fall mit VH vermöge V, so wird $\phi(\beta)$ zur Kompression von $\pi(\beta)$ auf $H \subset K$ für alle $\beta \in \mathcal{B}$.

Korollar 2.2.4.
Seien $\mathcal{B}$ eine unitale C^*-Algebra, H ein Hilbertraum und

$$\phi : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(H)$$

ein vollständig positiver, unitaler Operator.
Dann existiert ein Hilbertraum $K \supset H$ und ein unitaler $*$-Homomorphismus

$$\pi : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(K) \ ,$$

so dass

$$\phi(\beta) \ = \ P_H \pi(\beta)|_H$$

für alle $\beta \in \mathcal{B}$ und

$$K \ = \ \bigvee \ (\ \pi(\beta)H; \ \beta \in \mathcal{B} \ )$$

gilt. (Dabei sei $P_H : K \to H$ die Projektion von K auf H.)

Beweis.
Zunächst wähle man K, $\pi : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(K)$ und $V : H \to K$ wie in 2.2.3.
Weil ϕ und π unital sind, gilt

$$V^*V \;=\; V^*I_KV \;=\; V^*\pi(1_{\mathcal{B}})V \;=\; \phi(1_{\mathcal{B}}) \;=\; I_H \ ,$$

also ist V eine Isometrie.
Damit ist VH ein Hilbertraum und H und VH sind isometrisch isomorph. Also kann man H mit VH identifizieren und so als Unterraum von K auffassen. Bei dieser Identifizierung entspricht V der Einbettung

$$j : H \to K \ ; \ h \mapsto h$$

und V^* der Projektion P_H von K auf H.
Setzt man dies in die Bedingungen aus 2.2.3 ein, so folgt die Behauptung. □

Man kann also jeden vollständig positiven, unitalen Operator als Kompression eines unitalen $*$-Homomorphismus darstellen.
Die Poisson-Transformation

$$\Phi_T : C^*(S_1, ..., S_n) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

ist ein solcher vollständig positiver, unitaler Operator auf $C^*(S_1, ..., S_n)$ (vergleiche 2.1.2). Wendet man 2.2.4 auf Φ_T an, so erhält man den folgenden Satz.

Satz 2.2.5.
Seien $T = (T_1, ..., T_n)$ eine n-Kontraktion auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und Φ_T die zu T gehörige Poisson-Transformation.
Dann existiert ein Hilbertraum $\mathcal{K} = \mathcal{K}_T \supset \mathcal{H}$ und ein unitaler $*$-Homomorphismus

$$\pi = \pi_T : C^*(S_1, ..., S_n) \to \mathcal{L}(\mathcal{K}_T) \ ,$$

so dass

$$\Phi_T(B) \;=\; P_{\mathcal{H}}\pi_T(B)|_{\mathcal{H}} \quad (B \in C^*(S_1, ..., S_n))$$

und

$$\mathcal{K}_T \;=\; \bigvee \ (\ \pi_T(B)\mathcal{H}; \ B \in C^*(S_1, ..., S_n)\ )$$

gilt.
Weiter gilt

$$T_aT_b^* \;=\; P_{\mathcal{H}}\pi_T(S_aS_b^*)|_{\mathcal{H}}$$

für alle $a, b \in F$.

Beweis.
Es ist nur noch die letzte Gleichung zu zeigen.
Diese gilt wegen

$$T_aT_b^* \;=\; \Phi_T(S_aS_b^*) \;=\; P_{\mathcal{H}}\pi_T(S_aS_b^*)|_{\mathcal{H}} \ .$$

□

Sei nun eine n-Kontraktion T auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ gegeben.
Wir fixieren einen Hilbertraum

$$\mathcal{K} \;=\; \mathcal{K}_T \;\supset\; \mathcal{H}$$

und einen unitalen $*$-Homomorphismus

$$\pi = \pi_T : C^*(S_1, ..., S_n) \to \mathcal{L}(\mathcal{K})$$

wie in 2.2.5.
Mit dem nächsten Satz zeigen wir, dass man eine minimale isometrische Dilatation von T erhält, indem man den Vorwärtsshift S in π einsetzt.

Satz 2.2.6. *(Minimale isometrische Dilatation)*
Seien $T = (T_1, ..., T_n)$ eine n-Kontraktion auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$, π wie oben. Setze

$$V_i \;=\; \pi(S_i) \in \mathcal{L}(\mathcal{K}) \quad (i = 1, ..., n)\ .$$

Dann ist

$$V = (V_1, ..., V_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{K})^n$$

eine minimale isometrische Dilatation von T.

Beweis.
Wegen

$$S_j^* S_i \;=\; \delta_{i,j} I_{\mathcal{F}^2} \quad \text{(vergleiche 1.3.4 (c))}$$

ist

$$V_j^* V_i \;=\; \pi(S_j)^* \pi(S_i) \;=\; \pi(S_j^* S_i) \;=\; \delta_{i,j} \pi(I_{\mathcal{F}^2}) \;=\; \delta_{i,j} I_{\mathcal{K}}$$

für $i, j \in \{1, ..., n\}$. Also sind $V_1, ..., V_n$ Isometrien und nach 2.2.2 gilt

$$\sum_{i=1}^{n} V_i V_i^* \;\leq\; I_{\mathcal{K}}\ .$$

Nun wollen wir zeigen, dass

$$V_i^* \mathcal{H} \subset \mathcal{H} \text{ und } V_i^*|_{\mathcal{H}} = T_i^* \quad (i = 1, ..., n)$$

gilt. Sei dazu

$$P_{\mathcal{H}} : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$$

die Projektion von $\mathcal{K}$ auf $\mathcal{H}$ und

$$j : \mathcal{H} \to \mathcal{K}\ ;\ h \mapsto h$$

die Inklusion von $\mathcal{H}$ in $\mathcal{K}$.
Dann sind $P_{\mathcal{H}}$ und j zueinander adjungiert, das heißt es gilt

$$P_{\mathcal{H}}^* = j \text{ und } j^* = P_{\mathcal{H}}\ .$$

Außerdem ist

$$P_{\mathcal{H}} j \;=\; I_{\mathcal{H}}\ .$$

Nach 2.2.5 gilt

$$T_a T_b^* \;=\; P_{\mathcal{H}} \pi(S_a S_b^*)|_{\mathcal{H}} \;=\; P_{\mathcal{H}} \pi(S_a S_b^*) j$$

für alle $a, b \in F$.
(Damit gilt insbesondere

$$\begin{aligned} T_a &= P_{\mathcal{H}} \pi(S_a) j \;, \\ T_b^* &= P_{\mathcal{H}} \pi(S_b^*) j \;.) \end{aligned}$$

Es folgt

$$P_{\mathcal{H}} \pi(S_a) j P_{\mathcal{H}} \pi(S_b^*) j \;=\; T_a T_b^* \;=\; P_{\mathcal{H}} \pi(S_a S_b^*) j \quad (a, b \in F) \;.$$

Man sieht nun weiter, dass

$$\begin{aligned} & (\; j P_{\mathcal{H}} \pi(S_a^*) j \;-\; \pi(S_a^*) j \;)^* \;(\; j P_{\mathcal{H}} \pi(S_a^*) j \;-\; \pi(S_a^*) j \;) \\ = \;& (\; P_{\mathcal{H}} \pi(S_a) j P_{\mathcal{H}} \;-\; P_{\mathcal{H}} \pi(S_a) \;) \;(\; j P_{\mathcal{H}} \pi(S_a^*) j \;-\; \pi(S_a^*) j \;) \\ = \;& P_{\mathcal{H}} \pi(S_a) j P_{\mathcal{H}} j P_{\mathcal{H}} \pi(S_a^*) j \;-\; P_{\mathcal{H}} \pi(S_a) j P_{\mathcal{H}} \pi(S_a^*) j \\ & - P_{\mathcal{H}} \pi(S_a) j P_{\mathcal{H}} \pi(S_a^*) j \;+\; P_{\mathcal{H}} \pi(S_a) \pi(S_a^*) j \\ = \;& 0 \end{aligned}$$

und damit

$$j P_{\mathcal{H}} \pi(S_a^*) j \;-\; \pi(S_a^*) j \;=\; 0$$

für alle $a \in F$ gilt.
Es folgt

$$V_a^* j \;=\; \pi(S_a^*) j \;=\; j P_{\mathcal{H}} \pi(S_a^*) j \;=\; j T_a^* \quad (a \in F) \;,$$

und damit

$$V_a^* \mathcal{H} \subset \mathcal{H} \text{ und } V_a^*|_{\mathcal{H}} = T_a^* \quad (a \in F) \;.$$

Insbesondere kann man für a die Elemente aus F mit Betrag 1 einsetzen und erhält das Gewünschte.
Nun ist noch die Minimalitätsbedingung

$$\mathcal{K} \;=\; \bigvee_{a \in F} V_a \mathcal{H}$$

zu zeigen. Aus 2.2.5 wissen wir, dass

$$\mathcal{K} \;=\; \bigvee \;(\; \pi(B)\mathcal{H}; \; B \in C^*(S_1, ..., S_n) \;)$$

gilt. Kann man nun zeigen, dass

$$\pi(B) h \in \mathcal{K}^0 \;=\; \bigvee_{a \in F} V_a \mathcal{H}$$

für alle $B \in C^*(S_1, ..., S_n)$ und $h \in \mathcal{H}$ gilt, so folgt die Behauptung

$$\mathcal{K} \;= \mathcal{K}^0 \;,$$

weil $\mathcal{K}^0$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{K}$ ist.
Seien dazu also $B \in C^*(S_1, ..., S_n)$ und $h \in \mathcal{H}$. Wir betrachten zunächst den Fall, dass B eine Linearkombination von Operatoren der Form

$$S_a S_b^* \quad (a, b \in F)$$

ist, es gebe also $m \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{C}$, $a_1, ..., a_m$, $b_1, ..., b_m \in F$ derart, dass

$$B = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j S_{a_j} S_{b_j}^*$$

ist. Damit folgt

$$\begin{aligned} \pi(B)h &= \pi(\sum_{j=0}^{m} \lambda_j S_{a_j} S_{b_j}^*) \ h \\ &= \sum_{j=0}^{m} \lambda_j \pi(S_{a_j}) \pi(S_{b_j}^*) h \\ &= \sum_{j=0}^{m} \lambda_j V_{a_j} V_{b_j}^* h \ . \end{aligned}$$

Weil $\mathcal{H}$ invariant unter allen $V_{b_j}^*$ ist, gilt

$$h_j = V_{b_j}^* h \in \mathcal{H}$$

für alle $j \in \{1, ..., m\}$. Daher ist dann $\pi(B)h$ eine Linearkombination der Elemente $V_{a_j} h_j$, wobei $a_j \in F$ und $h_j \in \mathcal{H}$ $(j = 1, ..., m)$ sind, und damit ist

$$\pi(B)h \in \mathcal{K}^0 \ .$$

Sei nun $B \in C^*(S_1, ..., S_n)$ beliebig.
Nach 2.1.1 ist B der Grenzwert einer Folge $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Linearkombinationen der $S_a S_b^*$ $(a, b \in F)$ in der Normtopologie auf $\mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$.
Für die Operatoren B_k wurde oben bereits gezeigt, dass

$$\pi(B_k)h \in \mathcal{K}^0$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.
Weil $\pi : C^*(S_1, ..., S_n) \to \mathcal{L}(\mathcal{K})$ stetig ist, folgt aus

$$B_k \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} B \text{ bezüglich } \|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}^2)} \ ,$$

dass

$$\pi(B_k) \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} \pi(B) \text{ bezüglich } \|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathcal{K})}$$

und damit insbesondere

$$\pi(B_k)h \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} \pi(B)h \text{ bezüglich } \|\cdot\|_{\mathcal{K}}$$

gilt. Da alle $\pi(B_k)h \in \mathcal{K}^0$ $(k \in \mathbb{N})$ und da $\mathcal{K}^0$ abgeschlossen ist, folgt

$$\pi(B)h \in \mathcal{K}^0 \ ,$$

was zu zeigen war. □

Wir haben nun gesehen, dass jede n-Kontraktion $T = (T_1, ..., T_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ eine minimale isometrische Dilatation $V = (V_1, ..., V_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{K})^n$ auf einem größeren

Hilbertraum $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ besitzt. Die V_i $(i = 1, ...n)$ sind dabei Isometrien mit paarweise orthogonalen Bildern. Durch die Minimalitätsbedingung $\mathcal{K} = \bigvee_{a \in F} V_a \mathcal{H}$ wird garantiert, dass der Raum $\mathcal{K}$ nicht 'zu groß' gewählt wird.
Wegen dieser Minimalität des Raumes $\mathcal{K}$ können wir mit dem folgenden Satz zeigen, dass die minimale isometrische Dilatation von T eindeutig bis auf unitäre Äquivalenz ist. Die der Äquivalenz zugrundeliegende unitäre Abbildung ist dabei konstant auf $\mathcal{H}$.

Satz 2.2.7.
Sei $T = (T_1, ..., T_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ eine n-Kontraktion auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und seien $V = (V_1, ..., V_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{K})^n$, $\tilde{V} = (\tilde{V_1}, ..., \tilde{V_n}) \in \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{K}})^n$ minimale isometrische Dilatationen von T auf Hilberträumen $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ und $\tilde{\mathcal{K}} \supset \mathcal{H}$.
Dann gibt es einen unitären Operator $\theta : \mathcal{K} \to \tilde{\mathcal{K}}$ mit $\theta h = h$ für alle $h \in \mathcal{H}$, so dass

$$\theta V_i \;=\; \tilde{V_i} \theta$$

für alle $i \in \{1, ..., n\}$ gilt.

Beweis.
Seien $h, \tilde{h} \in \mathcal{H}$. Für alle $c \in F$ gilt dann $V_c^* \mathcal{H} \subset \mathcal{H}$ und $V_c^*|_{\mathcal{H}} = T_c^*$. Damit folgt

$$\langle V_c h, \tilde{h} \rangle \;=\; \langle h, V_c^* \tilde{h} \rangle \;=\; \langle h, T_c^* \tilde{h} \rangle \;=\; \langle T_c h, \tilde{h} \rangle$$

und analog

$$\langle h, V_c \tilde{h} \rangle \;=\; \langle h, T_c \tilde{h} \rangle \quad (c \in F) \;.$$

Da $V_1, ..., V_n$ Isometrien mit paarweise orthogonalen Bildern sind, erhält man für alle $a, b \in F$

$$\langle V_a h, V_b \tilde{h} \rangle \;=\; \begin{cases} \langle V_c h, \tilde{h} \rangle = \langle T_c h, \tilde{h} \rangle & ; \;\text{falls ein } c \in F \text{ existiert mit } a = (b, c) \\ \langle h, V_c \tilde{h} \rangle = \langle h, T_c \tilde{h} \rangle & ; \;\text{falls ein } c \in F \text{ existiert mit } b = (a, c) \\ 0 & ; \;\text{sonst.} \end{cases}$$

Man sieht also, dass $\langle V_a h, V_b \tilde{h} \rangle$ unabhängig von V ist und damit erhält man

$$\langle V_a h, V_b \tilde{h} \rangle \;=\; \langle \tilde{V_a} h, \tilde{V_b} \tilde{h} \rangle \quad (a, b \in F) \;. \tag{2.1}$$

Wir definieren nun die Untervektorräume $L \subset \mathcal{K}$ und $\tilde{L} \subset \tilde{\mathcal{K}}$ durch

$$L \;=\; \{\sum_{i=1}^{k} V_{a_i} h_i ;\; k \in \mathbb{N},\; a_1, ..., a_k \in F,\; h_1, ..., h_k \in \mathcal{H}\}$$

und

$$\tilde{L} \;=\; \{\sum_{i=1}^{k} \tilde{V_{a_i}} h_i ;\; k \in \mathbb{N},\; a_1, ..., a_k \in F,\; h_1, ..., h_k \in \mathcal{H}\}$$

und betrachten die Abbildung

$$\theta_0 : L \to \tilde{L} \;;\; \sum_{i=1}^{k} V_{a_i} h_i \mapsto \sum_{i=1}^{k} \tilde{V_{a_i}} h_i \;.$$

Mit 2.1 rechnet man leicht nach, dass θ_0 eine wohldefinierte Isometrie ist. Offensichtlich ist θ_0 auch surjektiv, also eine unitäre Abbildung zwischen L und

$\tilde{L}$. Da V und $\tilde{V}$ minimale isometrische Dilatationen von T sind, liegt L, beziehungsweise $\tilde{L}$, dicht in $\mathcal{K}$, beziehungsweise $\tilde{\mathcal{K}}$. Daher kann θ_0 zu einer unitären Abbildung $\theta : \mathcal{K} \to \tilde{\mathcal{K}}$ fortgesetzt werden. Man erhält

$$\theta V_i k \;=\; \tilde{V}_i \theta k \quad (i = 1, ..., n)$$

zunächst durch eine einfache Rechnung für $k \in L$ und dann aus Stetigkeitsgründen für $k \in \mathcal{K}$. Offensichtlich ist $\theta h = h$ für alle $h \in \mathcal{H}$.
Also hat θ alle geforderten Eigenschaften und somit ist die Behauptung gezeigt. □

Wir betrachten nun den Fall, dass $T_1, ..., T_n \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ bereits Isometrien auf $\mathcal{H}$ mit paarweise orthogonalen Bildern sind. Dann ist T insbesondere eine n-Kontraktion und eine minimale isometrische Dilatation von sich selbst. Nach 2.2.7 folgt dann, dass jede minimale isometrische Dilatation von T mit T übereinstimmt.

Korollar 2.2.8.
Sei $T = (T_1, ..., T_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ ein Tupel von Isometrien auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit paarweise orthogonalen Bildern. Dann ist T insbesondere eine n-Kontraktion auf $\mathcal{H}$ und für eine minimale isometrische Dilatation $V = (V_1, ..., V_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{K})^n$ von T auf einem Hilbertraum $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ gilt

$$\mathcal{K} = \mathcal{H} \textit{ und } V_i = T_i \textit{ für } i \in \{1, ..., n\} \; .$$

Bemerkung 2.2.9.
Sei nun $V = (V_1, ..., V_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ ein Tupel von Isometrien auf $\mathcal{K}$ mit paarweise orthogonalen Bildern. Damit ist V insbesondere eine n-Kontraktion und man erhält die Poisson-Transformation

$$\Phi_V : C^*(S_1, ..., S_n) \to \mathcal{L}(\mathcal{K})$$

wie in 2.1.2 und gemäß 2.2.5 einen Hilbertraum $\tilde{\mathcal{K}} \supset \mathcal{K}$ und einen unitalen $*$-Homomorphismus

$$\pi_V : C^*(S_1, ..., S_n) \to \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{K}}) \; ,$$

der die Bedingung

$$P_{\mathcal{K}} \pi_V(B)|_{\mathcal{K}} \;=\; \Phi_V(B) \quad (B \in C^*(S_1, ..., S_n))$$

erfüllt. Nach 2.2.6 ist

$$\pi_V(S) \;=\; (\pi_V(S_1), ..., \pi_V(S_n)) \in \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{K}})^n$$

eine minimale isometrische Dilatation von V auf $\tilde{\mathcal{K}}$. Nach 2.2.8 folgt jetzt aber, dass $\tilde{\mathcal{K}} = \mathcal{K}$ und damit $\pi_V = \Phi_V$ gilt. Also ist die Poisson-Transformation in diesem Fall ein $*$-Homomorphismus.

2.3 Wold-Zerlegung

Man betrachte ein Tupel $V = (V_1, ..., V_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{K})^n$ von Isometrien mit paarweise orthogonalen Bildern auf einem Hilbertraum $\mathcal{K}$, das heißt es gilt

$$V_i^* V_j \ = \ \delta_{i,j} I_{\mathcal{K}}$$

für alle $i, j \in \{1, ..., n\}$. In diesem Abschnitt soll eine Zerlegung von $\mathcal{K}$ in eine orthogonale Summe

$$\mathcal{K} \ = \ \mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_1$$

konstruiert werden, so dass

$$V|_{\mathcal{K}_0} \ = \ (V_1|_{\mathcal{K}_0}, ..., V_n|_{\mathcal{K}_0})$$

ein n-Shift auf $\mathcal{K}_0$ ist und

$$(\ I_{\mathcal{K}} - \sum_{j=1}^{n} V_j V_j^* \ )|_{\mathcal{K}_1} \ = \ 0$$

gilt. Dabei sollen $\mathcal{K}_0$ und $\mathcal{K}_1$ abgeschlossene Unterräume von $\mathcal{K}$ sein, die reduzierend für V sind, das heißt

$$V_j \mathcal{K}_s \subset K_s \text{ und } V_j^* \mathcal{K}_s \subset \mathcal{K}_s \quad (j = 1, ..., n; \ s = 0, 1)$$

soll gelten. Dieses Resultat, das Popescu mit einer anderen Methode in [11] (Theorem 1.3) gezeigt hat, soll hier mit Hilfe der Poisson-Transformation $\pi_V = \Phi_V$ (vergleiche 2.2.9) bewiesen werden. Wir werden sehen, dass man $\mathcal{K}_0$ und $\mathcal{K}_1$ durch

$$\mathcal{K}_0 \ = \ \bigvee (\ \pi_V(C)\mathcal{K}; \ C \text{ kompakter Operator auf } \mathcal{F}^2 \ )$$

und

$$\mathcal{K}_1 \ = \ \bigcap (\ \ker(\pi_V(C)); \ C \text{ kompakter Operator auf } \mathcal{F}^2 \ )$$

definieren kann. Zunächst ist zu zeigen, dass man jeden kompakten Operator $C \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$ in π_V einsetzen kann, das heißt es muss $C \in C^*(S_1, ..., S_n)$ gelten. Es bezeichne

$$\mathcal{C}(\mathcal{F}^2) \ = \ \{ \ C \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2); \ C \text{ kompakt } \}$$

die Menge der kompakten Operatoren auf $\mathcal{F}^2$.

Lemma 2.3.1.
Die kompakten Operatoren auf $\mathcal{F}^2$ sind in der von $S = (S_1, ..., S_n)$ erzeugten, unitalen C^*-Algebra enthalten, es gilt also

$$\mathcal{C}(\mathcal{F}^2) \ \subset \ C^*(S_1, ..., S_n) \ .$$

Beweis.
Wir wollen zunächst zeigen, dass die Operatoren in $\mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$ mit eindimensionalem Bild in $C^*(S_1, ..., S_n)$ enthalten sind. Sei also $B \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$ mit

$$\dim(B\mathcal{F}^2) \ = \ 1 \ .$$

Wir wählen ein Element $x \in \mathcal{F}^2$ mit $\|x\|_2 = 1$, so dass das Bild von B von x erzeugt wird, also

$$B\mathcal{F}^2 \ = \ \langle x \rangle \ = \ \{\lambda \cdot x; \ \lambda \in \mathbb{C}\} \ .$$

Weiterhin definiere man

$$y \;=\; B^* x \in \mathcal{F}^2$$

und schreibe

$$x = \sum_{a \in F} x_a e_a \text{ und } y = \sum_{a \in F} y_a e_a \quad (x_a, y_a \in \mathbb{C} \text{ für } a \in F)\ .$$

Wie bisher bezeichne

$$P_0 : \mathcal{F}^2 \to \mathcal{F}^2\ ;\ \sum_{a \in F} z_a e_a \mapsto z_0 e_0$$

die Orthogonalprojektion auf $\langle\ e_0\ \rangle$ in $\mathcal{F}^2$ und für $k \in \mathbb{N}$ sei $B_k \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$ definiert durch

$$B_k = \sum_{|a|,|b| \le k} x_b \overline{y_a} S_b P_0 S_a^*\ .$$

Wegen

$$P_0 \;=\; I_{\mathcal{F}^2} - \sum_{i=1}^{n} S_i S_i^* \quad \text{(vergleiche 1.3.4)}$$

ist $P_0 \in C^*(S_1, ..., S_n)$ und damit ist auch

$$B_k \in C^*(S_1, ..., S_n) \quad (k \in \mathbb{N})\ .$$

Da $C^*(S_1, ..., S_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$ abgeschlossen bezüglich der Operatornorm ist, genügt es zu zeigen, dass

$$\lim_{k \to \infty} B_k \;=\; B \quad \text{(bezüglich der Normtopologie auf } \mathcal{F}^2\text{)}$$

gilt, um zu schließen, dass auch $B \in C^*(S_1, ..., S_n)$ ist.
Wir definieren für $u, v \in \mathcal{F}^2$ die lineare Abbildung

$$\beta_{u,v} : \mathcal{F}^2 \to \mathcal{F}^2\ ;\ z \mapsto \langle z, v \rangle \cdot u\ .$$

Offensichtlich ist $\beta_{u,v} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$ mit $\|\beta_{u,v}\| \le \|u\|_2 \cdot \|v\|_2$ $(u, v \in \mathcal{F}^2)$ und damit ist die sesquilineare Abbildung

$$\beta : \mathcal{F}^2 \times \mathcal{F}^2 \to \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)\ ;\ (u, v) \mapsto \beta_{u,v}$$

stetig.
Wir betrachten nun ein beliebiges $z = \sum_{a \in F} z_a e_a \in \mathcal{F}^2$. Weil das Bild von B von x erzeugt wird, existiert ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit

$$Bz \;=\; \lambda \cdot x\ .$$

Wegen $\|x\|_2 = 1$ folgt

$$\lambda \;=\; \lambda \cdot \|x\|_2^2 \;=\; \langle\ \lambda x\ ,\ x\ \rangle \;=\; \langle\ Bz\ ,\ x\ \rangle\ .$$

Also gilt

$$\begin{aligned} Bz &= \langle\ Bz\ ,\ x\ \rangle \cdot x \\ &= \langle\ z\ ,\ B^* x\ \rangle \cdot x \\ &= \langle\ z\ ,\ y\ \rangle \cdot x \\ &= \beta_{x,y}\ z \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
B_k z &= \sum_{|a|,|b|\leq k} x_b \overline{y_a} S_b P_0 S_a^* z \\
&= \sum_{|a|,|b|\leq k} x_b \overline{y_a} z_a e_b \\
&= \Big(\sum_{|a|\leq k} z_a \overline{y_a} \Big) \cdot \Big(\sum_{|b|\leq k} x_b e_b \Big) \\
&= \langle\, z \,,\, y_k \,\rangle \cdot x_k \\
&= \beta_{x_k, y_k}\, z
\end{aligned}$$

mit $x_k = \sum\limits_{|a|\leq k} x_a e_a,\ y_k = \sum\limits_{|a|\leq k} y_a e_a\ (k \in \mathbb{N})$.
(Man beachte dabei, dass

$$S_b P_0 S_a^* \Big(\sum_{c\in F} z_c e_c \Big) \overset{1.3.4}{=} S_b P_0 \Big(\sum_{c\in F} z_{(c,a)} e_c \Big) \;=\; S_b(z_a e_0) \;=\; z_a e_b$$

für alle $a, b \in F$ gilt.)
Man sieht also, dass $B = \beta_{x,y}$ und $B_k = \beta_{x_k,y_k}$ $(k \in \mathbb{N})$ gilt und wegen $x_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$ und $y_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} y$ in $\mathcal{F}^2$ folgt mit der Stetigkeit von β

$$B_k \;=\; \beta_{x_k,y_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \beta_{x,y} \;=\; B\ ,$$

was zu zeigen war.
Jeder Operator $B \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$ mit endlichdimensionalem Bild ist endliche Summe von Operatoren mit eindimensionalem Bild. Diese sind, wie bereits gezeigt, in $C^*(S_1, ..., S_n)$ enthalten und weil $C^*(S_1, ..., S_n)$ additiv abgeschlossen ist, gilt $B \in C^*(S_1, ..., S_n)$, falls $\dim(B\mathcal{F}^2) < \infty$.
Die Operatoren in $\mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$ mit endlichdimensionalem Bild liegen dicht in den kompakten Operatoren $\mathcal{C}(\mathcal{F}^2)$ ($\mathcal{F}^2$ Hilbertraum).
Da $C^*(S_1, ..., S_n)$ abgeschlossen ist und die Operatoren mit endlichdimensionalem Bild enthält, folgt

$$\mathcal{C}(\mathcal{F}^2) \;\subset\; C^*(S_1, ..., S_n)\ ,$$

was zu zeigen war. □

Sei nun $\mathcal{K}$ ein Hilbertraum und $V_1, ..., V_n \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ Isometrien auf $\mathcal{K}$ mit

$$\sum_{j=1}^{n} V_j V_j^* \;\leq\; I_{\mathcal{K}}\ .$$

Weiterhin sei

$$\pi = \pi_V (= \Phi_V) : C^*(S_1, ..., S_n) \to \mathcal{L}(\mathcal{K})$$

die Poisson-Transformation zu V, das heißt es gilt

$$\pi(S_a S_b^*) \;=\; V_a V_b^*$$

für alle $a, b \in F$. Nach 2.2.9 ist π_V ein $*$-Homomorphismus.
Wir definieren

$$\mathcal{K}_0 \;=\; \bigvee \big(\, \pi(C)\mathcal{K};\ C \in \mathcal{C}(\mathcal{F}^2)\, \big) \;\subset\; \mathcal{K}\ .$$

Dann ist $\mathcal{K}_0$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{K}$.
Wir zeigen nun, dass $\mathcal{K}_0$ π-invariant ist, das heißt es gilt

$$\pi(B)\mathcal{K}_0 \;\subset\; \mathcal{K}_0$$

für alle $B \in C^*(S_1, ..., S_n)$.

Lemma 2.3.2.
Für alle $B \in C^*(S_1, ..., S_n)$ und $k_0 \in \mathcal{K}_0$ ist $\pi(B)k_0 \in \mathcal{K}_0$, das heißt $\mathcal{K}_0$ ist invariant unter allen Operatoren

$$\pi(B) \in \mathcal{L}(\mathcal{K}) \quad (B \in C^*(S_1, ..., S_n)) \ .$$

Beweis.
Sei $B \in C^*(S_1, ..., S_n)$.
Dann gilt für alle $C \in \mathcal{C}(\mathcal{F}^2)$, dass auch $BC \in \mathcal{C}(\mathcal{F}^2)$ ist und damit folgt für alle $k \in \mathcal{K}$

$$\pi(B)\pi(C)k \;=\; \pi(BC)k \;\in\; \mathcal{K}_0 \ .$$

Also gilt

$$\pi(B)\ (\pi(C)\mathcal{K}) \;\subset\; \mathcal{K}_0 \quad (C \in \mathcal{C}(\mathcal{F}^2))$$

und weil $\pi(B) \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ linear und stetig ist, folgt

$$\pi(B)\ (\bigvee_{C \in \mathcal{C}(\mathcal{F}^2)} \pi(C)\mathcal{K}\ ) \;\subset\; \mathcal{K}_0,$$

also

$$\pi(B)\mathcal{K}_0 \;\subset\; \mathcal{K}_0.$$

□

Also lässt jedes $\pi(B) \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ $(B \in C^*(S_1, ..., S_n))$ den Unterraum $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}$ invariant, und daher kann man π im folgenden Sinn auf $\mathcal{K}_0$ einschränken. Man definiert

$$\pi_0 \;=\; \pi|_{\mathcal{K}_0} : C^*(S_1, ..., S_n) \to \mathcal{L}(\mathcal{K}_0) \ ; \ B \mapsto \pi(B)|_{\mathcal{K}_0} \ .$$

Wir schränken diese Abbildung außerdem auf die C^*-Unteralgebra $\mathcal{C}(\mathcal{F}^2)$ von $C^*(S_1, ..., S_n)$ ein und betrachten

$$\pi_0|_{\mathcal{C}(\mathcal{F}^2)} : \mathcal{C}(\mathcal{F}^2) \to \mathcal{L}(\mathcal{K}_0) \ ; \ C \mapsto \pi(C)|_{\mathcal{K}_0} \ .$$

Definition 2.3.3.
Sei $\mathcal{B}$ eine C^*-Algebra und K ein Hilbertraum.
(a) Ein C^*-Homomorphismus

$$\Pi : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(K)$$

heißt Darstellung von $\mathcal{B}$ auf K.
(b) Eine Darstellung Π von $\mathcal{B}$ auf K heißt nichtentartet, falls

$$\bigcap_{\beta \in \mathcal{B}} \ker(\ \Pi(\beta)\ ) \;=\; \{0\} \ .$$

Bemerkung 2.3.4.
Eine Darstellung $\Pi : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(K)$ von einer C^*-Algebra $\mathcal{B}$ auf einen Hilbertraum K ist genau dann nichtentartet, wenn

$$\Big(\bigcap_{\beta \in \mathcal{B}} \ker \Pi(\beta) \Big)^{\perp} = K$$

gilt. Für alle $\beta \in \mathcal{B}$ ist aber

$$(\ker \Pi(\beta))^{\perp} = \overline{\Pi(\beta)^* K} = \overline{\Pi(\beta^*) K}$$

und mit $\{\beta^*;\ \beta \in \mathcal{B}\} = \mathcal{B}$ folgt

$$\begin{aligned} \Big(\bigcap_{\beta \in \mathcal{B}} \ker \Pi(\beta) \Big)^{\perp} &= \bigvee_{\beta \in \mathcal{B}} (\ker \Pi(\beta))^{\perp} \\ &= \bigvee_{\beta \in \mathcal{B}} \Pi(\beta^*) K \\ &= \bigvee_{\beta \in \mathcal{B}} \Pi(\beta) K \ . \end{aligned}$$

Also ist Π genau dann nichtentartet, wenn $\bigvee_{\beta \in \mathcal{B}} \Pi(\beta) K = K$ gilt.
In [4] wird gezeigt, dass jede nichtentartete Darstellung Π von einer C^*-Unteralgebra $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}(H)$ (H Hilbertraum) der kompakten Operatoren in H auf einen Hilbertraum K unitär äquivalent zu einem Produkt von Unterdarstellungen der identischen Darstellung ist, das heißt man kann den Raum K in eine orthogonale Summe

$$K = \bigoplus_{i \in I} K_i \quad (I \text{ Indexmenge})$$

von Π-invarianten Unterräumen $K_i \subset K$ zerlegen, derart dass für $B \in \mathcal{B}$ der Operator $\Pi(B)|_{K_i} \in \mathcal{L}(K_i)$ unitär äquivalent zu einer Einschränkung $B|_{H_i}$ von B auf einen $\mathcal{B}$-invarianten Unterraum $H_i \subset H$ ist. Dabei hängen der Unterraum H_i und die der Äquivalenz zugrundeliegende unitäre Abbildung nicht von $B \in \mathcal{B}$ ab.
Das heißt, es gilt der folgende Satz.

Satz 2.3.5.
Seien H, K Hilberträume, $\mathcal{B}$ eine C^*-Unteralgebra von $\mathcal{C}(H)$ und

$$\Pi : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(K)$$

eine nichtentartete Darstellung von $\mathcal{B}$ auf K.
Dann existieren eine Indexmenge I und eine Zerlegung

$$\bigoplus_{i \in I} K_i = K \quad (\ell^2 - \textit{direkte Summe})$$

von $\mathcal{K}$ in Π-invariante Unterräume $\{0\} \neq K_i$ $(i \in I)$, so dass für jedes $i \in I$ ein abgeschlossener, $\mathcal{B}$-invarianter Unterraum $\{0\} \neq H_i \subset H$ und eine unitäre Abbildung

$$U_i : K_i \to H_i \ ,$$

existieren mit

$$\Pi(B)|_{K_i} = U_i^* B|_{H_i} U_i$$

für alle $B \in \mathcal{B}$.

Der Beweis findet sich in [4], Theorem 1.4.4 (und Beweis von Theorem 1.4.4).
Wir betrachten nun den Spezialfall

$$\mathcal{B} \;=\; \mathcal{C}(H)$$

in 2.3.5, das heißt Π ist eine Darstellung der kompakten Operatoren von H auf K. Dann sind die abgeschlossenen Unterräume $\{0\} \neq H_i \subset H$ $(i \in I)$ invariant unter allen kompakten Operatoren. Mit dem nächsten Lemma folgt daraus, dass

$$H_i = H \quad \text{für alle } i \in I$$

gilt.

Lemma 2.3.6.
Sei H ein Hilbertraum.
Dann ist die C^*-Algebra $\mathcal{C}(H)$ der kompakten Operatoren auf H irreduzibel, das heißt für jeden abgeschlossenen Unterraum $\tilde{H} \subset H$ mit

$$C\tilde{H} \;\subset\; \tilde{H}$$

für alle $C \in \mathcal{C}(H)$ gilt

$$\tilde{H} = \{0\} \text{ oder } \tilde{H} = H\ .$$

Beweis.
Sei

$$\{0\} \;\neq\; \tilde{H} \;\subset\; H$$

ein $\mathcal{C}(H)$-invarianter Unterraum von H.
Zu zeigen ist, dass dann $\tilde{H} = H$ gilt. Wähle $x \in \tilde{H} \setminus \{0\}$. Da es für jedes $y \in H$ einen stetig linearen Operator mit eindimensionalem Bild, also insbesondere einen kompakten Operator $C_y \in \mathcal{C}(H)$ gibt mit

$$C_y x \;=\; y$$

und da mit $x \in \tilde{H}$ auch $Cx \in \tilde{H}$ $(C \in \mathcal{C}(H))$ ist, folgt also

$$\tilde{H} \;=\; H\ .$$

□

Wie bereits oben beschrieben, erhält man nun das folgende Korollar aus 2.3.5 für den Fall $\mathcal{B} = \mathcal{C}(H)$.

Korollar 2.3.7.
Seien H, K Hilberträume und

$$\Pi : \mathcal{C}(H) \to \mathcal{L}(K)$$

eine nichtentartete Darstellung.
Dann existieren eine Indexmenge I und eine Zerlegung

$$\ell^2 - \bigoplus_{i \in I} K_i \;=\; K$$

von K in Π-invariante Unterräume $\{0\} \neq K_i$ $(i \in I)$, so dass für jedes $i \in I$ eine unitäre Abbildung

$$U_i : K_i \to H$$

existiert mit

$$\Pi(C)|_{K_i} \ = \ U_i^* C U_i$$

für alle $C \in \mathcal{C}(H)$.

Dieses Resultat kann man nun auf die Darstellung

$$\pi_0|_{\mathcal{C}(\mathcal{F}^2)} : \mathcal{C}(\mathcal{F}^2) \to \mathcal{L}(\mathcal{K}_0) \ ; \ C \mapsto \pi(C)|_{\mathcal{K}_0}$$

anwenden. Dazu braucht man noch das folgende Lemma, in dem gezeigt wird, dass $\pi_0|_{\mathcal{C}(\mathcal{F}^2)}$ nichtentartet ist. Dies liegt an der Konstruktion des Raumes $\mathcal{K}_0$, der gerade von den Bildern der $\pi(C)$ $(C \in \mathcal{C}(\mathcal{F}^2))$ erzeugt wird.
Zum Beweis geben wir außerdem explizit die Gestalt des orthogonalen Komplements

$$\mathcal{K}_1 \ = \ \mathcal{K} \ominus \mathcal{K}_0$$

von $\mathcal{K}_0$ in $\mathcal{K}$ an.

Lemma 2.3.8.
(a) Für das orthogonale Komplement $\mathcal{K}_1$ von $\mathcal{K}_0$ in $\mathcal{K}$ gilt

$$\mathcal{K}_1 \ = \mathcal{K} \ominus \mathcal{K}_0 \ = \ \bigcap \ (\ \mathit{ker}(\pi(C)); \ C \in \mathcal{C}(\mathcal{F}^2) \ ) \ .$$

(b) Die Darstellung

$$\pi_0|_{\mathcal{C}(\mathcal{F}^2)} : \mathcal{C}(\mathcal{F}^2) \to \mathcal{L}(\mathcal{K}_0)$$

ist nichtentartet.

Beweis.
(a) Für $C \in \mathcal{C}(\mathcal{F}^2)$ gilt

$$\mathcal{K} \ominus \pi(C)\mathcal{K} \ = \ \ker(\ \pi(C)^* \ ) \ = \ \ker(\ \pi(C^*) \ )$$

und weil mit C auch C^* kompakt ist, gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{K} \ominus \mathcal{K}_0 \ &= \ \mathcal{K} \ominus (\bigvee_{C \in \mathcal{C}(\mathcal{F}^2)} \pi(C)\mathcal{K} \ ) \\ &= \bigcap_{C \in \mathcal{C}(\mathcal{F}^2)} (\ \mathcal{K} \ominus \pi(C)\mathcal{K} \ ) \\ &= \bigcap_{C \in \mathcal{C}(\mathcal{F}^2)} \ker \pi(C^*) \\ &= \bigcap_{C \in \mathcal{C}(\mathcal{F}^2)} \ker \pi(C) \ . \end{aligned}$$

(b) Sei $k \in \mathcal{K}_0$ gegeben mit

$$\pi_0(C)k \ = \ 0$$

für alle $C \in \mathcal{C}(\mathcal{F}^2)$.
Dann ist auch $\pi(C)k = 0$, das heißt

$$k \in \ker \pi(C) \quad (C \in \mathcal{C}(\mathcal{F}^2)) \ .$$

Nach (a) folgt

$$k \in \mathcal{K}_1 = \mathcal{K} \ominus \mathcal{K}_0$$

und wegen $k \in \mathcal{K}_0$ muss $k = 0$ gelten.
Somit ist $\pi_0|_{\mathcal{C}(\mathcal{F}^2)}$ nichtentartet. □

Man kann also 2.3.7 auf $\pi_0|_{\mathcal{C}(\mathcal{F}^2)}$ anwenden und erhält so Teil (a) des folgenden Satzes. In Teil (b) betrachten wir die direkte Summe der unitären Abbildungen U_i aus (a) und erhalten, dass $\pi_0|_{\mathcal{C}(\mathcal{F}^2)}$ unitär äquivalent zu einem Vielfachen der identischen Darstellung ist.

Satz 2.3.9.
(a) Sei

$$\pi_0|_{\mathcal{C}(\mathcal{F}^2)} : \mathcal{C}(\mathcal{F}^2) \to \mathcal{L}(\mathcal{K}_0) \ ; \ C \mapsto \pi(C)|_{\mathcal{K}_0}$$

wie bisher. Dann existieren eine Indexmenge I und eine Zerlegung

$$\ell^2 - \bigoplus_{i \in I} \mathcal{K}_i \ = \ \mathcal{K}_0$$

von $\mathcal{K}_0$ in $\pi_0|_{\mathcal{C}(\mathcal{F}^2)}$-invariante Unterräume $\{0\} \neq \mathcal{K}_i$ $(i \in I)$, so dass für jedes $i \in I$ eine unitäre Abbildung

$$U_i : \mathcal{K}_i \to \mathcal{F}^2$$

existiert mit

$$\pi_0(C)|_{\mathcal{K}_i} \ = \ U_i^* C U_i$$

für alle $C \in \mathcal{C}(\mathcal{F}^2)$. Das heißt also, dass

$$\pi_i : \mathcal{C}(\mathcal{F}^2) \to \mathcal{L}(\mathcal{K}_i) \ ; \ C \mapsto \pi_0(C)|_{\mathcal{K}_i}$$

unitär äquivalent zur identischen Darstellung auf $\mathcal{C}(\mathcal{F}^2)$ ist.
(b) Definiert man die Abbildung

$$U = \bigoplus_{i \in I} U_i : \ \mathcal{K}_0 = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{K}_i \to \bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}^2$$

als direkte Summe der unitären Abbildungen U_i, so ist U ebenfalls unitär und es gilt

$$\pi_0(C) \ = \ U^* (\bigoplus_{i \in I} C \ ) U$$

für alle $C \in \mathcal{C}(\mathcal{F}^2)$.

Beweis.
(a) Nach 2.3.8 (b) kann man 2.3.7 auf $\pi_0|_{\mathcal{C}(\mathcal{F}^2)}$ anwenden.
(b) Der Operator U ist als direkte orthogonale Summe von unitären Operatoren unitär und es gilt

$$\begin{aligned}
\pi_0(C) &= \bigoplus_{i \in I} (\pi_0(C)|_{\mathcal{K}_i}) \\
&\overset{(a)}{=} \bigoplus_{i \in I} (U_i^* C U_i) \\
&= (\bigoplus_{i \in I} U_i^*)(\bigoplus_{i \in I} C)(\bigoplus_{i \in I} U_i) \\
&= U^* (\bigoplus_{i \in I} C) U
\end{aligned}$$

für alle $C \in \mathcal{C}(\mathcal{F}^2)$. $\square$

Man sieht also, dass

$$\pi_0 : C^*(S_1, ..., S_n) \to \mathcal{L}(\mathcal{K}_0) \ ; \ B \mapsto \pi(B)|_{\mathcal{K}_0}$$

bis auf unitäre Äquivalenz auf den kompakten Operatoren wie ein Vielfaches der identischen Darstellung wirkt. Die Tatsache, dass die kompakten Operatoren auf $\mathcal{F}^2$ ein Ideal in $C^*(S_1, ..., S_n)$ bilden, gestattet uns mit Hilfe einer Eindeutigkeitsaussage für Fortsetzungen nichtentarteter Darstellungen zu schließen, dass sich die Beziehung

$$\pi_0(C) \ = \ U^*(\bigoplus_{i \in I} C \ )U \quad (C \in \mathcal{C}(\mathcal{F}^2))$$

auf die ganze C^*-Algebra $C^*(S_1, ..., S_n)$ erweitern lässt, das heißt es gilt

$$\pi_0(B) \ = \ U^*(\bigoplus_{i \in I} B \ )U \quad (B \in C^*(S_1, ..., S_n)) \ .$$

Damit erhält man

$$V_j|_{\mathcal{K}_0} \ = \ \pi(S_j)|_{\mathcal{K}_0} \ = \ \pi_0(S_j) \ = \ U^*(\bigoplus_{i \in I} S_j \ )U \quad (j = 1, ..., n)$$

und weil S ein n-Shift auf $\mathcal{F}^2$ ist, kann man damit leicht zeigen, dass

$$V|_{\mathcal{K}_0} \ = \ (V_1|_{\mathcal{K}_0}, ..., V_n|_{\mathcal{K}_0})$$

ein n-Shift auf $\mathcal{K}_0$ ist.
Wir beginnen mit dem Fortsetzungssatz für nichtentartete Darstellungen.

Satz 2.3.10.
Sei K ein Hilbertraum, $\mathcal{B}$ eine C^*-Algebra und $J \subset \mathcal{B}$ ein Ideal in $\mathcal{B}$.
Dann hat jede nichtentartete Darstellung

$$\Pi : J \to \mathcal{L}(K)$$

eine eindeutige Fortsetzung zu einer Darstellung von $\mathcal{B}$ auf K. Diese Fortsetzung ist ebenfalls nichtentartet.

Bemerkung 2.3.11.
Wir bezeichnen mit dem Begriff 'Ideal' stets ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal. In einer C^*-Algebra ist ein solches Ideal immer $*$-abgeschlossen (vergleiche etwa [4], 1.3 Corollary 1), also selbst eine C^*-Algebra. Daher ist es in 2.3.10 berechtigt, von Darstellungen von J auf K zu sprechen.

Beweis. (von 2.3.10)
Für die Existenz der Fortsetzung vergleiche man [4]. Wir zeigen noch die Eindeutigkeit.
Nach 2.3.4 ist $\bigvee_{\alpha \in J} \Pi(\alpha)K \ = \ K$, denn $\Pi : J \to \mathcal{L}(K)$ ist nichtentartet. Ist $\Pi_0 : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(K)$ eine Fortsetzung von Π, so gilt für alle $\beta \in \mathcal{B}, \alpha \in J$ und $k \in K$

$$\Pi_0(\beta)(\Pi(\alpha)k) \ = \ \Pi_0(\beta)\Pi_0(\alpha)k \ = \ \Pi_0(\beta\alpha)k \ = \ \Pi(\beta\alpha)k \ .$$

(Man beachte, dass $\beta\alpha \in J$ gilt, weil $J \subset \mathcal{B}$ ein Ideal ist.)
Also ist für $\beta \in \mathcal{B}$ der Operator $\Pi_0(\beta) \in \mathcal{L}(K)$ auf allen Elementen der Form $\Pi(\alpha)k$ $(\alpha \in J, k \in K)$ und daher auch auf $\bigvee_{\alpha \in J} \Pi(\alpha)K = K$ durch Π eindeutig festgelegt. Somit ist die Fortsetzung Π_0 eindeutig bestimmt. $\square$

Nun können wir zeigen, dass π_0 unitär äquivalent zu einem Vielfachen der identischen Darstellung ist.

Satz 2.3.12.
Für alle $B \in C^*(S_1, ..., S_n)$ gilt

$$\pi_0(B) \;=\; U^*(\bigoplus_{i \in I} B \;)U$$

für eine Indexmenge I und eine unitäre Abbildung

$$U : \mathcal{K}_0 \to \bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}^2 \; .$$

Beweis.
Wir betrachten die C^*-Algebra $C^*(S_1, ..., S_n)$ und die unitäre Abbildung $U : \mathcal{K}_0 \to \bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}^2$ aus 2.3.9. Die Darstellungen

$$\pi_0 : C^*(S_1, ..., S_n) \to \mathcal{L}(\mathcal{K}_0) \; ; \; B \mapsto \pi(B)|_{\mathcal{K}_0}$$

und

$$C^*(S_1, ..., S_n) \to \mathcal{L}(\mathcal{K}_0) \; ; \; B \mapsto U^*(\bigoplus_{i \in I} B \;)U$$

sind nach 2.3.9 Fortsetzungen der (nach 2.3.8 nichtentarteten) Darstellung $\pi_0|_{\mathcal{C}(\mathcal{F}^2)}$ auf dem Ideal $\mathcal{C}(\mathcal{F}^2) \subset C^*(S_1, ..., S_n)$. Nach 2.3.10 stimmen sie überein, es gilt also

$$\pi_0(B) \;=\; U^*(\bigoplus_{i \in I} B \;)U \quad (B \in C^*(S_1, ..., S_n)) \; .$$

$\square$

Wir kehren nun zum Ausgangspunkt zurück und betrachten wieder das Tupel $V = (V_1, ..., V_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{K})^n$ von Isometrien mit orthogonalen Bildern vom Beginn dieses Abschnitts. Nach Konstruktion von $\pi = \pi_V$ gilt die Bedingung

$$V_j \;=\; \pi(S_j) \quad (j = 1, ..., n) \; .$$

Mit den bisherigen Resultaten über die 'Einschränkung' von π auf $\mathcal{K}_0$ soll nun gezeigt werden, dass $V|_{\mathcal{K}_0}$ ein n-Shift ist.

Satz 2.3.13.
Sei $V = (V_1, ..., V_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{K})^n$ ein Tupel von Isometrien auf einem Hilbertraum $\mathcal{K}$ mit paarweise orthogonalen Bildern.
Sei

$$\pi = \pi_V : C^*(S_1, ..., S_n) \to \mathcal{L}(\mathcal{K})$$

wie in 2.2.5. Dann ist der Unterraum

$$\mathcal{K}_0 \;=\; \bigvee_{C \in \mathcal{C}(\mathcal{F}^2)} (\; \pi(C)\mathcal{K} \;) \;\subset\; \mathcal{K}$$

reduzierend für alle V_j $(j = 1, ..., n)$ und

$$V|_{\mathcal{K}_0} \;=\; (V_1|_{\mathcal{K}_0}, ..., V_n|_{\mathcal{K}_0})$$

ist ein n-Shift auf $\mathcal{K}_0$. Wählt man I und $U : \mathcal{K}_0 \to \bigoplus_{i\in I} \mathcal{F}^2$ wie in 2.3.12, so ist der wandernde Unterraum $\mathcal{L}$ für $V|_{\mathcal{K}_0}$ mit $\mathcal{K}_0 = M_F(\mathcal{L}, V|_{\mathcal{K}_0})$ durch

$$\mathcal{L} \;=\; U^*(\;\bigoplus_{i\in I}\langle e_0\rangle\;)$$

gegeben.

Beweis.
Nach Lemma 2.3.2 ist $\mathcal{K}_0$ invariant unter allen Operatoren der Form $\pi(B)$ mit $B \in C^*(S_1, ..., S_n)$, also insbesondere unter $V_j = \pi(S_j)$ und $V_j^* = \pi(S_j^*)$ mit $j = 1, ..., n$. Also ist $\mathcal{K}_0$ reduzierend für V.
Da $V_1, ..., V_n$ Isometrien mit paarweise orthogonalen Bildern sind, gilt dies auch für die Einschränkungen $V_1|_{\mathcal{K}_0}, ..., V_n|_{\mathcal{K}_0}$.
Weiter gilt

$$V_j|_{\mathcal{K}_0} \;=\; \pi_0(S_j) \;\stackrel{2.3.12}{=}\; U^*(\;\bigoplus_{i\in I} S_j\;)U \quad (j = 1, ..., n)$$

mit einer Indexmenge I und einem unitären Operator $U : \mathcal{K}_0 \to \bigoplus_{i\in I} \mathcal{F}^2$ wie in 2.3.12. Wir definieren nun

$$\mathcal{L} \;=\; U^*(\;\bigoplus_{i\in I}\langle e_0\rangle\;) \;\subset\; \mathcal{K}_0$$

und wollen zeigen, dass $\mathcal{L}$ ein wandernder Unterraum für $V|_{\mathcal{K}_0}$ ist, für den

$$M_F(\mathcal{L}, V|_{\mathcal{K}_0}) \;=\; \mathcal{K}_0$$

gilt. Wegen

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= U^*(\;\bigoplus_{i\in I}\langle e_0\rangle\;) \\
&= U^*(\;\bigoplus_{i\in I}\;(\mathcal{F}^2 \ominus \bigoplus_{j=1}^{n} S_j\mathcal{F}^2)\;) \\
&= U^*(\;(\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}^2) \ominus (\bigoplus_{j=1}^{n}\bigoplus_{i\in I} S_j\mathcal{F}^2)\;) \\
&= U^*(\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}^2) \ominus (\bigoplus_{j=1}^{n} U^*(\bigoplus_{i\in I} S_j\mathcal{F}^2)) \\
&= \mathcal{K}_0 \ominus (\;\bigoplus_{j=1}^{n} U^*(\bigoplus_{i\in I} S_j)(\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}^2)\;) \\
&= \mathcal{K}_0 \ominus (\;\bigoplus_{j=1}^{n} U^*(\bigoplus_{i\in I} S_j)U\mathcal{K}_0\;) \\
&= \mathcal{K}_0 \ominus (\;\bigoplus_{j=1}^{n}(V_j|_{\mathcal{K}_0})\mathcal{K}_0\;)
\end{aligned}$$

ist $\mathcal{L}$ nach 1.3.2 ein wandernder Unterraum für $V|_{\mathcal{K}_0}$.
Außerdem gilt

$$V_a|_{\mathcal{K}_0} \;=\; \pi(S_a)|_{\mathcal{K}_0} \;=\; U^*(\bigoplus_{i\in I} S_a\;)U$$

für alle $a \in F$ und damit folgt

$$\begin{aligned} V_a\mathcal{L} \;&=\; U^*(\bigoplus_{i\in I} S_a\;)UU^*(\bigoplus_{i\in I}\langle e_0\rangle\;) \\ &=\; U^*(\bigoplus_{i\in I} S_a\langle e_0\rangle\;) \\ &=\; U^*(\bigoplus_{i\in I}\langle e_a\rangle\;) \quad (a\in F)\;. \end{aligned}$$

Schließlich kann man daraus den Raum $M_F(\mathcal{L}, V|_{\mathcal{K}_0})$ wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} M_F(\mathcal{L}, V|_{\mathcal{K}_0}) \;&=\; \bigoplus_{a\in F} V_a\mathcal{L} \\ &=\; \bigoplus_{a\in F} U^*(\bigoplus_{i\in I}\langle e_a\rangle\;) \\ &=\; U^*(\bigoplus_{i\in I}\bigoplus_{a\in F}\langle e_a\rangle\;) \\ &=\; U^*(\bigoplus_{i\in I}\mathcal{F}^2\;) \\ &=\; \mathcal{K}_0 \end{aligned}$$

Es folgt die Behauptung. □

Wir haben nun gezeigt, dass V auf $\mathcal{K}_0$ als n-Shift wirkt. Nun untersuchen wir die Wirkung von V auf dem orthogonalen Komplement

$$\mathcal{K}_1 \;=\; \mathcal{K} \ominus \mathcal{K}_0$$

von $\mathcal{K}_0$ in $\mathcal{K}$.
Wir haben in 2.3.8 bereits gesehen, dass

$$\mathcal{K}_1 \;=\; \bigcap_{C\in\mathcal{C}(\mathcal{F}^2)} \ker\,\pi(C)$$

gilt.
Man sieht leicht, dass $\mathcal{K}_1$ reduzierend für $V_1, ..., V_n$ ist. (Es gilt sogar, dass $\mathcal{K}_1$ π-invariant ist.) Im folgenden Satz zeigen wir

$$(\sum_{j=1}^{n} V_jV_j^*\;)|_{\mathcal{K}_1} \;=\; I_{\mathcal{K}_1}\;.$$

Diese Bedingung ist äquivalent dazu, dass der Operator

$$(\mathcal{K}_1)^n \to \mathcal{K}_1\;;\;(y_1, ..., y_n) \mapsto \sum_{j=1}^{n} V_jy_j$$

unitär ist.

Satz 2.3.14.
(a) Der Unterraum $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}$ ist π-invariant und insbesondere reduzierend für $V_1, ..., V_n$.
(b) Es gilt

$$(\sum_{j=1}^{n} V_j V_j^*)|_{\mathcal{K}_1} = I_{\mathcal{K}_1} \ .$$

.

Beweis.
(a) Seien $k \in \mathcal{K}_1$ und $B \in C^*(S_1, ..., S_n)$.
Dann ist k im Kern aller kompakten Operatoren auf $\mathcal{F}^2$ und für $C \in \mathcal{C}(\mathcal{F}^2)$ ist auch $CB \in \mathcal{C}(\mathcal{F}^2)$. Also folgt

$$\pi(C)(\ \pi(B)k \ ) \ = \ \pi(CB)k \ = \ 0 \quad (C \in \mathcal{C}(\mathcal{F}^2))$$

und damit ist

$$\pi(B)k \in \mathcal{K}_1 \ .$$

Also ist $\mathcal{K}_1$ π-invariant.
Insbesondere ist $\mathcal{K}_1$ invariant unter den Operatoren

$$V_j = \pi(S_j) \text{ und } V_j^* = \pi(S_j^*) \quad (j = 1, ..., n) \ ,$$

das heißt $\mathcal{K}_1$ ist reduzierend für $V_1, ..., V_n$.
(b) Wir betrachten den Operator

$$I_{\mathcal{K}} - \sum_{j=1}^{n} V_j V_j^*$$

und wollen zeigen, dass er das Bild eines kompakten Operators auf $\mathcal{F}^2$ unter der Darstellung π ist. Da $\mathcal{K}_1$ der gemeinsame Kern aller $\pi(C)$ $(C \in \mathcal{C}(\mathcal{F}^2))$ ist, folgt dann

$$(\ I_{\mathcal{K}} - \sum_{j=1}^{n} V_j V_j^* \ )|_{\mathcal{K}_1} \ = \ 0 \ .$$

In der Tat gilt

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{K}} - \sum_{j=1}^{n} V_j V_j^* \quad &= \quad \pi(I_{\mathcal{F}^2}) - \sum_{j=1}^{n} \pi(S_j)\pi(S_j)^* \\ &= \quad \pi(\ I_{\mathcal{F}^2} - \sum_{j=1}^{n} S_j S_j^* \ ) \\ &= \quad \pi(P_0) \ , \end{aligned}$$

wobei

$$P_0 : \mathcal{F}^2 \to \mathcal{F}^2 \ ; \ \sum_{a \in F} x_a e_a \mapsto x_0 e_0$$

die Projektion auf $\langle \ e_0 \ \rangle$ in $\mathcal{F}^2$ ist.
Diese ist als Operator mit eindimensionalem Bild sicherlich kompakt und damit folgt die Behauptung. $\square$

Definition 2.3.15.
Ein Tupel $V = (V_1, ..., V_n) \in \mathcal{L}(K)$ von Operatoren auf einem Hilbertraum K heißt sphärisch unitäres Tupel auf K, falls

$$V_i^* V_j \;=\; \delta_{i,j} I_K \quad (i, j = 1, ..., n)$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} V_i V_i^* \;=\; I_K$$

gilt.

In 2.3.14 wurde gezeigt, dass $V|_{\mathcal{K}_1} = (V_1|_{\mathcal{K}_1}, ..., V_n|_{\mathcal{K}_1}) \in \mathcal{L}(\mathcal{K}_1)^n$ ein sphärisch unitäres Tupel auf $\mathcal{K}_1$ ist. Fasst man die bisherigen Ergebnisse zusammen, so erhält man den folgenden Satz über die Wold-Zerlegung eines Tupels von Isometrien mit paarweise orthogonalen Bildern.

Satz 2.3.16. *(Wold-Zerlegung)*
Seien $\mathcal{K}$ ein Hilbertraum und $V_1, ..., V_n$ Isometrien auf $\mathcal{K}$ mit

$$\sum_{j=1}^{n} V_j V_j^* \;\leq I_{\mathcal{K}} \; .$$

Sei

$$\pi = \pi_V : C^*(S_1, ..., S_n) \to \mathcal{L}(\mathcal{K})$$

die Poisson-Transformation zu V.
Dann sind die Unterräume

$$\mathcal{K}_0 = \bigvee(\; \pi(C)\mathcal{K}; \; C \in \mathcal{C}(\mathcal{F}^2) \;)$$

und

$$\mathcal{K}_1 = \bigcap(\; ker \; \pi(C); \; C \in \mathcal{C}(\mathcal{F}^2) \;)$$

reduzierend für $V_1, ..., V_n$ und es gilt

- $\mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_1 \;=\; \mathcal{K}$
- *$V|_{\mathcal{K}_0}$ ist ein n-Shift.*
- *$V|_{\mathcal{K}_1}$ ist ein sphärisch unitäres Tupel.*

Mit dem nächsten Satz zeigen wir, dass die Wold-Zerlegung in 2.3.16 eindeutig bestimmt ist. Man vergleiche dazu auch [11] (Theorem 1.3).

Satz 2.3.17.
Seien $\mathcal{K}$ ein Hilbertraum und $V_1, ..., V_n$ Isometrien auf $\mathcal{K}$ mit

$$\sum_{j=1}^{n} V_j V_j^* \;\leq I_{\mathcal{K}} \; .$$

Eine Zerlegung

$$\mathcal{K} \;=\; \mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_1$$

von $\mathcal{K}$ in V-invariante Unterverktorräume $\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1$ von $\mathcal{K}$, derart dass $V|_{\mathcal{K}_0}$ ein n-Shift und $V|_{\mathcal{K}_1}$ ein sphärisch unitäres Tupel ist, ist eindeutig bestimmt, es gilt

$$\mathcal{K}_0 \;=\; M_F(L, V)$$

mit

$$L \;=\; \mathcal{K} \ominus \bigoplus_{i=1}^{n} V_i \mathcal{K} \;.$$

Beweis.
Da $V|_{\mathcal{K}_0}$ ein n-Shift ist, gibt es einen abgeschlossenen Unterraum $L \subset \mathcal{K}_0$, der wandernd für $V|_{\mathcal{K}_0}$ ist und für den $\mathcal{K}_0 = M_F(L, V|_{\mathcal{K}_0})$ gilt. Da $\mathcal{K}_0$ V-invariant ist, ist L wandernd für V mit $\mathcal{K}_0 = M_F(L, V)$.
Also ist $\mathcal{K}_0$ (und damit auch $\mathcal{K}_1$) durch L gegeben. Es genügt also zu zeigen, dass L eindeutig bestimmt ist.
Da $V|_{\mathcal{K}_1}$ sphärisch unitär ist, gilt $\mathcal{K}_1 = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i \mathcal{K}_1$ und mit $\mathcal{K}_0 \perp \mathcal{K}_1$ erhält man

$$\begin{aligned} L \;&\overset{1.3.2(c)}{=}\; \mathcal{K}_0 \ominus \bigoplus_{i=1}^{n} V_i \mathcal{K}_0 \\ &=\; (\;\mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_1\;) \ominus \bigoplus_{i=1}^{n} (\;V_i \mathcal{K}_0 \oplus V_i \mathcal{K}_1\;) \\ &=\; \mathcal{K} \ominus \bigoplus_{i=1}^{n} V_i \mathcal{K} \end{aligned}$$

und somit ist L eindeutig bestimmt. □

2.4 Modellsatz für n-Kontraktionen

In diesem Abschnitt benutzen wir die Existenz einer minimalen isometrischen Dilatation $V \in \mathcal{L}(\mathcal{K})^n$ für eine n-Kontraktion $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ (vergleiche 2.2.6) und die Konstruktion der Wold-Zerlegung (vergleiche 2.3.16), um einen Modellsatz für T zu erhalten. Darin wird T als Kompression einer orthogonalen Summe, bestehend aus einem n-Shift und einem sphärisch unitären Tupel, dargestellt. Der Shiftanteil ist dabei unitär äquivalent zu $\bigoplus_{i \in I} S$, mit einer Indexmenge I und dem Vorwärtsshift S auf $\mathcal{F}^2$. Wir zeigen außerdem, dass die Mächtigkeit von I der (Hilbertraum-)Dimension des Defektraums $\overline{\Delta_T \mathcal{H}}$ entspricht. Wir führen zunächst einige Bezeichnungen ein.

Definition 2.4.1.
Seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ eine n-Kontraktion auf $\mathcal{H}$. Wie zuvor ist der Defektoperator Δ_T von T durch

$$\Delta_T \;=\; (\;I_H - \sum_{i=1}^{n} T_i T_i^*\;)^{\frac{1}{2}} \;\in \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

definiert. Weiterhin heißt

$$\mathcal{D}_T \;=\; \overline{\Delta_T \mathcal{H}} \;\subset \mathcal{H}$$

der Defektraum von T und

$$d_T \;=\; \dim\, \mathcal{D}_T \quad (\text{Hilbertraumdimension von } \mathcal{D}_T)$$

der Defekt von T.

Bemerkung 2.4.2.
(a) Da Δ_T ein positiver Operator ist, gilt

$$\mathcal{D}_T \;=\; \overline{\Delta_T \mathcal{H}} \;=\; \overline{\Delta_T^2 \mathcal{H}} \;.$$

Beweis.
Wir zeigen, dass die Kerne von Δ_T und Δ_T^2 übereinstimmen. Da Δ_T und Δ_T^2 selbstadjungiert sind, folgt dann

$$\overline{\Delta_T \mathcal{H}} \;=\; (\ker\, \Delta_T)^{\perp} \;=\; (\ker\, \Delta_T^2)^{\perp} \;=\; \overline{\Delta_T^2 \mathcal{H}} \;.$$

Sei also $h \in \ker\, \Delta_T^2$. Dann gilt

$$\langle\; \Delta_T h \;,\; \Delta_T h \;\rangle \;=\; \langle\; \Delta_T^2 h \;,\; h \;\rangle \;=\; 0$$

und folglich ist $h \in \ker\, \Delta_T^2$. Die umgekehrte Inklusion ist trivial. $\square$

(b) Ist $V = (V_1, ..., V_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ ein Tupel von Isometrien mit paarweise orthogonalen Bildern, so ist $\Delta_V^2 = I_H - \sum\limits_{i=1}^{n} V_i V_i^*$ die Orthogonalprojektion auf den abgeschlossenen Unterraum $L = \mathcal{H} \ominus \bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i \mathcal{H}$ von $\mathcal{H}$ (vergleiche 1.3.2).
Damit ist

$$\Delta_V \;=\; \Delta_V^2 \;=\; I_H - \sum_{i=1}^{n} V_i V_i^*$$

und

$$\mathcal{D}_V \;=\; L \;=\; \mathcal{H} \ominus \bigoplus_{i=1}^{n} V_i \mathcal{H} \;.$$

Insbesondere kann man die folgenden beiden Spezialfälle betrachten.

- Ist V ein n-Shift auf $\mathcal{H}$, so gibt es nach 1.3.2 einen eindeutigen wandernden Unterraum L für V mit $M_F(L, V) = \mathcal{H}$. Es gilt $L = \mathcal{H} \ominus \bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i \mathcal{H} = \mathcal{D}_V$ und damit ist der Defekt d_V von V gleich der (Hilbertraum-)Dimension von L, also gleich der Vielfachheit von V.

- Ist V sphärisch unitär, so gilt $\Delta_V = I_H - \sum\limits_{i=1}^{n} V_i V_i^* = 0$ und folglich $\mathcal{D}_V = 0$ und $d_V = 0$.

Im folgenden Lemma untersuchen wir den Defektraum und den Defekt einer n-Kontraktion T auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, der sich in eine orthogonale Summe $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ für T reduzierender Unterräume $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$ aufspalten lässt. Wir erhalten $\mathcal{D}_T = \mathcal{D}_{(T|_{\mathcal{H}_0})} \oplus \mathcal{D}_{(T|_{\mathcal{H}_1})}$ und damit $d_T = d_{(T|_{\mathcal{H}_0})} + d_{(T|_{\mathcal{H}_1})}$.

Bemerkung 2.4.3.
Die Defekte von $T|_{\mathcal{H}_s}$ $(s = 0, 1)$ sind nach Definition Hilbertraumdimensionen, also Kardinalzahlen. Für zwei Kardinalzahlen α, β erklären wir die Summe $\alpha+\beta$ als die Kardinalität der Menge $A \cup B$, wenn A, B disjunkte Mengen mit den Kardinalitäten α beziehungsweise β sind. Dabei ergibt sich die übliche Summe natürlicher Zahlen, falls α, β beide endlich sind. Falls α oder β unendlich ist, so ist $\alpha + \beta$ die größere der beiden Kardinalitäten.

Lemma 2.4.4.
Sei $T = (T_1, .., T_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ eine n-Kontraktion auf $\mathcal{H}$ und seien $\mathcal{H}_0$ und $\mathcal{H}_1$ T-invariante Unterräume von $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$.
Dann sind $T|_{\mathcal{H}_0} = (T_1|_{\mathcal{H}_0}, ..., T_1|_{\mathcal{H}_0})$ und $T|_{\mathcal{H}_1} = (T_1|_{\mathcal{H}_1}, ..., T_1|_{\mathcal{H}_1})$ n-Kontraktionen auf $\mathcal{H}_0$ beziehungsweise $\mathcal{H}_1$ und es gelten die folgenden Aussagen.
(a) Der Defektraum von T ist die orthogonale Summe der Defekträume von $T|_{\mathcal{H}_0}$ und $T|_{\mathcal{H}_1}$.
(b) Der Defekt von T ist die Summe der Defekte von $T|_{\mathcal{H}_0}$ und $T|_{\mathcal{H}_1}$.

Beweis. (von 2.4.4)
Da $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$ invariant für $T_1, ..., T_n$ sind und $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ gilt, sind $\mathcal{H}_0$ und $\mathcal{H}_1$ sogar reduzierend für $T_1, ..., T_n$. Also gilt $(T_i|_{\mathcal{H}_s})^* = T_i^*|_{\mathcal{H}_s}$ für $i = 1, ..., n$ und $s = 0, 1$. Man erhält

$$\sum_{i=1}^{n} (T_i|_{\mathcal{H}_s})(T_i^*|_{\mathcal{H}_s}) \; = \; \Big(\sum_{i=1}^{n} T_i T_i^* \Big)|_{\mathcal{H}_s} \; \leq I_{\mathcal{H}_s} \quad (s = 0, 1)$$

und somit sind $T|_{\mathcal{H}_0}, T|_{\mathcal{H}_1}$ n-Kontraktionen auf $\mathcal{H}_0$ beziehungsweise $\mathcal{H}_1$.
Außerdem sind $\mathcal{H}_0$ und $\mathcal{H}_1$ auch invariant für $I_{\mathcal{H}} - \sum\limits_{i=1}^{n} T_i T_i^*$ und damit für $\Delta_T = \big(I_{\mathcal{H}} - \sum\limits_{i=1}^{n} T_i T_i^* \big)^{\frac{1}{2}}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\Delta_{(T|_{\mathcal{H}_s})} &= \Big(I_{\mathcal{H}_s} - \sum_{i=1}^{n} (T_i|_{\mathcal{H}_s})(T_i^*|_{\mathcal{H}_s}) \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \Big(I_{\mathcal{H}} - \sum_{i=1}^{n} T_i T_i^* \Big)^{\frac{1}{2}}|_{\mathcal{H}_s} \\
&= \Delta_T|_{\mathcal{H}_s} \quad (s = 0, 1)
\end{aligned}$$

und somit folgt

$$\Delta_T \; = \; \Delta_{(T|_{\mathcal{H}_0})} \oplus \Delta_{(T|_{\mathcal{H}_1})} \; .$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_T &= \overline{\Delta_T \mathcal{H}} \\
&= \overline{\Delta_{(T|_{\mathcal{H}_0})} \mathcal{H}_0} \oplus \overline{\Delta_{(T|_{\mathcal{H}_1})} \mathcal{H}_1} \\
&= \mathcal{D}_{(T|_{\mathcal{H}_0})} \oplus \mathcal{D}_{(T|_{\mathcal{H}_1})}
\end{aligned}$$

und damit ist (a) gezeigt.
(b) folgt unmittelbar. □

Im folgenden Satz zeigen wir, dass der Defekt einer n-Kontraktion und der Defekt ihrer minimalen isometrischen Dilatation identisch sind.

Satz 2.4.5.
Sei $T = (T_1, ..., T_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ eine n-Kontraktion und $V = (V_1, ..., V_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{K})^n$ eine minimale isometrische Dilatation von T auf $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$. Dann gelten die folgenden Aussagen.
(a) Der Defektraum $\mathcal{D}_V = \overline{\Delta_V \mathcal{K}}$ von V ist bereits durch $\mathcal{D}_V = \overline{\Delta_V \mathcal{H}}$ gegeben.
(b) Der Operator Δ_T^2 ist die Kompression des Operators Δ_V^2 auf $\mathcal{H}$, das heißt es gilt

$$\Delta_T^2 \;=\; P_{\mathcal{H}}\ \Delta_V^2|_{\mathcal{H}}\ .$$

(c) Es gilt $d_T = d_V$.

Beweis.
(a) Da Δ_V linear und stetig ist, folgt aus der Minimalitätsbedingung $\mathcal{K} = \bigvee_{a\in F} V_a\mathcal{H}$ für die minimale isometrische Dilatation, dass

$$\mathcal{D}_V \;=\; \overline{\Delta_V \bigvee_{a\in F} V_a\mathcal{H}} \;\subset\; \bigvee_{a\in F} \Delta_V V_a\mathcal{H} \tag{2.2}$$

gilt. Nach 2.4.2 gilt $\Delta_V = \Delta_V^2 = I_H - \sum_{i=1}^{n} V_iV_i^*$ und mit $V_i^*V_j = \delta_{i,j} I_H$ $(i, j = 1, ..., n)$ folgt

$$\begin{aligned}
\Delta_V V_j \;&=\; (\ I_H - \sum_{i=1}^{n} V_iV_i^*\ )V_j \\
&=\; V_j - \sum_{i=1}^{n} V_iV_i^*V_j \\
&=\; V_j - V_j \\
&=\; 0 \qquad\qquad (j = 1, ..., n)\ .
\end{aligned}$$

Damit gilt $\Delta_V V_a = 0$ für alle $a \in F^*$ und aus 2.2 erhält man $\mathcal{D}_V \subset \overline{\Delta_V \mathcal{H}}$. Die umgekehrte Inklusion ist trivial, es gilt also Gleichheit.
(b) Es gilt $V_i^*\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$ und $V_i^*|_{\mathcal{H}} = T_i^*$, sowie $P_H V_i|_{\mathcal{H}} = T_i$ für $i \in \{1, ..., n\}$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
P_{\mathcal{H}}\ \Delta_V^2|_{\mathcal{H}} \;&=\; P_{\mathcal{H}}\ (\ I_{\mathcal{K}} - \sum_{i=1}^{n} V_iV_i^*\ )|_{\mathcal{H}} \\
&=\; I_{\mathcal{H}} - \sum_{i=1}^{n} T_iT_i^* \\
&=\; \Delta_T^2\ .
\end{aligned}$$

(c) Wir betrachten die Abbildung

$$W_0 : \Delta_V\mathcal{H} \to \Delta_T\mathcal{H}\ ;\ \Delta_V h \mapsto \Delta_T h\ .$$

Für $h, \tilde{h} \in \mathcal{H}$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle\ \Delta_V h\ ,\ \Delta_V \tilde{h}\ \rangle \;&=\; \langle\ P_{\mathcal{H}}\Delta_V^2 h\ ,\ \tilde{h}\ \rangle \\
&\overset{(b)}{=}\; \langle\ \Delta_T^2 h\ ,\ \tilde{h}\ \rangle \\
&=\; \langle\ \Delta_T h\ ,\ \Delta_T \tilde{h}\ \rangle\ .
\end{aligned}$$

(Man beachte, dass Δ_V und Δ_T selbstadjungiert sind.)
Daher ist W_0 eine wohldefinierte Isometrie (Linearität klar), die nach Definition surjektiv ist. Somit ist W_0 unitär und lässt sich folglich zu einer unitären Abbildung

$$W : \mathcal{D}_V \overset{(a)}{=} \overline{\Delta_V \mathcal{H}} \longrightarrow \overline{\Delta_T \mathcal{H}} = \mathcal{D}_T$$

fortsetzen. Also haben $\mathcal{D}_V$ und $\mathcal{D}_T$ die gleiche (Hilbertraum-)Dimension, es gilt also $d_V = d_T$, was zu zeigen war. $\square$

Um Aussagen über den Defekt einer n-Kontraktion zu erhalten, kann man also auch den Defekt ihrer minimalen isometrischen Dilatation untersuchen. Wir betrachten also ein Tupel $V = (V_1, ..., V_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{K})^n$ von Isometrien mit paarweise orthogonalen Bildern auf einem Hilbertraum $\mathcal{K}$. Wie zuvor betrachten wir die Poisson-Transformation

$$\pi = \pi_V : C^*(S_1, ..., S_n) \to \mathcal{L}(\mathcal{K})$$

mit $\pi(S_a S_b^*) = V_a V_b^*$ $(a, b \in F)$ und die Unterräume

$$\mathcal{K}_0 = \bigvee_{C \in \mathcal{C}(\mathcal{F}^2)} \pi(C)\mathcal{K} \quad \text{und} \quad \mathcal{K}_1 = \bigcap_{C \in \mathcal{C}(\mathcal{F}^2)} \ker \pi(C)$$

von $\mathcal{K}$. Wir übernehmen die folgenden Ergebnisse aus 2.3.

- Die Unterräume $\mathcal{K}_0$ und $\mathcal{K}_1$ sind reduzierend für $V_1, ..., V_n$ und es gilt $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_1$.
- Das Tupel $V|_{\mathcal{K}_1} = (V_1|_{\mathcal{K}_1}, ..., V_n|_{\mathcal{K}_1}) \in \mathcal{L}(\mathcal{K}_1)^n$ ist sphärisch unitär.
- Es existieren eine Indexmenge I und ein unitärer Operator

  $$U : \mathcal{K}_0 \to \bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}^2 ,$$

  so dass $V|_{\mathcal{K}_0} = (V_1|_{\mathcal{K}_0}, ..., V_n|_{\mathcal{K}_0}) \in \mathcal{L}(\mathcal{K}_0)^n$ ein n-Shift auf $\mathcal{K}_0$ ist. Dabei ist $L = U^*(\bigoplus_{i \in I} \langle e_0 \rangle) \subset \mathcal{K}_0$ wandernd für $V|_{\mathcal{K}_0}$ mit $M_F(L, V|_{\mathcal{K}_0}) = \mathcal{K}_0$.

Nach 2.4.2 ist der Defekt von $V|_{\mathcal{K}_1}$ gleich 0 und der Defekt von $V|_{\mathcal{K}_0}$ ist gleich der Dimension von L. Da U unitär ist, gilt

$$\dim(L) = \dim \bigoplus_{i \in I} \langle e_0 \rangle = \#I .$$

Nach 2.4.4 gilt für den Defekt von V

$$d_V = d_{(V|_{\mathcal{K}_0})} + d_{(V|_{\mathcal{K}_1})} = \#I + 0 = \#I .$$

Betrachtet man nun eine n-Kontraktion $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ und benutzt die Existenz einer minimalen isometrischen Dilatation $V \in \mathcal{L}(\mathcal{K})^n$ von T (vergleiche 2.2.6) und die obigen Ergebnisse aus 2.3 für V, so erhält man mit 2.4.5 den folgenden Modellsatz für T.

Satz 2.4.6. *(Modellsatz für n-Kontraktionen)*
Sei $T = (T_1, ..., T_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ eine n-Kontraktion auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann existieren Hilberträume $\mathcal{K}_0$ und $\mathcal{K}_1$ mit $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_1$, eine Indexmenge I mit $\#I = d_T$, ein unitärer Operator $U : \mathcal{K}_0 \to \bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}^2$ und ein sphärisch unitäres Tupel $V^1 = (V_1^1, ..., V_n^1) \in \mathcal{L}(\mathcal{K}_1)^n$ auf $\mathcal{K}_1$, so dass T die Kompression von $U^*(\bigoplus_{i \in I} S)U \oplus V^1$ auf $\mathcal{H}$ ist, das heißt es gilt

$$T_j \;=\; P_{\mathcal{H}}(\;(U^* \bigoplus_{i \in I} S_j\; U) \;\oplus\; V_j^1\;)|_{\mathcal{H}} \quad (j = 1, ..., n)\;.$$

Außerdem ist $\mathcal{H}$ dabei invariant unter den Adjungierten zu den Operatoren $(U^* \bigoplus_{i \in I} S_j U) \oplus V_j^1$ $(j = 1, ..., n)$.
(Dabei ist S der Vorwärtsshift auf $\mathcal{F}^2$, $P_{\mathcal{H}} : \mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_1 \to \mathcal{H}$ die Projektion in $\mathcal{K}_0 \oplus \mathcal{K}_1$ auf $\mathcal{H}$ und d_T der Defekt von T.)

Literaturverzeichnis

[1] T.Ando, On a pair of commutative contractions, Acta Sci Math.24:88-90 (1963).

[2] A.Arias, G.Popescu, Noncommutative interpolation and poisson transforms II, Houston J.Math.25:79-98 (1999).

[3] A.Arias, G.Popescu, Noncommutative interpolation and poisson transforms, Israel J.Math.115:205-234 (2000).

[4] W.Arveson, An invitation to C^*-algebras, Springer Verlag, 1976.

[5] W.Arveson, Subalgebras of C^*-algebras III: Multivariable operator theory, preprint (1997).

[6] J.B.Conway, Subnormal operators, Pitman Research Notes in Mathematics Series 51, 1981.

[7] J.B.Conway, A Course in Functional Analysis, Springer Verlag, 1985.

[8] J.Eschmeier, M.Putinar, Spherical contractions and interpolation problems on the unit ball, Journal für die reine und angewandte Mathematik 542:219-236 (2002).

[9] G.H.Hardy, J.E.Littlewood, G.Pólya, Inequalities, Cambridge University Press, 1934.

[10] G.Popescu, Characteristic functions for infinite sequences of noncommuting operators, J.Operator Theory 22:51-71 (1989).

[11] G.Popescu, Isometric dilations for infinite sequences of noncommutative operators, Trans.Amer.Math.Soc.316:523-536 (1989).

[12] G.Popescu, Von Neumann inequality for $(B(\mathcal{H})^n)_1$, Math.Scand.68:292-304 (1991).

[13] G.Popescu, Functional calculus for noncommuting operators, Michigan Math.J.42:345-356 (1995).

[14] S.Parrott, Unitary dilations for commuting contractions, Pacific J. Math.34:481-490 (1970).

[15] V.I.Paulsen, Completely bounded maps and dilations, Pitman Research Notes in Mathematics Series 146, 1986.

[16] W.Rudin, Functional Analysis, Mc Graw Hill International Editions, 1991.

[17] S.Strătilă, L.Zsidó, Lectures on Von Neumann algebras, Abacus Press, 1979.

[18] B.Sz.Nagy, C.Foiaş, Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Spaces, North Holland Publishing Company, 1970.

[19] N.T.Varopoulos, On an inequality of Von Neumann and an application of the metric theory of tensor products to operators theory, J.Funct.Anal.16:83-100 (1974).

[20] D.Werner, Funktionalanalysis, Springer Verlag, 1995.

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die ausdrücklich angegebenen Hilfsmittel benutzt habe.
Saarbrücken, den 17.Januar 2003