Zur Spektraltheorie vertauschender Operatortupel
Fredholmtheorie und subnormale Operatortupel

Dissertation

zur Erlangung des Grades
des Doktors der Naturwissenschaften
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultäten
der Universität des Saarlandes

von

Eric Réolon

Saarbrücken, Juni 2004

Tag des Kolloquiums:	**23. Juli 2004**
Dekan:	**Prof. Dr. Jörg Eschmeier**
Berichterstatter:	**Prof. Dr. Jörg Eschmeier**
	Prof. Dr. Ernst Albrecht

Meiner Frau Bärbel,
meinen Kindern Yannick und Amélie,
meinen Eltern Georges und Anneliese.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

In dieser Arbeit geht es um drei Themen aus dem Gebiet der mehrdimensionalen Spektraltheorie. Sie handelt zum einen von einer mehrdimensionalen Indexformel (Kapitel 1), zum anderen von analytisch parametrisierten Komplexen (Kapitel 2) und zuletzt von subnormalen Operatortupeln (Kapitel 3). Alle drei Themen bilden in sich geschlossene Einheiten und können unabhängig voneinander gelesen werden.

Im Zentrum der Untersuchungen stehen vertauschende und wesentlich vertauschende Operatortupel $T = (T_1, ..., T_n)$ auf Banach- und Hilberträumen. Der Koszul-Komplex eines solchen Tupels, ein geeignet definierter linearer Komplex, ist eines der zentralen Objekte der mehrdimensionalen Spektraltheorie. Mit seiner Hilfe kann man für n-Tupel von Opertoren Spektren definieren, d.h. i.Allg. kompakte Teilmengen des $\mathbb{C}^n$, aus deren spezieller Gestalt sich wiederum Erkenntnisse über die zu untersuchenden Tupel gewinnen lassen.

In den ersten beiden Kapiteln dieser Arbeit steht hierbei der Koszul-Komplex selber im Mittelpunkt. Im ersten Kapitel wird eine Klasse von Operatortupeln untersucht, denen man über die Euler-Charakteristik ihres Koszul-Komplex über geeigneten Mengen einen Index zuordnen kann. Es handelt sich bei diesem Index um eine Verallgemeinerung des klassischen Fredholm-Index eines einzelnen Operators. Wir beweisen eine mehrdimensionale Indexformel für stetige Funktionalkalküle wesentlich vertauschender Tupel $T = (T_1, ..., T_n)$ auf Banachräumen, die es erlaubt, den Index eines Bildtupels $g(T) = (g_1(T), ..., g_n(T))$ zu berechnen mit Hilfe des Abbildungsgrades von g. Im zweiten Kapitel geht es um analytisch parametrisierte Komplexe. Ausgangspunkt ist wieder der Koszul-Komplex, der in kanonischer Weise ein Komplex dieser Art über dem $\mathbb{C}^n$ ist. Aussagen über den Koszul-Komplex und damit über das zugrundeliegende Operatortupel zu gewinnen ist auch Ziel dieses Kapitels. Dennoch beweisen wir unsere Resultate in einem allgemeineren Rahmen: Wir betrachten von Anfang an analytisch parametrisierte Komplexe über komplexen Mannigfaltigkeiten. Unter anderem zeigen wir, dass der Koszul-Komplex der induzierten Multiplikationsoperatoren über allen Steinschen offenen Teilmengen des Fredholmbereiches separierte Kohomologiegruppen besitzt. Genauer beweisen wir, dass die Kohomologiegruppen versehen mit ihrer Quotiententopologie nukleare Fréchetträume sind. Angewendet auf den Koszul-Komplex eines Operatortupels lassen sich hiermit spektrale Inklusionen für quasiähnliche Operatortupel herleiten. Im dritten Kapitel werden subnormale und wesentlich subnormale Operatortupel betrachtet. Hierbei spielt weniger der Koszul-Komplex eine Rolle, als vielmehr die mit Hilfe des Koszul-Komplex definierten gemeinsamen Spektren und ihre genauere Struktur. Wir untersuchen einige grundlegende Fragen zu subnormalen Operatortupeln, wie etwa die Frage nach der C^*-Algebra, die von einem solchen Tupel erzeugt wird. Es handelt sich bei diesen Fragen zumeist um Verallgemeinerungen wohlbekannter eindimensionaler Resultate. Wir führen aber auch eine neue Klasse subnormaler Operatortupel ein, die dazu geeignet ist, eine Reihe von klassischen Ergebnissen, die bisher unabhängig voneinander zu sein schienen, simultan zu behandeln und auf natürliche Weise zu erklären.

Soweit zum groben Inhalt dieser Arbeit. Im Folgenden sollen die einzelnen Kapitel genauer beschrieben werden, ohne dabei vollständig zu sein.

Kapitel 1

Der Index ist zweifelsohne eine der am häufigsten studierten Invarianten in der Operatorentheorie. Für einzelne Operatoren existiert er immer dann, wenn der Operator einen endlich-dimensionalen Kern und ein endlich-kodimensionales Bild hat, und ist dann als die Differenz dieser beiden Dimensionen definiert. Ein klassisches Beispiel ist der Toeplitz-Operator T_φ mit stetigem, nullstellenfreien Symbol φ auf dem Hardy-Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf der Kreislinie. Man kann zeigen, dass T_φ in diesem Fall einen Index besitzt und dass der Index dann gleich ist der negativen Umlaufzeit von φ um 0 ([Dou72], Theorem 7.26). Dies ist eines der einfachsten Beispiele einer Indexformel.

Auch für geeignete vertauschende bzw. wesentlich vertauschende Operatortupel lässt sich ein Index definieren. Besitzt ein solches Tupel $T = (T_1, ..., T_n)$ von stetigen Operatoren auf einem Banachraum E darüberhinaus einen wesentlichen Kalkül $\Phi : C(\mathscr{K}) \to \mathcal{C}(E)$, wobei $\mathscr{K}$ eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{C}^n$ ist und $\mathcal{C}(E)$ für die Calkin-Algebra von E steht, so werden wir zeigen, dass für alle $h = (h_1, ..., h_n) \in C(\mathscr{K})^n$ und alle $w = (w_1, ..., w_n) \notin h(\mathscr{K})$ der Index eines Repräsentanten R des Tupels $(w_1 - \Phi(h_1), ..., w_n - \Phi(h_n))$ gegeben ist durch

$$\operatorname{ind} R = \sum \deg(h, C, w) \operatorname{ind}_C T,$$

wobei die Summe sich über die endlich vielen beschränkten Zusammenhangskomponenten C von $\mathbb{C}^n \backslash \mathscr{K}$ mit $\deg(h, C, w) \neq 0$ erstreckt, $\deg(h, C, w)$ der Abbildungsgrad von h um w relativ C ist und $\operatorname{ind}_C T$ für den Index von T über C steht.

Dieses Resultat verallgemeinert ein Ergebnis von Eschmeier und Putinar in [EP96] (Theorem 10.3.15). Dort wird diese Indexformel für wesentlich normale Operatortupel auf Hilberträumen bewiesen, die automatisch einen wesentlichen Kalkül besitzen. Der Beweis benutzt Methoden aus der algebraischen Topologie, die wesentlich von der Hilbertraumsituation abhängen.

Unser Beweisansatz ist ein anderer. Wir zeigen, dass sich das Resultat von Eschmeier und Putinar auch mit elementaren Mitteln aus der mengentheoretischen Topologie, Analysis und der Homotopietheorie der Einheitssphären beweisen lässt. Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, nicht nur das bekannte Ergebnis, sondern auch die oben beschriebene Verallgemeinerung zu liefern.

Der Aufbau des ersten Kapitels sieht wie folgt aus:

In §1.1 fassen wir die zentralen Definitionen und Ergebnisse aus der mehrdimensionalen Indextheorie zusammen. Wir beschränken uns hierbei auf diejenigen, die für das Folgende relevant sind.

In §1.2 stellen wir die topologischen Grundlagen zur Verfügung. Viele der in diesem Paragraphen präsentierten Sätze dürfen als klassisch und wohlbekannt bezeichnet werden. Dennoch beweisen wir sehr ausführlich den folgenden Homotopie-Satz: Sei $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^n$ eine kompakte Menge, sei $\mathscr{C}$ die Menge der beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C}^n \backslash \mathscr{K}$ und seien f und g zwei stetige, nullstellenfreie $\mathbb{C}^n$-wertige Funktionen auf $\mathscr{K}$. Dann sind äquivalent:

(i) f und g sind homotop;

(ii) $\deg(f, C) = \deg(g, C)$ für alle $C \in \mathscr{C}$.

Dieser Satz taucht indirekt bereits 1940 in einer Arbeit von Eilenberg auf ([Eil40]). Der Beweis beruht dort auf einer von Eilenberg konstruierten Kohomologie-Theorie mit Zyklen und Cozykeln. In dieser Arbeit wird der Satz hingegen mit elementaren Methoden erbracht. Dem Autor ist keine Stelle in der Literatur bekannt, an der der Beweis auf diese Weise geführt worden wäre.

In §1.3 schließlich beweisen wir die angekündigte Indexformel.

Kapitel 2

Weder die Spektren noch die wesentlichen Spektren zweier quasiähnlicher vertauschender Operatortupel müssen i.Allg. gleich sein. M. Putinar konnte in [Put92] jedoch unter Ausnutzung eines geeigneten Garbenmodells zeigen, dass in der Situation vertauschender Operatortupel T und S, die beide die Eigenschaft (β) besitzen, sehr wohl $\sigma(T) = \sigma(S)$ und $\sigma_e(T) = \sigma_e(S)$ gilt. Hierbei steht σ für das Taylor- und σ_e für das wesentliche Taylorspektrum eines vertauschenden Tupels. Für einzelne quasiähnliche Operatoren betrachtet J. Eschmeier in [Esc00] eine asymmetrische Situation. Es gelingt ihm für zwei quasiähnliche Operatoren T und S, für die nur T Eigenschaft (β) besitzt, die spektralen Inklusionen $\sigma(T) \subset \sigma(S)$ und $\sigma_e(T) \subset \sigma_e(S)$ zu zeigen. Kernidee von Eschmeier ist es nachzuweisen, dass die Abbildung $M_z - S : \mathscr{O}(U, E) \to \mathscr{O}(U, E)$ für alle offenen Teilmengen U des Fredholmbereiches von S abgeschlossenes Bild hat. Hierbei bezeichnet $\mathscr{O}(U, E)$ den Fréchetraum der holomorphen E-wertigen Funktionen und $M_z : \mathscr{O}(U) \to \mathscr{O}(U)$ den Multiplikationsoperator mit der Variablen, d.h. den durch $(M_z f)(w) = wf(w)$ für alle $w \in U$ definierter Operator. Ein Ziel dieses Kapitels ist es zu zeigen, dass ein entsprechendes Ergebnis auch im mehrdimensionalen Fall richtig bleibt. Der entscheidende Beweisschritt ist auch hier, für ein vertauschendes n-Tupel T auf einem Banachraum E nachzuweisen, dass das Bild der Abbildung

$$\mathscr{O}(U, E^n) \to \mathscr{O}(U, E), \quad (f_i)_{i=1}^n \mapsto \sum_{i=1}^n (M_{z_i} - T_i) f_i$$

für bestimmte Steinsche offene Mengen U abgeschlossen ist.

Dieses Resultat kann man unter geeigneten Voraussetzungen im allgemeineren Rahmen endlicher, analytisch parametrisierter Banachraum-Komplexe auf einer komplexen Mannigfaltigkeit Ω beweisen. Man versteht hierunter einen Komplex

$$\cdots \to E^p \xrightarrow{\alpha^p(z)} E^{p+1} \xrightarrow{\alpha^{p+1}(z)} E^{p+2} \to \cdots \quad (z \in \Omega),$$

bei dem E^p, $p \in \mathbb{Z}$, Banachräume sind, $\alpha^p(z)$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ und alle $z \in \Omega$ stetige Operatoren sind und $\alpha^p(z)$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ holomorph vom Parameter z abhängt. Einem solchen Komplex von Banachräumen ist in natürlicher Weise für jede offene Menge $U \subset \Omega$ ein Fréchetraum-Komplex zugeordnet:

$$\cdots \to \mathscr{O}(U, E^p) \xrightarrow{\alpha_U^p} \mathscr{O}(U, E^{p+1}) \xrightarrow{\alpha_U^{p+1}} \mathscr{O}(U, E^{p+2}) \to \cdots,$$

wobei α_U^p für die durch $(\alpha_U^p f)(z) = \alpha^p(z) f(z)$ definierte Abbildung steht.

Die Koszul-Komplexe $K^\bullet(z - T, E)$, $z \in \mathbb{C}^n$, die mit einem vertauschenden Operatortupel T assoziiert sind, liefern in natürlicher Weise einen endlichen, über $\mathbb{C}^n$ analytisch parametrisierten Banachraum-Komplex.

Der zentrale Satz, den wir beweisen werden, lautet (Satz 2.2.1): Ist $(E^p, \alpha^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ ein endlicher, über der komplexen Mannigfaltigkeit Ω analytisch parametrisierter Banachraum-Komplex und ist U eine Steinsche offene Teilmenge eines geeignet definierten Fredholmbereiches von $(E^p, \alpha^p)_{p\in\mathbb{Z}}$, so ist für alle $p \in \mathbb{Z}$ der Quotient

$$\ker \alpha_U^p / \operatorname{im} \alpha_U^{p-1}$$

ein nuklearer Fréchetraum und das Bild von $\operatorname{im} \alpha_U^{p-1}$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ damit abgeschlossen.

Als eine Folgerung ergibt sich die angesprochene Verallgemeinerung der Sätze von Putinar und Eschmeier (vgl. Korollar 2.5.3): Sind S und T quasiähnliche vertauschende Operatortupel und besitzt T die Eigenschaft (β), so gilt $\sigma(T) \subset \sigma_c(S)$ und $\sigma_e(T) \subset \sigma_{e,c}(S)$. Hierbei stehen σ_c für das Split- und $\sigma_{e,c}$ für das wesentliche Split-Spektrum eines vertauschenden Tupels. Sind die Tupel auf Hilberträumen definiert, gilt $\sigma(T) \subset \sigma(S)$ und $\sigma_e(T) \subset \sigma_e(S)$.

Hiermit haben wir die Kernaussagen des zweiten Kapitels beschrieben. Darüberhinaus enthält Kapitel 2 einige weitere Resultate über analytisch parametrisierte Komplexe, die vielleicht auch unabhängig von der Spektraltheorie vertauschender Operatortupel von einigem Interesse sind.

In §2.1 werden zunächst einige Definitionen eingeführt, die ständig benötigt werden.

In §2.2 wird der bereits weiter oben beschriebene Satz über die Abgeschlossenheit der Bilder bestimmter Randoperatoren in Komplexen analytischer Banachraum-wertiger Funktionen bewiesen. Der Beweis ist technisch und aufwendig, und ein besonderer Ehrgeiz dieses Paragraphen ist es, dennoch einen übersichtlichen und vollständigen Beweis zu erbringen.

In §2.3 wird gezeigt, dass man für analytisch parametrisierte Komplexe dualer Banachräume unter entsprechenden Bedingungen sogar die Abgeschlossenheit der Bilder in einer natürlichen schwach-$*$-Topologie zeigen kann (Satz 2.3.1).

In §2.4 führen wir den Dualitätsgedanken zu Ende. Mit einem analytisch parametrisierten Komplex von dualen Banachräumen ist in natürlicher Weise ein prädualer Komplex von (DF)-Räumen verbunden. Bezeichnen wir einen analytisch parametrisierten Komplex dualer Banachräume auf Ω mit $(\tilde{E}^p, \tilde{\alpha}^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ und mit α_p^U die zu $\tilde{\alpha}_U^p$ prädualе Abbildung ($p \in \mathbb{Z}$, $U \subset \Omega$ offen), so zeigen wir den folgenden Satz (Satz 2.4.1): Für geeignete Steinschen offenen Teilmengen U von Ω ist die Vervollständigung von $\ker \alpha_{p-1}^U \Big/ \overline{\operatorname{im} \alpha_p^U}$ ein nuklearer und reflexiver (DF)-Raum und es gilt

$$\left(\left(\ker \alpha_{p-1}^U \Big/ \overline{\operatorname{im} \alpha_p^U}\right)^{\wedge}\right)_{\beta}' \cong \ker \tilde{\alpha}_U^p / \operatorname{im} \tilde{\alpha}_U^{p-1},$$

wobei der topologische Dualraum mit seiner starken Topologie versehen sei.

Den Abschluss des zweiten Kapitels bildet §2.5. Dort wenden wir die gewonnen Erkenntnisse auf vertauschende Operatortupel an und beweisen insbesondere die obige Aussage über spektrale Inklusionen für quasiähnliche Operatortupel.

Kapitel 3

Subnormale Operatoren und subnormale Operatortupel sind zwei prominente Klassen stetiger Operatoren auf Hilberträumen. Ein einfaches Beispiel eines einzelnen subnormalen Operators ist der unilaterale Shift bzw. der Multiplikationsoperator mit der Variablen auf dem Hardy-Raum der quadrat-integrierbaren Funktionen auf der Kreislinie. Im dritten Kapitel beweisen wir eine Reihe von Resultaten für allgemeine subnormale Operatortupel, die in der Literatur zuerst für das Beispiel des unilateralen Shift-Operators auf dem Hardy-Raum über dem Einheitskreis nachgewiesen wurden.

In §3.1 werden zunächst die zentralen Begriffe zur Verfügung gestellt, die in späteren Paragraphen benötigt werden.

In §3.2 wird die Frage nach der C^*-Algebra gestellt, die von einem subnormalen Operatortupel erzeugt wird. Motiviert wird diese Fragestellung durch wohlbekannte Ergebnisse für einzelne subnormale Operatoren. So ist beispielsweise bekannt, dass die C^*-Algebra, die vom unilateralen Shift T_z erzeugt wird, von der speziellen Gestalt

$$C^*(T_z) = \{T_f + K; f \in C(\mathbb{T}), K \text{ kompakt}\}$$

ist ([Cob67]). Hierbei ist T_f der Toeplitz-Operator mit stetigem Symbol f und $\mathbb{T}$ die Einheitskreislinie. Der Operator T_z ist ein subnormler Operator, der zudem irreduzibel und wesentlich normal ist. Wir werden zeigen, dass der obige Satz korrekt bleibt, wenn man T_z ersetzt durch ein beliebiges subnormales Operatortupel S, das irreduzibel und wesentlich normal ist, und $\mathbb{T}$ durch das Normalenspektrum $\sigma_n(S)$ von S, d.h. das Spektrum einer minimalen normalen Erweiterung (Satz 3.2.10). Wir beantworten sodann die Frage, wann die C^*-Algebra, die von einem Opertortupel des obigen Typs erzeugt wird, bereits von einem kürzeren Operatortupel desselben Typs erzeugt wird (Satz 3.2.13).

In §3.3 verallgemeinern wir zwei weitere Resultate, die für einzelne subnormale Operatoren wohlbekannt sind. Es geht hierbei um die C^*- und W^*-Inklusionseigenschaft, die im eindimensionalen Fall von Keough untersucht wurden ([Keo79],[Keo81]). Eine der Kernaussagen lässt sich wie folgt formulieren (Satz 3.3.6): Ist S ein subnormales Operatortupel, so sind äquivalent:

(i) $f(\sigma_n(S)) \subset \sigma(T_f)$ für alle $f \in C(\sigma_n(S))$;

(ii) $\sigma_n(S) = \sigma_{ap}(S)$.

Hierbei bezeichnet T_f den Toeplitz-Operator mit Symbol f bzgl. S und steht $\sigma_{ap}(S)$ für das approximative Punktspektrum von S.

Zyklische subnormale Operatortupel wurden von Hastings in [Has78] klassifiziert. Demnach existiert zu jedem zyklischen subnormalen n-Tupel S von Operatoren ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ mit kompakten Träger in $\mathbb{C}^n$ derart, dass S unitär äquivalent ist zum Tupel der Multiplikationsoperatoren mit den Koordinatenfunktionen auf $P^2(\mu)$. Hierbei ist $P^2(\mu)$ der $L^2(\mu)$-Abschluss der Polynome $\mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$ in $L^2(\mu)$. Ein großer Nutzen dieses Satzes liegt darin, gegebenenfalls operatortheoretische Fragen auf funktionen- oder maßtheoretische zurückzuführen.

In §3.4 werden wir den Satz von Hastings verallgemeinern, indem wir von einer beliebigen kompakten Menge $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^n$ ausgehen und die Algebra der Polynome ersetzen durch abgeschlossene Algebren $\mathcal{F} \subset C(\mathscr{K})$ mit $\mathbb{C}[z_1, ..., z_n]|_{\mathscr{K}} \subset \mathcal{F}$. Für subnormale Operatortupel S, die einen stetigen $\mathcal{F}$-Kalkül besitzen und eine verallgemeinerte Zyklizitätsbedingung erfüllen, zeigen wir, dass sie unitär äquivalent sind zum Tupel der Multiplikationsoperatoren mit den Koordinatenfunktionen auf dem Raum $\overline{\mathcal{F}}^{L^2(\mu)}$, wobei μ wiederum ein geeignetes Maß ist (Satz 3.4.4). Wie der Satz von Hastings, erlaubt dieses Resultat, die neue Klasse subnormaler Operatortupel mit funktionen- und maßtheoretischen Methoden zu studieren. Dass eine solche Vorgehensweise sinnvoll sein kann, wird im nächsten Paragraphen gezeigt.

In §3.5 nutzen wir die Ergebnisse des vorangegangenen Paragraphen, um Quasiähnlichkeitsfragen für konkrete Klassen subnormaler Operatortupel zu beantworten. In diesen Fällen gehen wir davon aus, dass die kompakte Menge $\mathscr{K}$ Aleksandrov-regulär ist und dass die Algebra $\mathcal{F}$ gegeben ist durch $A_0(\mathscr{K}) = \overline{\mathscr{O}(\mathscr{K})|_{\mathscr{K}}}$. Viele wichtige kompakte Mengen sind Aleksandrov-regulär, so etwa die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{\mathbb{B}}^n$ und der abgeschlossene Polyzylinder $\overline{\mathbb{D}}^n$. Allgemeiner ist der Abschluss jedes beschränkten symmetrischen oder streng pseudokonvexen Gebietes im $\mathbb{C}^n$ Aleksandrov-regulär. Um die beiden wichtigsten Sätze dieses Paragraphen formulieren zu können, greifen wir einigen Definitionen vor: Für eine Aleksandrov-reguläre kompakte Menge $\mathscr{K}$ und ein reguläres Borelmaß μ mit $\operatorname{supp}(\mu) \subset \mathscr{K}$ setzen wir $H_0^2(\mu) = \overline{A_0(\mathscr{K})}^{L^2(\mu)}$. Für den Shilov-Rand von $\mathscr{K}$ bzgl. $A_0(\mathscr{K})$ schreiben wir $\partial_0\mathscr{K}$. Sind dann S_z^{μ} und $S_z^{\tilde{\mu}}$ die Multiplikationsoperatoren mit den Koordinatenfunktionen auf $H_0^2(\mu)$ und $H_0^2(\tilde{\mu})$ respektive und gilt $\sigma(S_z^{\mu}) \subset \mathscr{K}$, $\sigma(S_z^{\tilde{\mu}}) \subset \mathscr{K}$ und $\operatorname{supp}(\tilde{\mu}) \subset \partial_0\mathscr{K}$, so sind äquivalent (Satz 3.5.13):

(i) S_z^{μ} und $S_z^{\tilde{\mu}}$ sind quasiähnlich;

(ii) es existieren $A_0(\mathscr{K})$-zyklische Funktionen h für $H_0^2(\tilde{\mu})$ und g für $H_0^2(\mu)$ mit

$$\int |fh|^2 d\tilde{\mu} \leq \int |f|^2 d\mu^{\partial_0 \mathscr{K}} \qquad \text{und} \int |fg|^2 d\mu \leq \int |f|^2 d\tilde{\mu}$$

für alle $f \in A_0(\mathscr{K})$.

Dieses Ergebnis verallgemeinert simultan Sätze von Hastings ([Has78], Theorem 2) und Athavale ([Ath88], Theorem 1).

Für $\mathscr{K}$-Isometrien, d.h. subnormale Operatortupel mit $\sigma(S) \subset \mathscr{K}$ und $\sigma_n(S) \subset \partial_0\mathscr{K}$, gilt (Satz 3.5.20): Ist $\mathscr{K}$ Aleksandrov-regulär und sind S und $\tilde{S}$ zwei $\mathscr{K}$-Isometrien mit minimalen normalen Erweiterungen N und $\tilde{N}$, so folgt aus der Quasiähnlichkeit von S und $\tilde{S}$ die unitäre Äquivalenz von N und $\tilde{N}$. Für $\mathscr{K} = \overline{\mathbb{B}}^n$ und $\mathscr{K} = \overline{\mathbb{D}}^n$ nennt man die $\mathscr{K}$-Isometrien auch sphärische und torische Isometrien. Für diese Spezialfälle wurde der obige Satz bereits 1990 von Athavale in [Ath90] bewiesen.

In §3.6 schließlich werden wesentlich subnormale Operatortupel behandelt. Grundlage dieses Paragraphen bildet eine Arbeit von Feldman für einzelne wesentlich subnormale Operatoren ([Fel99]). Das Hauptresultat lässt sich wie folgt formulieren (Satz 3.6.1): Für ein beliebiges Operatortupel S sind äquivalent:

(i) S ist ein wesentlich subnormales Tupel;

(ii) S besitzt eine wesentlich normale Erweiterung;

(iii) S besitzt eine Erweiterung zu einer kompakten Störung eines normalen Tupels.

Danksagung

Viele Menschen haben zum Gelingen dieser Arbeit auf unterschiedlichste Art und Weise beigetragen.

Allen voran gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. Jörg Eschmeier. Herr Prof. Eschmeier hat mich nicht nur zu den verschiedenen Fragestellungen dieser Arbeit angeregt, sondern hat mich während der letzten Jahre fachlich hervorragend betreut und beraten. Ohne seine Erfahrungen und sein Wissen wären einige Sätze und Beweise dieser Arbeit nicht so klar geworden, wie sie jetzt sind. Herr Prof. Eschmeier hat mich auch gefördert: Durch ein sicherlich wohlwollendes Gutachten war es mir möglich, im Rahmen eines Forschungsstipendiums des DAAD[1] ein akademisches Jahr an der University of California in Santa Barbara, Kalifornien, USA, zu verbringen. Seinem Engagement, seiner Hilfsbereitschaft und seiner Zeit, die er für mich investiert hat, gilt mein ausdrückliches Dankeschön.

Mein Gastgeber in den USA war Herr Prof. Dr. Mihai Putinar. Auch er hat mir fachlische Anregung gegeben und war Mitinitiator von Teilen des dritten Kapitels dieser Arbeit. Für seine Gastfreundlichkeit, seine Bemühungen um meine Person und viele interessante mathematische und nicht-mathematische Gespräche sei Herrn Prof. Putinar herzlich gedankt.

Vielen Dank auch Herrn Prof. Dr. Ernst Albrecht. Er ist als eine der treibenden Kräfte der Fachrichtung Mathematik an der Universität des Saarlandes stets engagiert und hilfsbereit. Auch ihm verdanke ich durch ein Zweitgutachten die Möglichkeit des Forschungsaufenthaltes in den USA.

Das durch den DAAD ermöglichte Jahr in den USA war reich an neuen Erfahrungen und neuen Erkenntnissen. Vielen Dank für die finanzielle Unterstützung.

Ohne Freunde hätte die Entstehung dieser Arbeit nur halb so viel Freude gemacht! Torsten Becker und Dr. Michael Didas sind die beiden Hauptprotagonisten, mit denen nicht nur der fachliche Diskurs, sondern auch der private Kontakt etwas Besonderes war. Vielen Dank für die ungezählten mathematischen Diskussionen und den hemmungslosen Ideenaustausch.

[1] Deutscher Akademischer Austauschdienst

Bei der Entstehung dieser Arbeit hat mich natürlich auch meine Familie unterstützt. Insbesondere die Leistung meiner Frau Bärbel, die große zeitliche Opfer erbracht hat und dennoch sehr verständnisvoll war, und die mir in dieser Zeit zwei wundervolle Kinder, Yannick und Amélie, geschenkt hat, sei an dieser Stelle hervorgehoben. Ich liebe Dich! Meinen Eltern gilt meine Hochachtung, weil auch sie durch ihre Aufmerksamkeit, ihre Geduld, ihre moralische und finanzielle Unterstützung sowie ebenfalls ihr großes Verständnis zum Gelingen des Promotionsvorhaben beigetragen haben.

Ich freue mich, wenn ich allen Beteiligten durch den Abschluss dieser Arbeit einen Teil ihrer „Investitionen" zurückgeben kann.

Symbole

Die nachfolgenden Symbole werden frei benutzt. Hierbei sei n stets eine positive natürliche Zahl.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$;
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$;
$\mathbb{T}^n = \{(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_i| = 1$ für $i = 1, ..., n\}$, der Torus im $\mathbb{C}^n$;
$\mathbb{S}_\delta^{n-1} = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \delta\}$, die δ-Sphäre im $\mathbb{R}^n$ $(\delta > 0)$;
$\mathbb{S}^{n-1} = \mathbb{S}_1^{n-1}$, die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$;
$\mathbb{S} = \mathbb{S}^1$;
$\mathbb{D}^n = \{(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_i| < 1$ für $i = 1, ..., n\}$, der offene Einheitspolyzylinder im $\mathbb{C}^n$;
$\overline{\mathbb{D}}^n$, der abgeschlossene Einheitspolyzylinder im $\mathbb{C}^n$;
$\mathbb{D} = \mathbb{D}^1$;
$\mathbb{B}^n = \{(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n : \sum_{i=1}^n |z_i|^2 < 1\}$, die offene Einheitskugel im $\mathbb{C}^n$;
$\overline{\mathbb{B}}^n$, die abgeschlossene Einheitskugel im $\mathbb{C}^n$;
$\mathbb{R}_*^n = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$;
$\mathbb{C}_* = \mathbb{C} \backslash \{0\}$;
$C(\mathscr{K})$, die C^*-Algebra der stetigen Funktionen auf einer kompakten Menge $\mathscr{K}$;
$\|f\|_{\infty,\mathscr{K}} = \sup\{|f(z)| : z \in \mathscr{K}\}$ für $f \in C(\mathscr{K})$;
$\mathscr{O}(U)$, die holomorphen Funktionen auf einer offenen Teilmenge U einer komplexen Mannigfaltigkeit;
$\mathring{A}, \overline{A}$, das Innere und der Abschluss einer Teilmenge A eines topologischen Raumes;
$\mathcal{B}or(X)$, die Menge der Borelmengen eines topologischen Raumes X;
$M(\mathbb{C}^n)$, die Menge der regulären komplexen Borelmaße auf $\mathbb{C}^n$;
$M(B)$, die Menge $\{\mu \in M(\mathbb{C}^n) : \mathrm{supp}(\mu) \subset B\}$ für eine Teilmenge $B \subset \mathbb{C}^n$;
$M^+(B)$, die Menge der positiven Maße in $M(B)$;
$L^2(\mu) = L^2(\mathbb{C}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{C}^n), \mu)$ für ein Maß $\mu \in M(\mathbb{C}^n)$;
$L^\infty(\mu) = L^\infty(\mathbb{C}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{C}^n), \mu)$ für ein Maß $\mu \in M(\mathbb{C}^n)$;

Kapitel 0

Prolog: Mehrdimensionale Spektraltheorie

In dieser Arbeit wird unter einem *Operator* stets eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen verstanden. Die Menge der stetigen Operatoren zwischen topologischen Vektorräumen E und F wird mit $L(E,F)$ bezeichnet bzw. $L(E)$, falls $F = E$. Die kompakten Operatoren in $L(E,F)$ werden mit $K(E,F)$ bezeichnet bzw. $K(E)$, falls $F = E$. Die *Calkin-Algebra* $\mathcal{C}(E)$ eines Banachraumes E ist definiert als Banachraumquotient $L(E)/K(E)$.

0.1 Vertauschende Operatortupel, Koszul-Komplex und Taylor-Spektren

Für zwei Operatoren $A, B \in L(E)$ sei $[A,B] = AB-BA$. Ist E ein Banachraum, $n \in \mathbb{N}$ und $T = (T_1, ..., T_n)$ ein Tupel stetiger Operatoren auf E, so wird T *vertauschend* genannt, wenn $[T_i, T_j] = 0$ für $i, j = 1, ..., n$ gilt. J.L. Taylor hat in [Tay70a] zum Studium solcher Tupel den *Koszul-Komplex* herangezogen, um eine adäquate Verallgemeinerung des Spektrums eines einzelnen Operators auf die mehrdimensionale Situation zu erhalten. Beim Koszul-Komplex eines vertauschenden Operatortupels $T = (T_1, ..., T_n)$ auf einem Banachraum E handelt sich um einen Komplex $K^\bullet(T,E)$ der Form

$$0 \to \Lambda^0(s,E) \xrightarrow{\delta_T^0} \Lambda^1(s,E) \xrightarrow{\delta_T^1} \cdots \xrightarrow{\delta_T^{n-1}} \Lambda^n(s,E) \to 0, \tag{1}$$

wobei $s = (s_1, ..., s_n)$ für ein Tupel aus n Unbestimmten, $\Lambda^p(s)$ für die Formen vom Grad $p \in \{0, ..., n\}$ in den Unbestimmten $s_1, ..., s_n$, $\Lambda^p(s,E)$ für das Tensorprodukt $\Lambda^p(s) \otimes E$ und $\delta_T^p : \Lambda^p(s,E) \to \Lambda^{p+1}(s,E)$ für die Abbildung

$$\delta_T^p x = \left(\sum_{i=1}^n T_i s_i\right) \wedge x, \quad x \in \Lambda^p(s,E),$$

steht (für Details vgl. [EP96] oder [Vas82b]). Setzt man $\Lambda^{-l}(s,E) = \Lambda^{n+l}(s,E) = \{0\}$, $\delta_T^{-l} \equiv 0$ und $\delta_T^{n-1+l} \equiv 0$ für alle $l \in \mathbb{N}$, so ist der Koszul-Komplex (1) ein *Banachraum-Komplex*, d.h. eine Familie $(E^\bullet, \delta^\bullet) = (E^p, \delta^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ bestehend aus Banachräumen E^p und stetigen Operatoren $\delta^p : E^p \to E^{p+1}$ mit $\delta^{p+1}\delta^p = 0$ für alle $p \in \mathbb{Z}$. Die Kohomologiegruppen eines solchen Komplexes, d.h. die Quotienten $\ker \delta^p / \operatorname{im} \delta^{p-1}$, $p \in \mathbb{Z}$, werden mit $H^p(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ bezeichnet; es handelt sich hierbei kanonisch um (komplexe) Vektorräume.

Für $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$ und $T = (T_1, ..., T_n) \in L(E)^n$ sei $z - T = (z_1 - T_1, ..., z_n - T_n)$. Das *(Taylor-)Spektrum* $\sigma(T)$ von T ist die Menge derjenigen $z \in \mathbb{C}^n$, für die der Koszul-Komplex $K^\bullet(z-T,E)$ nicht exakt ist. Das *wesentliche (Taylor-)Spektrum* $\sigma_e(T)$ von T ist die Menge derjenigen $z \in \mathbb{C}^n$, für die für wenigstens ein $p \in \{0, ..., n\}$ der Quotient $H^p(K^\bullet(z-T,E)) = \ker \delta^p_{z-T} / \operatorname{im} \delta^{p-1}_{z-T}$ nicht endlich-dimensional ist. Der Raum $H^p(K^\bullet(z-T,E))$ heißt *p-te Kohomologiegruppe* des Koszul-Komplexes von T an der Stelle z. Die *Resolventenmenge* von T ist $\rho(T) = \mathbb{C}^n \backslash \sigma(T)$ und die *wesentliche Resolventenmenge* von T ist $\rho_e(T) = \mathbb{C}^n \backslash \sigma_e(T)$.

Vasilescu hat in [Vas77] gezeigt, dass im Falle eines Hilbertraumes $E = H$ eine andere Definition für das Spektrum gegeben werden kann: Ist $T = (T_1, ..., T_n) \in L(H)^n$ ein vertauschendes Tupel, $\mathcal{H} = \bigoplus_{p=0}^n \Lambda^p(s,H)$ (versehen mit der kanonischen Hilbertraumstruktur) und $\delta_{z-T} = \delta^0_{z-T} \oplus \cdots \oplus \delta^{n-1}_{z-T} \in L(\mathcal{H})$ $(z \in \mathbb{C}^n)$, so gilt

$$\sigma(T) = \{z \in \mathbb{C}^n : \delta_{z-T} + \delta^*_{z-T} \text{ ist nicht invertierbar in } L(\mathcal{H})\}.$$

Es kommt in diesem Fall also nur auf die Invertierbarkeit eines einzelnen geeignet definierten Hilbertraumoperators an. Dies lässt sich zur Definiton eines Spektrums für ein vertauschendes Tupel $a = (a_1, ..., a_n)$ von Elementen in einer unitalen C^*-Algebra $\mathcal{A}$ verallgemeinern ([Vas82]). Sei hierzu $\Lambda(s) = \bigoplus_{p=0}^n \Lambda^p(s)$ die äußere Algebra in den Unbestimmten $s = (s_1, ..., s_n)$ und seien für $j = 1, ..., n$ die Abbildungen $\sigma_j : \Lambda(s) \to \Lambda(s)$ definiert durch $\sigma_j(\xi) = s_j \wedge \xi$. Ist $a = (a_1, ..., a_n)$ ein vertauschendes Tupel in $\mathcal{A}$, d.h. gilt $a_i a_j = a_j a_i$ für $i,j = 1, ..., n$, und ist $\delta_a = a_1 \otimes \sigma_1 + \cdots + a_n \otimes \sigma_n \in \mathcal{A} \otimes L(\Lambda(s))$, so kann $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ definiert werden durch

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \{z \in \mathbb{C}^n : \delta_{z-a} + \delta^*_{z-a} \text{ ist nicht invertierbar in } \mathcal{A} \otimes L(\Lambda(s))\}.$$

Ist $\mathcal{B}$ eine weitere unitale C^*-Algebra und ist $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein unitaler $*$-Monomorphismus, so gilt für $\varphi(a) = (\varphi(a_1), ..., \varphi(a_n))$ die Gleichheit $\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \sigma_{\mathcal{B}}(\varphi(a))$, da φ den unitalen $*$-Monomorphismus $\varphi \otimes 1 : \mathcal{A} \otimes L(\Lambda(s)) \to \mathcal{B} \otimes L(\Lambda(s))$ induziert. Nach Gelfand-Naimark-Segal existieren ein Hilbertraum H und ein unitaler $*$-Monomorphismus $\varphi : \mathcal{A} \to L(H)$. In diesem Fall gilt

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \sigma_{L(H)}(\varphi(a)) = \sigma(\varphi(a)).$$

In einer unitalen Banachalgebra $\mathcal{A}$ sei für ein vertauschendes Tupel $a \in \mathcal{A}^n$ das Spektrum $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ definiert durch

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \sigma(L_a),$$

wobei rechts das Taylor-Spektrum des Multiplikationstupels $L_a = (L_{a_1}, ..., L_{a_n}) \in L(\mathcal{A})^n$ mit $L_{a_i} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $x \mapsto a_i x$ für $i = 1, ..., n$ gemeint ist. Im Falle einer unitalen C^*-Algebra $\mathcal{A}$ ist diese Definition konsistent mit der weiter oben gegebenen. Im Falle $\mathcal{A} = L(E)$, E Banachraum, gilt i.Allg. hingegen nur $\sigma(a) \subset \sigma(L_a)$. Die Menge $\sigma(L_a)$ wird in diesem Fall das *Split-Spektrum* von a genannt und auch mit $\sigma_c(a)$ bezeichnet.

0.2 Wesentlich vertauschende Operatortupel und wesentliche Spektren

Neben vertauschenden Operatortupeln werden für uns *wesentlich vertauschende Operatortupel* eine wichtige Rolle spielen. Es handelt sich hierbei um Tupel $T = (T_1, ..., T_n) \in L(E)^n$, E Banachraum, die $[T_i, T_j] \in K(E)$ für $i, j = 1, .., n$ erfüllen. Schreibt man $T + K(E)$ für das Tupel $(T_1 + K(E), ..., T_n + K(E)) \in \mathcal{C}(E)^n$, so ist ein wesentlich vertauschendes Tupel $T \in L(E)^n$ ein Tupel, für das $T + K(E)$ ein vertauschendes Tupel in der Calkin-Algebra $\mathcal{C}(E)$ ist. Für die in §0.1 definierten stetigen Operatoren δ_T^p, $p \in \mathbb{Z}$, gilt in diesem Fall $\delta_T^{p+1}\delta_T^p \in K(\Lambda^p(s, E), \Lambda^{p+2}(s, E))$, und die Folge $(\Lambda^p(s, E), \delta_T^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ ist nur noch ein *wesentlicher Banachraum-Komplex*. Ein wesentlicher Banachraum-Komplex ist eine Folge $(E^\bullet, \delta^\bullet) = (E^p, \delta^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ bestehend aus Banachräumen E^p und stetigen Operatoren $\delta^p : E^p \to E^{p+1}$ mit $\delta^{p+1}\delta^p \in K(E^p, E^{p+2})$ für alle $p \in \mathbb{Z}$. Auch im Falle eines wesentlich vertauschenden Tupels $T \in L(E)^n$ wird $K^\bullet(T, E)$ für die Sequenz $(\Lambda^p(s, E), \delta_T^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ geschrieben. Man nennt $K^\bullet(T, E)$ dann den *wesentlichen Koszul-Komplex* von T.

Ist $E = H$ ein Hilbertraum, so ist $\mathcal{C}(H)$ in natürlicher Weise eine unitale C^*-Algebra. Für ein wesentlich vertauschendes Tupel $T = (T_1, ..., T_n) \in L(H)^n$ definiert man

$$\sigma_e(T) = \sigma_{\mathcal{C}(H)}(T + K(H)). \tag{2}$$

Ist $T \in L(H)^n$ vertauschend, so folgt die Konsistenz dieser Definition mit der in §0.1 angegebenen Definition des wesentlichen Taylor-Spektrums aus [EP96], Corollary 2.6.11 und Lemma 2.6.13.

Für ein wesentlich vertauschendes Tupels $T = (T_1, ..., T_n) \in L(E)^n$ auf einem Banachraum E bezeichnen wir die Menge

$$\sigma_{e,c}(T) = \sigma_{\mathcal{C}(E)}(T + K(E))$$

als das *wesentliche Split-Spektrum* von T. Sie ist im Falle vertauschender Tupel T i.Allg. größer als das in §0.1 definierte wesentliche Spektrum $\sigma_e(T)$ von T.

0.3 Funktionalkalküle und spektrale Abbildungssätze

Unter einem *(Funktional-)Kalkül* für ein Tupel $a = (a_1, ..., a_n)$ in einer unitalen Banachalgebra $\mathcal{A}$ versteht man einen Algebrenhomomorphismus $\Phi_a : \mathcal{F} \to \mathcal{A}$ über einer Algebra $\mathcal{F}$ komplexwertiger Funktionen auf einer Menge $X \subset \mathbb{C}^n$ mit $1, z_1, ..., z_n \in \mathcal{F}$,[1] der $\Phi_a(1) = 1_{\mathcal{A}}$ und $\Phi_a(z_i) = a_i$ für $i = 1, ..., n$ erfüllt. Man sagt in diesem Fall auch, a besitze einen *$\mathcal{F}$-Kalkül*. Sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{A}$ mit geeigneten Topologien versehen und besitzt das Tupel $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathcal{A}^n$ einen $\mathcal{F}$-Kalkül Φ_a, der bzgl. diesen Topologien stetig ist, so ergeben sich aus guten Kenntnissen der Algebra $\mathcal{F}$ (inklusive ihrer topologischen Eigenschaften) oft interessante Strukturaussagen für das Tupel a.

Ist $\mathcal{A} = L(E)$ für einen Banachraum E und $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathcal{A}^n$ ein vertauschendes Tupel, so führt Taylor in [Tay70b] für jede offene Umgebung U des Spektrums $\sigma(a)$ den *holomorphen Funktionalkalkül von a über U* ein. Es handelt sich hierbei um einen $\mathscr{O}(U)$-Kalkül für a. Versieht man $\mathscr{O}(U)$ mit der Topologie der kompakt-gleichmäßigen Konvergenz, so ist dieser Kalkül stetig.

Ist $\mathcal{A}$ eine kommutative unitale C^*-Algebra und $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathcal{A}^n$, so ist $\delta_a + \delta_a^*$ genau dann invertierbar, wenn ein Tupel $b = (b_1, ..., b_n) \in \mathcal{A}^n$ existiert mit $a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = 1$ ([Vas82], Proposition 2.6). Ist $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ der Gelfand-Raum von $\mathcal{A}$, so ist $\hat{a}(\mathcal{M}(\mathcal{A})) = \sigma_{\mathcal{A}}(a)$, wobei $\hat{a} = (\hat{a}_1, ..., \hat{a}_n)$ und $\hat{a}_i$ die Gelfand-Transformierte von a_i, $i = 1, ..., n$, ist. (Man vergleiche hierfür und für das Folgende [Vas82].) Wird $\mathcal{A}$ als C^*-Algebra von $a_1, ..., a_n$ erzeugt, so ist $\hat{a} : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \to \sigma_{\mathcal{A}}(a)$ ein Homöomorphismus und $\Gamma_a : \mathcal{A} \to C(\sigma_{\mathcal{A}}(a))$, $b \mapsto \hat{b} \circ \hat{a}^{-1}$ ein $*$-Isomorphismus. Nützlich ist die Abbildung Γ_a im Falle eines *normalen Tupels a* in einer unitalen C^*-Algebra $\mathcal{B}$. Hierunter versteht man ein vertauschendes Tupel $a = (a_1, ..., a_n)$, für das die Elemente $a_1, ..., a_n$ normale Elemente in der C^*-Algebra $\mathcal{B}$ sind. Ist $M \subset \mathcal{B}$ eine Teilmenge und $1_{\mathcal{B}}$ das Einselement von $\mathcal{B}$, so bezeichne $C^*(M)$ die von M und $1_{\mathcal{B}}$ in $\mathcal{B}$ erzeugte C^*-Algebra. Für ein normales Tupel $a \in \mathcal{B}^n$ ist $\mathcal{A} = C^*(a)$ eine kommutative unitale C^*-Algebra und die Inverse $\Phi_a = \Gamma_a^{-1} : C(\sigma_{\mathcal{A}}(a)) \to C^*(a) \subset \mathcal{B}$ liefert den *stetigen Funktionalkalkül* des normalen Tupels a.

In einem Hilbertraum H versteht man unter einem *wesentlich normalen Tupel* $T = (T_1, ..., T_n) \in L(H)^n$ ein Tupel mit $[T_i, T_j], [T_i, T_j^*] \in K(H)$ für $i, j = 1, ..., n$. Da die Calkin-Algebra $\mathcal{C}(H)$ eines Hilbertraumes H eine unitale C^*-Algebra ist, ist ein Tupel $T \in L(H)^n$ genau dann wesentlich normal, wenn $T + K(H)$ ein normales Tupel in $\mathcal{C}(H)$ ist. Der stetige Kalkül von $T + K(H)$ liefert wegen (2) einen *stetigen wesentlichen Kalkül* für T, d.h. einen unitalen Algebrenhomomorphismus $\Phi_T : C(\sigma_e(T)) \to \mathcal{C}(H)$ über den stetigen Funktionen auf dem wesentlichen Spektrum von T mit $\Phi_T(z_i) = T_i + K(H)$ für $i = 1, ..., n$. I.Allg. wird in einem Banachraum E unter einem *wesentlichen $\mathcal{F}$-Kalkül* ($\mathcal{F}$ eine Funktionenalgebra wie zuvor) für ein Tupel $T \in L(E)^n$ ein unitaler Algebrenhomomorphismus $\Phi_T : \mathcal{F} \to \mathcal{C}(E)$ mit $\Phi_T(z_i) = T_i + K(E)$ für $i = 1, ..., n$ verstanden (in diesem Fall ist T automatisch wesentlich vertauschend). Ist $\mathcal{F} = C(\sigma_{e,c}(T))$, so wird Φ_T ein *stetiger wesentlicher Kalkül* genannt.

Ist $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathcal{A}^n$ ein Tupel in einer unitalen Banachalgebra $\mathcal{A}$ und ist $\Phi_a : \mathcal{F} \to \mathcal{A}$ ein Kalkül für a über einer Algebra $\mathcal{F}$ von Funktionen ($\mathcal{F}$ wie zuvor), so sei für $k \in \mathbb{N}$

[1] Gemeint sind die Abbildungen $X \to \mathbb{C}$, $(z_1, ..., z_n) \mapsto 1$, $(z_1, ..., z_n) \mapsto z_i$ für $i = 1, ..., n$.

die Abbildung $\Phi_a^k : \mathcal{F}^k \to \mathcal{A}^k$ definiert durch $\Phi_a^k(f_1, ..., f_k) = (\Phi_a(f_1), ..., \Phi_a(f_k))$. Es gilt der folgende spektrale Abbildungssatz für ein Tupel $a \in \mathcal{A}^n$:

- *Ist a vertauschend und $\Phi_a : C(\sigma_{\mathcal{A}}(a)) \to \mathcal{A}$ ein stetiger Kalkül für a, so ist*

$$\sigma_{\mathcal{A}}(\Phi_a^k(f)) = f(\sigma_{\mathcal{A}}(a))$$

  für alle $f \in C(\sigma_{\mathcal{A}}(a))^k$.

Mit Hilfe der oben gegebenen Definitionen

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \sigma(L_a) \quad \text{und} \quad \sigma_{\mathcal{A}}(\Phi_a^k(f)) = \sigma(L_{\Phi_a^k(f)})$$

führt man diesen spektralen Abbildungssatz zurück auf wohlbekannte spektrale Abbildungssätze für nicht-analytische Funktionalkalküle des Multiplikationstupels $L_a \in L(\mathcal{A})^n$ (vgl. [Alb74]).
Für einen Banachraum E und ein Tupel $T \in L(E)^n$ ergeben sich folgende wichtige Spezialfälle:

- *Ist E ein Hilbertraum, T ein normales Tupel und Φ_T der stetige Kalkül von T, so ist*

$$\sigma(\Phi_T^k(f)) = f(\sigma(T))$$

  für alle $f \in C(\sigma(T))^k$.

- *Ist E ein Hilbertraum, T ein wesentlich normales Tupel und Φ_T der stetige wesentliche Kalkül von T, so ist*

$$\sigma_{\mathcal{C}(E)}(\Phi_T^k(f)) = f(\sigma_e(T))$$

  für alle $f \in C(\sigma_e(T))^k$.

- *Ist T ein wesentlich vertauschendes Tupel und Φ_T ein stetiger wesentlicher Kalkül von T, so ist*

$$\sigma_{\mathcal{C}(E)}(\Phi_T^k(f)) = f(\sigma_{e,c}(T))$$

  für alle $f \in C(\sigma_{e,c}(T))^k$ (siehe Lemma 1.3.2).

Im Bezug auf den holomorphen Kalkül gilt ([EP96], Theorem 2.6.2):

- *Ist T vertauschend, $U \supset \sigma(T)$ offen und Φ_T der holomorphe Kalkül von T über U, so ist*

$$\sigma(\Phi_T^k(f)) = f(\sigma(T))$$

  für alle $f \in \mathscr{O}(U)^k$

Kapitel 1

Mehrdimensionale Indextheorie

1.1 Fredholmtheorie

Sind E, F Banachräume und ist $T \in L(E, F)$, so nennt man T einen *Fredholm-Operator*, wenn $\dim(\ker T) < +\infty$ und $\operatorname{im} T$ endlich-kodimensional in F ist, d.h. wenn $F/\operatorname{im} T$ endliche Dimension hat. In diesem Fall ist

$$\operatorname{ind} T = \dim(\ker T) - \dim(F/\operatorname{im} T)$$

der *(Fredholm-)Index* von T. Ein Operator $T \in L(E, F)$ ist genau dann ein Fredholm-Operator, wenn invertierbare Operatoren $A \in L(E)$, $B \in L(F)$ existieren und Operatoren $S, \tilde{S} \in L(F, E)$ so, dass

$$ST \in A + K(E) \quad \text{und} \quad T\tilde{S} \in B + K(F)$$

gilt ([Schr00], Satz 4.2.8). Ist $F = E$, so kann $A = B = \mathrm{id}_E$ und $\tilde{S} = S$ gewählt werden. Der Operator S heißt in diesem Fall eine *wesentliche Inverse* von T (Satz von Atkinson).

Der Index lässt sich folgendermaßen auf den mehrdimensionalen Fall verallgemeinern. Ist $T = (T_1, ..., T_n)$ ein vertauschendes Tupel stetiger Operatoren auf einem Banachraum E und sind die Kohomologiegruppen $H^p(K^\bullet(T, E))$ für $p = 0, ..., n$ endlich-dimensionale Vektorräume, so heißt das Tupel T *Fredholm-Tupel*. Der *Index* von T ist dann definiert durch

$$\operatorname{ind} T = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H^i(K^\bullet(T, E)).[1]$$

Man nennt einen Banachraum-Komplex $(E^\bullet, \delta^\bullet)$ einen *Fredholm-Komplex*, wenn es eine Familie $(\varepsilon^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ von Operatoren $\varepsilon^p \in L(E^p, E^{p-1})$ gibt mit

$$\delta^{p-1}\varepsilon^p + \varepsilon^{p+1}\delta^p \in \mathrm{id}_{E^p} + K(E^p) \tag{1.1}$$

[1] Es handelt sich hierbei um die Euler-Charakteristik des Koszul-Komplexes von T, vgl. [EP96], Lemma 10.2.4.

für alle $p \in \mathbb{Z}$. Die Familie $\varepsilon^\bullet = (\varepsilon^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ wird in diesem Fall eine *wesentlich splittende Familie* für $(E^\bullet, \delta^\bullet)$ genannt und verallgemeinert die Tatsache der Existenz einer wesentlichen Inversen für einen einzelnen Fredholm-Operator.

Für ein vertauschendes Operatortupel $T \in L(E)^n$ gilt ([EP96], Lemma 2.6.13):

$$\left.\begin{array}{l} T \text{ ist ein Fredholm-Tupel und} \\ \ker \delta_T^p \subset \Lambda^p(s,E) \text{ ist ein komple-} \\ \text{mentierter Teilraum für alle } p \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \iff K^\bullet(T,E) \text{ ist ein Fredholm-Komplex.}$$

Auch für ein wesentlich vertauschendes Tupel $T \in L(E)^n$ lässt sich unter geeigneten Bedingungen ein Index definieren. Hierzu wird der Begriff eines wesentlichen Fredholm-Komplexes benötigt: Ein wesentlicher Banachraum-Komplex $(E^\bullet, \delta^\bullet)$ heißt *wesentlicher Fredholm-Komplex*, wenn eine Familie $(\varepsilon^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ von Operatoren $\varepsilon^p \in L(E^p, E^{p-1})$ existiert mit (1.1). Formal entspricht die Definition somit derjenigen eines Fredholm-Komplexes, und auch in diesem Fall wird $\varepsilon^\bullet = (\varepsilon^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ eine *wesentlich splittende Familie* für $(E^\bullet, \delta^\bullet)$ genannt.

Sei $(E^\bullet, \delta^\bullet)$ ein wesentlicher Fredholm-Komplex und sei $\varepsilon^\bullet = (\varepsilon^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ eine beliebige wesentlich splittende Familie für $(E^\bullet, \delta^\bullet)$. Seien die stetigen Operatoren

$$D = D(\varepsilon^\bullet) : \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} E^{2p} \to \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} E^{2p+1} \quad \text{und} \quad D' = D'(\varepsilon^\bullet) : \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} E^{2p+1} \to \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} E^{2p}$$

definiert durch $D|_{E^{2p}} = \varepsilon^{2p} + \delta^{2p}$ und $D'|_{E^{2p+1}} = \varepsilon^{2p+1} + \delta^{2p+1}$ für alle $p \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$DD' \in L\left(\bigoplus E^{2p+1}\right)^{-1} + K\left(\bigoplus E^{2p+1}\right) \quad \text{und} \quad D'D \in L\left(\bigoplus E^{2p}\right)^{-1} + K\left(\bigoplus E^{2p}\right),$$

d.h. D und D' sind Fredholm-Operatoren ([EP96], §10.2).

Bezeichnet man die Menge der Fredholm-Operatoren zwischen zwei Banachräumen E, F mit $\mathrm{Fred}(E,F)$ und sind $T, S \in \mathrm{Fred}(E,F)$, so nennt man T und S *homotop*, wenn eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to \mathrm{Fred}(E,F)$ existiert mit $\gamma(0) = T$ und $\gamma(1) = S$. Die Abbildung γ wird eine *Homotopie* zwischen T und S genannt. Der Fredholm-Index ist homotopieinvariant, d.h. sind $T, S \in \mathrm{Fred}(E,F)$ homotope Fredholm-Operatoren, so ist $\operatorname{ind} T = \operatorname{ind} S$ ([Schr00], Satz 4.2.4). Zwei wesentlich splittende Familien $\varepsilon^\bullet$ und $\tilde{\varepsilon}^\bullet$ für einen wesentlichen Fredholm-Komplex $(E^\bullet, \delta^\bullet)$ induzieren stets homotope Fredholm-Operatoren $D(\varepsilon^\bullet)$ und $D(\tilde{\varepsilon}^\bullet)$; eine Homotopie $\gamma : [0,1] \to \mathrm{Fred}(\bigoplus E^{2p}, \bigoplus E^{2p+1})$ wird etwa gegeben durch $\gamma(t) = D((1-t)\varepsilon^\bullet + t\tilde{\varepsilon}^\bullet)$, $t \in [0,1]$. Dies zeigt, dass für eine beliebige wesentlich splittende Familie $\varepsilon^\bullet$ eines wesentlichen Fredholm-Komplexes $(E^\bullet, \delta^\bullet)$ die Definition

$$\operatorname{ind}(E^\bullet, \delta^\bullet) = \operatorname{ind} D(\varepsilon^\bullet)$$

sinnvoll, d.h. unabhängig von der Wahl von $\varepsilon^\bullet$ ist.

Ein wesentlich vertauschendes Tupel $T \in L(E)^n$ heißt *wesentliches Fredholm-Tupel*, wenn $K^\bullet(T,E)$ ein wesentlicher Fredholm-Komplex ist. In diesem Fall ist der *Index* von T definiert durch

$$\operatorname{ind} T = \operatorname{ind} K^\bullet(T,E).$$

Diese Definition des Index stimmt nach [EP96], Lemma 10.2.4, im Falle eines vertauschenden Operatortupels, dessen Koszul-Komplex ein Fredholm-Komplex ist, mit der zu Beginn dieses Paragraphen gegebenen Definition überein.

Im Folgenden geht es um Eigenschaften wesentlicher Fredholm-Tupel und ihrer Indizes. Für eine Teilmenge $M \subset L(E)$, E Banachraum, bezeichnet M' die Kommutanten-Algebra von M, d.h. die Menge $\{S \in L(E); TS = ST \text{ für alle } T \in M\}$.

Proposition 1.1.1 *Sei $T = (T_1, ..., T_n) \in L(E)^n$ ein wesentlich vertauschendes Tupel und $j \in \{1, ...n\}$. Ist T_j Fredholmsch, so ist T ein Fredholm-Tupel. Ist T_j sogar invertierbar und gilt $T_j \in \{T_1, ..., T_n\}'$, so ist T ein Fredholm-Tupel mit $\operatorname{ind} T = 0$.*

Beweis: Ist T_j Fredholmsch, so ist $L_{T_j+K(E)} \in L(\mathcal{C}(E))$ invertierbar. Nach Lemma 2.2.2 in [EP96] ist dann der Koszul-Komplex $K^\bullet(L_{T+K(E)}, \mathcal{C}(E))$ von $L_{T+K(E)} \in L(\mathcal{C}(E))^n$ exakt. Es folgt aus [EP96], Proposition 10.2.2, dass T ein wesentliches Fredholm-Tupel ist.

Für den zweiten Teil des Beweises nehmen wir zur Vereinfachung der Notation an, dass $j = 1$ ist. Der allgemeine Fall lässt sich analog beweisen.

Sei $T_1 \in \{T_2, ..., T_n\}'$ invertierbar und $S = T_1^{-1}$. Seien für $p \in \{1, ..., n\}$ die Abbildungen $\varepsilon^p : \Lambda^p(s, E) \to \Lambda^{p-1}(s, E)$ definiert durch

$$\varepsilon^p(xs_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_p}) = \begin{cases} (Sx)s_{i_2} \wedge \cdots \wedge s_{i_p}, & \text{falls } i_1 = 1 \\ \qquad 0, & \text{falls } i_1 \neq 1 \end{cases},$$

wobei $x \in E$ und $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$. Sei $\mathcal{I} = \{(i_1, ..., i_p) \in \{1, ..., n\}^p; 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n\}$. Für $I = (i_1, ..., i_p) \in \mathcal{I}$ sei $s_I = s_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_p}$.

Für $\xi = xs_I$ mit $x \in E$ und $I = (i_1, ..., i_p) \in \mathcal{I}$ mit $i_1 \neq 1$ gilt dann $\delta_T^{p-1}\varepsilon^p\xi = 0$ und

$$\begin{aligned} \varepsilon^{p+1}\delta_T^p\xi &= \varepsilon^{p+1}\left(\sum_{i=1}^n (T_ix)s_i \wedge s_I\right) = \varepsilon^{p+1}((T_1x)s_1 \wedge s_I) + \varepsilon^{p+1}\underbrace{\left(\sum_{i=2}^n (T_ix)s_i \wedge s_I\right)}_{\in \ker \varepsilon^{p+1}} \\ &= (ST_1x)s_I = \xi. \end{aligned}$$

Sei $\xi = xs_I$ mit $x \in E$ und $I = (1, i_2, ..., i_p) \in \mathcal{I}$, und sei $I' = (i_2, ..., i_p)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (\delta_T^{p-1}\varepsilon^p + \varepsilon^{p+1}\delta_T^p)\xi &= \delta_T^{p-1}((Sx)s_{I'}) + \varepsilon^{p+1}\left(\sum_{i=2}^n (T_ix)s_i \wedge s_I\right) \\ &= (T_1Sx)s_1 \wedge s_{I'} + \sum_{i=2}^n (T_iSx)s_i \wedge s_{I'} - \sum_{i=2}^n (ST_ix)s_i \wedge s_{I'}, \end{aligned}$$

wobei sich das negative Vorzeichen des letzten Summanden aus $s_i \wedge s_I = -s_1 \wedge s_i \wedge s_{I'}$ ergibt. Also ist

$$(\delta_T^{p-1}\varepsilon^p + \varepsilon^{p+1}\delta_T^p)\xi = \xi + \sum_{i=2}^n (T_iS - ST_i)x\, s_i \wedge s_{I'} = \xi.$$

Insgesamt folgt

$$\delta_T^{p-1}\varepsilon^p + \varepsilon^{p+1}\delta_T^p = \mathrm{id}_{\Lambda^p(s,E)}$$

für alle $p \in \mathbb{Z}$. Die Definition von $D = D(\varepsilon^\bullet)$ und $D' = D'(\varepsilon^\bullet)$ und eine einfache Rechnung zeigen, dass in diesem Fall die Operatoren DD' und $D'D$ beide invertierbar sind. Also ist auch D invertierbar und damit

$$\operatorname{ind} T = \operatorname{ind} D = 0.$$

■

In der nachfolgenden Proposition werden Eigenschaften des Index aufgelistet, die im Folgenden benötigt werden.

Proposition 1.1.2 *Sei $T = (T_1, ..., T_n) \in L(E)^n$ ein wesentlich vertauschendes Tupel. Ist T wesentlich Fredholm, so gilt:*

(a) *Ist π eine Permutation von $\{1, ..., n\}$, so ist $T_\pi = (T_{\pi(1)}, ..., T_{\pi(n)})$ ein wesentliches Fredholm-Tupel und es gilt $\operatorname{ind} T_\pi = \operatorname{ind} T$.*

(b) *Ist $K = (K_1, ..., K_n) \in K(E)^n$, so ist $T + K$ ein wesentliches Fredholm-Tupel und es gilt $\operatorname{ind}(T + K) = \operatorname{ind} T$.*

(c) *Ist $S = (S_1, ..., S_n) \in L(E)^n$ ein wesentlich vertauschendes Tupel derart, dass $\max\{\|S_i - T_i\|; i = 1, ..., n\}$ hinreichend klein ist, so ist S ein wesentliches Fredholm-Tupel und es gilt $\operatorname{ind} S = \operatorname{ind} T$.*

Ist $T = (T_1, ..., T_n) \in L(E)^n$ ein beliebiges wesentlich vertauschendes Tupel, so gilt:

(d) *Sind $R, Q \in L(E)$ derart, dass $(R, T_1, ..., T_n) \in L(E)^{n+1}$ und $(Q, T_1, ..., T_n) \in L(E)^{n+1}$ wesentliche Fredholm-Tupel sind, so ist auch $(RQ, T_1, ..., T_n) \in L(E)^{n+1}$ ein wesentliches Fredholm-Tupel und es gilt*

$$\operatorname{ind}(RQ, T_1, ..., T_n) = \operatorname{ind}(R, T_1, ..., T_n) + \operatorname{ind}(Q, T_1, ..., T_n).$$

Beweis: Der Beweis von Teil (a) ist elementar. Man benutzt, dass die wesentlichen Komplexe $K^\bullet(T, E)$ und $K^\bullet(T_\pi, E)$ kanonisch isomorph sind.

Die Teile (b) und (c) folgen aus [EP96], Proposition 10.2.3.

Teil (d) wird für Hilberträume in [Put82], Theorem 3.6, behandelt. Der dort gegebene Beweis bleibt auch für Banachräume richtig:

Mit $(R, T_1, ..., T_n)$ und $(Q, T_1, ..., T_n)$ ist auch die direkte Summe

$$(R \oplus Q, T \oplus T) = (R \oplus Q, T_1 \oplus T_1, ..., T_n \oplus T_n) \in L(E \oplus E)^n$$

ein wesentliches Fredholm-Tupel und es gilt

$$\operatorname{ind}(R, T) + \operatorname{ind}(Q, T) = \operatorname{ind}(R \oplus Q, T \oplus T).$$

Für $t \in \mathbb{R}$ sei $M_t = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$. Dann wird durch

$$S_t = \left(\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} M_t \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} M_t^*, T \oplus T \right) \in L(E \oplus E)^{n+1}$$

ein wesentliches Fredholm-Tupel definiert mit

$$S_0 = (R \oplus Q, T \oplus T), \quad S_{\frac{\pi}{2}} = ((RQ) \oplus I, T \oplus T)$$

(vgl. [Put82]). Da die Familie $(S_t)_{t \in [0, \frac{\pi}{2}]}$ stetig vom Parameter t abhängt, folgt aus der in Teil (c) formulierten Invarianz des Index gegen kleine Störungen, dass $\operatorname{ind} S_0 = \operatorname{ind} S_{\frac{\pi}{2}}$ ist. Proposition 1.1.1 zeigt, dass (RQ, T) ein wesentliches Fredholm-Tupel ist mit

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}(RQ, T) &= \operatorname{ind}(RQ, T) + \operatorname{ind}(I, T) = \operatorname{ind}((RQ) \oplus I, T \oplus T) \\ &= \operatorname{ind}(R \oplus Q, T \oplus T) = \operatorname{ind}(R, T) + \operatorname{ind}(Q, T). \end{aligned}$$

■

Teil (b) dieser Proposition drückt die Eigenschaft des Index aus, stabil unter kompakten Störungen, und Teil (c) die Eigenschaft, stabil unter kleinen Störungen zu sein.

Eine äquivalente Definition für das wesentliche Split-Spektrum eines wesentlich vertauschenden Tupels $T \in L(E)^n$ ist

$$\sigma_{e,c}(T) = \{z \in \mathbb{C}^n; z - T \text{ ist kein wesentliches Fredholm-Tupel}\}$$

([EP96], Proposition 10.2.2). Dies ist nützlich für den Beweis der nachfolgenden Proposition.

Proposition 1.1.3 *Sei $T = (T_1, ..., T_n) \in L(E)^n$ ein wesentlich vertauschendes Tupel. Dann ist*

$$\sigma_{e,c}(T) \subset \sigma_e(T_1) \times \cdots \times \sigma_e(T_n).$$

Die Abbildung $\mathbb{C}^n \backslash \sigma_{e,c}(T) \to \mathbb{Z}$, $z \mapsto \operatorname{ind}(z - T)$ ist konstant auf jeder Zuammenhangskomponente von $\mathbb{C}^n \backslash \sigma_{e,c}(T)$ und verschwindet auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente.

Beweis: Die Inklusion $\sigma_{e,c}(T) \subset \sigma_e(T_1) \times \cdots \times \sigma_e(T_n)$ folgt aus Proposition 1.1.1. Aus Teil (c) von Proposition 1.1.2 folgt, dass $\operatorname{ind}(z-T)$ lokal-konstant und damit konstant auf den Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C}^n \backslash \sigma_{e,c}(T)$ ist.

Um zu zeigen, dass $\operatorname{ind}(z - T)$ auf der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C}^n \backslash \sigma_{e,c}(T)$ verschwindet, sei $(\Lambda^p(s, E), \delta_z^p)_{p \in \mathbb{Z}} = K^\bullet(z - T, E)$ der wesentliche Koszul-Komplex von $z - T$. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ werden mit einem Teilraum von $\mathbb{C}^n$ vermöge $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$, $w \mapsto (w, 0)$ identifiziert. Für $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| > \|T_1\|$ setzen wir $S_w = (w - T_1)^{-1}$ und definieren wie im Beweis von Proposition 1.1.1 Abbildungen $\varepsilon_w^p : \Lambda^p(s,E) \to \Lambda^{p-1}(s,E)$ $(p = 1, ..., n)$ durch

$$\varepsilon_w^p(xs_{i_1} \wedge ... \wedge s_{i_p}) = \begin{cases} (S_w x)s_{i_2} \wedge ... \wedge S_{i_p}, & \text{falls } i_1 = 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man rechnet leicht nach, dass $\varepsilon_w^{p-1}\varepsilon_w^p = 0$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ gilt. Eine Analyse des Beweises von Proposition 1.1.1 zeigt, dass für $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| > \|T_1\|$ und $p \geq 0$ gilt

$$\delta_w^{p-1}\varepsilon_w^p + \varepsilon_w^{p+1}\delta_w^p \in 1_{\Lambda^p(s,E)} + K(\Lambda^p(s,E)).$$

Andererseits konvergieren die Operatoren auf der linken Seite für $|w| \to \infty$ gegen $1_{\Lambda^p(s,E)}$.

Die Definition der Operatoren $D_w = D(\varepsilon_w^\bullet)$, $D'_w = D'(\varepsilon_w^\bullet)$ zeigt, dass die Produkte $D_w D'_w$ und $D'_w D_w$ für genügend große $|w|$ invertierbar sind. Dann ist für solche w aber auch D_w invertierbar und wir erhalten

$$\operatorname{ind}(w - T) = \operatorname{ind} D_w = 0.$$

■

Zum Abschluss dieses Paragraphen soll noch auf ein Satz hingewiesen werden, der in §1.3 verallgemeinert wird. Sei hierzu $N \in L(H)^n$ ein wesentlich normales Tupel auf einem Hilbertraum H. Der stetige wesentliche Kalkül von N werde mit Φ_N bezeichnet (siehe Prolog, Seite 4). Ist $g \in C(\sigma_e(N))^n$, so sei $g(N) = \Phi_N^n(g) \in \mathcal{C}(H)^n$. Sei $\hat{g}(N) \in L(H)^n$ ein beliebiges Tupel mit $\hat{g}(N) + K(H) = g(N)$ und sei $w \notin g(\sigma_e(N))$. Dann haben Eschmeier und Putinar die folgende *Indexformel* bewiesen:

$$\operatorname{ind}(w - \hat{g}(N)) = \sum \deg(g, C, w) \operatorname{ind}_C N,$$

wobei sich die Summe über die beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C}^n \backslash \sigma_e(N)$ erstreckt, $\deg(g, C, w)$ für den Abbildungsgrad der Funktion g um w bzgl. C steht (man beachte, dass nur für endlich viele beschränkte Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C}^n \backslash \sigma_e(N)$ gilt $\deg(g, C, w) \neq 0$, siehe §1.2) und $\operatorname{ind}_C N = \operatorname{ind}(z - N)$ für ein beliebiges $z \in C$ ist (die Wohldefiniertheit folgt aus Proposition 1.1.3). Diese Indexformel wird in [EP96] (Satz 10.3.15) mit Methoden der topologischen K-Theorie bewiesen. Wir werden in §1.3 einen Beweis dieser Formel angeben, der mit mengentheoretischer Topologie, elementarer Analysis und der Homotopietheorie der Einheitssphären auskommt. Gleichzeitig erhalten wir eine geeignete Verallgemeinerung der obigen Formel auf die Situation von Banachräumen.

1.2 Der Abbildungsgrad

In diesem Paragraphen beweisen wir einen Homotopie-Satz (Satz 1.2.4), der in §1.3 benötigt wird. Dieser Satz kann als eine Verallgemeinerung eines klassischen Satzes von Hopf (Satz 1.2.2) aufgefasst werden und ist implizit in einer Arbeit von Eilenberg ([Eil40]) enthalten. Eilenberg benutzt zum Beweis Zykel und Kozykel über Zellenkomplexe und konstruiert hieraus eine Kohomologietheorie. Der Beweis, den wir hier führen werden, kommt mit mengentheoretischer Topologie, elementarer Analysis und der Homotopietheorie der Einheitssphären aus.

Seien X, Y topologische Räume. Für die Menge der stetigen Funktionen zwischen X und Y wird wie üblich $C(X, Y)$ geschrieben. Eine stetige Abbildung $H : X \times [0,1] \to Y$ heißt *Homotopie*. Zwei Funktionen $f, g \in C(X,Y)$ heißen *homotop*, in Zeichen $f \sim g$, wenn eine Homotopie $H : X \times [0,1] \to Y$ existiert mit $H(\cdot, 0) = f$ und $H(\cdot, 1) = g$; in diesem Fall *verbindet* die Homotopie f und g. Eine Abbildung $f \in C(X,Y)$ heißt *nullhomotop*, wenn f homotop zu einer konstanten Abbildung ist. Ein topologischer Raum X heißt *zusammenziehbar*, wenn die identische Abbildung auf X nullhomotop ist, d.h. wenn ein $\tilde{x} \in X$ und eine Homotopie $H : X \times [0,1] \to X$ existieren mit $H(x,0) = x$ und $H(x,1) = \tilde{x}$ für alle $x \in X$.

Die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ wird mit $|\cdot|$ bezeichnet und der Abstand eines Punktes $x \in \mathbb{R}^n$ zu einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{dist}(x, A)$. Für eine offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N}$ sei $C^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ die Menge der k-mal stetig partiell differenzierbaren Funktionen $\Omega \to \mathbb{R}^n$. Für $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ wird mit $J_f(x)$ die Jacobi-Determinante von f an der Stelle $x \in \Omega$ bezeichnet und mit k_f die Menge $\{x \in \Omega : J_f(x) = 0\}$ der *kritischen Punkte* von f. Ein *regulärer Wert* von f ist ein $y \in \mathbb{R}^n$ mit $f^{-1}(y) \cap k_f = \emptyset$.

Der *analytische Abbildungsgrad* ist eine Abbildung, die einem Tripel (f, Ω, y) bestehend aus einer beschränkten offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, einer Funktion $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und einem Punkt $y \in \mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$ die ganze Zahl

$$d(f, \Omega, y) = \sum_{x \in \tilde{f}^{-1}(\tilde{y})} \operatorname{sgn} J_{\tilde{f}}(x) \tag{1.2}$$

zuordnet, wobei $\tilde{f} \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit $\tilde{f}|_\Omega \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\|\tilde{f} - f\|_\infty < \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega))$ und $\tilde{y}$ ein regulärer Wert von $\tilde{f}$ mit $|\tilde{y} - y| < \operatorname{dist}(y, \tilde{f}(\partial\Omega))$ (und definitionsgemäß $\sum_\emptyset = 0$) ist. Dass eine solche Funktion $\tilde{f}$ zu f existiert, ist Analysis und die Existenz von $\tilde{y}$ zu $\tilde{f}$ folgt aus dem Lemma von Sard. Das Lemma von Sard besagt, dass für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, eine Funktion $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und eine Lebesgue-meßbare Menge $A \subset \Omega$ gilt $\lambda(f(A)) \leq \int_A |J_f(x)| d\lambda(x)$, wobei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ ist. Insbesondere folgt $\lambda(f(k_f)) = 0$. Natürlich ist die rechte Seite in (1.2) unabhängig von der speziellen Wahl von $\tilde{f}$ und $\tilde{y}$. Alle Details dieser Definition findet man in [Dei74], Kapitel 2.[2]

Die grundlegenden Eigenschaften des Abbildungsgrades sind in der folgenden Proposition zusammengefasst (vgl. [Dei74], §8.II).

Proposition 1.2.1 *Sei $M = \{(f, \Omega, y) : \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)\}$ und $d : M \to \mathbb{Z}$ der analytische Abbildungsgrad. Dann gilt für $(f, \Omega, y) \in M$ und $g \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$:*

(a) $d(\mathrm{id}, \Omega, z) = 1$ *für alle* $z \in \Omega$ *und* $d(f, \Omega, y) = 0$*, falls* $y \notin f(\overline{\Omega})$ *ist.*

[2] Es gibt eine Reihe äquivalenter Definitionen des Abbildungsgrades. Man vergleiche etwa [GP74], [Dug66], [tomD00], [Hu59].

(b) *$d(H(\cdot,t),\Omega,y(t))$ ist unabhängig von $t \in [0,1]$, wenn $H : \overline{\Omega} \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ und $y : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ stetig sind mit $y(t) \notin H(\partial\Omega,t)$ für alle $t \in [0,1]$.*

(c) *$d(g,\Omega,y) = d(f,\Omega,y)$, falls $g|_{\partial\Omega} = f|_{\partial\Omega}$ ist.*

(d) *$d(f,\Omega,y) = d(f,\Omega_1,y)$, falls $\Omega_1 \subset \Omega$ offen und $y \notin f(\overline{\Omega}\backslash\Omega_1)$ ist.*

(e) *$d(f,\Omega,y) = d(f \circ h, h^{-1}(\Omega),y) \cdot \operatorname{sgn} J_h$, falls $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Diffeomorphismus ist.*

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und sei $f \in C(K,\mathbb{R}^n)$. Sei C eine beschränkte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^n\backslash K$ und sei $y \in \mathbb{R}^n\backslash f(\partial C)$. Der *Abbildungsgrad* $\deg(f,C,y)$ *von f um y bzgl. C* ist dann definiert durch

$$\deg(f,C,y) = d(\tilde{f}|_{\overline{C}},C,y),$$

wobei $\tilde{f}$ eine beliebige stetige Fortsetzung von $f|_{\partial C}$ auf $\overline{C}$ ist. Dass diese Definition unabhängig von der speziellen Fortsetzung $\tilde{f}$ von f ist, folgt aus Proposition 1.2.1(c).

Ist $f \in C(K,\mathbb{R}^n_*)$ und ist C eine beschränkte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^n\backslash K$, so sei $\deg(f,C) = \deg(f,C,0)$. Besitzt die Menge $\mathbb{R}^n\backslash K$ nur eine einzige beschränkte Zusammenhangskomponente C und ist $f \in C(K,\mathbb{R}^n_*)$, so sei $\deg(f) = \deg(f,C,0)$.

Sei $\mathscr{C}$ die Menge der beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^n\backslash K$. Ist $f : K \to \mathbb{R}^n_*$ stetig, so gibt es höchstens endlich viele Komponenten $C \in \mathscr{C}$ mit $\deg(f,C) \neq 0$. Um dies einzusehen, wähle man eine stetige Fortsetzung $\tilde{f} : \widehat{K} \to \mathbb{R}^n$ von f auf die kompakte Menge $\widehat{K} = K \cup \bigcup_{C\in\mathscr{C}} C$ und beachte, dass die offene Überdeckung $\bigcup_{C\in\mathscr{C}} C$ von $\tilde{f}^{-1}(\{0\})$ eine endliche Teilüberdeckung hat und dass $\deg(f,C) = 0$ gilt, falls $0 \notin \tilde{f}(\overline{C})$.

Satz 1.2.2 *(Satz von Hopf)*
Seien $f,g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, $n \in \mathbb{N}$, stetig mit deg(f) = deg(g). Dann gilt $f \sim g$ in $C(\mathbb{S}^n,\mathbb{S}^n)$.

Einen analytischen Beweis dieses Satzes findet man in [Zei86], Theorem 16.E.[3]

Sind $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\delta > 0$, und ist $\mathbb{S}^{n-1}_\delta(\tilde{x})$ die δ-Sphäre um $\tilde{x}$ im $\mathbb{R}^n$, so folgt aus dem Satz von Hopf leicht das folgende Korollar:

Korollar 1.2.3 *Seien $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$ und $n > 1$, und seien $f,g : \mathbb{S}^{n-1}_\delta(\tilde{x}) \to \mathbb{R}^n_*$ stetig mit deg(f) = deg(g). Dann gilt $f \sim g$ in $C(\mathbb{S}^{n-1}_\delta(\tilde{x}),\mathbb{R}^n_*)$.*

Der Beweis dieses Korollars folgt aus dem Satz von Hopf durch Verschiebung und Skalierung im Urbildbereich und aus der Tatsache, dass $\mathbb{S}^{n-1}$ ein starker Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^n_*$ ist, d.h. dass eine Homotopie $H : \mathbb{R}^n_* \times [0,1] \to \mathbb{R}^n_*$ existiert mit $H(\cdot,0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n_*}$, $H(\mathbb{R}^n_*,1) = \mathbb{S}^{n-1}$ und $H(x,t) = x$ für alle $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ und alle $t \in [0,1]$.

[3] Akzeptiert man die Äquivalenz unterschiedlicher Definitionen des Abbildungsgrades, so findet man Beweise des Satzes von Hopf auch in der in Fußnote 2 genannten Literatur.

Für topologische Räume X, Y ist die Relation $\sim$ auf $C(X,Y)$ eine Äquivalenzrelation, durch die $C(X,Y)$ in Homotopieklassen eingeteilt wird. Die Menge der Homotopieklassen wird mit $[X,Y]$ bezeichnet. Für eine stetige Funktion $f : X \to Y$ sei $[f]$ die Homotopieklasse von f.

Satz 1.2.4 *(Homotopie-Satz)*
Sei $n \geq 2$ und $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist die Abbildung

$$d : [K, \mathbb{R}^n_*] \to \bigoplus_{C \in \mathscr{C}} \mathbb{Z}, \quad [f] \mapsto (deg(f,C))_{C \in \mathscr{C}},$$

wobei $\mathscr{C}$ die Menge der beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^n \backslash K$ ist, eine Bijektion. (Für $\mathscr{C} = \emptyset$ werde die direkte Summe als triviale Gruppe und d als die Nullabbildung gelesen.)

Der Beweis dieses Satzes nimmt den Rest dieses Paragraphen in Anspruch. Wir beginnen mit dem klassischen Fall $n = 2$; der Fall $n > 2$ wird am Ende des Paragraphen bewiesen.

Beweis: (von Satz 1.2.4 für $n = 2$) Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt, $\mathscr{C} \neq \emptyset$ und sei $p_C \in C$ ein fester Punkt für jedes $C \in \mathscr{C}$. Es ist wohlbekannt, dass man die Menge der Homotopieklassen $[K, \mathbb{C}_*]$ identifizieren kann mit dem Quotienten $C(K, \mathbb{C}_*)/\exp C(K)$ und dass die Abbildung

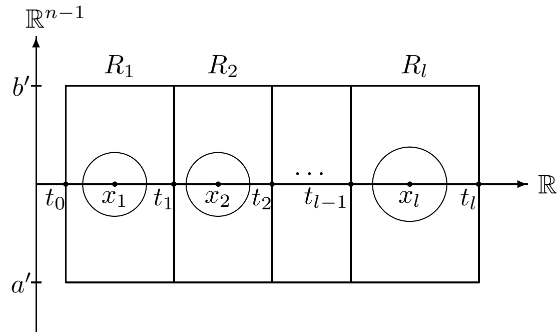
$$\bigoplus_{C \in \mathscr{C}} \mathbb{Z} \to C(K, \mathbb{C}_*)/\exp C(K), \quad (n_C)_{C \in \mathscr{C}} \mapsto \prod_{C \in \mathscr{C}} (z - p_C)^{n_C}$$

einen Gruppenisomorphismus definiert ([Bur79], Corollary 4.30). Man überlegt sich leicht, dass modulo der obigen Identifizierung die Abbildung d die Umkehrabbildung dieses Gruppenisomorphismus ist. ■

Im Folgenden geht es um den Beweis von Satz 1.2.4 für den Fall $n > 2$. Zunächst wird eine spezielle Klasse von Funktionen untersucht. Dazu fassen wir $\mathbb{R}$ vermöge $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto (t, 0)$ als Teilraum von $\mathbb{R}^n$ auf. Seien $a = (a_1, ..., a_n), b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $a_i < 0 < b_i$ für $i = 2, ..., n$ und $x_1, ..., x_l, t_0, ..., t_l \in \mathbb{R}$ $(l \in \mathbb{N})$ mit

$$t_0 = a_1, \quad t_l = b_1 \quad \text{und} \quad t_{i-1} < x_i < t_i \quad \text{für } i = 1, ..., l.$$

Wir benutzen die Notation $[a,b] = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$. Für $i = 1, ..., l$ sei $B_i \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Kugel mit Mittelpunkt x_i und $\overline{B}_i \subset R_i^\circ$, wobei $R_i = [t_{i-1}, t_i] \times [a', b']$ mit $a' = (a_2, ..., a_n)$ und $b' = (b_2, ..., b_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ ist. Sei $B = \bigcup_{i=1}^l B_i$. Die nachfolgende Abbildung veranschaulicht den Definitionsbereich einer Funktion der speziellen Klasse.



Proposition 1.2.5 *Sei $n > 2$ und seien $f, g : [a,b]\backslash B \to \mathbb{R}^n_*$ stetig mit $deg(f, B_i) = deg(g, B_i)$ für $i = 1, ..., l$. Dann ist $f \sim g$ in $C([a,b]\backslash B, \mathbb{R}^n_*)$.*

Um den Beweis von Proposition 1.2.5 führen zu können, müssen einige Vorbereitungen getroffen werden. Wir bezeichnen mit I das Intervall $[0,1]$.

Proposition 1.2.6 *(Homotopie-Erweiterungssatz)*
Sei X ein metrischer Raum und sei Y ein normierter Raum. Seien $A \subset X$ abgeschlossen und $V \subset Y$ offen. Dann hat jede stetige Abbildung

$$h : (X \times \{0\}) \cup (A \times I) \to V$$

eine stetige Fortsetzung $H : X \times I \to V$.

Beweis: Nach einer Verallgemeinerung des klassischen Fortsetzungssatzes von Tietze hat h eine stetige Fortsetzung $h_0 : X \times I \to Y$ ([Dug66], Corollary VII.5.2). Dann ist $U = h_0^{-1}(V) \subset X \times I$ eine offene Umgebung von $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ und $\tilde{h} = h_0|_U$ eine stetige Fortsetzung von h auf U. Nach dem Lemma von Urysohn existiert eine stetige Abbildung $\theta : X \times I \to I$ mit $\theta|_{A\times I} \equiv 1$, $\theta|_{(X\times I)\backslash U} \equiv 0$. Dann ist die Funktion $\rho : X \to I$, $\rho(x) = \min_{t\in I} \theta(x,t)$ stetig, und durch $r : X \times I \to U$, $r(x,t) = (x, \rho(x)t)$ wird eine stetige Funktion definiert mit $r|_{(X\times\{0\})\cup(A\times I)} = \mathrm{id}_{(X\times\{0\})\cup(A\times I)}$. Folglich ist $H = \tilde{h} \circ r : X \times I \to V$ eine stetige Fortsetzung von h. ■

Proposition 1.2.6 zeigt insbesondere, dass in der dort beschriebenen Situation jede stetige Abbildung $f : A \to V$, die homotop in $C(A, V)$ zu einer stetigen Abbildung $g : A \to V$ mit einer stetigen Fortsetzung $G : X \to V$ ist, selber eine Fortsetzung zu einer stetigen Abbildung $F : X \to V$ hat.

Lemma 1.2.7 *Seien Y ein zusammenziehbarer Hausdorffraum, $n > 2$ und $\varphi : Y \times \mathbb{S} \to \mathbb{R}^n_*$ stetig. Dann besitzt φ eine stetige Fortsetzung $\tilde{\varphi} : Y \times \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}^n_*$.*

Beweis: Sei $h : Y \times I \to Y$ eine Homotopie mit $h(y, 0) = y$ und $h(y, 1) = \tilde{y}$ für alle $y \in Y$ und ein $\tilde{y} \in Y$ (Y ist zusammenziehbar).

Sei $\rho : \mathbb{S} \to \mathbb{R}^n_*$ definiert durch $\rho(\xi) = \varphi(\tilde{y}, \xi)$. Wegen $n > 2$ ist die stetige Abbildung $\rho_0 : \mathbb{S} \to \mathbb{S}^{n-1}$, $\xi \mapsto \frac{\rho(\xi)}{|\rho(\xi)|}$ nullhomotop ([tomD00], Satz III.3.6). Dann existiert ein $\eta_0 \in$

$\mathbb{S}^{n-1}$ und eine stetige Abbildung $\tilde{k} : \mathbb{S} \times I \to \mathbb{S}^{n-1}$ mit $\tilde{k}(\xi, 0) = \rho_0(\xi)$ und $\tilde{k}(\xi, 1) = \eta_0$ für alle $\xi \in \mathbb{S}$. Wir definieren $k : \mathbb{S} \times I \to \mathbb{R}^n_*$ durch $k(\xi, t) = ((1-t)|\rho(\xi)| + t)\tilde{k}(\xi, t)$.

Die gesuchte Abbildung $\tilde{\varphi} : Y \times \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}^n_*$ lässt sich wie folgt definieren:

$$\tilde{\varphi}(y, z) = \begin{cases} \varphi\left(h(y, 2-2|z|), \frac{z}{|z|}\right) & : \frac{1}{2} < |z| \leq 1 \\ k\left(\frac{z}{|z|}, 1-2|z|\right) & : 0 < |z| \leq \frac{1}{2} \\ \eta_0 & : z = 0 \end{cases} .$$

Die Stetigkeit in allen Punkten $(y, z) \in Y \times \overline{\mathbb{D}}$ mit $|z| = \frac{1}{2}$ rechnet man leicht nach und für die Stetigkeit in $(y, 0)$, $y \in Y$, nutzt man die Kompaktheit von $\mathbb{S}$ aus. Für alle anderen Stellen ist die Stetigkeit klar. ∎

Sei $R = I \times I$. Dann ist $\partial R = \{(s, t) \in I \times I; t \in \{0, 1\} \text{ oder } s \in \{0, 1\}\}$.

Korollar 1.2.8 *Seien Y ein zusammenziehbarer Hausdorffraum, $n > 2$ und $\varphi : Y \times \partial R \to \mathbb{R}^n_*$ stetig. Dann existiert eine stetige Fortsetzung $\tilde{\varphi} : Y \times R \to \mathbb{R}^n_*$.*

Beweis: Sei $\psi : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to \overline{\mathbb{D}}$ der Homöomorphismus

$$\psi(s, t) = \begin{cases} 2\max\{|s|, |t|\}\frac{(s,t)}{|(s,t)|} & : (s, t) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \backslash \{(0, 0)\} \\ 0 & : (s, t) = (0, 0) \end{cases}$$

und sei $\varphi_0 : Y \times \mathbb{S} \to \mathbb{R}^n_*$ definiet durch $\varphi_0(y, \xi) = \varphi(y, \psi^{-1}(\xi) + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$. Dann besitzt φ_0 nach Lemma 1.2.7 eine Fortsetzung $\tilde{\varphi}_0 : Y \times \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}^n_*$. Sei $\tilde{\varphi} : Y \times R \to \mathbb{R}^n_*$ definiert durch $\tilde{\varphi}(y, (s, t)) = \tilde{\varphi}_0(y, \psi((s, t) - (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})))$. Man rechnet leicht nach, dass $\tilde{\varphi}$ eine stetige Fortsetzung von φ ist. ∎

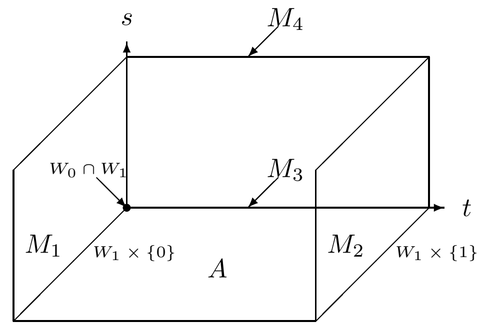
Lemma 1.2.9 *Seien X ein Hausdorffraum, $n > 2$ und W_0, W_1 abgeschlossene Teilmengen von X mit $W_0 \cup W_1 = X$ und $W_0 \cap W_1$ zusammenziehbar. Seien $F, G : X \to \mathbb{R}^n_*$ stetig mit*

$$F|_{W_0} \sim G|_{W_0} \text{ in } C(W_0, \mathbb{R}^n_*) \quad \text{und} \quad F|_{W_1} \sim G|_{W_1} \text{ in } C(W_1, \mathbb{R}^n_*).$$

Dann ist $F \sim G$ in $C(X, \mathbb{R}^n_*)$.

Beweis: Seien $H_i : W_i \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n_*$, $i = 0, 1$, Homotopien, die $F|_{W_i}$ und $G|_{W_i}$ verbinden. Seien $A = W_1 \times [0, 1]$ und $B = ((W_0 \cap W_1) \times I) \cup (W_1 \times \{0, 1\}) \subset A$.

Seien $M_1 = (W_1 \times \{0\}) \times I$, $M_2 = (W_1 \times \{1\}) \times I$, $M_3 = ((W_0 \cap W_1) \times I) \times \{0\}$ und $M_4 = ((W_0 \cap W_1) \times I) \times \{1\}$ und sei h auf $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$ definiert durch



$$h((x,t),s) = \begin{cases} F(x), & ((x,t),s) \in M_1 \\ G(x), & ((x,t),s) \in M_2 \\ H_1(x,t), & ((x,t),s) \in M_3 \\ H_0(x,t), & ((x,t),s) \in M_4 \end{cases}.$$

Indem man Korollar 1.2.8 benutzt, sieht man, dass h eine Fortsetzung zu einer stetigen Abbildung $h_1 : B \times I \to \mathbb{R}^n_*$ besitzt. Nach Proposition 1.2.6 besitzt h dann eine stetige Fortsetzung $H : A \times I \to \mathbb{R}^n_*$. Man beachte hierzu, dass $H_1 : A \to \mathbb{R}^n_*$ eine stetige Fortsetzung der Abbildung $B \to \mathbb{R}^n_*$, $(x,t) \mapsto h_1(x,t,0)$ ist. Sei $\tilde{H} : W_1 \times I \to \mathbb{R}^n_*$ definiert durch $\tilde{H}(x,t) = H((x,t),1)$. Dann gilt $\tilde{H}(x,0) = H((x,0),1) = F(x)$ und $\tilde{H}(x,1) = H((x,1),1) = G(x)$ für alle $x \in W_1$, d.h. $\tilde{H}$ ist eine $F|_{W_1}$ und $G|_{W_1}$ verbindende Homotopie. Für $x \in W_0 \cap W_1$ gilt $\tilde{H}(x,t) = H((x,t),1) = H_0(x,t)$ für alle $t \in I$. Also lassen sich H_0 und $\tilde{H}$ zusammensetzen zu einer nullstellenfreien Homotopie von F und G auf ganz X. ∎

Jetzt kann der als Proposition 1.2.5 formulierte Spezialfall des Homotopie-Satz bewiesen werden. Hierzu werden die Notationen, die zur Formulierung von Proposition 1.2.5 eingeführt wurden, beibehalten.

Beweis: (von Proposition 1.2.5) Sei $R_i = [t_{i-1}, t_i] \times [a', b']$ für $i = 1, ..., l$. Zunächst wird $f|_{R_i \backslash B_i} \sim g|_{R_i \backslash B_i}$ in $C(R_i \backslash B_i, \mathbb{R}^n_*)$ für $i = 1, ..., l$ bewiesen. Sei hierzu $i \in \{1, ..., l\}$ fixiert. Wegen $\deg(f, B_i) = \deg(g, B_i)$ gilt aufgrund des Satzes von Hopf (Korollar 1.2.3) $f|_{\partial B_i} \sim g|_{\partial B_i}$ in $C(\partial B_i, \mathbb{R}^n_*)$. Da ∂B_i ein starker Deformationsretrakt von $R_i \backslash B_i$ ist, folgt hieraus $f|_{R_i \backslash B_i} \sim g|_{R_i \backslash B_i}$ in $C(R_i \backslash B_i, \mathbb{R}^n_*)$. Sei $Q_k = \bigcup_{i=1}^{k} (R_i \backslash B_i)$. Induktiv folgt, dass $f|_{Q_k} \sim g|_{Q_k}$ in $C(Q_k, \mathbb{R}^n_*)$ für $k = 1, ..., l$: Der Induktionsanfang $k = 1$ wurde soeben bewiesen. Gilt die Aussage für ein $k \in \{1, ..., l-1\}$, d.h. ist $f|_{Q_k} \sim g|_{Q_k}$ in $C(Q_k, \mathbb{R}^n_*)$, so folgt die Aussage für $k+1$ aus Lemma 1.2.9 mit $X = Q_{k+1}$, $W_0 = Q_k$ und $W_1 = R_{k+1} \backslash B_{k+1}$. Denn $W_0 \cap W_1 = \{t_k\} \times [a', b']$ ist zusammenziehbar. ∎

Das nachfolgende Lemma bereitet das Zurückführen von Satz 1.2.4 auf die spezielle Situation von Proposition 1.2.5 vor. Eine *Isotopie* $H : \Omega \times I \to \Omega$ einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Homotopie mit der Eigenschaft, dass die Abbildungen $H(\cdot, t)$, $t \in I$, Diffeomorphismen sind. Sind $f, g : \Omega \to \Omega$ zwei Diffeomorphismen, so heißen f und g *isotop*, wenn es eine f und g verbindende Isotopie gibt.

Proposition 1.2.10 *(Isotopie-Satz)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n > 1$, offen und zusammenhängend, und seien $y_1, ..., y_k$, $z_1, ..., z_k \in \Omega$, $k \in \mathbb{N}$, mit $y_i \neq y_j$, $z_i \neq z_j$ für $1 \leq i, j \leq k$, $i \neq j$. Dann existiern ein Diffeomorphismus $h : \Omega \to \Omega$ und eine kompakte Menge $K \subset \Omega$ mit $h(x) = x$ für alle $x \in \Omega \backslash K$ und $h(y_i) = z_i$ für $i = 1, ..., k$. Außerdem kann h so gewählt werden, dass h und id_Ω isotop sind.

Beweise des Isotopie-Satzes findet man in [GP74], §3.6, und in [tomD00], §VIII.7.

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ kompakt. Es bezeichne $\mathscr{C}$ die Menge der beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^n \backslash K$ und C_∞ die unbeschränkte Komponente von $\mathbb{R}^n \backslash K$. Sei $R = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ ein kompakter Quader in $\mathbb{R}^n$ mit $K \subset \overset{\circ}{R}$. Setze $Q = \overset{\circ}{R}$. Dann ist

$$Q \backslash K = \bigcup \{C; C \in \mathscr{C}\} \cup (C_\infty \cap Q)$$

die Zerlegung von $Q \backslash K$ in seine Zusammenhangskomponenten.

Satz 1.2.11 *Sei in jeder Komponente C von $Q \backslash K$ ein Punkt $p_C \in C$ fest gewählt. Ist $f : K \to \mathbb{R}^n_*$ stetig, dann gibt es eine stetige Fortsetzung $F : R \to \mathbb{R}^n$ von f so, dass*

$$F^{-1}(\{0\}) \subset \{p_C; C \textit{ Komponente von } Q \backslash K\}$$

eine endliche Teilmenge ist.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass es eine endliche Menge $E \subset Q \backslash K$ gibt so, dass eine stetige Fortsetzung $f_0 : R \backslash E \to \mathbb{R}^n_*$ von f existiert. Dazu setze $\delta = \min\{|f(x)|; x \in K\}$. Wähle $\tilde{g} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $\|\tilde{g} - f\|_{\infty,K} < \frac{\delta}{2}$ und $\operatorname{supp}(\tilde{g}) \subset Q$. Nach dem Lemma von Sard gibt es einen regulären Wert $w \in \mathbb{R}^n$ für $\tilde{g}$ mit $|w| < \frac{\delta}{2}$. Dann ist $g = \tilde{g} - w \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ eine Funktion mit $\|g - f\|_{\infty,K} < \delta$ und 0 als regulärem Wert. Insbesondere ist die Menge

$$E = g^{-1}(\{0\}) \cap R \subset Q \backslash K$$

endlich. Vermöge der Abbildung $H : K \times I \to \mathbb{R}^n_*$,

$$H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$$

ist f homotop zur Einschränkung von $g : R \backslash E \to \mathbb{R}^n_*$ auf K. Nach dem Homotopie-Erweiterungssatz (Proposition 1.2.6) hat auch f eine stetige Fortsetzung $f_0 : R \backslash E \to \mathbb{R}^n_*$.

Ohne Einschränkung sei $E \neq \emptyset$. Dann existieren höchstens endlich viele Komponenten $C_1, ..., C_l$ von $Q \backslash K$ mit $E \cap C_i \neq \emptyset$ für $i = 1, ..., l$. Sei zur Abkürzung $p_i = p_{C_i}$ für $i = 1, ..., l$. Man wähle zu den Punkten p_i offene Kugeln B_i mit Mittelpunkt p_i und $\overline{B}_i \subset C_i$ für $i = 1, ..., l$.

Für $i = 1, ..., l$ seien $x_{i,1}, ..., x_{i,l_i}$ $(l_i \in \mathbb{N})$ die paarweise verschiedenen Punkte in $E \cap C_i$ und seien $y_{i,2}, ..., y_{i,l_i}$ paarweise verschiedene Punkte in B_i. Aufgrund des Isotopie-Satzes existieren Diffeomorphismen $h_i : C_i \to C_i$ mit $h_i(y_{i,j}) = x_{i,j}$ für $i = 1, ..., l$ und $j = 2, ..., l_i$, die jeweils außerhalb einer kompakten Menge identisch abbilden. Setzt man $\tilde{E} = \bigcup_{i=1}^l \{x_{i,1}, ..., y_{i,l_i}\}$ und

$$\tilde{f}_0 : R \backslash \tilde{E} \to \mathbb{R}^n_*, \quad x \mapsto \begin{cases} f_0(h_i(x)), & \text{falls } x \in C_i \cap \tilde{E}^c \text{ für ein } i \in \{1, ..., l\} \\ f_0(x), & \text{falls } x \in R \backslash \bigcup_{j=1}^l C_j \end{cases},$$

so ist $\tilde{f}_0$ eine stetige Fortsetzung von f.

Ist $\pi_i : B_i \backslash \{p_i\} \to \partial B_i$ die Projektion des Punktes $x \in \overline{B}_i \backslash \{p_i\}$ auf den Rand von B_i längs $x - p_i$, so kann man die gesuchte Funktion wie folgt definieren:

$$F : R \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \begin{cases} \tilde{f}_0(x), & \text{falls } x \in R \backslash \bigcup_{i=1}^l B_i \\ \frac{|x-p_i|}{|\pi_i(x)-p_i|} \tilde{f}_0(\pi_i(x)), & \text{falls } x \in B_i \backslash \{p_i\} \text{ für ein } i \in \{1, ..., l\} \\ 0, & \text{falls } x = p_i \text{ für ein } i \in \{1, ..., l\}. \end{cases}$$

■

In der Situation von Satz 1.2.11 kann man erreichen, dass sogar

$$F^{-1}(\{0\}) \subset \{p_C ; C \in \mathscr{C}\}$$

gilt. Um dies zu sehen, wähle man einen größeren Quader

$$R_1 = \prod_{i=1}^n [c_i, d_i] \supset R \quad (c_i < a_i, b_i < d_i \text{ für } i = 1, ..., n)$$

und einen Punkt $p \in \overset{\circ}{R_1} \backslash R$. Dann ist $p \in \overset{\circ}{R_1} \cap C_\infty$. Indem man Satz 1.2.11 auf R_1 statt R anwendet, erhält man eine stetige Fortsetzung $F_1 : R_1 \to \mathbb{R}^n$ von f so, dass

$$F_1^{-1}(\{0\}) \subset \{p_C ; C \in \mathscr{C}\} \cup \{p\}.$$

Dann hat die Einschränkung $F = F_1|_R$ die gewünschten Eigenschaften.

Beweis: (von Satz 1.2.4 für $n > 2$; der Fall $n = 2$ wurde bereits bewiesen) Sei $n \geq 3$. Ist $\mathscr{C} = \emptyset$, so zeigt die Bemerkung nach Satz 1.2.11, dass jede stetige Funktion $f : K \to \mathbb{R}^n_*$ eine stetige Fortsetzung $F : R \to \mathbb{R}^n_*$ hat. Da R zusammenziehbar ist, ist $[R, \mathbb{R}^n_*]$ und damit auch $[K, \mathbb{R}^n_*]$ in diesem Fall trivial (d.h. eine Einpunktmenge).

Sei also $\mathscr{C} \neq \emptyset$. Wir zeigen zunächst die Injektivität von d. Seien $f, g : K \to \mathbb{R}^n_*$ stetig mit $\deg(f, C) = \deg(g, C)$ für alle $C \in \mathscr{C}$. Der Beweis von Satz 1.2.11 und die anschließende Bemerkung zeigen, dass $C_1, ..., C_l \in \mathscr{C}$ $(l \in \mathbb{N})$, $x_i \in C_i$ für $i = 1, ..., l$ und stetige Fortsetzungen $F, G : R \to \mathbb{R}^n$ von f und g existieren so, dass

$$F^{-1}(\{0\}) = G^{-1}(\{0\}) = \{x_1, ..., x_l\}.$$

Um die Bezeichnungen zu vereinfachen, nehmen wir an, dass R als Würfel $R = \prod_{i=1}^n [-a, a]$ gewählt wurde, $a > 0$. Fixiere eine Teilung $-a = t_0 < t_1 < \cdots < t_l = a$ sowie reelle Zahlen $p_1, ..., p_l$ mit

$$t_{i-1} < p_i < t_i, \quad i = 1, ..., l.$$

Wir dürfen annehmen, dass $x_i = (p_i, 0)$ für $i = 1, ..., l$ ist. Sonst wähle man einen C^1-Diffeomorphismus $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $h(R) = R$ und $h(p_i, 0) = x_i$ für $i = 1, ..., l$. Die Funktionen $f \circ h, g \circ h : h^{-1}(K) \to \mathbb{R}^n_*$ sind stetig und haben die stetigen Fortsetzungen $F \circ h, G \circ h : R \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\{x \in h^{-1}(\widehat{K}); F \circ h(x) = 0\} \cup \{x \in h^{-1}(\widehat{K}); G \circ h(x) = 0\} = \{(p_1, 0), ..., (p_l, 0)\}.$$

Die beschränkten Komponenten von $\mathbb{R}^n \backslash h^{-1}(K)$ sind genau die Mengen $h^{-1}(C)$, $C \in \mathscr{C}$. Nach Teil (e) von Proposition 1.2.1 gilt

$$d(f \circ h, h^{-1}(C), 0) = \deg(f, C) \operatorname{sgn} J_h = \deg(g, C) \operatorname{sgn} J_h = d(g \circ h, h^{-1}(C), 0)$$

für alle $C \in \mathscr{C}$. Ist die Behauptung im Spezialfall $x_i = (p_i, 0)$ $(1 \leq i \leq l)$ bewiesen, so folgt, dass $f \circ h : h^{-1}(K) \to \mathbb{R}^n_*$ und $g \circ h : h^{-1}(K) \to \mathbb{R}^n_*$ homotop sind in $C(h^{-1}(K), \mathbb{R}^n_*)$ vermöge einer Homotopie $\tilde{H} : h^{-1}(K) \times I \to \mathbb{R}^n_*$. Aber dann sind $f, g : K \to \mathbb{R}^n_*$ homotop vermöge der Homotopie

$$H : K \times I \to \mathbb{R}^n_*, \quad H(x,t) = \tilde{H}(h^{-1}(x), t).$$

Sei also $x_i = (p_i, 0)$ für $i = 1, ..., l$. Setze $R_i = [t_{i-1}, t_i] \times \prod_2^n [-a, a]$, $i = 1, ..., l$, und wähle offene Kugeln $B_i \subset \mathbb{R}^n$ mit Mittelpunkten x_i und $\overline{B}_i \subset R_i^\circ \cap C_i$, $i = 1, ..., l$. Dann gilt für $i = 1, ..., l$

$$\deg(F, B_i) = \deg(F, C_i) = \deg(f, C_i) = \deg(g, C_i) = \deg(G, C_i) = \deg(G, B_i).$$

Hierbei folgt die erste und die letzte Identität aus Teil (d) von Proposition 1.2.1. Nach Proposition 1.2.5 sind $F|_{R \backslash B}$ und $G|_{R \backslash B}$ homotop in $C(R \backslash B, \mathbb{R}^n_*)$, wobei $B = \bigcup_{i=1}^l B_i$. Wegen $K \subset R \backslash B$ sind dann auch f und g homotop in $C(K, \mathbb{R}^n_*)$.

Zum Beweis der Surjektivität seien $n_1, ..., n_l \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ und $C_1, ..., C_l \in \mathscr{C}$ (paarweise verschieden) gegeben. Fixiere Punkte $x_i \in C_i$, $i = 1, ..., l$. Wähle einen Würfel $R \subset \mathbb{R}^n$ und reelle Zahlen $p_1, ..., p_l$ genau wie im Injektivitätsbeweis. Wir suchen eine stetige Funktion $f : K \to \mathbb{R}^n_*$ mit

$$\deg(f, C_i) = n_i \text{ für } i = 1, ..., l, \quad \deg(f, C) = 0 \text{ für } C \in \mathscr{C} \backslash \{C_1, ..., C_l\}.$$

Wie im Injektivitätsbeweis kann man die Behauptung reduzieren auf den Fall $x_i = (p_i, 0)$, $i = 1, ..., l$. Wähle $r > 0$ so, dass $\overline{K}_r(p_i, 0) \times \overline{K}_r^{n-2}(0) \subset C_i$, $i = 1, ..., l$, wobei links die abgeschlossenen Kugeln mit Radius r um $(p_i, 0)$ in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ bzw. um 0 in $\mathbb{R}^{n-2}$ gemeint sind. Sei die Funktion $F : \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{n-2} \to \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{n-2}$ definiert durch

$$F(z, y) = \left(\prod_{j=1}^l (z - p_j)^{n_j}, y \right);$$

hierbei sei definitionsgemäß $z^m = \overline{z}^{|m|}$ für $z \in \mathbb{C}$ und $m \in \mathbb{Z}$ mit $m < 0$. Es gilt $F^{-1}(\{0\}) = \{x_1, ..., x_l\}$. Also gilt für $f = F|_K$ zunächst, dass $\deg(f, C) = 0$ für $C \in \mathscr{C} \backslash \{C_1, ..., C_l\}$ ist. Indem man die Reduktionsformel für den Abbildungsgrad benutzt ([Dei74], §8.IV) erhält man auch, dass

$$\deg(f, C_i) = d(F, K_r(p_i, 0) \times K_r^{n-2}(0), 0) = d\left(\prod_{j=1}^l (z - p_j)^{n_j}, K_r(p_i, 0), 0 \right) = n_i$$

für $i = 1, ..., l$ gilt. ■

1.3 Eine Indexformel

Besitzt ein wesentlich vertauschendes Tupel $T = (T_1, ..., T_n) \in L(E)^n$, E Banachraum, einen stetigen wesentlichen Kalkül $\Phi_T : C(\sigma_{e,c}(T)) \to \mathcal{C}(E)$, so wird im Folgenden zur Abkürzung $g(T) = \Phi_T^k(g) \in \mathcal{C}(E)^k$ für alle $g \in C(\sigma_{e,c}(T))^k$ geschrieben ($k \in \mathbb{N}$). Für jede stetige Funktion $f \in C(\sigma_{e,c}(T))$ wählen wir einen Operator $\hat{f}(T) \in L(E)$ mit $\hat{f}(T) + K(E) = f(T)$ und setzen $\hat{g}(T) = (\hat{g}_1(T), ..., \hat{g}_k(T))$ für $g = (g_1, ..., g_k) \in C(\sigma_{e,c}(T))^k$. Ist T ein wesentlich vertauschendes Operatortupel und ist C eine Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C}^n \backslash \sigma_{e,c}(T)$, so setzen wir $\mathrm{ind}_C\, T = \mathrm{ind}(z - T)$ für ein beliebiges $z \in C$ (Proposition 1.1.3). Die Indexformel, die in diesem Paragraphen bewiesen werden soll, lautet:

Satz 1.3.1 *Sei $n \geq 1$ und sei $T = (T_1, ..., T_n) \in L(E)^n$ ein wesentlich vertauschendes Tupel, das einen stetigen wesentlichen Kalkül besitzt. Seien $g : \sigma_{e,c}(T) \to \mathbb{C}^n$ eine stetige Funktion und $w \notin g(\sigma_{e,c}(T))$. Dann ist $w - \hat{g}(T)$ ein wesentliches Fredholm-Tupel und es gilt*

$$\mathrm{ind}(w - \hat{g}(T)) = \sum deg(g, C, w)\, \mathrm{ind}_C(T),$$

wobei sich die Summe über alle beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C}^n \backslash \sigma_{e,c}(T)$ erstreckt.

Man beachte, dass in der obigen Summe nur endlich viele Summanden von Null verschieden sind (Begründung auf Seite 14).

Der Beweis wird durch drei Teilaussagen vorbereitet. Zuvor wird für eine Homotopie $H : X \times [0,1] \to Y$ (X, Y topologische Räume) vereinbart, die Abbildungen $H(\cdot, t)$, $t \in [0,1]$, in der kürzeren Form $H_t : X \to Y$ zu schreiben, d.h. $H_t : X \to Y$ ist definiert durch $H_t(x) = H(x, t)$ für alle $x \in X$. Mit $\|\cdot\|_{\max}$ wir die Maximumsnorm auf $L(E)^n$ bezeichnet.

Bis zum Ende dieses Paragraphen sei $T \in L(E)^n$ ein Tupel, das einen stetigen wesentlichen Kalkül $\Phi_T : C(\sigma_{e,c}(T)) \to \mathcal{C}(E)$ besitzt. Mit $\mathscr{C}$ wird die Menge der beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C}^n \backslash \sigma_{e,c}(T)$ bezeichnet.

Der folgende spektrale Abbildungssatz wird benötigt:

Lemma 1.3.2 *Für alle $g \in C(\sigma_{e,c}(T))^k$, $k \in \mathbb{N}$, gilt $\sigma_{e,c}(\hat{g}(T)) = g(\sigma_{e,c}(T))$.*

Der Beweis folgt mit unseren Definitionen direkt aus den am Ende von §0.3 formulierten spektralen Abbildungssätzen:

$$\sigma_{e,c}(\hat{g}(T)) = \sigma_{\mathcal{C}(E)}(\Phi_T^k(g)) = g(\sigma_{e,c}(T)).$$

Lemma 1.3.3 *Sei $H : \sigma_{e,c}(T) \times [0,1] \to \mathbb{C}^n$ eine Homotopie. Dann gilt: Ist $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}^n$ ein stetiger Weg mit $\varphi(t) \notin H_t(\sigma_{e,c}(T))$ für alle $t \in [0,1]$, und ist D_t die Zusammenhangskomponente von $\varphi(t)$ in $\mathbb{C}^n \backslash H_t(\sigma_{e,c}(T))$, so gilt*

$$\mathrm{ind}_{D_0}\, \hat{H}_0(T) = \mathrm{ind}_{D_t}\, \hat{H}_t(T) \quad \textit{für alle } t \in [0,1].$$

Beweis: Wegen $H_t(\sigma_{e,c}(T)) = \sigma_{e,c}(\hat{H}_t(T))$ für alle $t \in [0,1]$ (Lemma 1.3.2) gilt für alle $t \in [0,1]$ die Gleichheit $\operatorname{ind}_{D_t} \hat{H}_t(T) = \operatorname{ind}(\varphi(t) - \hat{H}_t(T))$. Für alle $t \in [0,1]$ sei $\delta_t > 0$ so gewählt, dass für alle wesentlich vertauschenden Tupel $S \in L(E)^n$ gilt: Ist $\|S - (\varphi(t) - \hat{H}_t(T))\|_{\max} < \delta_t$, so ist S ein wesentliches Fredholm-Tupel und es gilt $\operatorname{ind} S = \operatorname{ind}(\varphi(t) - \hat{H}_t(T))$ (Proposition 1.1.2(c)). Aufgrund der Stetigkeit von φ und H existiert für jedes $t \in [0,1]$ ein offenes Intervall $I_t \subset [0,1]$ mit $t \in I_t$ und $|\varphi(s) - \varphi(t)| < \frac{\delta_t}{2}$, $\|H_s - H_t\|_\infty < \frac{\delta_t}{2c}$ für alle $s \in I_t$, wobei c für die Norm des wesentlichen Kalküls von T steht. Sei $t \in [0,1]$ fest. Für $s \in I_t$ gibt es ein Tupel $A \in L(E)^n$ mit $A + K(E) = \hat{H}_s(T)$ und $\|A - \hat{H}_t(T)\|_{\max} < \frac{\delta_t}{2}$. Damit ist

$$\|(\varphi(s) - A) - (\varphi(t) - \hat{H}_t(T))\|_{\max} < \delta_t,$$

woraus sich

$$\operatorname{ind}(\varphi(s) - \hat{H}_s(T)) = \operatorname{ind}(\varphi(s) - A) = \operatorname{ind}(\varphi(t) - \hat{H}_t(T))$$

ergibt. Die Intervalle I_t, $t \in [0,1]$, überdecken $[0,1]$. Sei $I_{t_0}, ..., I_{t_k}$, $k \in \mathbb{N}_0$, eine endliche Teilüberdeckung mit $t_0 = 0$, $t_k = 1$ und $I_{t_{i-1}} \cap I_{t_i} \neq \emptyset$ für $i = 1, ..., k$. Dann gilt

$$\operatorname{ind}(\varphi(t_{i-1}) - \hat{H}_{t_{i-1}}(T)) = \operatorname{ind}(\varphi(t_i) - \hat{H}_{t_i}(T)) \quad \text{für alle } i = 1, ..., k$$

und folglich für alle $t \in [0,1]$

$$\operatorname{ind}_{D_0} \hat{H}_0(T) = \operatorname{ind}(\varphi(0) - \hat{H}_0(T)) = \operatorname{ind}(\varphi(t) - \hat{H}_t(T)) = \operatorname{ind}_{D_t} \hat{H}_t(T).$$

■

Lemma 1.3.4 *Sei $f = (f_1, ..., f_n) \in C(\sigma_{e,c}(T))^n$ nullstellenfrei und sei $g = (\overline{f}_1, f_2, ..., f_n)$. Dann gilt*

$$\operatorname{ind} \hat{g}(T) = -\operatorname{ind} \hat{f}(T).$$

Beweis: Wähle Operatoren $A, B, A_2, ..., A_n \in L(E)$ mit $A + K(E) = \Phi_T(f_1)$, $B + K(E) = \Phi_T(\overline{f}_1)$ und $A_i + K(E) = \Phi_T(f_i)$ für $i = 2, ..., n$. Nach Proposition 1.1.2(d) gilt

$$\operatorname{ind}(AB, A_2, ..., A_n) = \operatorname{ind}(A, A_2, ..., A_n) + \operatorname{ind}(B, A_2, ..., A_n) = \operatorname{ind} \hat{f}(T) + \operatorname{ind} \hat{g}(T).$$

Der spektrale Abbildungssatz für Φ_T impliziert, dass

$$\sigma_{e,c}(AB, A_2, ..., A_n) = (|f_1|^2, f_2, ..., f_n)(\sigma_{e,c}(T)) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$$

gilt. Da der Index nach Proposition 1.1.3 lokal konstant ist und im Unendlichen verschwindet, folgt hieraus, dass $\operatorname{ind}(AB, A_2, ..., A_n) = 0$ ist. Damit ist die Behauptung gezeigt. ■

Im nachfolgenden Lemma wird die Indexformel in einem Spezialfall bewiesen.

Lemma 1.3.5 *Seien $C_1, .., C_k \in \mathscr{C}$ paarweise verschieden. Seien reelle Zahlen $\lambda_1, ..., \lambda_k$ gegeben mit $(\lambda_j, 0, ..., 0) \in C_j$ für $j = 1, .., k$ und seien $n_1, ..., n_k \in \mathbb{Z}$. Die Funktion $p : \sigma_{e,c}(T) \to \mathbb{C}^n$ sei definiert durch*

$$p(z_1, ..., z_n) = \left(\prod_{j=1}^{k} (\lambda_j - z_1)^{n_j}, z_2, ..., z_n \right),$$

wobei wir für $m \in \mathbb{Z}$, $m < 0$, und $z \in \mathbb{C}$ die Schreibweise $z^m = \overline{z}^{|m|}$ benutzen. Dann ist $\hat{p}(T)$ ein wesentliches Fredholm-Tupel und es gilt

$$\operatorname{ind} \hat{p}(T) = \sum_{j=1}^{k} n_j \operatorname{ind}_{C_j} T.$$

Beweis: Für $j = 1, ..., k$ sei $A_j \in L(E)$ ein Operator mit

$$A_j + K(E) = \Phi_T \left((\lambda_j - z_1)^{\operatorname{sgn} n_j} \right).$$

Als Anwendung von Proposition 1.1.2(d) und Lemma 1.3.4 folgt die Behauptung:

$$\begin{aligned} \operatorname{ind} \hat{p}(T) &= \operatorname{ind} \left(\prod_{j=1}^{k} A_j^{|n_j|}, T_2, ..., T_n \right) \\ &= \sum_{j=1}^{k} |n_j| \operatorname{ind}(A_j, T_2, ..., T_n) = \sum_{j=1}^{k} n_j \operatorname{ind}_{C_j}(T) \end{aligned}$$

∎

Proposition 1.3.6 *Sei $g : \sigma_{e,c}(T) \to \mathbb{C}^n_*$ eine stetige Funktion und seien $C_1, ..., C_l \in \mathscr{C}$ paarweise verschieden so, dass deg$(g, C) = 0$ für alle $C \in \mathscr{C} \backslash \{C_1, ..., C_l\}$ und so, dass reelle Zahlen λ_j mit $(\lambda_j, 0, ..., 0) \in C_j$, $j = 1, ..., l$, existieren. Dann gilt:*

$$\operatorname{ind} \hat{g}(T) = \sum_{j=1}^{l} deg(g, C_j) \operatorname{ind}_{C_j}(T). \tag{1.3}$$

Beweis: Für $j = 1, ..., k$ sei $n_j = \deg(g, C_j)$. Sei $p : \sigma_{e,c}(T) \to \mathbb{C}^n$ definiert durch

$$p(z_1, ..., z_n) = \left(\prod_{j=1}^{l} (\lambda_j - z_1)^{n_j}, z_2, ..., z_n \right) \quad (z^{-m} = \overline{z}^m \text{ für } z \in \mathbb{C},\ m \in \mathbb{N}).$$

Dann sind g und p nullstellenfrei mit $\deg(p, C) = \deg(g, C)$ für alle $C \in \mathscr{C}$, p und g erfüllen also die Voraussetzungen des Homotopie-Satzes 1.2.4. Folglich können p und g durch eine nullstellenfreie Homotopie verbunden werden. Wegen Lemma 1.3.5 genügt es,

$\operatorname{ind}\hat{g}(T) = \operatorname{ind}\hat{p}(T)$ zu zeigen; dies aber gilt nach Lemma 1.3.3, wenn man für den dort verlangten stetigen Weg $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}^n$ die Abbildung $\varphi(t) = 0$ für alle $t \in [0,1]$ wählt. ■

Beweis: (von Satz 1.3.1) Ersetzt man g durch $w - g(\cdot)$, so ist klar, dass man ohne Einschränkung $w = 0$ und damit g nullstellenfrei annehmen kann. Es ist dann

$$\operatorname{ind}\hat{g}(T) = \sum \deg(g, C) \operatorname{ind}_C(T) \tag{1.4}$$

zu zeigen.

Ist $\mathscr{C} = \emptyset$, so lässt sich die Abbildung g nach Satz 1.2.4 durch eine nullstellenfreie Homotopie mit der konstanten Abbildung $1 \in C(\sigma_{e,c}(T))$ verbinden. Nach Lemma 1.3.3 sind in diesem Fall beide Seiten der zu beweisenden Indexformel gleich null.

Seien $C_1, ..., C_l \in \mathscr{C}$ so, dass $\deg(g, C) = 0$ für alle $C \in \mathscr{C} \backslash \{C_1, ..., C_l\}$. Wähle $a > 0$ mit $\sigma_{e,c}(T) \subset \Omega := \prod_1^n(-a, a)$. Seien $x_1, ..., x_l \in \mathbb{C}^n$ mit $x_i \in C_i$ für $i = 1, ..., l$ und seien $\lambda_1, ..., \lambda_l$ paarweise verschiedene Punkte in $\mathbb{R}$ mit $y_i = (\lambda_i, 0, ..., 0) \in \Omega$. Aufgrund des Isotopie-Satzes 1.2.10 existiert ein Diffeomorphismus $h : \Omega \to \Omega$ mit $h(y_i) = x_i$ für $i = 1, ..., l$, der identisch außerhalb einer kompakten Menge in Ω abbildet und der isotop zur Identität ist, d.h. es existiert eine Isotopie $H : \Omega \times [0,1] \to \Omega$ mit $H(\cdot, 0) = \mathrm{id}_\Omega$ und $H(\cdot, 1) = h$ so, dass für alle $t \in [0,1]$ die Abbildung $H_t : \Omega \to \Omega$ ein Diffeomorphismus ist. Ist $\varphi_i : [0,1] \to \mathbb{C}^n$ für $i \in \{1, ..., l\}$ definiert durch $\varphi_i(t) = H_t(x_i)$, so ist $\varphi_i(t) \notin H_t(\sigma_{e,c}(T))$ für alle $t \in [0,1]$ und Lemma 1.3.3 zeigt, dass $\operatorname{ind}_{C_i} T = \operatorname{ind}_{h(C_i)} \hat{h}(T)$ ist.[4] Ebenso zeigt Proposition 1.2.1(e), dass $\deg(g, C_i) = \deg(g \circ h^{-1}, h(C_i))$ für $i = 1, ..., l$ gilt; man beachte, dass $\operatorname{sgn} J_h \equiv 1$ ist. Deshalb gilt

$$\sum_{i=1}^{l} \deg(g, C_i) \operatorname{ind}_{C_i}(T) = \sum_{i=1}^{l} \deg(g \circ h^{-1}, h(C_i)) \operatorname{ind}_{h(C_i)} \widehat{h}(T).$$

Durch $\Psi : C(h(\sigma_{e,c}(T))) \to \mathcal{C}(E),\ f \mapsto \Phi_T(f \circ (h|_{\sigma_{e,c}(T)}))$ wird ein stetiger wesentlicher Kalkül für das Tupel $\hat{h}(T)$ definiert. Indem man Proposition 1.3.6 auf das Tupel $\hat{h}(T)$ statt T und die Funktion $g \circ h^{-1} : h(\sigma_{e,c}(T)) \to \mathbb{C}^n$ statt g anwendet, erhält man

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}\hat{g}(T) &= \sum_{i=1}^{l} \deg(g \circ h^{-1}, h(C_i)) \operatorname{ind}_{h(C_i)}(\hat{h}(T)) \\ &= \sum_{i=1}^{l} \deg(g, C_i) \operatorname{ind}_{C_i}(T). \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis von Satz 1.3.1 abgeschlossen. ■

[4] $\hat{h}(T) = \widehat{h|_{\sigma_{e,c}(T)}}(T)$

Kapitel 2

Analytisch parametrisierte Komplexe

2.1 Präliminarien

Definitionen

Für eine komplexe Mannigfaltigkeit[1] Ω ist der Fréchetraum $\mathscr{O}(\Omega)$ der komplexwertigen holomorphen Funktionen auf Ω bekanntlich nuklear und insbesondere reflexiv (vgl. [EP96], §4.1). Für einen Banachraum E gilt $\mathscr{O}(\Omega)\hat{\otimes}E \cong \mathscr{O}(\Omega, E)$, wobei $\hat{\otimes}$ für das vollständige projektive Tensorprodukt steht und $\mathscr{O}(\Omega, E)$ der Fréchetraum der holomorphen Abbildungen mit Werten in E ist (vgl. Anhang A.1). Diese Identifikation wird im Folgenden frei benutzt.

Die Randabbildungen δ^p_{z-T}, $p \in \mathbb{Z}$, der Koszul-Komplexe $K^\bullet(z-T, E)$, $z \in \mathbb{C}^n$, eines vertauschenden Operatortupels T definieren vermöge $\mathbb{C}^n \to L(\Lambda^p(s,E), \Lambda^{p+1}(s,E))$, $z \mapsto \delta^p_T(z) = \delta^p_{z-T}$ holomorphe Abbildungen. Der Koszul-Komplex $K^\bullet(T,E)$ von T ist deshalb unter diesem Gesichtspunkt ein Beispiel eines endlichen, über $\mathbb{C}^n$ analytisch parametrisierten Komplexes. Im Allgemeinen versteht man unter einem über einer komplexen Mannigfaltigkeit Ω *analytisch parametrisierten Banachraum-Komplex* $(E^\bullet, \alpha^\bullet) = (E^p, \alpha^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ eine Folge von Banachräumen E^p und holomorphen Abbildungen $\alpha^p : \Omega \to L(E^p, E^{p+1})$ mit $\alpha^{p+1}(z)\alpha^p(z) = 0$ für alle $z \in \Omega$ und alle $p \in \mathbb{Z}$. Die Komplexe

$$(E^\bullet, \alpha^\bullet(z)) : \cdots \to E^p \xrightarrow{\alpha^p(z)} E^{p+1} \xrightarrow{\alpha^{p+1}(z)} E^{p+2} \to \cdots \quad (z \in \Omega), \tag{2.1}$$

implizieren für jede offene Menge $U \subset \Omega$ einen Fréchetraum-Komplex

$$(\mathscr{O}(U, E^\bullet), \alpha^\bullet_U) : \cdots \to \mathscr{O}(U, E^p) \xrightarrow{\alpha^p_U} \mathscr{O}(U, E^{p+1}) \xrightarrow{\alpha^{p+1}_U} \mathscr{O}(U, E^{p+2}) \to \cdots,$$

wobei $\alpha^p_U : \mathscr{O}(U, E^p) \to \mathscr{O}(U, E^{p+1})$ für $p \in \mathbb{Z}$ definiert ist durch

$$(\alpha^p_U f)(z) = \alpha^p(z) f(z) \quad \text{für alle } z \in U.$$

[1] In dieser Arbeit wird unter einer komplexen Mannigfaltigkeit stets eine metrisierbare und separable komplexe Mannigfaltigkeit verstanden.

Eigenschaften dieses Fréchetraum-Komplexes lassen manchmal Rückschlüsse auf Eigenschaften des Komplexes $(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ zu, und falls es sich bei letzterem um den analytisch parametrisierten Koszul-Komplex $K^\bullet(z - T, E)$ eines vertauschenden Tupels $T \in L(E)^n$ handelt, sogar auf Eigenschaften von T. Im Vorwort haben wir hierfür ein Beispiel angegeben.

Für $p \in \mathbb{Z}$ und $z \in \Omega$ sei

$$H^p(E^\bullet, \alpha^\bullet(z)) = \ker \alpha^p(z) / \operatorname{im} \alpha^{p-1}(z).$$

Wir definieren

$$\begin{aligned}
\varrho(E^\bullet, \alpha^\bullet) &= \{z \in \Omega : (E^\bullet, \alpha^\bullet(z)) \text{ ist exakt}\}\,, \\
\varrho_c(E^\bullet, \alpha^\bullet) &= \{z \in \varrho(E^\bullet, \alpha^\bullet); \ker \alpha^p(z) \text{ ist komplementiert in } E^p \text{ für alle } p \in \mathbb{Z}\}\,, \\
\varrho_e(E^\bullet, \alpha^\bullet) &= \{z \in \Omega : \dim H^p(E^\bullet, \alpha^\bullet(z)) < +\infty \text{ für alle } p \in \mathbb{Z}\}\,, \\
\varrho_{e,c}(E^\bullet, \alpha^\bullet) &= \{z \in \varrho_e(E^\bullet, \alpha^\bullet) : \ker \alpha^p(z) \text{ ist komplementiert in } E^p \text{ für alle } p \in \mathbb{Z}\}\,,
\end{aligned}$$

sowie $\sigma(E^\bullet, \alpha^\bullet) = \Omega \backslash \varrho(E^\bullet, \alpha^\bullet)$, $\sigma_c(E^\bullet, \alpha^\bullet) = \Omega \backslash \varrho_c(E^\bullet, \alpha^\bullet)$, $\sigma_e(E^\bullet, \alpha^\bullet) = \Omega \backslash \varrho_e(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ und $\sigma_{e,c}(E^\bullet, \alpha^\bullet) = \Omega \backslash \varrho_{e,c}(E^\bullet, \alpha^\bullet)$. Für den über $\mathbb{C}^n$ analytisch parametrisierten Koszul-Komplex eines vertauschenden Tupels $T \in L(E)^n$ (E Banachraum) gilt

$$\sigma(T) = \sigma(\Lambda^\bullet(s, E), \delta_T^\bullet) \quad \text{und} \quad \sigma_e(T) = \sigma_e(\Lambda^\bullet(s, E), \delta_T^\bullet).$$

Entsprechend ist das Split-Spektrum und das wesentliche Split-Spektrum eines vertauschenden Tupels $T \in L(E)^n$ gegeben durch

$$\sigma_c(T) = \sigma_c(\Lambda^\bullet(s, E), \delta_T^\bullet) \quad \text{und} \quad \sigma_{e,c}(T) = \sigma_{e,c}(\Lambda^\bullet(s, E), \delta_T^\bullet).$$

Kategorien

Die Kategorie $\mathscr{B}_\Omega$

Für eine komplexe Mannigfaltigkeit Ω sei

$$\mathscr{B}_\Omega$$

die Kategorie der (komplexen) Banachräume, deren Morphismen holomorphe Abbildungen auf Ω mit Werten in den stetigen Operatoren zwischen solchen Banachräumen sind. D.h. sind E, F zwei Banachräume, so ist ein Morphismus zwischen E und F ein Element in $\mathscr{O}(\Omega, L(E, F))$. Die Hintereinanderausführung zweier Morphismen $\alpha \in \mathscr{O}(\Omega, L(E, F))$ und $\beta \in \mathscr{O}(\Omega, L(F, G))$ (E, F, G Banachräume) ist der Morphismus $\beta\alpha \in \mathscr{O}(\Omega, L(E, G))$, der kanonisch definiert ist durch

$$(\beta\alpha)(z) = \beta(z)\alpha(z), \quad z \in \Omega.$$

Die Kategorie $d\mathscr{B}_\Omega$

Ein *Komplex* aus Objekten und Morphismen in $\mathscr{B}_\Omega$ ist eine Folge $(E^p, \alpha^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ von Banachräumen E^p und Morphismen $\alpha^p \in \mathscr{O}(\Omega, L(E^p, E^{p+1}))$ mit $\alpha^p\alpha^{p-1} = 0$ für alle $p \in \mathbb{Z}$. Die Notation $(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ für einen solchen Komplex wurde bereits in §2.1 eingeführt. Die Morphismen α^p, $p \in \mathbb{Z}$, heißen *Randabbildungen* des Komplexes. Sind $(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ und $(F^\bullet, \beta^\bullet)$ zwei solche Komplexe, so ist ein Morphismus zwischen diesen beiden Komplexen definiert als eine Familie $(f^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ von Morphismen in $\mathscr{B}_\Omega$ derart, dass das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & E^{p-1} \arrow[r, "\alpha^{p-1}"] \arrow[d, "f^{p-1}"] & E^p \arrow[r, "\alpha^p"] \arrow[d, "f^p"] & E^{p+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{p+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & F^{p-1} \arrow[r, "\beta^{p-1}"] & F^p \arrow[r, "\beta^p"] & F^{p+1} \arrow[r] & \cdots ,
\end{tikzcd}$$

d.h. es ist $f^p \in \mathscr{O}(\Omega, L(E^p, F^p))$ und $\beta^p f^p = f^{p+1}\alpha^p$ für alle $p \in \mathbb{Z}$. Ein solcher Morphismus wird $f^\bullet : (E^\bullet, \alpha^\bullet) \to (F^\bullet, \beta^\bullet)$ geschrieben. Die Hintereinanderausführung zweier Morphismen ist kanonisch erklärt. Wir schreiben id_E auch für den durch $\mathrm{id}_E(z) = \mathrm{id}_E$ $(z \in \Omega)$ definierten Morphismus und bezeichnen mit $\mathrm{id}^\bullet : (E^\bullet, \alpha^\bullet) \to (E^\bullet, \alpha^\bullet)$ den Morphismus mit $\mathrm{id}^p \cong \mathrm{id}_{E^p}$ für alle $p \in \mathbb{Z}$.

Ein Komplex $(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ der beschriebenen Art heißt *endlich*, wenn $E^p = \{0\}$ für fast alle $p \in \mathbb{Z}$ gilt. Für endliche Komplexe kann man nach eventueller Indexverschiebung annehmen, dass $E^p = \{0\}$ für alle $p < 0$ und $p > l$ mit einer geeignet gewählten natürlichen Zahl l gilt. Dies werden wir üblicherweise auch tun. Um die Beschreibung dieses Sachverhaltes zu verkürzen, nennen wir einen solchen Komplex kurz *l-Komplex*.

Die endlichen Komplexe $(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ aus Objekten in $\mathscr{B}_\Omega$ und ihre Morphismen bilden eine Kategorie

$$d\mathscr{B}_\Omega,$$

deren Objekte *endliche, über Ω analytisch parametrisierte Banachraum-Komplexe* genannt werden.

Ein Komplex $(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ in $d\mathscr{B}_\Omega$ heißt *exakt an der Stelle* $z \in \Omega$, wenn der Komplex

$$(E^\bullet, \alpha^\bullet(z)) : \cdots \to E^{p-1} \overset{\alpha^{p-1}(z)}{\longrightarrow} E^p \overset{\alpha^p(z)}{\longrightarrow} E^{p+1} \to \cdots \tag{2.2}$$

als Komplex linearer Abbildungen exakt ist, d.h. wenn $\ker \alpha^p(z) = \mathrm{im}\, \alpha^{p-1}(z)$ gilt. Der Komplex $(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ heißt *exakt*, wenn er an jeder Stelle $z \in \Omega$ exakt ist. Ein Komplex $(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ in $d\mathscr{B}_\Omega$ heißt *split-exakt*, wenn es eine Familie $(\varepsilon^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ mit $\varepsilon^p \in \mathscr{O}(\Omega, L(E^p, E^{p-1}))$ und

$$\mathrm{id}_{E^p} = \alpha^{p-1}\varepsilon^p + \varepsilon^{p+1}\alpha^p$$

für alle $p \in \mathbb{Z}$ gibt. Die Familie $\varepsilon^\bullet = (\varepsilon^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ wird in diesem Fall *splittende Familie* für $(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ genannt. Split-Exaktheit impliziert Exaktheit, und ist $\varepsilon^\bullet$ eine splittende Familie für $(E^\bullet, \alpha^\bullet)$, so ist für alle $p \in \mathbb{Z}$ und $z \in \Omega$ die Abbildung $\varepsilon^{p+1}(z)\alpha^p(z)$ eine stetige Projektion auf einen Komplementärraum E^p_z von $\ker \alpha^p(z)$ in E^p, d.h. $E^p = \ker \alpha^p(z) \oplus E^p_z$

mit einem abgeschlossenen Teilraum E_z^p von E^p. Insbesondere ist $\ker \alpha^p(z)$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ und $z \in \Omega$ in diesem Fall komplementiert.

Ist $f^\bullet : (E^\bullet, \alpha^\bullet) \to (F^\bullet, \beta^\bullet)$ ein Morphismus in $d\mathscr{B}_\Omega$, so ist der *Abbildungskegel* von $f^\bullet$ der Komplex $(C^\bullet, d^\bullet)$ in $d\mathscr{B}_\Omega$ mit

$$C^p = F^{p-1} \oplus E^p \quad \text{und} \quad d^p(z) = \begin{pmatrix} \beta^{p-1}(z) & (-1)^p f^p(z) \\ 0 & \alpha^p(z) \end{pmatrix} \text{ für alle } z \in \Omega,\, p \in \mathbb{Z}.$$

Für den Abbildungskegel schreiben wir $C(f^\bullet)$ bzw. $(C(f^\bullet), d^\bullet)$, falls es auf eine Bezeichnung der Randabbildungen ankommt.

Zwei Morphismen $f^\bullet, g^\bullet : (E^\bullet, \alpha^\bullet) \to (F^\bullet, \beta^\bullet)$ heißen *homotop*, wenn es eine Familie $(h^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ mit $h^p \in \mathscr{O}(\Omega, L(E^p, F^{p-1}))$ und

$$f^p - g^p = \beta^{p-1} h^p + h^{p+1} \alpha^p$$

für alle $p \in \mathbb{Z}$ gibt. Dieser Sachverhalt wird durch $f^\bullet \sim g^\bullet$ ausgedrückt. Die Familie $(h^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ heißt eine *Homotopie* zwischen $(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ und $(F^\bullet, \beta^\bullet)$. Ein Morphismus $f^\bullet : (E^\bullet, \alpha^\bullet) \to (F^\bullet, \beta^\bullet)$ wird eine *Homotopieäquivalenz* genannt, wenn es einen Morphismus $g^\bullet : (F^\bullet, \beta^\bullet) \to (E^\bullet, \alpha^\bullet)$ gibt derart, dass $g^\bullet f^\bullet \sim \mathrm{id}^\bullet_{(E^\bullet,\alpha^\bullet)}$ und $f^\bullet g^\bullet \sim \mathrm{id}^\bullet_{(F^\bullet,\beta^\bullet)}$ gilt. Der Morphismus $g^\bullet$ heißt in diesem Fall eine *Homotopieinverse* von $f^\bullet$.

Die eingeführten Begriffe stammen aus der Theorie der Modul-Komplexe. Im Anhang A.3 wird hierauf kurz eingegangen und ein in diesem Zusammenhang technisches Lemma bewiesen, das später benötigt wird.

Die Kategorie $\mathscr{F}_\Omega$

Bezeichnet $\mathscr{F}$ die Kategorie der Fréchetträume mit ihren stetigen Operatoren, so lässt sich ein Funktor

$$F_\Omega : \mathscr{B}_\Omega \to \mathscr{F}$$

definieren durch $F_\Omega(E) = \mathscr{O}(\Omega, E)$ und $F_\Omega(\alpha) = \alpha_\Omega$, wobei E ein Banachraum ist und die Abbildung α_Ω definiert ist durch

$$\alpha_\Omega : \mathscr{O}(\Omega, E) \to \mathscr{O}(\Omega, F), \quad [\alpha_\Omega(f)](z) = \alpha(z) f(z).$$

Die i.Allg. nicht volle Unterkategorie

$$\mathscr{F}_\Omega$$

von $\mathscr{F}$ ist definiert als das Bild von $\mathscr{B}_\Omega$ unter dem Funktor F_Ω.

Die Kategorie $d\mathscr{F}_\Omega$

Sei $d\mathscr{F}$ die Kategorie der Fréchetraum-Komplexe, d.h. der Folgen $(F^p, \beta^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ mit Frécheträumen F^p und stetigen Operatoren $\beta^p : F^p \to F^{p+1}$ mit $\beta^p\beta^{p-1} = 0$ für alle $p \in \mathbb{Z}$. Der Funktor F_Ω induziert einen Funktor $dF_\Omega : d\mathscr{B}_\Omega \to d\mathscr{F}$ durch

$$(E^\bullet, \alpha^\bullet) \mapsto (F_\Omega(E^\bullet), F_\Omega(\alpha^\bullet)) = (\mathscr{O}(\Omega, E^\bullet), \alpha^\bullet_\Omega) \quad \text{und} \quad f^\bullet \mapsto F_\Omega(f^\bullet) = f^\bullet_\Omega,$$

wobei $(\mathscr{O}(\Omega, E^\bullet), \alpha^\bullet_\Omega)$ für den Komplex

$$\cdots \to \mathscr{O}(\Omega, E^p) \xrightarrow{\alpha^p_\Omega} \mathscr{O}(\Omega, E^{p+1}) \to \cdots . \tag{2.3}$$

steht. Die Kategorie

$$d\mathscr{F}_\Omega$$

ist definiert als das Bild von $d\mathscr{B}_\Omega$ unter dF_Ω. Ein Komplex $(\mathscr{O}(\Omega, E^\bullet), \alpha^\bullet_\Omega)$ in $d\mathscr{F}_\Omega$ heißt *exakt*, wenn er als Komplex in der abelschen Kategorie der Vektorräume und ihrer linearen Abbildungen exakt ist. Er heißt *split-exakt*, wenn der zugehörge Komplex $(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ in $d\mathscr{B}_\Omega$ split-exakt ist.

Man beachte, dass aus der Exaktheit eines Komplexes $(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ in $d\mathscr{B}_\Omega$ i.Allg. nicht die Exaktheit von $(\mathscr{O}(\Omega, E^\bullet), \alpha^\bullet_\Omega)$ in $d\mathscr{F}_\Omega$ folgt. Ist Ω jedoch eine Steinsche Mannigfaltigkeit, so besteht sehr wohl Äquivalenz (vgl. Anhang A.1 und die Vorbemerkung zu Corollary 2.1.9 in [EP96]). Ebenfalls bemerkenswert ist, dass aus der Exaktheit eines Komplexes $(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ an einer Stelle $z_0 \in \Omega$ lokal die Exaktheit von $(\mathscr{O}(\Omega, E^\bullet), \alpha^\bullet_\Omega)$ folgt, d.h. es existiert eine offene Umgebung $U \subset \Omega$ von z_0 so, dass $(\mathscr{O}(U, E^\bullet), \alpha^\bullet_U)$ exakt ist (vgl. [EP96], Theorem 2.1.8 und Lemma 2.2.8 dieser Arbeit).

Ein Komplex $(\mathscr{O}(\Omega, E^\bullet), \alpha^\bullet_\Omega)$ in $d\mathscr{F}_\Omega$ ist split-exakt, wenn eine Familie $\varepsilon^\bullet = (\varepsilon^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ mit $\varepsilon^p \in \mathscr{O}(\Omega, L(E^p, E^{p-1}))$ und

$$\mathrm{id}_{\mathscr{O}(\Omega, E^p)} = \alpha^{p-1}_\Omega \varepsilon^p_\Omega + \varepsilon^{p+1}_\Omega \alpha^p_\Omega$$

für alle $p \in \mathbb{Z}$ existiert.

Der *Abbildungskegel* eines Morphismus $f^\bullet_\Omega : (\mathscr{O}(\Omega, E^\bullet), \alpha^\bullet_\Omega) \to (\mathscr{O}(\Omega, F^\bullet), \beta^\bullet_\Omega)$ in $d\mathscr{F}_\Omega$, $C(f^\bullet_\Omega)$, ist der Komplex $(C^\bullet, d^\bullet)$ bestehend aus Frécheträumen C^p und Operatoren $d^p \in L(C^p, C^{p+1})$ mit

$$C^p = \mathscr{O}(\Omega, F^{p-1}) \oplus \mathscr{O}(\Omega, E^p), \quad d^p = \begin{pmatrix} \beta^{p-1}_\Omega & (-1)^p f^p_\Omega \\ 0 & \alpha^p_\Omega \end{pmatrix} \quad \text{für alle } p \in \mathbb{Z}.$$

Wegen $\mathscr{O}(\Omega, E) \oplus \mathscr{O}(\Omega, F) \cong \mathscr{O}(\Omega, E \oplus F)$ für Banachräume E und F (vgl. Anhang A.1 und [Köt83b], §41.6(7)), kann man $C(f^\bullet_\Omega)$ als ein Objekt in $d\mathscr{F}_\Omega$ auffassen. Mit dieser Identifizierung rechnet man leicht $C(f^\bullet_\Omega) = dF_\Omega(C(f^\bullet))$ nach.

Zwei Morphismen $f^\bullet_\Omega, g^\bullet_\Omega : (\mathscr{O}(\Omega, E^\bullet), \alpha^\bullet_\Omega) \to (\mathscr{O}(\Omega, F^\bullet), \beta^\bullet_\Omega)$ heißen *homotop*, wenn es eine Familie $(h^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ mit $h^p \in \mathscr{O}(\Omega, L(E^p, F^{p-1}))$ und

$$f^p_\Omega - g^p_\Omega = \beta^{p-1}_\Omega h^p_\Omega + h^{p+1}_\Omega \alpha^p_\Omega$$

für alle $p \in \mathbb{Z}$ gibt. Aus $f^\bullet \sim g^\bullet$ folgt $f^\bullet_\Omega \sim g^\bullet_\Omega$. Die Begriffe der *Homotopieäquivalenz* und der *Homotopieinverse* sind analog zur Situation in $d\mathscr{B}_\Omega$ definiert.

Soweit zu dem Teil der Begriffe, die zum Verständnis von §2.2 und §2.5 notwendig sind. Die nachfolgenden Begriffe werden in §2.3 und §2.4 benötigt. Dort geht es um eine Dualitätstheorie endlicher, analytisch parametrisierter Banachraum-Komplexe.

Für einen lokalkonvexen Raum E steht E' für den topologischen Dualraum von E. Wird stillschweigend von einer Topologie auf E' ausgegangen, so ist stets die starke Topologie β gemeint, $E' = E'_\beta$, die im Falle eines Banachraumes E mit der Operatornormtopologie übereinstimmt. Eine weitere Topologie, die auf E' eine Rolle spielen wird, ist die w^*-Topologie, d.h. die schwache Topologie von E' bzgl. des Dualsystems $\langle E, E'\rangle$. Soll E' mit dieser Topologie versehen sein, wird E'_{w^*} geschrieben. Man beachte, dass im Fall von Banachräumen E, F die Menge der w^*-w^*-stetigen Abbildungen zwischen E' und F' ein abgeschlossener Teilraum von $L(E', F')$ ist; dieser wird mit $\mathcal{L}(E', F')$ bezeichnet. Gelegentlich wird ein lokalkonvexer Raum E mit seiner schwachen Topologie bzgl. $\langle E, E'\rangle$ versehen; soll dies der Fall sein, wird E_w geschrieben. Ist E ein lokalkonvexer Raum und $M \subset E$ ein linearer Teilraum, so wird i.Allg. M mit der Relativ- und E/M mit der Quotiententopologie versehen. Ist M ein linearer Teilraum von E', so meint eine Bezeichnung wie E'_{w^*}/M den algebraischen Quotienten E'/M, der mit der Quotientopologie bzgl. E'_{w^*} versehen ist.

Ist E' der (topologische) Dualraum eines Banachraumes E, so lässt sich $\mathscr{O}(\Omega, E')$ via

$$(\mathscr{O}(\Omega)'\hat{\otimes}E)' \cong \mathscr{O}(\Omega)''\hat{\otimes}E' \cong \mathscr{O}(\Omega)\hat{\otimes}E' \cong \mathscr{O}(\Omega, E')$$

als Dualraum eines lokalkonvexen Raumes auffassen (siehe Anhang A.1) und (neben der üblichen Fréchetraumtopologie) mit der w^*-Topologie bzgl. $\langle \mathscr{O}(\Omega)'\hat{\otimes}E, \mathscr{O}(\Omega)\hat{\otimes}E'\rangle$, $\langle \varphi \otimes x, f \otimes u\rangle = \varphi(f)u(x)$ versehen. Diese Topologie ist gemeint, wenn von der w^*-Topologie auf $\mathscr{O}(\Omega, E')$ die Rede sein wird.

Die Kategorie $\tilde{\mathscr{B}}_\Omega$

Ist $\tilde{E}$ ein dualer Banachraum, d.h. existiert ein Banachraum E so, dass E' und $\tilde{E}$ als normierte Räume isomorph sind, so kann $\tilde{E}$ mit der w^*-Topologie aus der kanonischen Dualität $\langle E, \tilde{E}\rangle$ versehen werden. Zwischen zwei dualen Banachräumen $\tilde{E}$ und $\tilde{F}$ in $\mathscr{B}_\Omega$ macht es Sinn, die Menge $\mathscr{O}(\Omega, L(\tilde{E}, \tilde{F}))$ der Morphismen zwischen $\tilde{E}$ und $\tilde{F}$ zu ersetzen durch $\mathscr{O}(\Omega, \mathcal{L}(\tilde{E}, \tilde{F}))$. Man gelangt auf diese Art und Weise zu einer Unterkategorie von $\mathscr{B}_\Omega$, die mit

$$\tilde{\mathscr{B}}_\Omega$$

bezeichnet wird, und die für eine Theorie endlicher, analytisch parametrisierter Komplexe dualer Banachräume geeignet ist.

Die Kategorie $d\tilde{\mathscr{B}}_\Omega$

Die Kategorie $\tilde{\mathscr{B}}_\Omega$ gibt Anlass zu einer Unterkategorie

$$d\tilde{\mathscr{B}}_\Omega$$

von $d\mathscr{B}_\Omega$: Die Objekte sind endliche Komplexe

$$(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet) : \cdots \to \tilde{E}^{p-1} \xrightarrow{\tilde{\alpha}^{p-1}} \tilde{E}^p \xrightarrow{\tilde{\alpha}^p} \tilde{E}^{p+1} \to \cdots$$

bestehend aus dualen Banachräumen $\tilde{E}^p$ und Abbildung $\tilde{\alpha}^p \in \mathscr{O}(\Omega, \mathcal{L}(\tilde{E}^p, \tilde{E}^{p+1}))$. Die Morphismen $\tilde{f}^\bullet : (\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet) \to (\tilde{F}^\bullet, \tilde{\beta}^\bullet)$ haben $\tilde{f}^p \in \mathscr{O}(\Omega, \mathcal{L}(\tilde{E}^p, \tilde{F}^p))$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ zu erfüllen.

Ein Komplex $(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet)$ in $d\tilde{\mathscr{B}}_\Omega$ heißt *exakt*, wenn er als Komplex in $d\mathscr{B}_\Omega$ exakt ist. Ein Komplex $(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet)$ heißt *split*-exakt*, wenn es eine splittende Familie $\tilde{\varepsilon}^\bullet = (\tilde{\varepsilon}^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ für $(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet)$ als Komplex in $d\mathscr{B}_\Omega$ gibt, die $\tilde{\varepsilon}^p \in \mathscr{O}(\Omega, \mathcal{L}(\tilde{E}^p, \tilde{E}^{p-1}))$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ erfüllt.

Der *Abbildungskegel* $C(\tilde{f}^\bullet) = (C^\bullet, d^\bullet)$ eines Morphismus $\tilde{f}^\bullet : (\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet) \to (\tilde{F}^\bullet, \tilde{\beta}^\bullet)$ in $d\tilde{\mathscr{B}}_\Omega$, a priori ein Objekt in $d\mathscr{B}_\Omega$, kann wegen $(F \oplus E)' \cong F' \oplus E'$ für Banachräume E, F als Objekt in $d\tilde{\mathscr{B}}_\Omega$ aufgefasst werden; hierbei ist zu berücksichtigen, dass $d^p(z)$ automatisch eine w^*-w^*-stetige Abbildung für alle $p \in \mathbb{Z}$ und $z \in \Omega$ ist.

Zwei Morphismen $\tilde{f}^\bullet, \tilde{g}^\bullet : (\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet) \to (\tilde{F}^\bullet, \tilde{\beta}^\bullet)$ heißen *homotop*, wenn ein Homotopie $(\tilde{h}^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ zwischen $(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet)$ und $(\tilde{F}^\bullet, \tilde{\beta}^\bullet)$ als Objekte in $d\mathscr{B}_\Omega$ existiert mit $\tilde{h}^p \in \mathscr{O}(\Omega, \mathcal{L}(\tilde{E}^p, \tilde{F}^{p-1}))$ für alle $p \in \mathbb{Z}$.

Die Begriffe der *Homotopieinverse* und der *Homotopieäquivalenz* sind sinngemäß wie für $d\mathscr{B}_\Omega$ definiert.

Die Kategorie $\tilde{\mathscr{F}}_\Omega$

Sind $\tilde{E}$ und $\tilde{F}$ duale Banachräume und ist $\tilde{f} \in \mathscr{O}(\Omega, \mathcal{L}(\tilde{E}, \tilde{F}))$, so ist $\tilde{f}_\Omega : \mathscr{O}(\Omega, \tilde{E}) \to \mathscr{O}(\Omega, \tilde{F})$ automatisch eine w^*-w^*-stetige Abbildung ([Esc00], Proposition 3.4). Für die Menge der w^*-w^*-stetigen linearen Abbildungen $\mathscr{O}(\Omega, \tilde{E}) \to \mathscr{O}(\Omega, \tilde{F})$ schreiben wir auch $\mathcal{L}(\mathscr{O}(\Omega, \tilde{E}), \mathscr{O}(\Omega, \tilde{F}))$. Bezeichnet $\mathscr{L}$ die Kategorie der lokalkonvexen Räume mit ihren stetigen Operatoren, und ist $G_\Omega : \mathscr{F}_\Omega \to \mathscr{L}$ der Funktor, der einem Objekt $\mathscr{O}(\Omega, \tilde{E})$ in $\mathscr{F}_\Omega$ das Objekt $\mathscr{O}(\Omega, \tilde{E})_{w^*}$ in $\mathscr{L}$ zuordnet und auf einen Morphismus als identische Abbildung wirkt, so ist die Kategorie

$$\tilde{\mathscr{F}}_\Omega$$

definiert durch $\tilde{\mathscr{F}}_\Omega = G_\Omega(\mathscr{F}_\Omega)$.

Die Kategorie $d\tilde{\mathscr{F}}_\Omega$

Sei $\tilde{F}_\Omega : \tilde{\mathscr{B}}_\Omega \to \mathscr{L}$ der Funktor $\tilde{F}_\Omega = G_\Omega \circ F_\Omega$. Er induziert einen Funktor $d\tilde{F}_\Omega : d\tilde{\mathscr{B}}_\Omega \to d\mathscr{F}_\Omega$ durch

$$(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet) \mapsto (\tilde{F}_\Omega(\tilde{E}^\bullet), \tilde{F}_\Omega(\tilde{\alpha}^\bullet)) = (\mathscr{O}(\Omega, \tilde{E}^\bullet)_{w^*}, \tilde{\alpha}^\bullet_\Omega), \quad \tilde{f}^\bullet \mapsto \tilde{F}_\Omega(\tilde{f}^\bullet) = \tilde{f}^\bullet_\Omega.$$

Die Kategorie

$$d\tilde{\mathscr{F}}_\Omega$$

ist definiert durch $d\tilde{\mathscr{F}}_\Omega = d\tilde{F}_\Omega(d\tilde{\mathscr{B}}_\Omega)$.

2.2 Abgeschlossene Bilder bzgl. Fréchetraumtopologien

Im Folgenden bezeichnet Ω stets eine komplexe Mannigfaltigkeit. Die Aussage, die für endliche, über Ω analytisch parametrisierte Banachraum-Komplexe bewiesen wird, lautet:

Satz 2.2.1 *Sei $(E^\bullet, \alpha^\bullet) \in d\mathscr{B}_\Omega$. Für alle Steinschen offenen Mengen $U \subset \varrho_{e,c}(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ und alle $p \in \mathbb{Z}$ ist der Quotient*

$$\ker \alpha^p_U / \operatorname{im} \alpha^{p-1}_U$$

ein nuklearer Fréchetraum.

Der Satz beinhaltet insbesondere die Aussage, dass für alle Steinschen offenen Mengen $U \subset \varrho_{e,c}(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ und alle $p \in \mathbb{Z}$ die Abbildung α^p_U ein abgeschlossenes Bild hat. Diese Aussage lässt sich auf eine andere Problemstellung zurückführen, wie unten gezeigt wird. Die Nuklearität wird sich hierbei fast beiläufig ergeben. Sie wird in §2.4 benötigt.

Das System $\{\mathscr{O}(V, E^p) : V \subset \Omega \text{ offen}\}$ bildet mit den kanonischen Restriktionsabbildungen ein Garbendatum, dessen zugehörige Garbe mit $\mathscr{O}^{E^p}_\Omega$ bezeichnet wird. Die Abbildungen $\alpha^p_V : \mathscr{O}(V, E^p) \to \mathscr{O}(V, E^{p+1})$, $V \subset \Omega$ offen, definieren einen Garbenhomomorphismus $\overline{\alpha}^p_\Omega : \mathscr{O}^{E^p}_\Omega \to \mathscr{O}^{E^{p+1}}_\Omega$. Die Sequenz

$$\cdots \to \mathscr{O}^{E^{p-1}}_\Omega \xrightarrow{\overline{\alpha}^{p-1}_\Omega} \mathscr{O}^{E^p}_\Omega \xrightarrow{\overline{\alpha}^p_\Omega} \mathscr{O}^{E^{p+1}}_\Omega \to \cdots$$

ist ein Komplex analytischer Garben. Ist $U \subset \Omega$ eine Steinsche offene Menge, so ist $\mathscr{O}^E_U = \mathscr{O}^E_\Omega|_U$ azyklisch für jeden Banachraum E (vgl. Anhang A.1).

Seien

$$\mathscr{H}^p_\Omega = \ker \overline{\alpha}^p_\Omega / \operatorname{im} \overline{\alpha}^{p-1}_\Omega \quad (p \in \mathbb{Z}) \tag{2.4}$$

die Quotientengarben. Es ist bekannt, dass für offene Mengen $U \subset \varrho_e(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ die Garben $\mathscr{H}^p_U = \mathscr{H}^p_\Omega|_U$, $p \in \mathbb{Z}$, kohärente analytische Garben sind ([EP96], Proposition 10.1.3).

Sei $U \subset \Omega$ und $\Gamma(U, \mathscr{H}^p_\Omega)$ der Schnittraum der Garbe $\mathscr{H}^p_\Omega$ über U. Dann lässt sich für alle $p \in \mathbb{Z}$ eine lineare Abbildung

$$\psi^p_U : \ker \alpha^p_U / \operatorname{im} \alpha^{p-1}_U \to \Gamma(U, \mathscr{H}^p_\Omega) \tag{2.5}$$

definieren durch $\psi_U^p([f])(z) = (U,f)_z$ für $f \in \ker \alpha_U^p$ und $z \in U$; hierbei steht $[f]$ für die Restklasse von f in $\ker \alpha_U^p / \operatorname{im} \alpha_U^{p-1}$, wegen $\ker \alpha_U^p \cong \Gamma(U, \ker \overline{\alpha}_\Omega^p)$ das Symbol (U,f) für die Restklasse von f in $\Gamma(U, \ker \overline{\alpha}_\Omega^p)/\Gamma(U, \operatorname{im} \overline{\alpha}_\Omega^{p-1})$ und $(U,f)_z$ für die zugehörige Restklasse im induktiven Limes $\operatorname{ind}_{V \in \mathcal{U}(z)} \Gamma(V, \ker \overline{\alpha}_\Omega^p)/\Gamma(V, \operatorname{im} \overline{\alpha}_\Omega^{p-1})$.[2] Von den Abbildungen ψ_U^p, $p \in \mathbb{Z}$, kann man unter der Voraussetzung, dass U eine Steinsche offene Menge ist, zeigen, dass sie Vektorraumisomorphismen sind:

Proposition 2.2.2 *Sei $(E^\bullet, \alpha^\bullet) \in d\mathscr{B}_\Omega$ und sei $U \subset \varrho_e(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ eine Steinsche offene Menge. Dann gilt: Für alle $p \in \mathbb{Z}$ ist ψ_U^p ein Vektorraumisomorphismus.*

Beweis: Ohne Einschränkung sei $E^p = 0$ für $p < 0$. Dann ist für $p < 0$ die Aussage trivial. Für $p = 0$ ist $\mathscr{H}_U^0 = \ker \overline{\alpha}_U^0$. Da $\mathscr{H}_U^0$, wie erwähnt, kohärent analytisch ist und kohärente analytische Garben azyklisch über Steinschen offenen Mengen einer komplexen Mannigfaltigkeit sind (Satz von Cartan, z.Bsp. [EP96], Theorem 4.1.4), erhält man aus der exakten Garbensequenz

$$0 \to \ker \overline{\alpha}_U^0 \to \mathscr{O}_U^{E^0} \xrightarrow{\overline{\alpha}_U^0} \operatorname{im} \overline{\alpha}_U^0 \to 0$$

das kommutative Diagramm (2.6) von $\mathbb{C}$-Vektorräumen mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Gamma(U, \ker \overline{\alpha}_U^0) \arrow[r] & \Gamma(U, \mathscr{O}_U^{E^0}) \arrow[r] & \Gamma(U, \operatorname{im} \overline{\alpha}_U^0) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker \alpha_U^0 \arrow[r] \arrow[u, "\cong"'] & \mathscr{O}(U, E^0) \arrow[r, "\alpha_U^0"] \arrow[u, "\cong"'] & \operatorname{im} \alpha_U^0 \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd} \tag{2.6}$$

(vgl. [Kul70], Satz 18.4, und beachte $H^1(U, \ker \overline{\alpha}_U^0) = 0$). Es folgt

$$\operatorname{im} \alpha_U^0 \cong \Gamma(U, \operatorname{im} \overline{\alpha}_U^0)$$

(alle Identifizierungen sind rein algebraisch). Da $\ker \overline{\alpha}_U^0$ und $\mathscr{O}_U^{E^0}$ azyklisch sind, folgt darüberhinaus die Azyklizität von $\operatorname{im} \overline{\alpha}_U^0$. Die exakte Sequenz

$$0 \to \operatorname{im} \overline{\alpha}_U^0 \to \ker \overline{\alpha}_U^1 \to \ker \overline{\alpha}_U^1 / \operatorname{im} \overline{\alpha}_U^0 \to 0$$

liefert somit unter Berücksichtigung der Kohärenz und damit der Azyklizität von $\mathscr{H}_U^1 = \ker \overline{\alpha}_U^1 / \operatorname{im} \overline{\alpha}_U^0$ die Azyklizität von $\ker \overline{\alpha}_U^1$. Wie oben ergibt sich $\operatorname{im} \alpha_U^1 \cong \Gamma(U, \operatorname{im} \overline{\alpha}_U^1)$ und die Azyklizität von $\operatorname{im} \overline{\alpha}_U^1$. Dies wiederum liefert mit der Kohärenz von $\mathscr{H}_U^2 = \ker \overline{\alpha}_U^2 / \operatorname{im} \overline{\alpha}_U^1$ die Azyklizität von $\ker \overline{\alpha}_U^2$. Induktiv folgt, dass alle Garben $\ker \overline{\alpha}_U^p$, $\operatorname{im} \overline{\alpha}_U^p$, $p \in \mathbb{Z}$, azyklisch sind und dass $\operatorname{im} \alpha_U^p \cong \Gamma(U, \operatorname{im} \overline{\alpha}_U^p)$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ gilt.

Aus der Exaktheit von $0 \to \operatorname{im} \overline{\alpha}_U^{p-1} \to \ker \overline{\alpha}_U^p \to \mathscr{H}_U^p \to 0$ ergibt sich mit dem soeben Gesagten die Exaktheit von

$$0 \to \operatorname{im} \alpha_U^{p-1} \to \ker \alpha_U^p \to \Gamma(U, \mathscr{H}_U^p) \to 0$$

[2] Ist $\mathscr{K}$ eine Untergarbe von $\mathscr{G}$, so ist $\mathscr{H} = \mathscr{G}/\mathscr{K}$ halmweise definiert durch $\mathscr{H}_z = \operatorname{ind}_{U \in \mathcal{U}(z)} \Gamma(U, \mathscr{G})/\Gamma(U, \mathscr{K})$ $(z \in \Omega)$, wobei $\mathcal{U}(z)$ für das Umgebungssystem von z in Ω steht.

für alle $p \in \mathbb{Z}$. Es folgt, dass die Abbildungen ψ_U^p für alle $p \in \mathbb{Z}$ Vektorraumisomorphismen sind. ■

In Proposition 2.2.2 wurde ein Komplex $(E^\bullet, \alpha^\bullet) \in d\mathscr{B}_U$ vorausgesetzt. Nach Definition von $d\mathscr{B}_U$ ist der Komplex dann endlich. Im Beweis der Proposition tatsächlich benötigt wurde jedoch nur, dass $(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ links-semi-endlich ist, d.h. dass $E^p = \{0\}$ für fast alle $p < 0$ gilt.

Im Falle einer über der offenen Menge $U \subset \Omega$ kohärenten analytischen Garbe $\mathscr{H}$ kann der Raum $\Gamma(U, \mathscr{H})$ mit einer kanonischen nuklearen Fréchetraumtopologie versehen werden ([EP96], Proposition 4.1.5). Die Frage nach der Abgeschlossenheit von $\operatorname{im} \alpha_U^p$ kann deshalb auf die Frage reduziert werden, wann ψ_U^p stetig ist, denn dann ist $\ker \alpha_U^p / \operatorname{im} \alpha_U^{p-1}$ ein Fréchetraum. In diesem Fall ist ψ_U^p automatisch ein topologischer Isomorphismus zwischen nuklearen Frécheträumen. Satz 2.2.1 ist somit eine Folgerung aus folgendem Satz:

Satz 2.2.3 *Sei $(E^\bullet, \alpha^\bullet) \in d\mathscr{B}_\Omega$. Für jede Steinsche offene Menge $U \subset \varrho_{e,c}(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ und alle $p \in \mathbb{Z}$ ist ψ_U^p ein topologischer Vektorraumisomorphismus.*

Der Beweis von Satz 2.2.3 ist aufwendig und wird in 5 Schritten geführt.

(1) Spezialisierung

Die Versionen der Sätze 2.2.1 und 2.2.3, bei denen die beteiligten Banachräume endlich-dimensional sind, sind bekannt. Sie beruhen auf folgenden Tatsachen:

- Für einen endlich-dimensionalen Banachraum E ist die Garbe $\mathscr{O}_\Omega^E$ eine kohärente analytische Garbe ([GR84], Theorem 2.5.2, in Verbindung mit [Kul70], Satz 27.1).
- Mit der kanonischen Fréchetraumtopologie auf $\Gamma(\Omega, \mathscr{O}_\Omega^E)$ ist die kanonische Abbildung $\mathscr{O}(\Omega, E) \to \Gamma(\Omega, \mathscr{O}_\Omega^E)$ ein topologischer Isomorphismus ([GR77], Seite 171).
- Für eine kohärente analytische Untergabe $\mathscr{K}$ einer kohärenten analytischen Garbe $\mathscr{G}$ ist der Schnittraum $\Gamma(\Omega, \mathscr{K})$ abgeschlossen in $\Gamma(\Omega, \mathscr{G})$ ([GR77], Seite 172: Abgeschlossenheitssatz).
- Ist $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ ein Homomorphismus kohärenter Garben über Ω, so ist der induzierte Vektorraumhomomorphismus $\varphi : \Gamma(\Omega, \mathscr{F}) \to \Gamma(\Omega, \mathscr{G})$ zwischen den Schnitträumen stetig, wenn diese mit ihrer kanonischen Fréchetraumtopologie versehen werden.

Proposition 2.2.4 *Die Banachräume E^p, $p \in \mathbb{Z}$, des Komplex $(E^\bullet, \alpha^\bullet) \in d\mathscr{B}_\Omega$ seien endlich-dimensional. Dann gilt: Für jede Steinsche offene Menge $U \subset \Omega$ und alle $p \in \mathbb{Z}$ ist ψ_U^p ein topologischer Vektorraumisomorphismus. Insbesondere sind für alle $p \in \mathbb{Z}$ die Quotienten $\ker \alpha_U^p / \operatorname{im} \alpha_U^{p-1}$ nukleare Frécheträume (und die Mengen $\operatorname{im} \alpha_U^{p-1}$ damit abgeschlossen).*

Beweis: Seien E, F endlich-dimensionale Banachräume, $\alpha \in \mathscr{O}(U, L(E,F))$ und $\overline{\alpha}_U : \mathscr{O}_U^E \to \mathscr{O}_U^F$ der induzierte analytische Garbenhomomorphismus. Da $\mathscr{O}_U^E$ und $\mathscr{O}_U^F$ kohärente analytische Garben sind, gilt dasselbe für $\ker \overline{\alpha}_U$ und $\operatorname{im} \overline{\alpha}_U$ ([Kul70], Satz 26.14).

Der Schnittraum $\Gamma(U, \operatorname{im}\overline{\alpha}_U)$ ist abgeschlossen in $\Gamma(U, \mathscr{O}_\Omega^F)$ (Abgeschlossenheitssatz) und stimmt algebraisch mit $\operatorname{im}\alpha_U$ überein (vgl. den Beweis von Proposition 2.2.2). Aus der topologischen Identifizierung $\Gamma(U, \mathscr{O}_\Omega^F) \cong \mathscr{O}(U, F)$ folgt die Abgeschlossenheit von $\operatorname{im}\alpha_U$ in $\mathscr{O}(U, F)$. Also sind in der Situation von Proposition 2.2.4 die Quotienten $\ker\alpha_U^p / \operatorname{im}\alpha_U^{p-1}$ Frécheträume. Sie sind nuklear als Quotient eines nuklearen Raumes bzgl. eines abgeschlossenen Teilraumes ([EP96], Proposition 4.1.5 und Theorem A1.3). Außerdem sind die Vektorraumisomorphismen

$$\ker\alpha_U^p / \operatorname{im}\alpha_U^{p-1} \to \Gamma(U, \mathscr{H}_U^p) \cong \Gamma(U, \ker\overline{\alpha}_U^p)/\Gamma(U, \operatorname{im}\overline{\alpha}_U^{p-1})$$

(mit $\mathscr{H}_U^p = \ker\overline{\alpha}_U^p / \operatorname{im}\overline{\alpha}_U^{p-1}$) topologische Isomorphismen. ■

(2) Lokalisierung

Dass es sich bei Satz 2.2.3 um ein lokales Problem handelt, zeigt die nachfolgende Proposition:

Proposition 2.2.5 *Sei $(E^\bullet, \alpha^\bullet) \in d\mathscr{B}_\Omega$ und sei $U \subset \varrho_e(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ eine Steinsche offene Menge. Dann gilt: Existiert eine Überdeckung $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ von U aus Steinschen offenen Mengen derart, dass für $p \in \mathbb{Z}$ und $i \in \mathbb{N}$ die Abbildung $\psi_{U_i}^p$ ein topologischer Isomorphismus ist, dann ist auch ψ_U^p ein topologischer Isomorphismus. In diesem Fall ist für alle $p \in \mathbb{Z}$ der Raum $\ker\alpha_U^p / \operatorname{im}\alpha_U^{p-1}$ ein nuklearer Fréchetraum (und $\operatorname{im}\alpha_U^{p-1}$ damit abgeschlossen).*

Beweis: Sei $p \in \mathbb{Z}$ fixiert, $\{U_i\}_i$ eine Überdeckung wie in der Proposition, $\psi_i^p = \psi_{U_i}^p$ und $\alpha_i^p = \alpha_{U_i}^p$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Abkürzend schreiben wir U_{ij} für $U_i \cap U_j$. Das nachfolgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Gamma(U, \mathscr{H}_\Omega^p) \arrow[r, "r"] & \prod_i \Gamma(U_i, \mathscr{H}_\Omega^p) \arrow[r, "s"] & \prod_{(i,j)} \Gamma(U_{ij}, \mathscr{H}_\Omega^p) \\ 0 \arrow[r] & \ker\alpha_U^p / \operatorname{im}\alpha_U^{p-1} \arrow[u, "\psi_U^p"] \arrow[r, "\tilde{r}"] & \prod_i \ker\alpha_i^p / \operatorname{im}\alpha_i^{p-1} \arrow[u, "\prod_i \psi_i^p"'] & \end{tikzcd} \tag{2.7}$$

wobei $r(f) = (f|_{U_i})_i$ für $f \in \Gamma(U, \mathscr{H}_\Omega^p)$, $\tilde{r}([f]) = ([f|_{U_i}])_i$ für $f \in \ker\alpha_U^p$ und $s(f_i)_i = (f_i|_{U_{ij}} - f_j|_{U_{ij}})_{(i,j)}$ für $(f_i)_i \in \prod_i \Gamma(U_i, \mathscr{H}_\Omega^p)$. Offensichtlich sind

$$\prod_i \Gamma(U_i, \mathscr{H}_\Omega^p) \qquad \text{und} \qquad \prod_{(i,j)} \Gamma(U_{ij}, \mathscr{H}_\Omega^p)$$

versehen mit ihren Produkttopologien Frécheträume, und da r und s stetig sind und die erste Zeile exakt ist, ist auch $\operatorname{im} r = \ker s$ ein Fréchetraum. Aus dem Prinzip der offenen Abbildung folgt, dass r eine auf ihr Bild offene Abbildung und somit ein topologischer Monomorphismus ist. Da die Quotienten $\ker\alpha_i^p / \operatorname{im}\alpha_i^{p-1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ nach Voraussetzung Frécheträume sind, gilt dasselbe für $\prod_i \ker\alpha_i^p / \operatorname{im}\alpha_i^{p-1}$, und $\prod_i \psi_i^p$ ist ein topologischer Isomorphismus. Aus der Stetigkeit und der Injektivität von $\tilde{r}$ folgt, dass $\ker\alpha_U^p / \operatorname{im}\alpha_U^{p-1}$ ein Fréchetraum ist. Da ψ_U^p bijektiv ist und sich die Folgenstetigkeit von ψ_U^p aus der

Kommutativität des obigen Diagramms und der Tatsache, dass r ein topologischer Monomorphismus ist, ergibt, ist ψ_U^p ein topologischer Isomorphismus. ■

Mit Propostion 2.2.5 lässt sich die folgende Aussage beweisen. Zuvor sei noch angemerkt, dass im Falle einer über der offenen Menge $U \subset \Omega$ kohärenten analytischen Garbe $\mathscr{H}$ der Fréchetraum $\Gamma(U, \mathscr{H})$ ein Fréchet-$\mathscr{O}(U)$-Modul ist, d.h. dass die $\mathscr{O}(U)$-Modul-Operation auf $\Gamma(U, \mathscr{H})$ stetig ist ([EP96], Proposition 4.1.5).

Proposition 2.2.6 *Sei $(E^\bullet, \alpha^\bullet) \in d\mathscr{B}_\Omega$ und sei $U \subset \varrho_e(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ eine Steinsche offene Menge derart, dass $\ker \alpha_W^p / \operatorname{im} \alpha_W^{p-1}$ ein Fréchetraum ist für alle Steinschen offenen Teilmengen $W \subset U$ und $p \in \mathbb{Z}$. Dann ist ψ_U^p ein topologischer Isomorphismus.*

Beweis: Sei $p \in \mathbb{Z}$ fixiert. Nach Proposition 2.2.2 sind die Abbildungen ψ_W^p, $W \subset U$ offen und Steinsch, Vektorraumisomorphismen. Nach Proposition 2.2.5 genügt es zu zeigen, dass jeder Punkt $z \in U$ eine Steinsche offene Umgebung $W \subset U$ besitzt so, dass ψ_W^p ein topologischer Isomorphismus ist. Zu jedem $z \in U$ lässt sich eine Steinsche offene Umgebung $W \subset U$ finden derart, dass $\Gamma(W, \mathscr{H}_U^p)$ als $\mathscr{O}(W)$-Modul endlich erzeugt ist ([EP96], §4.1). Sei $\sigma_1, ..., \sigma_l \in \Gamma(W, \mathscr{H}_U^p)$, $l \in \mathbb{N}$, ein Erzeugendensystem und $\tilde{\sigma}_1, ..., \tilde{\sigma}_l \in \ker \alpha_W^p / \operatorname{im} \alpha_W^{p-1}$ mit $\psi_W^p(\tilde{\sigma}_i) = \sigma_i$ für $i = 1, ..., l$. Das nachfolgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}(W)^l \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\gamma"'] & \ker \alpha_W^p / \operatorname{im} \alpha_W^{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "\psi_W^p", "\sim"'] & 0 \\
& \Gamma(W, \mathscr{H}_U^p) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

wobei für $(f_1, ..., f_l) \in \mathscr{O}(W)^l$ die Abbildungen γ und β definiert sind durch $\gamma(f_1, ..., f_l) = \sum_{i=1}^l f_i \sigma_i$ und $\beta(f_1, ..., f_l) = \sum_{i=1}^l f_i \tilde{\sigma}_i$. Da $\ker \alpha_W^p / \operatorname{im} \alpha_W^{p-1}$ ein Fréchetraum ist, β und γ stetig sind und β surjektiv ist, ist ψ_W^p ein topologischer Isomorphismus: Da die stetige, surjektive Abbildung β zwischen Frécheträumen operiert, erlaubt sie das Liften von Nullfolgen und ψ_W^p ist deshalb stetig ([Jar81], Proposition 9.4.5 und die nachfolgende Bemerkung). Als stetige, surjektive Abbildung zwischen Frécheträumen ist ψ_W^p offen (Prinzip der offenen Abbildung für Frécheträume) und damit ein topologischer Vektorraumisomorphismus.

■

③ Übertragung

Seien $(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ und $(F^\bullet, \beta^\bullet)$ zwei Komplexe in $d\mathscr{B}_\Omega$ und seien für $p \in \mathbb{Z}$, $U \subset \Omega$ offen

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}_\Omega^p &= \ker \overline{\alpha}_\Omega^p / \operatorname{im} \overline{\alpha}_\Omega^{p-1}, \quad \psi_U^p : \ker \alpha_U^p / \operatorname{im} \alpha_U^{p-1} \to \Gamma(U, \mathscr{H}_\Omega^p) \quad \text{und} \\
\mathscr{K}_\Omega^p &= \ker \overline{\beta}_\Omega^p / \operatorname{im} \overline{\beta}_\Omega^{p-1}, \quad \phi_U^p : \ker \beta_U^p / \operatorname{im} \beta_U^{p-1} \to \Gamma(U, \mathscr{K}_\Omega^p)
\end{aligned}$$

wobei ψ_U^p und ϕ_U^p wie in (2.5) definiert sind.

Der Beweis der nachfolgenden Aussage enthält eine rein algebraische Komponente, die im Anhang A.3 bewiesen wird.

Proposition 2.2.7 *Sei $U \subset \varrho_e(F^\bullet, \beta^\bullet) \cap \varrho_e(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ eine Steinsche offene Menge und $f^\bullet : (F^\bullet, \beta^\bullet)|_U \to (E^\bullet, \alpha^\bullet)|_U$ ein Morphismus in $d\mathscr{B}_U$ derart, dass der Abbildungskegel $C(f_U^\bullet)$ split-exakt ist. Dann gilt für alle $p \in \mathbb{Z}$:*

$$\psi_U^p \text{ ist ein topologischer Isomorphismus}$$
$$\Updownarrow$$
$$\phi_U^p \text{ ist ein topologischer Isomorphismus.}$$

Beweis: Sei $(\varepsilon^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ eine splittende Familie für $(C^\bullet, \delta^\bullet) = C(f_U^\bullet)$. Nach Lemma A.3.1 besitzt $f_U^\bullet$ eine Homotopieinverse $g_U^\bullet$, die sich explizit in der Form

$$g_U^p = (-1)^p \pi_2^p \varepsilon_U^{p+1}|_{\mathscr{O}(U,E^p)} \qquad (p \in \mathbb{Z})$$

schreiben lässt; hierbei ist $\pi_2^p : \mathscr{O}(U, C^p) \to \mathscr{O}(U, F^p)$, $(\pi_2^p h)(z) = \pi_2(h(z))$ für alle $p \in \mathbb{Z}$.

Sei $p \in \mathbb{Z}$ fixiert. Die Voraussetzung, dass $C(f_U^\bullet)$ split-exakt ist, impliziert die Split-Exaktheit von $C(f_V^\bullet)$ für jede offene Menge $V \subset U$. Über jeder solchen Menge V sind $f_V^\bullet$ und $g_V^\bullet$ homotopieinvers zueinander. Die von $f_V^\bullet$ und $g_V^\bullet$ induzierten linearen Abbildungen

$$[f_V^p] : \ker \beta_V^p / \operatorname{im} \beta_V^{p-1} \to \ker \alpha_V^p / \operatorname{im} \alpha_V^{p-1} \quad \text{und} \quad [g_V^p] : \ker \alpha_V^p / \operatorname{im} \alpha_V^{p-1} \to \ker \beta_V^p / \operatorname{im} \beta_V^{p-1}$$

sind stetig und invers zueinander. Über den Steinschen offenen Teilmengen $V \subset U$ gibt es kanonische algebraische Isomorphien

$$\ker \beta_V^p / \operatorname{im} \beta_V^{p-1} \cong \Gamma(V, \mathscr{K}_\Omega^p), \quad \ker \alpha_V^p / \operatorname{im} \alpha_V^{p-1} \cong \Gamma(V, \mathscr{H}_\Omega^p)$$

(Proposition 2.2.2). Die beiden Familien $\{[f_V^p]; V \subset U$ offen und Steinsch$\}$ und $\{[g_V^p]; V \subset U$ offen und Steinsch$\}$ induzieren analytische Garbenhomomorphismen $\overline{f}_U^p : \mathscr{K}_U^p \to \mathscr{H}_U^p$ und $\overline{g}_U^p : \mathscr{H}_U^p \to \mathscr{K}_U^p$, die invers zueinander sind. Wegen $U \subset \varrho_e(F^\bullet, \beta^\bullet) \cap \varrho_e(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ sind $\mathscr{K}_U^p$ und $\mathscr{H}_U^p$ kohärente analytische Garben. Versieht man $\Gamma(U, \mathscr{K}_U^p)$ und $\Gamma(U, \mathscr{H}_U^p)$ mit den kanonischen Fréchetraumtopologien, so liefern $\overline{f}_U^p$ und $\overline{g}_U^p$ stetige Abbildung $\Gamma(\overline{f}_U^p) : \Gamma(U, \mathscr{K}_U^p) \to \Gamma(U, \mathscr{H}_U^p)$ und $\Gamma(\overline{g}_U^p) : \Gamma(U, \mathscr{H}_U^p) \to \Gamma(U, \mathscr{K}_U^p)$ ([GR84], Satz V.6.6); diese sind invers zueinander und damit topologische Isomorphismen. Da das nachfolgende Diagramm kommutativ ist, folgt leicht, dass ϕ_U^p ein topologischer Isomorphismus ist genau dann, wenn ψ_U^p ein topologischer Isomorphismus ist.

$$\begin{array}{ccc} \ker \beta_U^p / \operatorname{im} \beta_U^{p-1} & \xrightarrow{[f_U^p]} & \ker \alpha_U^p / \operatorname{im} \alpha_U^{p-1} \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_U^p} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_U^p} \\ \Gamma(U, \mathscr{K}_\Omega^p) & \xrightarrow{\Gamma(\overline{f}_U^p)} & \Gamma(U, \mathscr{H}_\Omega^p) \end{array}.$$

■

Aus dem Beweis wird deutlich, dass unter den Voraussetzungen von Proposition 2.2.7 die Räume

$$\ker \beta_U^p / \operatorname{im} \beta_U^{p-1} \quad \text{und} \quad \ker \alpha_U^p / \operatorname{im} \alpha_U^{p-1}$$

topologisch isomorph sind. Ist insbesondere eines der beiden Bilder im α_U^{p-1} und im β_U^{p-1} abgeschlossen, so auch das andere, bzw. ist einer der beiden Quotienten ein nuklearer Fréchetraum, so auch der andere.

④ Konstruktion

Im Folgenden sei $(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ ein l-Komplex in $d\mathscr{B}_\Omega$ $(l \in \mathbb{N})$. Für $z_0 \in \varrho_e(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ sind definitionsgemäß die Räume $\ker \alpha^p(z_0)/\operatorname{im} \alpha^{p-1}(z_0)$ endlich-dimensional. Für $z_0 \in \varrho_{e,c}(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ ist $\ker \alpha^p(z_0)$ zusätzlich komplementiert in E^p für alle $p \in \mathbb{Z}$. Dies kann ausgenutzt werden, um eine gewisse lokale Regularität des Komplexes zu beweisen. Was hiermit gemeint ist, steht in den Sätzen 2.2.10 und 2.2.12.

Die folgenden Arbeitsdefinitionen vereinfachen die Formulierung des technischen Beweises von Satz 2.2.10:

Sei $q \in \mathbb{Z}$. Wir nennen ein Quadrupel $(z_0, U, (L^\bullet, u^\bullet), f^\bullet)$ bestehend aus $z_0 \in \varrho_e(E^\bullet, \alpha^\bullet)$, einer offenen Umgebung U von z_0 in Ω, einem Komplex $(L^\bullet, u^\bullet) \in d\mathscr{B}_U$ und einem Morphismus $f^\bullet : (L^\bullet, u^\bullet) \to (E^\bullet, \alpha^\bullet)|_U$ in $d\mathscr{B}_U$ *q-zulässig*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) $L^p = \{0\}$ *für* $p < q$, $\dim L^p < +\infty$ *für* $p \geq q$,

(ii) $(D^\bullet, d^\bullet) = C(f^\bullet)$ *ist an den Stellen* D^{q+1}, D^{q+2},... *in* z_0 *exakt,*

(iii) $\ker d^p(z_0) = \ker \alpha^{p-1}(z_0)$ *für* $p \geq q$.[3]

Ist $(z_0, U, (L^\bullet, u^\bullet), f^\bullet)$ q-zulässig, so nennen wir $(z_0, \tilde{U}, (\tilde{L}^\bullet, \tilde{u}^\bullet), \tilde{f}^\bullet)$ für $r > 0$ eine *r-Verfeinerung* von $(z_0, U, (L^\bullet, u^\bullet), f^\bullet)$, wenn gilt:

(i) $(z_0, \tilde{U}, (\tilde{L}^\bullet, \tilde{u}^\bullet), \tilde{f}^\bullet)$ *ist* $(q-r)$*-zulässig,*

(ii) $\tilde{U} \subset U$,

(iii) $\tilde{L}^p = L^p$ *und* $\tilde{u}^p = u^p|_{\tilde{U}}$ *für* $p \geq q$.

Ist $(z_0, U, (L^\bullet, u^\bullet), f^\bullet)$ 0-zulässig, so ist

$$(D^\bullet, d^\bullet) = C(f^\bullet) : \cdots \to 0 \to 0 \to D^0 \xrightarrow{d^0(z)} D^1 \xrightarrow{d^1(z)} D^2 \to \cdots \tag{2.8}$$

an den Stellen $D^1, D^2, \ldots$ in z_0 exakt. Wegen $\ker d^0(z_0) = \ker \alpha^{-1}(z_0) = \{0\}$ ist (2.8) dann überall in z_0 exakt.

Das nachfolgende Lemma ist zentral für die sich anschließenden Ausführungen.

Lemma 2.2.8 *Seien X, Y und Z Banachräume, $U \subset \Omega$ offen, $z_0 \in U$ und $\alpha : U \to L(X,Y)$ und $\beta : U \to L(Y,Z)$ holomorphe Abbildungen derart, dass $\beta(z)\alpha(z) = 0$ ist für alle $z \in U$ und*

$$X \xrightarrow{\alpha(z)} Y \xrightarrow{\beta(z)} Z \quad (z \in U)$$

an der Stelle z_0 exakt ist. Dann existiert eine offene Umgebung $V \subset U$ von z_0 derart, dass

$$\mathscr{O}(V,X) \xrightarrow{\alpha_V} \mathscr{O}(V,Y) \xrightarrow{\beta_V} \mathscr{O}(V,Z)$$

[3] Hierbei wird E^{p-1} in kanonischer Weise als Teilraum von $D^p = E^{p-1} \oplus L^p$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ aufgefasst.

exakt ist, und so, dass für $g \in \ker \beta_V$ und $x \in X$ mit $\alpha(z_0)x = g(z_0)$ eine Funktion $w \in \mathscr{O}(V, X)$ mit $w(z_0) = x$ und $\alpha_V(w) = g$ existiert.

Beweis: Das Lemma folgt aufgrund seiner lokalen Struktur aus [EP96], Lemma 2.1.5, und der sich dort anschließenden Bemerkung. ■

Proposition 2.2.9 *Sei $q \in \mathbb{Z}$ und sei $(z_0, U, (L^\bullet, u^\bullet), f^\bullet)$ q-zulässig. Dann besitzt das Quadrupel eine 1-Verfeinerung.*

Beweis: Sei $(D^\bullet, d^\bullet) = C(f^\bullet)$, d.h. $D^p = E^{p-1} \oplus L^p$ und

$$d^p \in \mathscr{O}(U, L(D^p, D^{p+1})) \quad \text{mit} \quad d^p(z) = \begin{pmatrix} \alpha^{p-1}(z) & (-1)^p f^p(z) \\ 0 & u^p(z) \end{pmatrix}$$

für $z \in U$ und $p \in \mathbb{Z}$. Seien $\pi_1 : D^p \to E^{p-1}$ und $\pi_2 : D^p \to L^p$ die kanonischen Projektionen auf die erste bzw. zweite Komponente.

Seien $r_{q-1} = \dim H^{q-1}(E^\bullet, \alpha^\bullet(z_0)) < +\infty$, $\tilde{L}^{q-1} = \mathbb{C}^{r_{q-1}}$ und seien $y_1, ..., y_{r_{q-1}} \in \ker \alpha^{q-1}(z_0)$ derart, dass $[y_1], ..., [y_{r_{q-1}}]$ eine Basis von $H^{q-1}(E^\bullet, \alpha^\bullet(z_0))$ ist.

Die Sequenz

$$D^q \xrightarrow{d^q(z)} D^{q+1} \xrightarrow{d^{q+1}(z)} D^{q+2} \tag{2.9}$$

ist nach Voraussetzung an der Stelle z_0 exakt. Wegen $y_i \in \ker \alpha^{q-1}(z_0) = \ker d^q(z_0)$ für $i = 1, ..., r_{q-1}$, existieren nach Lemma 2.2.8 angewandt auf (2.9) eine offene Umgebung $\tilde{U} \subset U$ von z_0 und Abbildungen $w_i \in \mathscr{O}(\tilde{U}, D^q)$ mit

$$w_i(z_0) = y_i \quad \text{und} \quad d^q(z) w_i(z) = 0 \quad \text{für } z \in \tilde{U} \text{ und } i = 1, ..., r_{q-1}. \tag{2.10}$$

Wir definieren die Hilfsfunktion

$$h : \tilde{U} \to L(\tilde{L}^{q-1}, D^q), \quad h(z)(t_1, ..., t_{r_{q-1}}) = \sum_{j=1}^{r_{q-1}} t_j w_j(z),$$

sowie

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{q-1} &: \tilde{U} \to L(\tilde{L}^{q-1}, L^q), \quad \tilde{u}^{q-1}(z) = -\pi_2 h(z) \quad \text{und} \\ \tilde{f}^{q-1} &: \tilde{U} \to L(\tilde{L}^{q-1}, E^{q-1}), \quad \tilde{f}^{q-1}(z) = (-1)^q \pi_1 h(z). \end{aligned}$$

Die Abbildungen h, $\tilde{u}^{q-1}$ und $\tilde{f}^{q-1}$ sind offensichtlich holomorph. Für $z \in \tilde{U}$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &= d^q(z)h(z) = d^q(z)\pi_1 h(z) + d^q(z)\pi_2 h(z) \\ &= \underbrace{\alpha^{q-1}(z)\pi_1 h(z) + (-1)^q f^q(z)\pi_2 h(z)}_{\in E^q} + \underbrace{u^q(z)\pi_2 h(z)}_{\in L^{q+1}}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

d.h. $u^q(z)\tilde{u}^{q-1}(z) = 0$. Folglich wird durch $\tilde{L}^p = L^p$ für alle $p \neq q-1$ und $\tilde{u}^p = u^p|_{\tilde{U}}$ für alle $p \notin \{q-1, q-2\}$, $\tilde{u}^{q-2} \equiv 0$, ein Komplex $(\tilde{L}^\bullet, \tilde{u}^\bullet)$ endlich-dimensionaler Räume definiert. Unter Berücksichtigung von (2.11) gilt für $z \in \tilde{U}$

$$\begin{aligned} f^q(z)\tilde{u}^{q-1}(z) - \alpha^{q-1}(z)\tilde{f}^{q-1}(z) &= -f^q(z)\pi_2 h(z) - (-1)^q \alpha^{q-1}(z)\pi_1 h(z) \\ &= (-1)^{q+1}\left[\alpha^{q-1}(z)\pi_1 h(z) + (-1)^q f^q(z)\pi_2 h(z)\right] = 0. \end{aligned}$$

Definiert man deshalb $\tilde{f}^p = f^p|_{\tilde{U}}$ für alle $p \neq q-1$, so erhält man einen Morphismus $\tilde{f}^\bullet : (\tilde{L}^\bullet, \tilde{u}^\bullet) \to (E^\bullet, \alpha^\bullet)|_{\tilde{U}}$ in $d\mathscr{B}_{\tilde{U}}$. Für den Abbildungskegel $(\tilde{D}^\bullet, \tilde{d}^\bullet)$ von $\tilde{f}^\bullet$ berechnet man $\tilde{d}^p = d^p|_{\tilde{U}}$ für alle $p \neq q-1$ und

$$\begin{aligned} \tilde{d}^{q-1}(z)(x \oplus t) &= \alpha^{q-2}(z)x + (-1)^{q-1}\tilde{f}^{q-1}(z)t + \tilde{u}^{q-1}(z)t \\ &= \alpha^{q-2}(z)x + (-1)^{q-1}(-1)^q \pi_1 h(z)t - \pi_2 h(z)t \\ &= \alpha^{q-2}(z)x - h(z)t \end{aligned} \tag{2.12}$$

für $z \in \tilde{U}$ und $x \oplus t \in \tilde{D}^{q-1}$. Sei $x \oplus t \in \ker \tilde{d}^{q-1}(z_0)$. Wegen (2.12) ist dann $\sum_{i=1}^{r_{q-1}} t_i y_i = h(z_0)t \in \operatorname{im} \alpha^{q-2}(z_0)$ und somit $t = 0$, woraus folgt, dass $x \in \ker \alpha^{q-2}(z_0)$ ist. Für $x \in \ker \alpha^{q-2}(z_0)$ ist natürlich $x \oplus 0 \in \ker \tilde{d}^{q-1}(z_0)$. Also ist $\ker \tilde{d}^{q-1}(z_0) = \ker \alpha^{q-2}(z_0)$ und damit gilt $\ker \tilde{d}^p(z_0) = \ker \alpha^{p-1}(z_0)$ für alle $p \geq q-1$. Der Komplex $(\tilde{D}^\bullet, \tilde{d}^\bullet)$ ist an den Stellen $\tilde{D}^{q+1}, \tilde{D}^{q+2}, \ldots$ in z_0 exakt. Bei $\tilde{D}^q$ ergibt sich

$$\operatorname{im} \tilde{d}^{q-1}(z_0) = \operatorname{im} \alpha^{q-2}(z_0) + \operatorname{im} h(z_0) = \ker \alpha^{q-1}(z_0) = \ker \tilde{d}^q(z_0).$$

Damit ist gezeigt, dass $(z_0, \tilde{U}, (\tilde{L}^\bullet, \tilde{u}^\bullet), \tilde{f}^\bullet)$ $(q-1)$-zulässig ist. Nach Konstruktion ist das Quadrupel eine 1-Verfeinerung von $(z_0, U, (L^\bullet, u^\bullet), f^\bullet)$. ■

Wir erinnern, dass der Ausgangskomplex $(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ ein l-Komplex in $d\mathscr{B}_\Omega$ ist.

Satz 2.2.10 *Sei $z_0 \in \varrho_e(E^\bullet, \alpha^\bullet)$. Dann existiert eine offene Umgebung $U \subset \Omega$ von z_0, ein l-Komplex $(L^\bullet, u^\bullet)$ endlich-dimensionaler Räume in $d\mathscr{B}_U$ und ein Morphismus $f^\bullet : (L^\bullet, u^\bullet) \to (E^\bullet, \alpha^\bullet)|_U$ in $d\mathscr{B}_U$ derart, dass $(C(f^\bullet), d^\bullet)$ und $C(f^\bullet_U)$ exakt sind mit $\ker d^p(z_0) = \ker \alpha^{p-1}(z_0)$ für alle $p \in \mathbb{Z}$.*

Beweis: Das Quadrupel $(z_0, \Omega, (0^\bullet, 0^\bullet), 0^\bullet)$ ist $(l+1)$-zulässig: Für $(D^\bullet, d^\bullet) = C(0^\bullet)$ gilt $D^l = E^{l-1}$, $D^{l+1} = E^l$ und $D^p = \{0\}$ für $p > l+1$, sowie $d^l(z) = \alpha^{l-1}(z)$ und $d^p(z) = 0$ für $z \in \Omega$ und $p > l$. Offensichtlich ist $(D^\bullet, d^\bullet)$ an den Stellen $D^{l+2}, D^{l+3}, \ldots$ in z_0 exakt und $\ker d^p(z_0) = \ker \alpha^{p-1}(z_0)$ für alle $p \geq l+1$.

Induktiv folgt mit Proposition 2.2.9, dass eine $(l+1)$-Verfeinerung $(z_0, V, (L^\bullet, u^\bullet), f^\bullet)$ von $(z_0, \Omega, (0^\bullet, 0^\bullet), 0^\bullet)$ existiert. Für diese gilt dann $L^p = \{0\}$ für $p < 0$ und $p > l$. Da $(z_0, V, (L^\bullet, u^\bullet), f^\bullet)$ 0-zulässig ist, ist

$$(C(f^\bullet), d^\bullet) : \cdots \to 0 \to D^0 \xrightarrow{d^0(z)} D^1 \xrightarrow{d^1(z)} \cdots \xrightarrow{d^l(z)} D^{l+1} \to 0 \to \cdots \quad (z \in V) \tag{2.13}$$

in z_0 exakt.

Da $C(f^\bullet)$ endliche Länge besitzt, existiert eine offene Umgebung $U \subset V$ von z_0 derart, dass $C(f^\bullet)|_U$ und $C(f^\bullet_U)$ exakt sind (man beachte die Lokalität der Aussage und [EP96], Theorem 2.1.8). Die Aussage folgt nun mit U, $(L^\bullet, u^\bullet)|_U$ und $f^\bullet|_U$. ■

Man beachte, dass aus der Exaktheit von $(C(f^\bullet), d^\bullet)$ über U in Satz 2.2.10 die Inklusion $U \subset \varrho_e(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ folgt: Denn sind $z \in U$ und $p \in \mathbb{Z}$ fixiert, so existiert für alle $x \in \ker \alpha^p(z) \subset \ker d^{p+1}(z) = \operatorname{im} d^p(z)$ ein $y \in E^{p-1}$ und ein $t \in L^p$ mit $x = \alpha^{p-1}(z)y + (-1)^p f^p(z)t$. Da $\dim L^p < +\infty$ ist, folgt hieraus $\dim \big(\ker \alpha^p(z)/\operatorname{im} \alpha^{p-1}(z)\big) < +\infty$, d.h. $z \in \varrho_e(E^\bullet, \alpha^\bullet)$. Damit ist das nachfolgende wohlbekannte Korollar erneut bewiesen:

Korollar 2.2.11 *Die Menge $\varrho_e(E^\bullet, \alpha^\bullet) \subset \Omega$ ist offen.*

Satz 2.2.12 *Sei $z_0 \in \varrho_{e,c}(E^\bullet, \alpha^\bullet)$. Dann existiert eine offene Umgebung $U \subset \Omega$ von z_0, ein l-Komplex $(L^\bullet, u^\bullet)$ endlich-dimensionaler Räume in $d\mathscr{B}_U$ und ein Morphismus $f^\bullet : (L^\bullet, u^\bullet) \to (E^\bullet, \alpha^\bullet)|_U$ in $d\mathscr{B}_U$ derart, dass $C(f^\bullet)$ und $C(f^\bullet_U)$ split-exakt sind.*

Beweis: Wegen $z_0 \in \varrho_{e,c}(E^\bullet, \alpha^\bullet) \subset \varrho_e(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ existiert nach Proposition 2.2.10 und Korollar 2.2.11 eine offene Umgebung $V \subset \varrho_e(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ von z_0, ein l-Komplex $(L^\bullet, u^\bullet)$ endlich-dimensionaler Räume in $d\mathscr{B}_V$ und ein Morphismus $f^\bullet : (L^\bullet, u^\bullet) \to (E^\bullet, \alpha^\bullet)|_V$ in $d\mathscr{B}_V$ derart, dass $(D^\bullet, d^\bullet) = C(f^\bullet)$ exakt ist mit $\ker d^p(z_0) = \ker \alpha^{p-1}(z_0)$ für alle $p \in \mathbb{Z}$. Wir beweisen:

> Existieren für ein $q \in \mathbb{Z}$ eine offene Umgebung $U \subset \Omega$ von z_0 und Abbildungen $\varepsilon^p \in \mathscr{O}(U, L(D^p, D^{p-1}))$, $p \geq q$, mit
>
> $$d^{p-1}(z)\varepsilon^p(z) + \varepsilon^{p+1}(z)d^p(z) = \mathrm{id}_{D^p} \tag{2.14}$$
>
> für $p \geq q$, $z \in U$, so gilt dasselbe für $q-1$.

Man beachte, dass

$$D^{q-2} \overset{d^{q-2}(z_0)}{\longrightarrow} \operatorname{im} d^{q-2}(z_0) \to 0$$

exakt ist. Wegen der Komplementiertheit von $\ker d^{q-2}(z_0) = \ker \alpha^{q-3}(z_0)$ kann D^{q-2} zerlegt werden in $D^{q-2} = \ker d^{q-2}(z_0) \oplus D_0$ mit einem abgeschlossenen Teilraum D_0 von D^{q-2}. Da $\operatorname{im} d^{q-2}(z_0) = \ker d^{q-1}(z_0)$ abgeschlossen ist, existiert ein stetiger Operator $\tilde{R} : \operatorname{im} d^{q-2}(z_0) \to D_0$ mit $\tilde{R} = \big(d^{q-2}(z_0)|_{D_0}\big)^{-1}$. Sei $R : \operatorname{im} d^{q-2}(z_0) \to D^{q-2}$ definiert durch $R = 0 \oplus \tilde{R}$. Die Sequenz

$$L(D^{q-1}, D^{q-2}) \overset{\alpha(z)}{\longrightarrow} L(D^{q-1}) \overset{\beta(z)}{\longrightarrow} L(D^{q-1}, D^q) \quad (z \in U) \tag{2.15}$$

mit $\alpha(z)T = d^{q-2}(z)T$ für $T \in L(D^{q-1}, D^{q-2})$ und $\beta(z)S = d^{q-1}(z)S$ für $S \in L(D^{q-1})$ erfüllt offensichtlich $\beta(z)\alpha(z) = 0$ für alle $z \in U$.

Sei $S \in \ker \beta(z_0)$, d.h. $\operatorname{im} S \subset \ker d^{q-1}(z_0) = \operatorname{im} d^{q-2}(z_0)$. Dann lässt sich eine Abbildung $Q \in L(D^{q-1}, D^{q-2})$ definieren durch $Qx = RSx$ für $x \in D^{q-1}$. Es folgt

$$\alpha(z_0)Qx = \alpha(z_0)RSx = d^{q-2}(z_0)RSx = Sx, \qquad x \in D^{q-1},$$

d.h. $\alpha(z_0)Q = S$. Also ist $\operatorname{im}\alpha(z_0) = \ker\beta(z_0)$. Lemma 2.2.8 angewandt auf (2.15) liefert die Existenz einer offenen Umgebung $\tilde{U} \subset U$ von z_0 derart, dass

$$\mathscr{O}(\tilde{U}, L(D^{q-1}, D^{q-2})) \xrightarrow{\alpha_{\tilde{U}}} \mathscr{O}(\tilde{U}, L(D^{q-1})) \xrightarrow{\beta_{\tilde{U}}} \mathscr{O}(\tilde{U}, L(D^{q-1}, D^q))$$

exakt ist. Für $z \in \tilde{U}$ gilt:

$$\begin{aligned}\left[\beta_{\tilde{U}}(\mathrm{id}_{D^{q-1}} - \varepsilon^q d^{q-1})|_{\tilde{U}}\right](z) &= d^{q-1}(z)(\mathrm{id}_{D^{q-1}} - \varepsilon^q(z)d^{q-1}(z)) \\ &= d^{q-1}(z) - (\mathrm{id}_{D^q} - \varepsilon^{q+1}(z)d^q(z))d^{q-1}(z) = 0,\end{aligned}$$

wobei (2.14) für $p = q$ und $z \in \tilde{U}$ ausgenutzt wurde. Folglich existiert eine Abbildung $\tilde{\varepsilon}^{q-1} \in \mathscr{O}(\tilde{U}, L(D^{q-1}, D^{q-2}))$ mit

$$\alpha_{\tilde{U}}(\tilde{\varepsilon}^{q-1}) = (\mathrm{id}_{D^{q-1}} - \varepsilon^q d^{q-1})|_{\tilde{U}}$$

bzw. $d^{q-2}(z)\tilde{\varepsilon}^{q-1}(z) = \left[\alpha_{\tilde{U}}(\tilde{\varepsilon}^{q-1})\right](z) = \mathrm{id}_{D^{q-1}} - \varepsilon^q(z)d^{q-1}(z)$ für $z \in \tilde{U}$. Man ist fertig, wenn man $\tilde{\varepsilon}^p = \varepsilon^p|_{\tilde{U}}$ für $p \geq q$ setzt, denn dann ist (2.14) für $p \geq q-1$, $(\tilde{\varepsilon}^p)_{p \geq q-1}$ und $z \in \tilde{U}$ erfüllt.

Für alle $p \geq l+2$ erfüllen die Abbildungen $\varepsilon^p \equiv 0 \in \mathscr{O}(\Omega, L(D^p, D^{p-1}))$ die Gleichung (2.14) auf ganz Ω. Induktiv folgt deshalb, dass es eine offene Umgebung $U \subset \Omega$ von z_0 und Abbildungen $\varepsilon^p \in \mathscr{O}(U, L(D^p, D^{p-1}))$, $p \geq 0$, gibt (nach Konstruktion ist $\varepsilon^p \equiv 0$ für $p \geq l+2$), die (2.14) für alle $p \geq 0$ erfüllen. Setzt man $\varepsilon^p \equiv 0 \in \mathscr{O}(U, L(D^p, D^{p-1}))$ für $p < 0$, so erhält man eine splittende Familie $(\varepsilon^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ für $C(f^\bullet)$. Gleichzeitig ist

$$d_U^{p-1}\varepsilon_U^p + \varepsilon_U^{p+1}d_U^p = \mathrm{id}_{\mathscr{O}(U,D^p)} \quad (p \in \mathbb{Z}),$$

d.h. auch $C(f_U^\bullet)$ ist split-exakt. ■

Korollar 2.2.13 *Die Menge $\varrho_{e,c}(E^\bullet, \alpha^\bullet) \subset \Omega$ ist offen.*

Beweis: Für alle $z_0 \in \varrho_{e,c}(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ existiert eine offene Umgebung $U \subset \varrho_e(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ von z_0 (Korollar 2.2.11), ein l-Komplex $(L^\bullet, u^\bullet)$ endlich-dimensionaler Räume in $d\mathscr{B}_U$ und ein Morphismus $f^\bullet : (L^\bullet, u^\bullet) \to (E^\bullet, \alpha^\bullet)|_U$ in $d\mathscr{B}_U$ derart, dass $C(f^\bullet)$ split-exakt ist (Satz 2.2.12). Aus der Bemerkung zu den Konsequenzen der Existenz einer splittenden Familie $(\varepsilon^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ für $C(f^\bullet)$ auf Seite 30 folgt, dass $\ker d^p(z)$ komplementiert ist für alle $p \in \mathbb{Z}$ und $z \in U$. Da $\ker \alpha^p(z)$ endlich-kodimensional in $\ker d^{p+1}(z)$ ist (siehe die Bemerkungen vor Korollar 2.2.11), ist auch $\ker \alpha^p(z)$ komplementiert in E^p. ■

5 Beweis

Zum Beweis der Sätze 2.2.1 und 2.2.3 müssen nur die in diesem Paragraphen gewonnenen Erkenntnisse zusammengetragen werden.

Beweis: (von Satz 2.2.3) Ohne Einschränkung sei $(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ ein l-Komplex ($l \in \mathbb{N}$), d.h. es sei $E^p = \{0\}$ für $p < 0$ und $p > l$. Sei $U \subset \varrho_{e,c}(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ eine Steinsche offene Menge.

Nach Proposition 2.2.12 können wir zu jedem Punkt $z \in U$ eine Steinsche offene Umgebung $V = V_z \subset U$ von z, einen l-Komplex $(L^\bullet, u^\bullet)$ endlich-dimensionaler Räume über V und einen Morphismus $f^\bullet : (L^\bullet, u^\bullet) \to (E^\bullet, \alpha^\bullet)|_V$ in $d\mathscr{B}_V$ wählen derart, dass $C(f_V^\bullet)$ split-exakt ist. Sei $\mathscr{K}_V^p = \ker \overline{u}^p / \operatorname{im} \overline{u}^{p-1}$ und sei

$$\phi_V^p : \ker u_V^p / \operatorname{im} u_V^{p-1} \to \Gamma(V, \mathscr{K}_V^p)$$

definiert wie in (2.5). Dann ist nach Proposition 2.2.4 die Abbildung ϕ_V^p ein topologischer Isomorphismus zwischen nuklearen Frécheträumen. Wegen $\varrho_e(L^\bullet, u^\bullet) = V$ ist $V \subset \varrho_e(L^\bullet, u^\bullet) \cap \varrho_e(E^\bullet, \alpha^\bullet)$, und es folgt mit Proposition 2.2.7, dass auch

$$\psi_V^p : \ker \alpha_V^p / \operatorname{im} \alpha_V^{p-1} \to \Gamma(V, \mathscr{H}_\Omega^p)$$

ein topologischer Isomorphismus ist. Da Ω das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, gibt es eine Folge $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in U so, dass $U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_{z_i}$ ist. Die Behauptung ergibt sich nun aus Proposition 2.2.5. ∎

Wie in den Bemerkungen vor Satz 2.2.3 gesehen, ist hiermit auch Satz 2.2.1 bewiesen.

2.3 Abgeschlossene Bilder bzgl. w^*-Topologien

In §2.2 haben für einen Komplex $(E^\bullet, \alpha^\bullet) \in d\mathscr{B}_\Omega$ die Mengen $\varrho_e(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ und $\varrho_{e,c}(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ eine zentrale Rolle gespielt. In diesem Paragraphen geht es um Komplexe $(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet) \in d\tilde{\mathscr{B}}_\Omega$ und um w^*-Topologien.[4] Um vergleichbare Resultate zu erhalten, ist eine zusätzliche Menge zu betrachten:

$$\varrho_{e,c^*}(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet) = \{z \in \varrho_e(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet) : \ker \tilde{\alpha}^p(z) \text{ ist } w^*\text{-komplementiert für alle } p \in \mathbb{Z}\}.$$

Ist $\tilde{E}$ ein Dualraum und E ein Banachraum mit $E' \cong \tilde{E}$, so sei daran erinnert, dass die w^*-Topologie auf $\tilde{E}$ die schwache Topologie bzgl. der kanonischen Dualität $\langle E, \tilde{E}\rangle$ ist. Ein Teilraum E_0 von $\tilde{E}$ ist w^*-komplementiert, wenn ein w^*-abgeschlossener Teilraum E_1 von $\tilde{E}$ existiert mit $\tilde{E} \cong E_0 \oplus E_1$.

Das zu Satz 2.2.1 duale Resultat lautet:

Satz 2.3.1 *Sei $(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet) \in d\tilde{\mathscr{B}}_\Omega$. Für jede Steinsche offene Menge $U \subset \varrho_{e,c^*}(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet)$ und alle $p \in \mathbb{Z}$ ist der Quotient*

$$(\ker \tilde{\alpha}_U^p)_{w^*} / \operatorname{im} \tilde{\alpha}_U^{p-1}$$

separiert.

In der Situation von Satz 2.3.1 ist die Separiertheit des dort beschriebenen Quotienten äquivalent zur w^*-Abgeschlossenheit des Teilraumes $\operatorname{im} \tilde{\alpha}_U^{p-1} \subset \mathscr{O}(U, \tilde{E}^p)$.

[4] Für die Bezeichnungen vergleiche §2.1 ab Seite 32.

Auch für den Beweis von Satz 2.3.1 können die Abbildungen

$$\psi_U^p : \ker \tilde{\alpha}_U^p / \operatorname{im} \tilde{\alpha}_U^{p-1} \to \Gamma(U, \mathscr{H}_\Omega^p), \quad U \subset \Omega \text{ offen}, p \in \mathbb{Z},$$

aus §2.2 herangezogen werden; hierbei ist $\mathscr{H}_\Omega^p$ sinngemäß definiert:

$$\mathscr{H}_\Omega^p = \ker \overline{\tilde{\alpha}}_\Omega^p / \operatorname{im} \overline{\tilde{\alpha}}_\Omega^{p-1}.$$

Für $U \subset \varrho_{e,c^*}(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet) \subset \varrho_{e,c}(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet)$ offen ist nach Satz 2.2.3 die Abbildung ψ_U^p ein topologischer Isomorphismus, wenn rechts wie links die kanonischen Fréchetraumtopologien zugrunde gelegt werden. Im Rahmen dieses Paragraphen ist es sinnvoll, die Räume $\ker \tilde{\alpha}_U^p / \operatorname{im} \tilde{\alpha}_U^{p-1}$ und $\Gamma(U, \mathscr{H}_\Omega^p)$ mit einer anderen Topologie zu versehen. Wir wollen deshalb ψ_U^p entweder als rein algebraische Abbildung im Sinne von Proposition 2.2.2 oder als topologischen Isomorphismus im Sinne von Satz 2.2.3 verstehen. Wir versehen ψ_U^p mit einer Tilde, $\tilde{\psi}_U^p$, wenn ψ_U^p als Abbildung zwischen den Räumen $(\ker \tilde{\alpha}_U^p)_{w^*} / \operatorname{im} \tilde{\alpha}_U^{p-1}$ und $\Gamma(U, \mathscr{H}_\Omega^p)_w$ aufgefasst werden soll. Es geht im Folgenden um den Beweis der nachfolgenden Aussage, auf die sich Satz 2.3.1 zurückführen lässt.

Satz 2.3.2 *Sei $(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet) \in d\tilde{\mathscr{B}}_\Omega$. Für jede Steinsche offene Menge $U \subset \varrho_{e,c^*}(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet)$ und alle $p \in \mathbb{Z}$ ist*

$$\tilde{\psi}_U^p : (\ker \tilde{\alpha}_U^p)_{w^*} / \operatorname{im} \tilde{\alpha}_U^{p-1} \to \Gamma(U, \mathscr{H}_\Omega^p)_w$$

ein topologischer Isomorphismus.

Unter den Voraussetzungen von Satz 2.3.2 ist $\Gamma(U, \mathscr{H}_\Omega^p)_w$ separiert (Hahn-Banach). Dasselbe gilt dann auch für den Quotienten auf der linken Seite.

Der Beweis von Satz 2.3.2 erfährt denselben Aufbau wie der Beweis von Satz 2.2.3.

1 Spezialisierung

Proposition 2.3.3 *Die Banachräume $\tilde{E}^p$, $p \in \mathbb{Z}$, des Komplexes $(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet) \in d\tilde{\mathscr{B}}_\Omega$ seien endlich-dimensional. Dann gilt: Für jede Steinsche offene Menge $U \subset \Omega$ und alle $p \in \mathbb{Z}$ ist $\tilde{\psi}_U^p$ ein topologischer Vektorraumisomorphismus. Insbesondere sind für alle $p \in \mathbb{Z}$ die Quotienten $(\ker \tilde{\alpha}_U^p)_{w^*} / \operatorname{im} \tilde{\alpha}_U^{p-1}$ separiert (und die Mengen $\operatorname{im} \tilde{\alpha}_U^{p-1}$ damit w^*-abgeschlossen).*

Beweis: Aus Proposition 2.2.4 ist bekannt, dass unter den Voraussetzungen an U die Abbildungen ψ_U^p, $p \in \mathbb{Z}$, topologische Isomorphismen sind. Sei $p \in \mathbb{Z}$ fixiert. Dann ist

$$\psi_U^p : \left(\ker \tilde{\alpha}_U^p / \operatorname{im} \tilde{\alpha}_U^{p-1}\right)_w \to \Gamma(U, \mathscr{H}_\Omega^p)_w$$

stetig und bijektiv; außerdem ist die Abbildung als offene Abbildung bzgl. den Fréchetraumtopologien offen bzgl. den schwachen Topologien ([Köt83b], §32.3(3)). Gezeigt werden muss deshalb nur, dass

$$\left(\ker \tilde{\alpha}_U^p / \operatorname{im} \tilde{\alpha}_U^{p-1}\right)_w \xrightarrow{\text{id}} (\ker \tilde{\alpha}_U^p)_{w^*} / \operatorname{im} \tilde{\alpha}_U^{p-1}$$

ein topologischer Isomorphismus ist. Für die linke Seite gilt

$$\left(\ker \tilde{\alpha}_U^p / \operatorname{im} \tilde{\alpha}_U^{p-1}\right)_w \cong (\ker \tilde{\alpha}_U^p)_w / \operatorname{im} \tilde{\alpha}_U^{p-1}$$

([Schae66], Corollary IV.4.1.2) und da $\mathscr{O}(U, \tilde{E}^p)$ wegen der endlichen Dimension von $\tilde{E}^p$ reflexiv ist, gilt auch $(\ker \tilde{\alpha}_U^p)_{w^*} = (\ker \tilde{\alpha}_U^p)_w$. ■

(2) Lokalisierung

Proposition 2.3.4 *Sei $(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet) \in d\tilde{\mathscr{B}}_\Omega$ und sei $U \subset \varrho_e(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet)$ eine Steinsche offene Menge. Dann gilt: Existiert eine Überdeckung $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ von U aus Steinschen offenen Mengen derart, dass für $p \in \mathbb{Z}$ und $i \in \mathbb{N}$ die Abbildung $\tilde{\psi}_{U_i}^p$ stetig ist, dann ist auch $\tilde{\psi}_U^p$ stetig. In diesem Fall ist für alle $p \in \mathbb{Z}$ der Raum $(\ker \tilde{\alpha}_U^p)_{w^*} / \operatorname{im} \tilde{\alpha}_U^{p-1}$ separiert (und $\operatorname{im} \tilde{\alpha}_U^{p-1}$ damit w^*-abgeschlossen).*

Beweis: Sei $p \in \mathbb{Z}$ fixiert, $\{U_i\}_i$ eine Überdeckung wie in der Proposition, $\tilde{\psi}_i^p = \tilde{\psi}_{U_i}^p$ und $\tilde{\alpha}_i^p = \tilde{\alpha}_{U_i}^p$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Abbildungen r und $\tilde{r}$ aus dem Beweis von Propositon 2.2.5, sowie das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma(U, \mathscr{H}_\Omega^p)_w & \xrightarrow{\quad r \quad} & \prod_i \Gamma(U_i, \mathscr{H}_\Omega^p)_w \\
{\scriptstyle \tilde{\psi}_U^p}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \prod_i \tilde{\psi}_i^p} \\
(\ker \tilde{\alpha}_U^p)_{w^*} / \operatorname{im} \tilde{\alpha}_U^{p-1} & \xrightarrow{\quad \tilde{r} \quad} & \prod_i (\ker \tilde{\alpha}_i^p)_{w^*} / \operatorname{im} \tilde{\alpha}_i^{p-1}
\end{array} .$$

Bzgl. den Fréchetraumtopologien sind r und $\tilde{r}$ topologische Monomorphismen. Wegen

$$\prod_i \Gamma(U_i, \mathscr{H}_\Omega^p)_w \cong \left(\prod_i \Gamma(U_i, \mathscr{H}_\Omega^p)\right)_w$$

([Schae66], Theorem IV.4.3) ist auch $r : \Gamma(U, \mathscr{H}_\Omega^p)_w \to \prod_i \Gamma(U_i, \mathscr{H}_\Omega^p)_w$ ein topologischer Monomorphismus ([Köt83b], §32.3(3)). Nach Voraussetzung ist $\prod_i \tilde{\psi}_i^p$ stetig. Es muss somit nur noch die Stetigkeit von

$$\tilde{r} : (\ker \tilde{\alpha}_U^p)_{w^*} / \operatorname{im} \tilde{\alpha}_U^{p-1} \to \prod_i (\ker \tilde{\alpha}_i^p)_{w^*} / \operatorname{im} \tilde{\alpha}_i^{p-1}$$

gezeigt werden. Hierzu genügt es, für $i \in \mathbb{N}$ die Stetigkeit der Restriktion $\rho : \mathscr{O}(U, \tilde{E}^p)_{w^*} \to \mathscr{O}(U_i, \tilde{E}^p)_{w^*}$ nachzuweisen.

Sei E^p ein Banachraum mit $(E^p)' \cong \tilde{E}^p$ und sei $R : \mathscr{O}(U) \to \mathscr{O}(U_i)$ die kanonische Restriktionsabbildung. Sei $R' : \mathscr{O}(U_i)' \to \mathscr{O}(U)'$ die (prä-)adjungierte Abbildung. Dann ist

$$R' \otimes \mathrm{id}_{E^p} : \mathscr{O}(U_i)' \hat{\otimes} E^p \to \mathscr{O}(U)' \hat{\otimes} E^p$$

stetig, und man rechnet leicht nach, dass

$$R \otimes \mathrm{id}_{\tilde{E}^p} : \mathscr{O}(U) \hat{\otimes} \tilde{E}^p \to \mathscr{O}(U_i) \hat{\otimes} \tilde{E}^p$$

der zu $R'\otimes\mathrm{id}_{E^p}$ adjungierte Operator ist. Vermöge $\mathscr{O}(U)\hat{\otimes}\tilde{E}^p \cong \mathscr{O}(U,\tilde{E}^p)$ und $\mathscr{O}(U_i)\hat{\otimes}\tilde{E}^p \cong \mathscr{O}(U_i,\tilde{E}^p)$ ist zudem $\rho = R\otimes \mathrm{id}_{\tilde{E}^p}$. Also ist ρ eine w^*-w^*-stetige Abbildung ([MV92], Satz 23.30). ∎

③ Übertragung

Seien $(\tilde{F}^\bullet,\tilde{\beta}^\bullet)$ und $(\tilde{E}^\bullet,\tilde{\alpha}^\bullet)$ zwei Komplexe in $d\tilde{\mathscr{B}}_\Omega$ und seien für $p\in\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\mathscr{H}^p_\Omega &= \ker \overline{\tilde{\alpha}}^p_\Omega / \operatorname{im} \overline{\tilde{\alpha}}^{p-1}_\Omega, \quad \tilde{\psi}^p_U : (\ker \tilde{\alpha}^p_U)_{w^*} / \operatorname{im} \tilde{\alpha}^{p-1}_U \to \Gamma(U,\mathscr{H}^p_\Omega)_w \quad \text{und}\\ \mathscr{K}^p_\Omega &= \ker \overline{\tilde{\beta}}^p_\Omega / \operatorname{im} \overline{\tilde{\beta}}^{p-1}_\Omega, \quad \tilde{\phi}^p_U : (\ker \tilde{\beta}^p_U)_{w^*} / \operatorname{im} \tilde{\beta}^{p-1}_U \to \Gamma(U,\mathscr{K}^p_\Omega)_w\end{aligned}$$

wie in (2.5).

Proposition 2.3.5 *Sei $U \subset \varrho_e(\tilde{F}^\bullet,\tilde{\beta}^\bullet)\cap\varrho_e(\tilde{E}^\bullet,\tilde{\alpha}^\bullet)$ eine Steinsche offene Menge und $\tilde{f}^\bullet : (\tilde{F}^\bullet,\tilde{\beta}^\bullet)|_U \to (\tilde{E}^\bullet,\tilde{\alpha}^\bullet)|_U$ ein Morphismus in $d\tilde{\mathscr{B}}_U$ derart, dass der Abbildungskegel $C(\tilde{f}^\bullet_U)$ split*-exakt ist. Dann gilt für alle $p\in\mathbb{Z}$:*

$$\tilde{\psi}^p_U \text{ ist stetig} \iff \tilde{\phi}^p_U \text{ ist stetig.}$$

Beweis: Sei $(\tilde{\varepsilon}^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ ein $*$-splittende Familie für $(\tilde{D}^\bullet,\tilde{d}^\bullet) = C(\tilde{f}^\bullet_U)$, d.h. insbesondere mit $\tilde{\varepsilon}^p_U \in \mathcal{L}(\mathscr{O}(U,\tilde{D}^p),\mathscr{O}(U,\tilde{D}^{p-1}))$ für alle $p\in\mathbb{Z}$. Dann ist die wie im Beweis von Proposition 2.2.7 definierte Familie $g^\bullet_U$ ein Morphismus in $d\tilde{\mathscr{F}}_U$. Für alle $p\in\mathbb{Z}$ und $V\subset U$ offen sind die Abbildungen

$$\begin{aligned}&[\tilde{f}^p_V] : (\ker \tilde{\beta}^p_V)_{w^*}/\operatorname{im}\tilde{\beta}^{p-1}_V \to (\ker\tilde{\alpha}^p_V)_{w^*}/\operatorname{im}\tilde{\alpha}^{p-1}_V \quad \text{und}\\ &[\tilde{g}^p_V] : (\ker \tilde{\alpha}^p_V)_{w^*}/\operatorname{im}\tilde{\alpha}^{p-1}_V \to (\ker\tilde{\beta}^p_V)_{w^*}/\operatorname{im}\tilde{\beta}^{p-1}_V\end{aligned}$$

stetig und invers zueinander. Wie im Beweis von Proposition 2.2.7 erhält man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}(\ker\tilde{\beta}^p_U)_{w^*}/\operatorname{im}\tilde{\beta}^{p-1}_U \arrow[r, "{[\tilde{f}^p_U]}"] \arrow[d, "\tilde{\phi}^p_U"'] & (\ker\tilde{\alpha}^p_U)_{w^*}/\operatorname{im}\tilde{\alpha}^{p-1}_U \arrow[d, "\tilde{\psi}^p_U"'] \\ \Gamma(U,\mathscr{K}^p_\Omega)_w \arrow[r, "\Gamma\left(\overline{\tilde{f}}^p_U\right)"] & \Gamma(U,\mathscr{H}^p_\Omega)_w.\end{tikzcd}$$

Die Implikation „⇒“ ergibt sich wie folgt: Da $\Gamma\left(\overline{\tilde{g}}^p_U\right)$ stetig bzgl. den Fréchetraumtopologien ist ([GR77], Satz V.6.6), ist die Abbildung auch w-w-stetig ([Köt83b], §32.3(3)). Da nach Voraussetzung $\tilde{\psi}^p_U$ stetig ist, folgt die Stetigkeit von $\tilde{\phi}^p_U$.

Die Implikation „⇐“ ergibt sich analog. ∎

Aus dem Beweis wird deutlich, dass unter den Voraussetzungen von Proposition 2.3.5 die Räume

$$(\ker\tilde{\beta}^p_U)_{w^*}/\operatorname{im}\tilde{\beta}^{p-1}_U \quad \text{und} \quad (\ker\tilde{\alpha}^p_U)_{w^*}/\operatorname{im}\tilde{\alpha}^{p-1}_U$$

topologisch isomorph sind. Insbesondere folgt aus der w^*-Abgeschlossenheit des Bildes einer der Abbildugen $\tilde{\alpha}^{p-1}_U$ und $\tilde{\beta}^{p-1}_U$ die w^*-Abgeschlossenheit des anderen Bildes bzw. aus der Separiertheit des einen Quotienten diejenige des anderen.

④ Konstruktion

Im Folgenden sei $(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet)$ ein l-Komplex in $d\tilde{\mathscr{B}}_\Omega$ $(l \in \mathbb{N})$.

Der nachfolgende Satz ergibt sich aus Satz 2.2.10, wenn man berücksichtigt, dass ein Komplex endlich-dimensionaler Räume in $d\mathscr{B}_U$ ($U \subset \Omega$ offen) automatisch ein Komplex in $d\tilde{\mathscr{B}}_U$ ist, und dass ein Morphismus $f^\bullet : (L^\bullet, u^\bullet) \to (\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet)|_U$ in $d\mathscr{B}_U$, dessen Definitionsbereich ein Komplex endlich-dimensionaler Räume ist, automatisch ein Morphismus in $d\tilde{\mathscr{B}}_U$ ist.

Satz 2.3.6 *Sei $z_0 \in \varrho_e(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet)$. Dann existiert eine offene Umgebung $U \subset \varrho_e(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet)$ von z_0, ein l-Komplex $(L^\bullet, u^\bullet)$ endlich-dimensionaler Räume in $d\tilde{\mathscr{B}}_U$ und ein Morphismus $\tilde{f}^\bullet : (L^\bullet, u^\bullet) \to (\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet)|_U$ in $d\tilde{\mathscr{B}}_U$ derart, dass $(C(\tilde{f}^\bullet), \tilde{d}^\bullet)$ und $C(\tilde{f}^\bullet_U)$ exakt sind mit $\ker \tilde{d}^p(z_0) = \ker \tilde{\alpha}^{p-1}(z_0)$ für alle $p \in \mathbb{Z}$.*

Um Satz 2.3.6 zu verbessern, benutzen wir die folgende elementare und wohlbekannte Beobachtung.

Lemma 2.3.7 *Seien $\tilde{E}$ und $\tilde{F}$ duale Banachräume und sei $T \in \mathcal{L}(\tilde{E}, \tilde{F})$ bijektiv. Dann ist $T^{-1} \in \mathcal{L}(\tilde{F}, \tilde{E})$.*

Satz 2.3.8 *Sei $z_0 \in \varrho_{e,c^*}(E^\bullet, \alpha^\bullet)$. Dann existiert eine offene Umgebung $U \subset \varrho_{e,c^*}(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ von z_0, ein l-Komplex $(L^\bullet, u^\bullet)$ endlich-dimensionaler Räume in $d\tilde{\mathscr{B}}_U$ und ein Morphismus $\tilde{f}^\bullet : (L^\bullet, u^\bullet) \to (\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet)|_U$ in $d\tilde{\mathscr{B}}_U$ derart, dass $(C(\tilde{f}^\bullet), \tilde{d}^\bullet)$ split*-exakt ist.*

Beweis: Wegen $z_0 \in \varrho_{e,c^*}(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet) \subset \varrho_e(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet)$ existiert nach Proposition 2.3.6 eine offene Umgebung $V \subset \varrho_e(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet)$ von z_0, ein l-Komplex $(L^\bullet, u^\bullet)$ endlich-dimensionaler Räume in $d\tilde{\mathscr{B}}_V$ und ein Morphismus $\tilde{f}^\bullet : (L^\bullet, u^\bullet) \to (\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet)|_V$ in $d\tilde{\mathscr{B}}_V$ derart, dass $(\tilde{D}^\bullet, \tilde{d}^\bullet) = C(\tilde{f}^\bullet)$ und $C(\tilde{f}^\bullet_V)$ exakt sind mit $\ker \tilde{d}^p(z_0) = \ker \tilde{\alpha}^{p-1}(z_0)$ für alle $p \in \mathbb{Z}$. Durch sukzessives Verkleinern von V wird gezeigt, dass für eine geeignete offene Umgebung $U \subset V$ von z_0 der Abbildungskegel $(\tilde{D}^\bullet, \tilde{d}^\bullet)$ split*-exakt ist.

Es wird bewiesen:

> Existieren für ein $q \in \mathbb{Z}$ eine offene Umgebung $U \subset \varrho_e(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet)$ von z_0 und Abbildungen $\tilde{\varepsilon}^p \in \mathscr{O}(U, \mathcal{L}(\tilde{D}^p, \tilde{D}^{p-1}))$, $p \geq q$, mit
> $$\tilde{d}^{p-1}(z)\tilde{\varepsilon}^p(z) + \tilde{\varepsilon}^{p+1}(z)\tilde{d}^p(z) = \mathrm{id}_{\tilde{D}^p} \tag{2.16}$$
> für $p \geq q$, $z \in U$, so gilt dasselbe für $q-1$.

Man beachte, dass

$$\tilde{D}^{q-2} \xrightarrow{\tilde{d}^{q-2}(z_0)} \operatorname{im} \tilde{d}^{q-2}(z_0) \to 0$$

exakt ist. Wegen der w^*-Komplementiertheit von $\ker \tilde{d}^{q-2}(z_0) = \ker \alpha^{q-3}(z_0)$ und der w^*-Abgeschlossenheit von $\operatorname{im} \tilde{d}^{q-2}(z_0) = \ker \tilde{d}^{q-1}(z_0)$ existiert nach Lemma 2.3.7 eine w^*-stetige, lineare Abbildung $R : \operatorname{im} \tilde{d}^{q-2}(z_0) \to \tilde{D}^{q-2}$ mit $\tilde{d}^{q-2}(z_0)R = \mathrm{id}_{\operatorname{im} \tilde{d}^{q-2}(z_0)}$. Die Sequenz

$$\mathcal{L}(\tilde{D}^{q-1}, \tilde{D}^{q-2}) \xrightarrow{\tilde{\alpha}(z)} \mathcal{L}(\tilde{D}^{q-1}) \xrightarrow{\tilde{\beta}(z)} \mathcal{L}(\tilde{D}^{q-1}, \tilde{D}^q) \quad (z \in U) \tag{2.17}$$

mit $\tilde{\alpha}(z)T = \tilde{d}^{q-2}(z)T$ für $T \in \mathcal{L}(\tilde{D}^{q-1}, \tilde{D}^{q-2})$ und $\tilde{\beta}(z)S = \tilde{d}^{q-1}(z)S$ für $S \in \mathcal{L}(\tilde{D}^{q-1})$ ist offensichtlich ein analytisch parametrisierter Komplex von Banachräumen.

Sei $S \in \ker \tilde{\beta}(z_0)$, d.h. $\operatorname{im} S \subset \ker \tilde{d}^{q-1}(z_0) = \operatorname{im} \tilde{d}^{q-2}(z_0)$. Dann lässt sich eine Abbildung $Q \in \mathcal{L}(\tilde{D}^{q-1}, \tilde{D}^{q-2})$ definieren durch $Qx = RSx$ für $x \in \tilde{D}^{q-1}$. Es folgt

$$\tilde{\alpha}(z_0)Qx = \tilde{\alpha}(z_0)RSx = \tilde{d}^{q-2}(z_0)RSx = Sx, \qquad x \in \tilde{D}^{q-1},$$

d.h. $\tilde{\alpha}(z_0)Q = S$. Also ist $\operatorname{im} \tilde{\alpha}(z_0) = \ker \tilde{\beta}(z_0)$. Lemma 2.2.8 angewandt auf (2.17) liefert die Existenz einer offenen Umgebung $\tilde{U} \subset U$ von z_0 derart, dass

$$\mathscr{O}(\tilde{U}, \mathcal{L}(\tilde{D}^{q-1}, \tilde{D}^{q-2})) \xrightarrow{\alpha_{\tilde{U}}} \mathscr{O}(\tilde{U}, \mathcal{L}(\tilde{D}^{q-1})) \xrightarrow{\beta_{\tilde{U}}} \mathscr{O}(\tilde{U}, \mathcal{L}(\tilde{D}^{q-1}, \tilde{D}^{q}))$$

exakt ist. Für $z \in \tilde{U}$ gilt:

$$\begin{aligned} \left[\tilde{\beta}_{\tilde{U}}(\mathrm{id}_{\tilde{D}^{q-1}} - \tilde{\varepsilon}^q \tilde{d}^{q-1}|_{\tilde{U}})\right](z) &= \tilde{d}^{q-1}(z)(\mathrm{id}_{\tilde{D}^{q-1}} - \tilde{\varepsilon}^q(z)\tilde{d}^{q-1}(z)) \\ &= \tilde{d}^{q-1}(z) - (\mathrm{id}_{\tilde{D}^{q}} - \tilde{\varepsilon}^{q+1}(z)\tilde{d}^{q}(z))\tilde{d}^{q-1}(z) = 0, \end{aligned}$$

wobei (2.16) für q und $z \in \tilde{U}$ ausgenutzt wurde. Folglich existiert eine Abbildung $\tilde{\tilde{\varepsilon}}^{q-1} \in \mathscr{O}(\tilde{U}, \mathcal{L}(\tilde{D}^{q-1}, \tilde{D}^{q-2}))$ mit

$$\tilde{\alpha}_{\tilde{U}}(\tilde{\tilde{\varepsilon}}^{q-1}) = \mathrm{id}_{\tilde{D}^{q-1}} - \tilde{\varepsilon}^q \tilde{d}^{q-1}|_{\tilde{U}}$$

bzw. $\tilde{d}^{q-2}(z)\tilde{\tilde{\varepsilon}}^{q-1}(z) = \left[\tilde{\alpha}_{\tilde{U}}(\tilde{\tilde{\varepsilon}}^{q-1})\right](z) = \mathrm{id}_{\tilde{D}^{q-1}} - \tilde{\varepsilon}^q(z)\tilde{d}^{q-1}(z)$ für $z \in \tilde{U}$. Man ist fertig, wenn man $\tilde{\tilde{\varepsilon}}^p = \tilde{\varepsilon}^p|_{\tilde{U}}$ für $p \geq q$ setzt, denn dann ist offensichtlich (2.16) für $p \geq q-1$, $(\tilde{\tilde{\varepsilon}}^p)_{p \geq q-1}$ und $z \in \tilde{U}$ erfüllt.

Klar ist, dass die Gleichung (2.16) mit $\tilde{\varepsilon}^p \equiv 0 \in \mathcal{L}(\tilde{D}^p, \tilde{D}^{p-1})$ für $p \geq l+2$ richtig ist. Induktiv folgt mit Obigem deshalb, dass es eine offene Umgebung $U \subset \varrho_e(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet)$ von z_0 und Abbildungen $\tilde{\varepsilon}^p \in \mathscr{O}(\tilde{U}, \mathcal{L}(\tilde{D}^p, \tilde{D}^{p-1}))$ für $p \geq 0$ gibt (nach Konstruktion ist $\tilde{\varepsilon}^p \equiv 0$ für $p \geq l+2$), die (2.16) für alle $p \geq 0$ erfüllen. Setzt man $\tilde{\varepsilon}^p \equiv 0 \in \mathcal{L}(\tilde{D}^p, \tilde{D}^{p-1})$ für $p < 0$, so erhält man eine $*$-splittende Familie $(\tilde{\varepsilon}^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ für $C(\tilde{f}^\bullet)$. Aus (2.16) wird

$$\tilde{d}^{p-1}_{\tilde{U}} \tilde{\varepsilon}^p_{\tilde{U}} + \tilde{\varepsilon}^{p+1}_{\tilde{U}} \tilde{d}^p_{\tilde{U}} = \mathrm{id}_{\mathscr{O}(\tilde{U}, \tilde{D}^p)} \quad (p \in \mathbb{Z}),$$

d.h. $C(\tilde{f}^\bullet_{\tilde{U}})$ ist split*-exakt. ■

Korollar 2.3.9 *Die Menge $\varrho_{e,c^*}(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet) \subset \Omega$ ist offen.*

Beweis: Sei $z_0 \in \varrho_{e,c^*}(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet)$. Dann existieren eine offene Umgebung $U \subset \varrho_e(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet)$ von z_0 (Korollar 2.2.11), ein l-Komplex $(L^\bullet, u^\bullet)$ endlich-dimensionaler Räume in $d\mathscr{B}_U$ und ein Morphismus $\tilde{f}^\bullet : (L^\bullet, u^\bullet) \to (\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet)|_U$ in $d\tilde{\mathscr{B}}_U$ derart, dass $(\tilde{D}^\bullet, \tilde{d}^\bullet) = C(\tilde{f}^\bullet)$ split*-exakt ist (Satz 2.3.8). Sei $\tilde{\varepsilon}^\bullet$ eine *-splittende Familie für $C(\tilde{f}^\bullet)$, d.h. eine Familie $(\tilde{\varepsilon}^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ mit $\tilde{\varepsilon}^p \in \mathscr{O}(U, \mathcal{L}(\tilde{D}^p, \tilde{D}^{p-1})$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ und

$$\tilde{d}^{p-1}(z)\tilde{\varepsilon}^p(z) + \tilde{\varepsilon}^{p+1}(z)\tilde{d}^p(z) = \mathrm{id}_{\tilde{D}^p}$$

für alle $z \in U$ und $p \in \mathbb{Z}$. Hieraus ergibt sich, dass $P_z = \mathrm{id}_{\tilde{D}^p} - \tilde{\varepsilon}^{p+1}(z)\tilde{d}^p(z) \in \mathcal{L}(\tilde{D}^p)$ eine Projektion auf $\ker \tilde{d}^p(z) = \ker \tilde{\alpha}^{p-1}(z) \subset \tilde{D}^p$ ist. Durch Einschränkung auf $\tilde{E}^{p-1} \subset \tilde{D}^p$ erhält man eine w^*-stetig Projektion $P_z|_{\tilde{E}^{p-1}} \in \mathcal{L}(\tilde{E}^{p-1})$ auf $\ker \tilde{\alpha}^{p-1}(z)$. Also ist $\ker \tilde{\alpha}^p(z)$ w^*-komplementiert in $\tilde{E}^p$ für alle $z \in U$ und $p \in \mathbb{Z}$. Es folgt, dass $U \subset \varrho_{e,c^*}(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet)$ ist, und somit die Behauptung. ∎

5 Beweis

Beweis: (von Satz 2.3.2) Sei $U \subset \varrho_{e,c^*}(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet)$ eine Steinsche offene Menge. Nach Proposition 2.3.8 existiert für $z \in U$ eine Umgebung $V = V_z \subset \varrho_{e,c^*}(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet)$ von z, ein l-Komplex $(L^\bullet, u^\bullet)$ endlich-dimensionaler Räume und ein Morphismus $\tilde{f}^\bullet : (L^\bullet, u^\bullet) \to (\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet)|_V \in d\tilde{\mathscr{B}}_V$ derart, dass $C(\tilde{f}^\bullet_V)$ split*-exakt ist. Ohne Einschränkung kann man annehmen, dass die Mengen V Steinsch sind. Sei $\mathscr{K}_V^p = \ker \overline{u}^p / \operatorname{im} \overline{u}^{p-1}$ und sei

$$\tilde{\phi}_V^p : (\ker u_V^p)_{w^*} / \operatorname{im} u_V^{p-1} \to \Gamma(V, \mathscr{K}_V^p)_w$$

definiert wie in (2.5). Dann ist nach Proposition 2.3.3 die Abbildung $\tilde{\phi}_V^p$ ein topologischer Isomorphismus. Wegen $U \subset \varrho_e(L^\bullet, u^\bullet) \cap \varrho_e(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet)$ folgt mit Proposition 2.3.5, dass auch

$$\tilde{\psi}_V^p : (\ker \alpha_V^p)_{w^*} / \operatorname{im} \tilde{\alpha}_V^{p-1} \to \Gamma(V, \mathscr{H}_\Omega^p)_w$$

ein topologischer Isomorphismus ist. Die Behauptung folgt nun analog zum Beweis von Satz 2.2.3 aus Propostion 2.3.4. ∎

2.4 Dualitätstheorie

Sei $(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet)$ ein l-Komplex in $d\tilde{\mathscr{B}}_\Omega$, wobei $l \in \mathbb{N}$ ist und Ω wie bisher eine komplexe Mannigfaltigkeit. Sei $U \subset \Omega$ offen. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Kohomologiegruppen der Sequenz

$$0 \to \mathscr{O}(U, \tilde{E}^0) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_U^0} \mathscr{O}(U, \tilde{E}^1) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_U^1} \cdots \xrightarrow{\tilde{\alpha}_U^{l-1}} \mathscr{O}(U, \tilde{E}^l) \to 0,$$

bestehend aus Frécheträumen und w^*-stetigen linearen Abbildungen, und den Homologiegruppen der prädualen Sequenz

$$0 \leftarrow \mathscr{O}(U)'\hat{\otimes}E^0 \xleftarrow{\alpha_0^U} \mathscr{O}(U)'\hat{\otimes}E^1 \xleftarrow{\alpha_1^U} \cdots \xleftarrow{\alpha_{l-1}^U} \mathscr{O}(U)'\hat{\otimes}E^l \leftarrow 0$$

bzgl. der Dualität $< \mathscr{O}(U)'\hat{\otimes}E^p, \mathscr{O}(U, \tilde{E}^p) >$ für $p \in \mathbb{Z}$? Eine Antwort auf diese Frage liefert der nachfolgende Satz.

Satz 2.4.1 *Für alle Steinschen offenen Mengen* $U \subset \varrho_{e,c^*}(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet)$ *ist die Vervollständigung von* $\ker \alpha_{p-1}^U \Big/ \overline{\operatorname{im} \alpha_p^U}$ *ein nuklearer und reflexiver (DF)-Raum und es gilt*

$$\left(\left(\ker \alpha_{p-1}^U \Big/ \overline{\operatorname{im} \alpha_p^U} \right)^\wedge \right)'_\beta \cong \ker \tilde{\alpha}_U^p / \operatorname{im} \tilde{\alpha}_U^{p-1}, \tag{2.18}$$

wobei $\left(\ker \alpha_{p-1}^U \Big/ \overline{\operatorname{im} \alpha_p^U} \right)^\wedge$ *für die Vervollständigung von* $\ker \alpha_{p-1}^U \Big/ \overline{\operatorname{im} \alpha_p^U}$ *steht.*

Bevor der Beweis von Satz 2.4.1 erbracht wird, sammeln wir zunächst Resultate aus der Dualitätstheorie lokalkonvexer Räume. Hierfür wird eine übliche Notation vereinbart: Ist $\langle E, F\rangle$ ein Dualsystem von $\mathbb{C}$-Vektorräumen, so bezeichnet M° für eine Teilmenge $M \subset E$ die *absolute Polare* von M in F, d.h. die Menge $\{y \in F : |\langle x, y\rangle| \leq 1 \text{ für alle } x \in M\}$. Ist M ein linearer Teilraum von E, so schreiben wir bzgl. des Dualsystems $\langle E, E'\rangle$ statt M° auch $M^\perp$ und nennen $M^\perp$ den *Annihilator* von M.

Sei F ein lokalkonvexer Hausdorffraum und seien F_0, F_1 Teilräume von F mit $F_0 \subset F_1$. Der Teilraum F_1 werde mit der Relativtopologie und der Quotient F_1/F_0 mit der zugehörigen Quotiententopologie versehen. Der kanonische Epimorphismus $F_1 \to F_1/F_0$ werde mit q_1 bezeichnet, im Falle $F_1 = F$ mit q. Der topologische Dualraum von F_1/F_0 lässt sich algebraisch leicht identifizieren. Sei hierzu

$$\Phi_1 : F_0^\perp/F_1^\perp \to (F_1/F_0)'$$

die durch $[\varphi] \mapsto \tilde{\varphi}$ definierte Abbildung, wobei $\varphi \in F_0^\perp$ und $[\varphi]$ für die Restklasse von φ in $F_0^\perp/F_1^\perp$ steht, und $\tilde{\varphi} : F_1/F_0 \to \mathbb{C}$ definiert ist durch $\tilde{\varphi}(q_1(x)) = \varphi(x)$ für alle $x \in F_1$. Die Injektivität von Φ_1 ist klar und die Surjektivität folgt aus dem Satz von Hahn-Banach. Wir setzen $\Phi = \Phi_1$ falls $F_1 = F$ ist.

Bezeichnet $F_0^{\perp\!\!\perp}$ den Annihilator von F_0 in F_1', so ist die zu q_1 adjungierte Abbildung $q_1' : (F_1/F_0)' \to F_1'$ injektiv mit $\operatorname{im} q_1' = F_0^{\perp\!\!\perp}$. Sei $\imath : F_1 \to F$ die kanonische Inklusion und $\imath' : F' \to F_1'$ die zu $\imath$ adjungierte Abbildung. Dann ist $(\ker \imath') \cap F_0^\perp = F_1^\perp$ und $\imath'(F_0^\perp) = F_0^{\perp\!\!\perp}$, und $\imath'$ definiert eine kanonische injektive Abbildung $\hat{\imath} : F_0^\perp/F_1^\perp \to F_1'$ mit $\operatorname{im} \hat{\imath} = F_0^{\perp\!\!\perp}$. Im Folgenden wird $F_0^\perp$ stets mit der Relativtopologie der starken Topologie von F' versehen, $F_0^{\perp\!\!\perp}$ mit derjenigen von F_1' und der Quotient $F_0^\perp/F_1^\perp$ wird mit der Quotiententopologie bzgl. $F_0^\perp$ ausgestattet.

Die Frage nach der topologischen Identifizierung des starken Duals des Raumes F_1/F_0 erweist sich als schwieriger und ist Gegenstand der nachfolgenden Ausführungen.

Lemma 2.4.2 *Die Abbildung $\imath'|_{F_0^\perp} : F_0^\perp \to F_1'$ ist stetig.*

Beweis: Dies ist eine direkte Folgerung aus [MV92], Lemma 23.29. ■

Proposition 2.4.3 *Sei F ein Fréchetraum und $F_0 \subset F$ ein abgeschlossener Teilraum derart, dass F/F_0 nuklear ist. Dann ist*

$$\Phi : F_0^\perp \to (F/F_0)'_\beta$$

ein topologischer Isomorphismus.

Beweis: Da q' sich schreiben lässt als Komposition

$$(F/F_0)'_\beta \xrightarrow{\Phi^{-1}} F_0^\perp \hookrightarrow F'_\beta,$$

wobei die zweite Abbildung die kanonische Inklusion ist, genügt es zu zeigen, dass $q' : (F/F_0)'_\beta \to F'_\beta$ ein topologischer Homomorphismus ist. Man beachte, dass auch ohne die geforderte Nuklearität von F/F_0 aus der obigen Faktorisierung von q' die Stetigkeit von Φ^{-1} (oder äquivalent die Offenheit von Φ) folgt.

Gemäß [Köt83b], §32.5(2), ist q' genau dann ein starker Homomorphismus, wenn es zu jeder beschränkten Menge N in F/F_0 eine beschränkte Menge M in F gibt mit $\overline{q(M)} \supset N$. Sei also $N \subset F/F_0$ beschränkt. Dann ist $\overline{N}$ kompakt, da F/F_0 nach Voraussetzung ein nuklearer Fréchetraum ist und in solchen Räumen beschränkte Mengen relativ kompakt sind ([EP96], Bemerkung im Anschluss an Lemma A1.7). Gemäß [Köt83a], §22.2(7), ist $\overline{N}$ dann aber das Bild einer kompakten Menge $M \subset F$ unter q. Da M als kompakte Menge beschränkt ist, folgt die Behauptung. ■

Die Aussage in Proposition 2.4.3 wird in Proposition 2.4.5 verallgemeinert. Der nicht triviale Beweis dieser Verallgemeinerung, die im Beweis von Satz 2.4.1 Anwendung finden wird, benötigt die nachfolgende Proposition. Es sei daran erinnert, dass ein quasitonnelierter Raum F *Montelraum* heißt, wenn jede beschränkte Menge in F relativ kompakt ist.[5] Ein *Fréchet-Montelraum* ist ein Montelraum, dessen Topologie eine Fréchetraumtopologie ist.

Proposition 2.4.4 *Der starke Dual eines Fréchet-Montelraumes ist ultrabornologisch.*

Beweis: Sei F ein Montelraum. Dann gilt dasselbe für seinen starken Dual F'_β ([MV92], Satz 24.25). Insbesondere ist F'_β quasi-tonneliert. Da F als Fréchetraum metrisierbar ist, ist F'_β bornologisch (und tonneliert) ([MV92], Satz 25.12). Als bornologischer Raum trägt F'_β die induktive Topologie bzgl. des Systems $(j_B : F'_B \to F')_{B\in\mathcal{B}(F)}$, wobei $\mathcal{B}(F)$ die Menge aller absolutkonvexen, beschränkten Teilmengen von F'_β bezeichnet und $F'_B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} kB$ den mit der Einschränkung des Minkowski-Funktionals von B auf F'_B normierten Raum ([MV92], Satz 24.10). Die lokalkonvexe Topologie β ist die feinste auf F' bzgl. der die Abbildungen j_B, $B \in \mathcal{B}(F)$, stetig sind. Da F'_β ein Montelraum ist, ist $\overline{B}$ kompakt für alle $B \in \mathcal{B}(F)$. Dann ist $\overline{B}$ eine Banachkugel ([MV92], Satz 23.14) und $F'_{\overline{B}}$ ein Banachraum. Es existiert eine feinste lokalkonvexe Topologie $\tilde{\beta}$ auf F', die alle j_B, $B = \overline{B} \in \mathcal{B}(F)$, stetig macht, und da $\overline{B} \in \mathcal{B}(F)$ für alle $B \in \mathcal{B}(F)$ gilt, ist $\tilde{\beta} \geq \beta$. Da für jedes $B \in \mathcal{B}(F)$ die Abbildung $F'_\beta \hookrightarrow F'_{\tilde{\beta}}$ als Komposition der Abbildungen $F'_B \hookrightarrow F'_{\overline{B}} \hookrightarrow F'_{\tilde{\beta}}$ stetig ist, ist auch umgekehrt $\beta \geq \tilde{\beta}$. Also trägt F'_β die induktive lokalkonvexe Topolgie bzgl. eines Systems von Banachräumen und ist deshalb ultrabornologisch. ■

Proposition 2.4.5 *Sei F ein Fréchetraum und seien F_0, F_1 abgeschlossene Teilräume von F derart, dass $F_0 \subset F_1$ und F_1/F_0 nuklear ist. Dann ist*

$$\Phi_1 : F_0^\perp / F_1^\perp \to (F_1/F_0)'_\beta$$

ein topologischer Isomorphismus.

[5] Das ist die Definition, die man in [MV92] findet. In [Köt83a] ist ein Montelraum von Hause aus tonneliert.

Beweis: Indem man Proposition 2.4.3 anwendet auf den Fréchetraum F_1 statt F erhält man einen topologischen Isomorphismus

$$\Phi_0 : F_0^{\perp\!\!\perp} \to (F_1/F_0)'_\beta \,.$$

Hierbei sei der Annihilator $F_0^{\perp\!\!\perp}$ von F_0 in F_1' versehen mit der Relativtopologie von $F_1' = (F_1)'_\beta$. Da sich Φ_1 schreiben lässt als Komposition

$$F_0^\perp/F_1^\perp \xrightarrow{\hat\imath} F_0^{\perp\!\!\perp} \xrightarrow{\Phi_0} (F_1/F_0)'_\beta$$

(hier wird $\operatorname{im}\hat\imath = F_0^{\perp\!\!\perp} \subset F_1'$ ausgenutzt), genügt es zu zeigen, dass $\hat\imath : F_0^\perp/F_1^\perp \to F_1'$ ein topologischer Monomorphismus ist. Äquivalent hierzu ist, dass die Abbildung $\imath'|_{F_0^\perp} : F_0^\perp \to F_1'$ ein topologischer Homomorphismus ist. Nach Lemma 2.4.2 ist diese Abbildung zumindest stetig.

Man beachte, dass die kanonische Abbildung $F_1/F_0 \xrightarrow{S} F/F_0$ ein topologischer Monomorphismus ist. Demzufolge ist $(F/F_0)'_\beta \xrightarrow{S'} (F_1/F_0)'_\beta$ stetig ([MV92], Lemma 23.29) und surjektiv. Da jeder nukleare Fréchetraum ein Fréchet-Montelraum ist, folgt aus Proposition 2.4.4, dass $(F_1/F_0)'_\beta$ ultrabornologisch ist. Da F/F_0 metrisierbar ist, ist $(F/F_0)'_\beta$ ein (strikt) gewebter Raum ([Köt83b], §35.4(11)). Nach dem Satz von der offenen Abbildung von de Wilde ([Köt83b] §35.3(1)), ist S' somit offen. Die Offenheit von $\imath'|_{F_0^\perp}$ kann nun aus dem folgenden kommutativen Diagramm (unter Beachtung von Lemma 2.4.2 und Proposition 2.4.3) abgeleitet werden:

$$\begin{tikzcd}
(F/F_0)'_\beta \arrow[d, "S'"] & F_0^\perp \arrow[l, "\Phi"'] \arrow[d, "\imath'|_{F_0^\perp}"] \\
(F_1/F_0)'_\beta \arrow[r, "q_1'"] & F_1'
\end{tikzcd}$$

Man beachte dabei, dass nach dem Anfang des Beweises von Proposition 2.4.3 die wie dort gebildete Abbildung Φ offen ist. Ebenso aus dem Beweis von Proposition 2.4.3 folgt, dass die Abbildung $q_1' : (F_1/F_0)'_\beta \to F_1'$ ein topologischer Monomorphismus ist. ■

Kehren wir zur Ausgangssituation dieses Paragraphen zurück: Wir betrachten Räume der Form $F = \mathscr{O}(U)'\hat\otimes E$, wobei $U \subset \Omega$ eine offene Teilmenge einer komplexen Mannigfaltigkeit Ω und E ein Banachraum ist. Für solche Räume gilt $(\mathscr{O}(U)'\hat\otimes E)'_\beta \cong \mathscr{O}(U)\hat\otimes E'$, ihr starker Dualraum ist also ein Fréchetraum. Sind $F_0 \subset F_1 \subset \mathscr{O}(U)'\hat\otimes E$ abgeschlossene Teilräume, ist $F_0^\perp \subset \mathscr{O}(U)\hat\otimes E'$ mit der Relativtopologie versehen und ist $F_0^\perp/F_1^\perp$ bzgl. der Quotiententopologie nuklear, so ist wegen

$$\left(F_0^\perp/F_1^\perp\right)'_\beta \cong F_1^{\perp\perp}/F_0^{\perp\perp}$$

(Proposition 2.4.5) der Quotient $F_1^{\perp\perp}/F_0^{\perp\perp}$ (versehen mit der Quotiententopologie bzgl. der starken Relativtopologie von F'' auf $F_1^{\perp\perp}$) ein vollständiger, nuklearer (DF)-Raum ([MV92], Satz 25.7, und [EP96], Theorem A1.8). Damit sind wir dem Beweis von Satz

2.4.1 mit $\ker \alpha_{p-1}^U$ (für geeignete U und p) in der Rolle von F_1 und $\overline{\operatorname{im} \alpha_p^U}$ in der Rolle von F_0 und damit $\ker \tilde{\alpha}_U^p$ in der Rolle von $F_0^\perp$ und $\operatorname{im} \tilde{\alpha}_U^{p-1}$ in der Rolle von $F_1^\perp$ näher gekommen.

Wir setzen im Folgenden voraus, dass F ein lokalkonvexer Hausdorffraum ist derart, dass F'_β ein Fréchetraum ist, und dass $F_0, F_1 \subset F$ abgeschlossene Teilräume von F sind derart, dass $F_0 \subset F_1$ und $F_0^\perp / F_1^\perp$ ein nuklearer Fréchetraum ist. Vermittels der Bijektion $\Phi_1 : F_0^\perp / F_1^\perp \to (F_1/F_0)'$ kann man ein duales System $\langle F_1/F_0, F_0^\perp/F_1^\perp \rangle$ definieren durch $\langle q_1(x), [\varphi] \rangle = \Phi_1([\varphi])(q_1(x)) = \varphi(x)$ für alle $\varphi \in F_0^\perp$ und alle $x \in F_1$. Hiermit erhält man eine Abbildung

$$\gamma : F_1/F_0 \to (F_0^\perp/F_1^\perp)', \quad \gamma(q_1(x)) = \langle q_1(x), \cdot \rangle, \tag{2.19}$$

deren topologische Eigenschaften uns interessieren: Hierzu wird die linke Seite von (2.19) mit der Quotiententopologie bzgl. der durch F gegebenen Relativtopologie auf F_1 und die rechte Seite mit der starken Topologie versehen (wie üblich). Welche (zusätzlichen) Voraussetzungen für F müssen erfüllt sein, damit die Abbildung γ ein topologischer Monomorphismus mit dichtem Bild ist? Diese Frage ist aus folgendem Grund interessant: Da $F_0^\perp/F_1^\perp$ ein (nuklearer) Fréchetraum ist, ist $(F_0^\perp/F_1^\perp)'_\beta$ ein vollständiger (nuklearer) (DF)-Raum. Bezeichnet man die Vervollständigung von F_1/F_0 mit $(F_1/F_0)^\wedge$, so vermittelt γ (als topologischer Monomorphismus mit dichtem Bild) einen topologischen Isomorphismus

$$(F_1/F_0)^\wedge \to (F_0^\perp/F_1^\perp)'_\beta$$

([Jar81], Theorem 3.4.2). Diese Beobachtung werden wir benutzen, um den Beweis von Satz 2.4.1 zu beenden.

Als nächstes wird gezeigt, dass γ jedenfalls dann ein topologischer Monomorphismus mit dichtem Bild ist, wenn F tonneliert ist. Diese Voraussetzung ist gerechtfertigt, wie das nachfolgende Lemma zeigt:

Lemma 2.4.6 *Für $U \subset \Omega$ offen und einen Banachraum E ist $\mathscr{O}(U)'\hat{\otimes}E$ ein tonnelierter Raum.*

Beweis: Als starker Dual eines reflexiven Fréchetraumes ist $\mathscr{O}(U)'$ ein tonnelierter (DF)-Raum ([MV92], Satz 23.22 und Satz 25.7). Ein Banachraum ist ebenfalls stets ein tonnelierter (DF)-Raum ([MV92], Satz 23.23 und Bemerkung 25.8). Das vervollständigte π-Tensorprodukt zweier tonnelierter (DF)-Räume ist tonneliert ([Köt83b], §41.4(8)). ■

Proposition 2.4.7 *Sei F ein tonnelierter lokalkonvexer Hausdorffraum derart, dass F'_β ein Fréchetraum ist. Seien $F_0, F_1 \subset F$ abgeschlossene Teilräume derart, dass $F_0 \subset F_1$ und $F_0^\perp/F_1^\perp$ ein nuklearer Fréchetraum ist. Dann ist die Abbildung γ ein topologischer Monomorphismus mit dichtem Bild.*

Beweis: Zunächst wird die Stetigkeit von γ bewiesen. Sei hierzu B ein beschränkte Menge in $F_0^\perp/F_1^\perp$. Da $F_0^\perp/F_1^\perp$ nuklear ist, ist B relativ kompakt ([EP96], Bemerkung im

Anschluss an Lemma A1.7). Dann existiert eine kompakte Menge $\tilde{B} \subset F_0^{\perp}$ mit $q(\tilde{B}) = \overline{B}$ ([Köt83a], §22.2(7)); hierbei ist $q : F_0^{\perp} \to F_0^{\perp}/F_1^{\perp}$ der kanonische Epimorphismus. Da $F_0^{\perp}$ die von F'_β induzierte Relativtopologie trägt, ist $\tilde{B}$ auch als Teilmenge von F'_β kompakt und damit insbesondere punktweise beschränkt. Weil F tonneliert ist, ist $\tilde{B}$ also eine gleichstetige Teilmenge von F'. Es existiert damit eine stetige Halbnorm q auf F mit $|\varphi(x)| \leq q(x)$ für alle $x \in F$ und $\varphi \in \tilde{B}$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} p_B(\gamma([x])) &\leq p_{\overline{B}}(\gamma([x])) = \sup\{|\langle [x], [\varphi]\rangle| : \varphi \in \tilde{B}\} \\ &= \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in \tilde{B}\} \leq q(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in F_1$. Dies zeigt die Stetigkeit der Abbildung $F_1 \to \left(F_0^{\perp}/F_1^{\perp}\right)'$, $x \mapsto \langle [x], \cdot\rangle$ und damit die Stetigkeit von γ.

Die Tatsache, dass γ sogar ein Homomorphismus ist, ergibt sich wie folgt: Man rechnet nach, dass $\gamma' : \left(F_0^{\perp}/F_1^{\perp}\right)'' \to (F_1/F_0)'$ vermöge der Identifizierung

$$\left(F_0^{\perp}/F_1^{\perp}\right)'' \cong F_0^{\perp}/F_1^{\perp}$$

mit Φ_1 überein stimmt. Insbesondere ist γ' bijektiv und γ damit injektiv mit dichtem Bild. Man muss nur noch beweisen, dass zu jeder gleichstetigen Menge $N \subset (F_1/F_0)'$ eine gleichstetig Menge $M \subset F_0^{\perp}/F_1^{\perp}$ existiert mit $N \subset \gamma'(M)$ ([Köt83b], §32.4(3)). Hierbei ist die Gleichstetigkeit von N bzgl. der Dualität $\langle F_1/F_0, (F_1/F_0)'\rangle$ und jene von M bzgl. der Dualität $\left\langle \left(F_0^{\perp}/F_1^{\perp}\right)'_\beta, F_0^{\perp}/F_1^{\perp}\right\rangle$ zu verstehen.

Die Gleichstetigkeit von N impliziert die Existenz einer absolutkonvexen Nullumgebung $U \subset F_1/F_0$ mit $N \subset U^\circ$. Wir zeigen, dass $\Phi_1^{-1}(U^\circ)$ eine gleichstetige Menge bzgl. der zweiten Dualität ist.

Sei hierzu $V \subset F$ eine absolutkonvexe Nullumgebung mit $V \cap F_1 \subset q_1^{-1}(U)$, wobei $q_1 : F_1 \to F_1/F_0$ der kanonische Epimorphismus ist. Dann ist $V^\circ \subset F'_\beta$ beschränkt, und damit auch $V^\circ \cap F_0^{\perp}$ und $R = (V^\circ \cap F_0^{\perp})/F_1^{\perp}$. Man beachte, dass für alle $\varphi \in F_0^{\perp}$ mit $[\varphi] \in \Phi_1^{-1}(U^\circ)$ gilt

$$|\varphi(x)| = |\langle [x], \Phi_1([\varphi])\rangle| \leq 1$$

für alle $x \in V \cap F_1$. Deshalb ist

$$|\varphi(x)| \leq p_V(x)$$

für alle $x \in F_1$. Der Satz von Hahn-Banach liefert die Existenz einer stetigen Fortsetzung $\tilde{\varphi}$ von $\varphi|_{F_1}$ auf F mit

$$|\tilde{\varphi}(x)| \leq p_V(x)$$

für alle $x \in F$. Es gilt also $\tilde{\varphi} \in V^\circ \cap F_0^{\perp}$ und $[\tilde{\varphi}] = [\varphi] \in \Phi_1^{-1}(U^\circ)$. Dies zeigt $\Phi_1^{-1}(U^\circ) \subset R$.

Da R beschränkt ist, ist R° eine Nullumgebung in $\left(F_0^{\perp}/F_1^{\perp}\right)'_\beta$. Wegen $\Phi_1^{-1}(U^\circ) \subset R$ gilt somit

$$|\langle \phi, [\varphi]\rangle| \leq 1$$

für alle $\phi \in R^\circ$ und $[\varphi] \in \Phi_1^{-1}(U^\circ)$, d.h. $\Phi_1^{-1}(U^\circ)$ ist gleichstetig bzgl. der zweiten Dualität. Damit ist die Proposition bewiesen. ∎

Proposition 2.4.8 *Unter den Voraussetzungen von Proposition 2.4.7 ist die Vervollständigung von F_1/F_0 ein vollständiger nuklearer und reflexiver (DF)-Raum.*

Beweis: Da $\gamma : F_1/F_0 \to \gamma(F_1/F_0) \subset \left(F_0^\perp/F_1^\perp\right)'_\beta$ ein topologischer Isomorphismus auf einem dichten Teilraum ist, ist die durch γ eindeutig bestimmte Abbildung

$$(F_1/F_0)^\wedge \to \left(F_0^\perp/F_1^\perp\right)'_\beta$$

ebenfalls ein topologischer Isomorphismus ([Jar81], Theorem 3.4.2); hierbei bezeichnet $(F_1/F_0)^\wedge$ die Vervollständigung von F_1/F_0. Da auf der rechten Seite ein vollständiger nuklearer und reflexiver (DF)-Raum steht, hat auch $(F_1/F_0)^\wedge$ diese Eigenschaften. ■

Beweis: (von Satz 2.4.1) Sei $U \subset \varrho_{e,c^*}(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet)$ eine Steinsche offene Menge. Dann ist $\mathscr{O}(U)'\hat{\otimes}E^p$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ ein tonnelierter lokalkonvexer Hausdorffraum (Lemma 2.4.6). Die Teilräume $\ker \alpha_{p-1}^U$ und $\overline{\operatorname{im} \alpha_p^U}$ sind abgeschlossene Teilräume von $\mathscr{O}(U)'\hat{\otimes}E^p$ mit $\overline{\operatorname{im} \alpha_p^U} \subset \ker \alpha_{p-1}^U$. Der Dualraum von $\mathscr{O}(U)'\hat{\otimes}E^p$ ist der Fréchetraum $\mathscr{O}(U)\hat{\otimes}\tilde{E}^p \cong \mathscr{O}(U, \tilde{E}^p)$, und es gilt $(\ker \alpha_{p-1}^U)^\perp = \operatorname{im} \tilde{\alpha}_U^{p-1}$ und $(\operatorname{im} \alpha_p^U)^\perp = \ker \tilde{\alpha}_U^p$. Wegen $U \subset \varrho_{e,c^*}(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet)$ ist $\ker \tilde{\alpha}_U^p / \operatorname{im} \tilde{\alpha}_U^{p-1}$ ein nuklearer Fréchetraum (Satz 2.2.1) und

$$\left(\ker \alpha_{p-1}^U \Big/ \overline{\operatorname{im} \alpha_p^U}\right)^\wedge$$

ein nuklearer (DF)-Raum (Proposition 2.4.8). Die Reflexivität dieses Raumes folgt aus der Reflexivität von $\ker \tilde{\alpha}_U^p / \operatorname{im} \tilde{\alpha}_U^{p-1}$. ■

Bemerkung 2.4.9 Sind die Banachräume E^p $(p \in \mathbb{Z})$ reflexiv, so kann man die Sequenz $(\mathscr{O}(U)'\hat{\otimes}E^\bullet, \alpha_\bullet^U)$ als die stark duale Sequenz von $(\mathscr{O}(U)\hat{\otimes}\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}_U^\bullet)$ auffassen. Nach dem Homomorphiesatz für Fréchetträume ([Köt83b], §33.4(2)) sind in diesem Fall die Räume $\operatorname{im} \alpha_p^U \subset \mathscr{O}(U)'\hat{\otimes}E^p$ für jede Steinsche offene Menge $U \subset \varrho_{e,c}(\tilde{E}^\bullet, \tilde{\alpha}^\bullet)$ automatisch abgeschlossen. Außerdem sind die Räume $\mathscr{O}(U)'\hat{\otimes}E^p$ $(p \in \mathbb{Z})$ in diesem Fall als starke Dualräume der reflexiven Fréchetträume $\mathscr{O}(U)\hat{\otimes}\tilde{E}^p$ Ptakräume ([Köt83b], §34.3(5)). Da Quotienten abgeschlossener Teilräume von Ptakräumen wieder Ptakräume und damit vollständig sind ([Köt83b], §34.3), sind dann die in Satz 2.4.1 auftretenden Quotienten $\ker \alpha_{p-1}^U / \operatorname{im} \alpha_p^U$ auch automatisch vollständig. Wir wissen nicht, ob diese Verbesserungen von Satz 2.4.1 auch im nicht-reflexiven Fall möglich sind.

2.5 Anwendung auf vertauschende Operatortupel

Seien $(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ und $(F^\bullet, \beta^\bullet)$ zwei Komplexe in $d\mathscr{B}_\Omega$ über der komplexen Mannigfaltigkeit Ω.

Satz 2.5.1 *Seien $A^\bullet : (E^\bullet, \alpha^\bullet) \to (F^\bullet, \beta^\bullet)$ und $B^\bullet : (F^\bullet, \beta^\bullet) \to (E^\bullet, \alpha^\bullet)$ zwei Morphismen in $d\mathscr{B}_\Omega$ und $U \subset \varrho_{e,c}(E^\bullet, \alpha^\bullet)$ eine Steinsche offene Menge. Dann gilt: Für alle $p \in \mathbb{Z}$ mit*

$$\overline{A_U^p \ker \alpha_U^p} = \ker \beta_U^p \quad \textit{und} \quad \overline{B_U^p \ker \beta_U^p} = \ker \alpha_U^p \tag{2.20}$$

ist die kanonisch definierte Abbildung

$$\tilde{A}_U^p : \ker \alpha_U^p / \operatorname{im} \alpha_U^{p-1} \to \ker \beta_U^p \Big/ \overline{\operatorname{im} \beta_U^{p-1}}$$

ein topologischer Isomorphismus zwischen nuklearen Fréchetträumen.

Beweis: Sei $p \in \mathbb{Z}$ mit (2.20) fixiert. Dann folgt, dass für alle Steinschen offenen Mengen $V \subset U$ der Quotient $\ker \alpha_V^p / \operatorname{im} \alpha_V^{p-1}$ ein nuklearer Fréchetraum ist (Satz 2.2.1), der sich topologisch mit dem Schnittraum $\Gamma(V, \mathscr{H}_U^p)$ der kohärenten analytischen Garbe $\mathscr{H}_U^p$ über V identifizieren lässt (Satz 2.2.3). Diese Identifikation wird im Folgenden frei benutzt. Für $V \subset U$ offen und Steinsch seien $\tilde{A}_V : \ker \alpha_V^p / \operatorname{im} \alpha_V^{p-1} \to \ker \beta_V^p \Big/ \overline{\operatorname{im} \beta_V^{p-1}}$ und $\tilde{B}_V : \ker \beta_V^p \Big/ \overline{\operatorname{im} \beta_V^{p-1}} \to \ker \alpha_V^p / \operatorname{im} \alpha_V^{p-1}$ die zu A_V und B_V kanonisch definierten Abbildungen. Sei $\mathcal{C} : \mathscr{H}_U^p \to \mathscr{H}_U^p$ der von der Familie $(\tilde{B}_V \tilde{A}_V : \Gamma(V, \mathscr{H}_U^p) \to \Gamma(V, \mathscr{H}_U^p); V \subset U$ offen und Steinsch) induzierte analytische Garbenhomomorphismus. Da $\mathscr{H}_U^p$ kohärent ist, sind $\mathcal{C}(\mathscr{H}_U^p)$ und $\ker \mathcal{C}$ kohärente analytische Untergarben von $\mathscr{H}_U^p$ ([Kul70], Satz 26.14). Da $0 \to \ker \mathcal{C} \to \mathscr{H}_U^p \to \mathcal{C}(\mathscr{H}_U^p) \to 0$ exakt und $\ker \mathcal{C}$ als kohärente analytische Garbe über der Steinschen offenen Menge U nach dem Satz von Cartan azyklisch ist ([EP96], Theorem 4.1.4), folgt die Exaktheit von

$$\Gamma(U, \mathscr{H}_U^p) \xrightarrow{\Gamma(\mathcal{C})} \Gamma(U, \mathcal{C}(\mathscr{H}_U^p)) \to 0$$

([Kul70], Satz 18.4). Wegen $\ker \alpha_U^p / \operatorname{im} \alpha_U^{p-1} \cong \Gamma(U, \mathscr{H}_U^p)$ ist $\Gamma(\mathcal{C}) = \tilde{B}_U \tilde{A}_U$ und damit

$$\tilde{B}_U \tilde{A}_U \Gamma(U, \mathscr{H}_U^p) = \Gamma(U, \mathcal{C}(\mathscr{H}_U^p)).$$

Wegen (2.20) besitzt $\tilde{B}_U \tilde{A}_U$ dichtes Bild und da $\Gamma(U, \mathcal{C}(\mathscr{H}_U^p))$ nach dem Abgeschlossenheitssatz ein abgeschlossener Unterraum von $\Gamma(U, \mathscr{H}_U^p)$ ist ([GR77], S.172), muss $\tilde{B}_U \tilde{A}_U$ sogar surjektiv sein. Da $\mathscr{H}_z^p$ für alle $z \in U$ nach dem noetherschen Lemma für kohärente analytische Garben eine noetherscher $\mathscr{O}_z$-Modul ist ([GR84], S. 111), muss $\mathcal{C}_z$ für alle $z \in U$ injektiv sein.[6] Damit ist auch $\mathcal{C}$ injektiv und schließlich $\tilde{B}_U \tilde{A}_U$ ([Kul70], Satz 3.9). Nach dem Prinzip der offenen Abbildung für Fréchetträume ist $\tilde{B}_U \tilde{A}_U$ ein topologischer Isomorphismus. Dann ist $\tilde{A}_U$ ein topologischer Monomorphismus. Da $\tilde{A}_U$ nach Voraussetzung auch dichtes Bild hat, ist $\tilde{A}_U$ ein topologischer Isomorphismus. ∎

Im Folgenden betrachten wir den Spezialfall $\Omega = \mathbb{C}^n$. Seien E, F Banachräume, seien $(S_1, ..., S_n) \in L(E)^n$ und $(T_1, ..., T_n) \in L(F)^n$ zwei vertauschende Tupel und sei $A \in L(E, F)$ ein Operator mit $AS_i = T_i A$ für $i = 1, ..., n$. Dann induziert A für alle $p \in \mathbb{Z}$ einen linearen Operator $A^p : \Lambda^p(s, E) \to \Lambda^p(s, F)$ vermöge $A^p = 1_{\Lambda^p(s)} \otimes A$ (hierzu wird die

[6] Ein kommutativer Ring R heisst *noethersch*, wenn jede aufsteigende Kette $R_1 \subset R_2 \subset ...$ von Idealen in R stationär ist (d.h. es existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $R_i = R_k$ für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i \geq k$). Ist $\varphi : R \to R$ ein surjektiver Ringendomorphismus eines noetherschen Ringes R, so ist φ injektiv, denn für die gerichtete Familie $(\ker \varphi^i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Idealen in R existiert nach Voraussetzung ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\ker \varphi^n = \ker \varphi^{n+1}$. Ist $y \in \ker \varphi$ und $x \in R$ mit $y = \varphi^n(x)$, so folgt $0 = \varphi(y) = \varphi^{n+1}(x)$ und somit $\varphi^n(x) = 0 = y$. Folglich ist $\ker \varphi = \{0\}$.

Identifizierung $\Lambda^p(s,E) = \Lambda^p(s) \otimes E$ benutzt). Für $p \in \mathbb{Z}$ und $xs_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_p} \in \Lambda^p(s,E)$ gilt

$$\begin{aligned} A^{p+1}\delta_S^p(xs_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_p}) &= \sum_{i=1}^n A^{p+1}((S_i x)s_i \wedge s_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_p}) \\ &= \sum_{i=1}^n (AS_i x)s_i \wedge s_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_p} = \sum_{i=1}^n (T_i A x)s_i \wedge s_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_p} \\ &= \delta_T^p((Ax)s_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_p}) = \delta_T^p A^p(xs_{i_1} \wedge \cdots \wedge s_{i_p}), \end{aligned}$$

d.h. es gilt $A^{p+1}\delta_S^p = \delta_T^p A^p$ für alle $p \in \mathbb{Z}$.

Für die Abbildungen $M_{z_i} \otimes \mathrm{id}_E$ auf $\mathscr{O}(U,E)$, $i = 1,...,n$, schreiben wir im Folgend abkürzend wieder M_{z_i} und für $\mathrm{id}_{\mathscr{O}(U)} \otimes T$ auf $\mathscr{O}(U,E)$, $T \in L(E)$, abkürzend T. Berücksichtigt man dann

$$\mathrm{im}\, \delta_{S,U}^{n-1} = \sum_{i=1}^n (M_{z_i} - S_i)\mathscr{O}(U,E)$$

für alle offenen $U \subset \mathbb{C}^n$ und schreibt man für $\sum_{i=1}^n (M_{z_i} - S_i)\mathscr{O}(U,E)$ zur Abkürzung $(M_z - S)\mathscr{O}(U,E)$, so folgt aus Satz 2.5.1:

Satz 2.5.2 *Seien E, F Banachräume, $S = (S_1,...,S_n) \in L(E)^n$ und $T = (T_1,...,T_n) \in L(F)^n$ zwei vertauschende Operatortupel und $A \in L(E,F)$, $B \in L(F,E)$ mit jeweils dichtem Bild und $AS_i = T_i A$, $S_i B = BT_i$ für $i = 1,...,n$. Dann induziert der Operator A für alle Steinschen offenen Mengen $U \subset \varrho_{e,c}(S)$ einen topologischen Isomorphismus*

$$\tilde{A}_U : \mathscr{O}(U,E)\,/\,(M_z - S)\mathscr{O}(U,E) \to \mathscr{O}(U,F) \Big/ \overline{(M_z - T)\mathscr{O}(U,F)}\,, \quad [f] \mapsto [A_U f]$$

zwischen nuklearen Frécheträumen.

Beweis: Alle Voraussetzungen von Satz 2.5.1 sind für $p = n$ erfüllt. ■

Zur Berechnung des Spektrums eines vertauschenden Tupels $T \in L(F)^n$ ist folgendes Resultat nützlich: Besitzt T die SVEP[7] auf $\mathbb{C}^n$, so definiert das Garbendatum

$$\mathcal{F}_T(V) = \mathscr{O}(V,F)\,/(M_z - T)\mathscr{O}(V,F)\,, \quad V \subset \mathbb{C}^n \text{ offen},$$

zusammen mit den kanonischen Restriktionsabbildungen eine analytische Garbe $\mathcal{F}_T$, für die über Steinschen offenen Mengen $U \subset \mathbb{C}^n$ die algebraische Isomorphie $\Gamma(U,\mathcal{F}_T) \cong \mathcal{F}_T(U)$ gilt. Außerdem ist $\sigma(T) = \mathrm{supp}(\mathcal{F}_T)$ (Proposition A.2.1); hierbei ist $\mathrm{supp}(\mathcal{F}_T)$ definiert als das Komplement der größten offenen Menge $W \subset \mathbb{C}^n$ mit $\Gamma(U,\mathcal{F}_T) = \{0\}$ für alle $U \subset W$ offen. Besitzt T die Eigenschaft (β) auf $\mathbb{C}^n$, so besitzt T definitionsgemäß die SVEP auf $\mathbb{C}^n$ und zusätzlich ist $(M_z - T)\mathscr{O}(U,F)$ abgeschlossen in $\mathscr{O}(U,F)$ für jede Steinsche offene Menge $U \subset \mathbb{C}^n$. In diesem Fall ist $\mathcal{F}_T$ eine analytische Fréchetgarbe.

[7]SVEP steht für *single valued extension property*, vgl. Anhang A.2.

Auch das wesentliche Spektrum geeigneter vertauschender Operatortupel T lässt sich als Träger einer geeigneten Garbe gewinnen. Besitzt T nämlich die Eigenschaft (β) auf $\mathbb{C}^n$, so lässt sich vermittels des Garbendatums $(\Gamma(U, \mathcal{F}_T)^q, r^q_{U,V}; U \subset \mathbb{C}^n$ offen) eine analytische Garbe $\mathcal{F}^q_T$ definieren; hierbei steht $(\cdot)^q$ für den q-Funktor (vgl. wieder Anhang A.2). Es gilt $\sigma_e(T) = \operatorname{supp}(\mathcal{F}^q_T)$ (Proposition A.2.2). Für Steinsche offene Mengen $U \subset \mathbb{C}^n$ gilt die Identifizierung $\mathcal{F}^q_T(U) = \mathcal{F}_T(U)^q$.

Korollar 2.5.3 *Seien E, F Banachräume, $S = (S_1, ..., S_n) \in L(E)^n$, $T = (T_1, ..., T_n) \in L(F)^n$ zwei vertauschende Operatortupel und $A \in L(E, F)$, $B \in L(F, E)$ stetige Operatoren mit jeweils dichtem Bild und $AS_i = T_iA$, $S_iB = BT_i$ für $i = 1, ..., n$. Das Tupel T besitze die Eigenschaft (β) auf $\mathbb{C}^n$. Dann gilt $\sigma(T) \subset \sigma_c(S)$ und $\sigma_e(T) \subset \sigma_{e,c}(S)$. Ist E ein Hilbertraum, so gilt $\sigma(T) \subset \sigma(S)$ und $\sigma_e(T) \subset \sigma_e(S)$.*

Beweis: Ist $U \subset \varrho_c(S) \subset \varrho_{e,c}(S)$ Steinsch und offen, so folgt aus Satz 2.5.2

$$\mathscr{O}(U, E)\,/(M_z - S)\mathscr{O}(U, E) \cong \mathscr{O}(U, F)\,/(M_z - T)\mathscr{O}(U, F)\;,$$

wobei für T die Eigenschaft (β) ausgenutzt wurde. Da links der Nullraum steht, gilt $\mathcal{F}_T(U) = \{0\}$. Da dasselbe Argument auch auf jede Steinsche offene Menge $V \subset U$ anwendbar ist, folgt $U \subset \operatorname{supp}(\mathcal{F}_T)^c = \varrho(T)$. Also ist $\sigma(T) \subset \sigma_c(S)$.

Für $U \subset \varrho_{e,c}(S)$ Steinsch und offen ist $\mathscr{O}(U, E)\,/(M_z - S)\mathscr{O}(U, E)$ ein nuklearer Fréchetraum. In solchen Räumen sind beschränkte Mengen relativ-kompakt und es gilt deshalb

$$[\mathscr{O}(U, E)\,/(M_z - S)\mathscr{O}(U, E)]^q = \{0\}.$$

Aus der durch Satz 2.5.2 gegebenen topologischen Isomorphie ergibt sich somit auch

$$[\mathscr{O}(U, F)\,/(M_z - T)\mathscr{O}(U, F)]^q = \{0\}.$$

Wie oben folgt hieraus die Inklusion $U \subset (\operatorname{supp}(\mathcal{F}^q_T))^c = \varrho_e(T)$. Also hat man $\sigma_e(T) \subset \sigma_{e,c}(S)$.

In Hilberträumen gilt $\varrho_c(S) = \varrho(S)$ und $\varrho_{e,c}(S) = \varrho_e(S)$. ∎

Als Korollar ergibt sich ein bekanntes Resultat von Putinar ([Put92], Theorem 1) im Zusammenhang mit der Quasiähnlichkeit vertauschender Operatortupel auf Hilberträumen. Zwei Operatortupel $S = (S_1, ..., S_n) \in L(E)^n$ und $T = (T_1, ..., T_n) \in L(F)^n$ heißen *quasiähnlich*, wenn es Operatoren $A \in L(E, F)$ und $B \in L(F, E)$ gibt, beide injektiv und beide mit dichtem Bild derart, dass $AS_i = T_iA$ und $S_iB = BT_i$ für $i = 1, ..., n$ gilt.

Korollar 2.5.4 *Seien E, F Hilberträume und $S \in L(E)^n$ und $T \in L(F)^n$ zwei vertauschende Operatortupel, beide mit der Eigenschaft (β). Sind dann S und T quasiähnlich, so gilt $\sigma(S) = \sigma(T)$ und $\sigma_e(S) = \sigma_e(T)$.*

Kapitel 3

Theorie subnormaler Operatortupel

3.1 Subnormale und wesentlich subnormale Operatortupel

In [Hal50] hat P.R. Halmos eine Klasse von Operatoren eingeführt, die heute *subnormal* genannt werden. Es handelt sich hierbei um stetige Operatoren S auf einem Hilbertraum H, für die ein größerer Hilbertraum K und ein normaler Operator $N \in L(K)$ existieren mit $S = N|_H$. Der Operator N wird *normale Erweiterung von* S genannt. Ist N eine normale Erweiterung von S und gilt für jeden abgeschlossenen Teilraum L von K, der H enthält und N*-reduzierend* ist (d.h. der $NL \subset L$ und $N^*L \subset L$ erfüllt), bereits $L = K$, so wird N eine *minimale normale Erweiterung* von S genannt. Für Einzelheiten zur Theorie subnormaler Operatoren sei auf die Monographie [Con91a] von J.B. Conway verwiesen. Zentral sind folgende wohlbekannte Tatsachen: Zu jedem subnormalen Operator S existiert eine minimale normale Erweiterung und alle minimalen normalen Erweiterungen von S sind unitär äquivalent. Ist S subnormal und N eine minimale normale Erweiterung von S, so gilt die spektrale Inklusion $\sigma(N) \subset \sigma(S)$. Das *Normalenspektrum* $\sigma_n(S)$ von S ist definiert als Spektrum einer minimalen normalen Erweiterung von S. Aufgrund der unitären Äquivalenz minimaler normaler Erweiterungen ist $\sigma_n(S)$ wohldefiniert.

Das Konzept eines einzelnen subnormalen Operators auf einem Hilbertraum H wird verallgemeinert durch das Konzept eines *subnormalen Operatortupels*. Zunächst zum Begriff eines *normalen Operatortupels*: Ein Tupel $N = (N_1, ..., N_n) \in L(H)^n$ heißt *normal*, wenn es vertauschend ist und die Operatoren $N_1, ..., N_n$ normal sind. Ein Tupel $S = (S_1, ..., S_n) \in L(H)^n$ heißt *subnormal*, wenn es vertauschend ist und wenn ein größerer Hilbertraum K und ein normales Tupel $N = (N_1, ..., N_n) \in L(K)^n$ existieren mit $S = N|_H$ (d.h. $S_i = N_i|_H$ für $i = 1, ..., n$). Natürlich sind die Operatoren $S_1, ..., S_n$ eines subnormalen Tupels $(S_1, ..., S_n)$ als einzelne Operatoren subnormal. Die Umkehrung gilt i.Allg. hingegen nicht: Es gibt vertauschende Tupel subnormaler Operatoren, die nicht subnormal sind ([Abr78]). Ist $N = (N_1, ..., N_n)$ eine normale Erweiterung von S auf K und gilt für jeden abgeschlossenen Teilraum L von K, der H enthält und N*-reduzierend* ist (d.h. der

N_i-reduzierend für $i = 1, ..., n$ ist), bereits $L = K$, so wird N wieder *minimale normale Erweiterung* genannt. Auch im Mehrdimensionalen existieren stets minimale normale Erweiterungen und alle minimalen normalen Erweiterungen sind unitär äquivalent ([Ito58]). Die spektrale Inklusion $\sigma(N) \subset \sigma(S)$ für eine minimale normale Erweiterung N eines subnormalen Operatortupels S wurde von Putinar in [Put84] gezeigt. Das *Normalenspektrum* $\sigma_n(S)$ eines subnormalen Operatortupels S ist definitionsgemäß das Taylorspektrum einer minimalen normalen Erweiterung. Wieder liefert die unitäre Äquivalenz minimaler normaler Erweiterungen die Wohldefiniertheit dieses Spektrums.

Wir machen im Folgenden Gebrauch von der Multiindexschreibweise: Für eine normierte Algebra $\mathcal{A}$ sowie $a \in \mathcal{A}^n$ und $p, k \in \mathbb{N}_0^n$ $(n \in \mathbb{N})$ wird vereinbart:

$$|p| = \sum_{i=1}^{n} p_i, \quad p \le k \Leftrightarrow p_i \le k_i \text{ für } i = 1, .., n, \quad \binom{k}{p} = \prod_{i=1}^{n} \binom{k_i}{p_i} \text{ (falls } p \le k),$$

$$a^p = \prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i}, \quad \|a\|^p = \prod_{\substack{i=1,\dots,n,\\ a_i \neq 0}} \|a_i\|^{p_i} \quad \text{und} \quad \|a\| = \|a\|^{(1,\cdots,1)}.$$

Neben Erweiterungen von Operatoren bzw. Operatortupeln zu normalen Operatoren bzw. normalen Operatortupeln im obigen Sinn, spielen auch Dilatationen eine Rolle. Ist K ein Hilbertraum, H ein abgeschlossener Teilraum von K und sind $S = (S_1, ..., S_n) \in L(H)^n$ und $T = (T_1, ..., T_n) \in L(K)^n$ zwei vertauschende Operatortupel, so nennt man T eine *Dilatation* von S, wenn für alle $p \in \mathbb{N}_0^n$ gilt $S^p = PT^p|_H$, wobei P für die orthogonale Projektion von K auf H steht. Besteht T aus normalen (unitären) Operatoren $T_1, ..., T_n$, so nennt man T eine *normale (unitäre) Dilatation* von S. Eine normale (unitäre) Dilatation heißt *minimale normale (unitäre) Dilatation* von S, wenn T eine normale (unitäre) Dilatation von S ist und wenn der einzige T-reduzierende Teilraum von K, der H enthält, die Raum K selbst ist.

Ein *Spektralmaß* $E : \mathcal{B}or(\sigma_n(S)) \to L(K)$ für ein subnormales Tupel $S \in L(H)^n$ ist das Spektralmaß einer minimalen normalen Erweiterung $N \in L(K)^n$ von S.[1] Sind $E_i : \mathcal{B}or(\sigma_n(S)) \to L(K_i)$, $i = 1, 2$, Spektralmaße von S, so gibt es einen unitären Operator $U : K_1 \to K_2$ mit $Ux = x$ für alle $x \in H$ und $UE_1(A) = E_2(A)U$ für alle $A \in \mathcal{B}or(\sigma_n(S))$. Für $x, y \in K$ bezeichnet $E_{x,y} : \mathcal{B}or(\sigma_n(S)) \to \mathbb{C}$ das komplexe Maß $E_{x,y}(\cdot) = \langle E(\cdot)x, y\rangle$. Ein *skalares Spektralmaß* $\mu : \mathcal{B}or(\sigma_n(S)) \to \mathbb{C}$ *für* S ist ein skalares Spektralmaß einer minimalen normalen Erweiterung von S. Zwei solche skalare Spektralmaße sind immer äquivalent, d.h. gegenseitig absolut stetig. Die *Kompression* $e : \mathcal{B}or(\sigma_n(S)) \to L(H)$ eines Spektralmaßes E für S auf H, $e(\cdot) = PE(\cdot)|_H$, wobei P für die orthogonale Projektion von K auf H steht, liefert ein positives operatorwertiges Maß.

Allgemein versteht man unter einem *positiven operatorwertigen Maß* (kurz POM) auf der Borel-σ-Algebra einer kompakten Menge $\mathscr{K}$ mit Werten in den stetigen Operatoren

[1] Für einen topologischen Raum X steht $\mathcal{B}or(X)$ für die Borel-σ-Algebra von X.

eines Hilbertraumes H eine Abbildung $e : \mathcal{B}or(\mathscr{K}) \to L(H)$ mit den folgenden Eigenschaften ([Ber66], Definition 1)[2] :

(a) e ist positiv, d.h. $e(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{B}or(\mathscr{K})$,

(b) e ist additiv, d.h. $e(A \cup B) = e(A) + e(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{B}or(\mathscr{K})$ mit $A \cap B = \emptyset$ und

(c) e ist stetig, d.h. für jede abzählbare, aufsteigende Familie $(A_i)_i$ in $\mathcal{B}or(\mathscr{K})$ mit $A_i \uparrow A$ gilt $e(A_i) \to e(A)$ in der starken Operatortopologie.

Ein POM $E : \mathcal{B}or(\mathscr{K}) \to L(H)$ ist ein Spektralmaß, wenn $E(A \cap B) = E(A)E(B)$ für alle Borelmengen $A, B \in \mathcal{B}or(\mathscr{K})$ gilt. Wir nennen ein POM $e : \mathcal{B}or(\mathscr{K}) \to L(H)$ *unital*, falls $e(\mathscr{K}) = \mathrm{id}_H$ gilt.

Eine *spektrale Dilatation* eines POM $e : \mathcal{B}or(\mathscr{K}) \to L(H)$ ist ein Spektralmaß $E : \mathcal{B}or(\mathscr{K}) \to L(K)$ auf einem größeren Hilbertraum K, deren Kompression auf H mit e übereinstimmt, d.h. für das $e(A) = PE(A)|_H$ für alle $A \in \mathcal{B}or(\mathscr{K})$ gilt. Ein unitales POM e auf einem kompakten metrischen Raum besitzt infolge eines klassischen Resultates von Naimark ([Pau86], Theorem 4.6) stets eine unitale spektrale Dilatation. Eine spektrale Dilatation E eines POM e wird *minimal* genannt, wenn für jeden abgeschlossenen Teilraum L von K, der H enthält und für den die Kompression von E auf L wieder ein Spektralmaß ist, bereits $L = K$ gilt. Ist $E : \mathcal{B}or(\mathscr{K}) \to L(K)$ eine unitale spektrale Dilatation eines POM $e : \mathcal{B}or(\mathscr{K}) \to L(H)$, so ist die Einschränkung von E auf

$$\begin{aligned} K_0 &= \overline{\left\{ \sum_{i=1}^{r} E(A_i)x_i \;\middle|\; \begin{array}{l} r \in \mathbb{N}, (A_i)_{i=1}^r \text{ messbare Zerlegung} \\ \text{von } \mathscr{K}, (x_i)_{i=1}^r \text{ Folge in } H \end{array} \right\}} \\ &= \bigvee\{E(A)x | A \in \mathcal{B}or(\mathscr{K}) \text{ und } x \in H\} \end{aligned}$$

eine minimale spektrale Dilatation von e. Sind $E_i : \mathcal{B}or(\mathscr{K}) \to L(K_i)$ $(i = 1, 2)$ zwei unitale spektrale Dilatationen eines POM $e : \mathcal{B}or(\mathscr{K}) \to L(H)$, die beide minimal sind, so gibt es einen unitären Operator $U : K_1 \to K_2$ mit $Ux = x$ für alle $x \in H$ und $UE_1(A) = E_2(A)U$ für alle $A \in \mathcal{B}or(\mathscr{K})$. Für $x, y \in H$ bezeichnet $e_{x,y} : \mathcal{B}or(\sigma_n(S)) \to \mathbb{C}$ das komplexe Maß $e_{x,y}(\cdot) = \langle e(\cdot)x, y\rangle$.

Subnormale Operatoren und subnormale Operatortupel können durch Positivitätsbedingungen charakterisiert werden. Ein Resultat von A. Athavale ([Ath87], Theorem 4.1) besagt, dass für ein vertauschendes Operatortupel $S = (S_1, ..., S_n)$ gilt:

$$\begin{aligned} &S = (S_1, ..., S_n) \text{ subnormal} \\ &\qquad \Longleftrightarrow \sum_{p \in \mathbb{N}_0^n, p \leq k} \frac{(-1)^{|p|}}{\|S\|^{2p}} \binom{k}{p} (S^*)^p S^p \geq 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0^n. \end{aligned}$$

[2]Die Definition eines POM kann allgemeiner gefasst werden, wird aber in der allgemeineren Form in dieser Arbeit nicht benötigt.

Diese Charakterisierung erlaubt eine Übertragung der Idee eines subnormalen Operators bzw. eines subnormalen Operatortupels auf Elemente bzw. Tupel von Elementen in C^*-Algebren:

Ein Tupel $s = (s_1, ..., s_n)$ vertauschender Elemente einer C^*-Algebra wird *subnormal* genannt, wenn für alle $k \in \mathbb{N}_0^n$ gilt:

$$\sum_{p \in \mathbb{N}_0^n, p \leq k} \frac{(-1)^{|p|}}{\|s\|^{2p}} \binom{k}{p} (s^*)^p s^p \geq 0.$$

Für ein einzelnes Element einer C^*-Algebra hat Feldman diese Definition in [Fel99] angegeben. Aus der Definition ergibt sich sofort, dass Subnormalität unter $*$-Homomorphismen erhalten bleibt. Insbesondere ist ein Tupel $s = (s_1, ..., s_n) \in \mathcal{A}^n$ in einer unitalen C^*-Algebra genau dann subnormal, wenn für eine oder äquivalent jede treue Darstellung $\varphi : \mathcal{A} \to L(H)$ das Tupel $\varphi(s) = (\varphi(s_1), ..., \varphi(s_n)) \in L(H)^n$ ein subnormales Operatortupel ist. Insbesondere ist ein Tupel $s = (s_1, ..., s_n) \in \mathcal{A}^n$ genau dann normal, wenn die Tupel s und $s^* = (s_1^*, ..., s_n^*)$ beide subnormal sind.

Ein *wesentlich normales Tupel* $N \in L(H)^n$ ist ein Tupel, für das $N + K(H)$ ein normales Tupel in $\mathcal{C}(H)$ ist.[3] Entsprechend kann man jetzt definieren: Ein Operatortupel $S \in L(H)^n$ heißt *wesentlich subnormal*, wenn $S + K(H)$ ein subnormales Tupel in $\mathcal{C}(H)$ ist.

3.2 Die von einem subnormalen Operatortupel erzeugte C^*-Algebra

Das Studium der von einem subnormalen Operatortupel erzeugten C^*-Algebra wird durch klassische Resultate für Toeplitz-Operatoren motiviert.

Beispiel 3.2.1 Sei $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ der Einheitskreis in $\mathbb{C}$ und $H^2(\mathbb{T})$ der klassische Hardy-Raum über der Kreislinie. Für $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ bezeichne T_φ den *Toeplitz-Operator* $T_\varphi : H^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T})$, $T_\varphi f = P(\varphi f)$, wobei P für die orthogonale Projektion $L^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T})$ steht. Ist $\varphi \in H^\infty(\mathbb{T})$, so kann in der Definition von T_φ auf die Projektion verzichtet werden. Der Operator T_φ ist subnormal und besitzt $M_\varphi : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$, $M_\varphi f = \varphi f$ als normale Erweiterung. Speziell für $\varphi \equiv z$ erhält man den *(unilateralen) Shift-Operator* T_z. Für diesen hat Coburn in [Cob67] gezeigt:

$$C^*(T_z) = \{T_\varphi + K : \varphi \in C(\mathbb{T}), K \in K(H^2(\mathbb{T}))\}, \tag{3.1}$$

wobei die von einer Menge M von Elementen einer unitalen C^*-Algebra $\mathcal{A}$ erzeugte unitale C^*-Algebra mit $C^*(M)$ bezeichnet wird; es handelt sich um die kleinste C^*-Unteralgebra von $\mathcal{A}$, die M und die Eins von $\mathcal{A}$ enthält.

[3] Wir erinnern, dass für $N = (N_1, ..., N_n) \in L(H)^n$ die Bezeichnung $N + K(H)$ für das Tupel $(N_1 + K(H), ..., N_n + K(H)) \in \mathcal{C}(H)^n$ steht, und dass $\mathcal{C}(H)$ die Calkin-Algebra von H ist (vgl. §0.2). Die Calkin-Algebra eines Hilbertraumes ist in kanonischer Weise eine unitale C^*-Algebra.

Beispiel 3.2.1 besitzt eine abstrakte Verallgemeinerung: Ist $S \in L(H)$ ein subnormaler Operator, $N \in L(K)$ eine minimale normale Erweiterung von S und μ ein skalares Spektralmaß für S, so lässt sich für $f \in L^\infty(\mu)$ ein Operator $T_f : H \to H$ definieren durch $T_f = Pf(N)|_H$, wobei P für die orthogonale Projektion $P : K \to H$ steht und $f(N)$ mit Hilfe des $L^\infty(\mu)$-Kalküls von N gebildet wird. Man nennt T_f den *Toeplitz-Operator mit Symbol f (bzgl. S)*. Der Operator T_f ist unabhängig von der speziellen Wahl der minimalen normalen Erweiterung N von S. Die Zuordnung $L^\infty(\mu) \to L(H)$, $f \mapsto T_f$ ist offensichtlich kontraktiv. Darüber hinaus gilt $\{T_f : f \in C(\sigma_n(S))\} \subset C^*(S)$ ([Con91a], Lemma II.12.5), und es ist deshalb naheliegend zu fragen, für welche subnormalen Operatoren S die Identifizierung

$$C^*(S) = \{T_f + K : f \in C(\sigma_n(S)), K \in K(H)\} \tag{3.2}$$

richtig ist. Um die Analogie zu (3.1) deutlich zu machen, sei bemerkt, dass für die minimale normale Erweiterung M_z von T_z die Gleichheit $\mathbb{T} = \sigma(M_z) = \sigma_n(T_z)$ gilt. Zur Formulierung einer Antwort auf die gestellte Frage, sei an folgende Begriffe erinnert:

Ein Operator $T \in L(H)$ heißt *reduzierbar*, wenn ein abgeschlossener Teilraum H_0 von H mit $\{0\} \neq H_0 \neq H$ existiert mit $TH_0 \subset H_0$ und $T^*H_0 \subset H_0$. Entsprechend heißt ein Operator $T \in L(H)$ *irreduzibel*, wenn T nicht reduzierbar ist, d.h. wenn die einzigen reduzierenden Teilräume für T die Räume $\{0\}$ und H sind. Eine Menge M von Operatoren (insbesondere ein Operatortupel oder eine C^*-Algebra von Operatoren) heißt *reduzierbar*, wenn es einen abgeschlossenen Teilraum H_0 von H mit $\{0\} \neq H_0 \neq H$ gibt, der T-reduzierend für alle $T \in M$ ist. Eine Menge M von Operatoren heißt *irreduzibel*, wenn M nicht reduzierbar ist. Ist $T \in L(H)$, so heißt ein Teilraum H_0 *invarianter Teilraum von T* oder *T-invariant*, wenn $TH_0 \subset H_0$ gilt. Ein Teilraum H_0 heißt *invariant* für eine Menge M von Operatoren, wenn $TH_0 \subset H_0$ für alle $T \in M$ gilt. Der Teilraum wird in diesem Fall auch *M-invariant* genannt.

Für einen Operator $T \in L(H)$ bezeichne $\sigma_{ap}(T)$ das *approximative Punktspektrum* von T.[4] Der unilaterale Shift ist irreduzibel, wesentlich normal und erfüllt $\sigma(M_z) = \sigma_{ap}(T_z)$ (vgl. [Dou72]). Keough hat in [Keo81] gezeigt, dass diese drei Eigenschaften für einen subnormalen Operator bereits (3.2) liefern.

Wir werden zeigen, dass das obige eindimensionale Resultat von Keough auch in der mehrdimensionalen Situation richtig bleibt (Satz 3.2.10). Die Richtigkeit in einem Spezialfall beinhaltet das folgende Beispiel aus [Upm96]:

Beispiel 3.2.2 Sei $D \subset \mathbb{C}^n$ eine strikt pseudokonvexe Teilmenge mit glattem Rand und sei σ das Oberflächenmaß von ∂D. Sei $A(D) = \{f \in C(\overline{D}) : f|_D \text{ holomorph}\}$, und sei

$$H^2(\sigma) = \overline{\{f|_{\partial D} : f \in A(D)\}}^{L^2(\sigma)},$$

der Hardy-Raum über D. Der *Toeplitz-Operator* T_f mit Symbol $f \in L^\infty(\sigma)$ ist dann definiert durch $T_f g = P(fg)$ für $g \in H^2(\sigma)$, wobei P für die orthogonale Projektion

[4] Zur Definition des approximativen Punktspektrums eines einzelnen Operators vergleiche die entsprechende Definition für Operatortupel auf Seite 66.

$P : L^2(\sigma) \to H^2(\sigma)$ steht. Die Abbildung $L^\infty(\sigma) \to L(H)$, $f \mapsto T_f$ teilt viele Eigenschaften der entsprechenden eindimensionalen Abbildung. Sie ist etwa kontraktiv, erfüllt $T_f^* = T_{\overline{f}}$ sowie $T_f T_\varphi = T_{f\varphi}$ und $T_{\overline{\varphi}} T_f = T_{\overline{\varphi} f}$ für $f \in L^\infty(\sigma)$ und $\varphi \in H^\infty(\sigma) = H^2(\sigma) \cap L^\infty(\sigma)$. Seien $T_{z_1}, ..., T_{z_n}$ die Toeplitz-Operatoren der Multiplikation mit den Koordinatenfunktionen, und sei $T_z = (T_{z_1}, ..., T_{z_n})$. Dann gilt

$$C^*(T_z) = \{T_f + K : f \in C(\partial D), K \in K(H^2(\sigma))\},$$

in Analogie zum eindimensionalen Fall.

Eine abstrakte Verallgemeinerung ist auch in mehreren Dimensionen möglich: Sei $S \in L(H)^n$ ein subnormales Tupel, $N \in L(K)^n$ eine minimale normale Erweiterung von S und μ ein skalares Spektralmaß für S. Die von N erzeugte (unitale) C^*-Algebra $C^*(N)$ ist kommutativ. Dann existiert ein $*$-Isomorphismus $\rho_N : C^*(N) \to C(\sigma(N))$, der es erlaubt, die C^*-Algebra $C^*(N)$ mit der kommutativen C^*-Algebra der stetigen Funktionen auf $\sigma(N) = \sigma_n(S)$ zu identifizieren.

Für $f \in L^\infty(\mu)$ sei $T_f : H \to H$ definiert durch $T_f = Pf(N)|_H$, wobei P für die orthogonale Projektion $P : K \to H$ steht. Man nennt T_f den *Toeplitz-Operator mit Symbol f (bzgl. S)*. Man überlegt sich wieder sehr leicht, dass T_f unabhängig von der Wahl der minimalen normalen Erweiterung von S ist. Sei τ der stetige Operator $C(\sigma_n(S)) \to L(H)$, $f \mapsto T_f$. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ ist

$$T_{\overline{z}^\alpha z^\beta} = PN^{*\alpha} N^\beta|_H = S^{*\alpha} S^\beta \in C^*(S),$$

und da die Polynome in $z_1, ..., z_n$ und $\overline{z}_1, ..., \overline{z}_n$ dicht in $C(\sigma_n(S))$ liegen, folgt $\tau(f) \in C^*(S)$ für alle $f \in C(\sigma_n(S))$. Damit erhält man das folgende Lemma:

Lemma 3.2.3 *Ist $S \in L(H)^n$ subnormal, so gilt*

$$\operatorname{im} \tau = \{T_f : f \in C(\sigma_n(S))\} \subset C^*(S).$$

In der nachfolgenden Proposition wird gezeigt, dass der Gelfand-Raum von $C^*(S)$, d.h. die Menge

$$\mathcal{M}(C^*(S)) = \{\phi; \phi : C^*(S) \to \mathbb{C} \text{ nicht triviale multiplikative Linearform}\},$$

mit dem approximativen Punktspektrum $\sigma_{ap}(S)$ von S identifiziert werden kann. Für ein beliebiges (nicht notwendig vertauschendes) Operatortupel $T = (T_1, ..., T_n) \in L(E)^n$ auf einem Banachraum E ist das *approximative Punktspektrum* wie folgt definiert:

$$\sigma_{ap}(T) = \left\{ \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} E \to E^n, x \mapsto ((\lambda_i - T_i)x)_{i=1}^n \\ \text{ist nicht nach unten beschränkt} \end{array} \right\}.$$

Die Identifizierung ist möglich für (nicht notwendig vertauschende) Tupel hyponormaler Operatoren. *Hyponormale Operatoren* $T \in L(H)$ sind durch die Eigenschaft $T^*T \geq TT^*$ definiert und subnormale Operatoren sind hyponormal ([Con91a], Proposition 4.2).

Proposition 3.2.4 *Sei $T = (T_1, ..., T_n) \in L(H)^n$ ein (nicht notwendig vertauschendes) Tupel.*

(a) Für jede nicht triviale multiplikative Linearform $\phi : C^*(T) \to \mathbb{C}$ gilt

$$(\phi(T_i))_{i=1}^n \in \sigma_{ap}(T).$$

(b) Die Abbildung

$$\varrho : \mathcal{M}(C^*(T)) \to \sigma_{ap}(T), \quad \phi \mapsto (\phi(T_i))_{i=1}^n,$$

ist injektiv.

(c) Sind die Operatoren T_i, $i = 1, ..., n$, hyponormal, so ist ϱ ein Homöomorphismus.

Beweis: (a) Sei $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^n \backslash \sigma_{ap}(T)$. Dann existiert ein $c > 0$ mit $\sum_{i=1}^n \|(\lambda_i - T_i)x\|^2 \geq c\|x\|^2$ für alle $x \in H$. Hieraus folgt

$$\sum_{i=1}^n (\overline{\lambda}_i - T_i^*)(\lambda_i - T_i) - c \geq 0.$$

Da multiplikative Linearformen Positivität erhalten, gilt für alle $\phi \in \mathcal{M}(C^*(T))$:

$$0 \leq \phi\left(\sum_{i=1}^n (\overline{\lambda}_i - T_i^*)(\lambda_i - T_i) - c\right) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i - \phi(T_i)|^2 - c.$$

Folglich existiert wenigstens ein Index $i_0 \in \{1, ..., n\}$ mit $\lambda_{i_0} \neq \phi(T_{i_0})$. Hieraus folgt die Behauptung.

(b) Die Abbildung ϱ ist wegen (a) wohldefiniert. Sind $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{M}(C^*(T))$ und gilt $\phi_1(T_i) = \phi_2(T_i)$ für $i = 1, ..., n$, so ist $\phi_1 = \phi_2$, denn ϕ_1 und ϕ_2 sind $*$-Homomorphismen, $\phi_1(\mathrm{id}_H) = \phi_2(\mathrm{id}_H) = 1$ und $\mathrm{id}_H, T_1, ..., T_n$ sind Erzeuger von $C^*(T)$.

(c) Es genügt, sich von der Surjektivität von ϱ zu überzeugen, denn als bijektive, stetige Abbildung zwischen kompakten Hausdorffräumen ist ϱ dann ein Homöomorphismus.
Sei $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \sigma_{ap}(T)$. Dann existiert eine Folge $(x_m)_m$ in H mit $\|x_m\| = 1$ und $(\lambda_i - T_i)x_m \to 0$ $(m \to \infty)$ für $i = 1, ..., n$. Sei $\mathrm{LIM} : \ell^\infty \to \mathbb{C}$ ein Banach-Limes (es genügt ein stetiges lineares Funktional, für das $\mathrm{LIM}(y_m)_m = \lim_{m\to\infty} y_m$ für alle konvergenten Folgen $(y_m)_m$ gilt). Definiere $\phi : C^*(T) \to \mathbb{C}$ durch

$$\phi(A) = \mathrm{LIM}\langle Ax_m, x_m\rangle.$$

Dann ist ϕ ein stetiges lineares Funktional mit $\lambda = (\phi(T_i))_{i=1}^n$. Es muss die Multiplikativität von ϕ nachgewiesen werden. Für $i \in \{1, ..., n\}$ gilt aufgrund der Wahl der Folge $(x_m)_m$

$$\phi(A(\lambda_i - T_i)) = \mathrm{LIM}\langle A(\lambda_i - T_i)x_m, x_m\rangle = 0 \quad \text{für alle } A \in C^*(T).$$

Da T_i, $i = 1, ..., n$, hyponormal ist, folgt $\|(\overline{\lambda}_i - T_i^*)x\| \leq \|(\lambda_i - T_i)x\|$ für alle $x \in H$ und damit auch $\phi(A(\overline{\lambda}_i - T_i^*)) = 0$ für alle $A \in C^*(T)$. Es folgt, dass ϕ auf der linearen Hülle C

aller Produkte der Form $A_1 \cdots A_r$ mit $r \geq 1$ und $A_1, ..., A_r \in \{\lambda_i - T_i, \overline{\lambda}_i - T_i^* : i = 1, ..., r\}$ verschwindet, und dass $\phi(A + \alpha 1) = \alpha$ für $A \in C$, $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt. Damit ist ϕ multiplikativ auf einer dichten Teilalgebra von $C^*(T)$. Die Stetigkeit von ϕ impliziert $\phi \in \mathcal{M}(C^*(T))$. ■

Für eine unitale C^*-Algebra $\mathcal{A}$ ist

$$\mathcal{J} = \bigcap\{\phi^{-1}(0) : \phi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$$

das *Kommutatorideal* von $\mathcal{A}$, d.h. das von den Elementen der Form $ab - ba$, $a, b \in \mathcal{A}$, erzeugte abgeschlossene Ideal in $\mathcal{A}$ ([Con91a], Lemma II.12.2). Dann ist

$$\mathcal{A}/\mathcal{J} \to C(\mathcal{M}(\mathcal{A})), \quad a + \mathcal{J} \mapsto \widehat{a} \quad \text{mit} \quad \widehat{a}(\phi) = \phi(a)$$

ein $*$-Isomorphismus.

Korollar 3.2.5 *Sei $T = (T_1, ..., T_n) \in L(H)^n$ ein (nicht notwendig vertauschendes) Tupel hyponormaler Operatoren und $\mathcal{J}$ das Kommutatorideal von $C^*(T)$. Dann definiert*

$$\rho_T : C^*(T)/\mathcal{J} \to C(\sigma_{ap}(T)), \quad A + \mathcal{J} \mapsto \widehat{A} \circ \varrho^{-1}$$

einen $*$-Isomorphismus.

Satz 3.2.6 *Für ein subnormales Operatortupel S ist das nachfolgende Diagramm kommutativ:*

$$\begin{tikzcd} C(\sigma_n(S)) \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\tau"'] & C(\sigma_{ap}(S)) \\ C^*(S) \arrow[r, "\pi"] & C^*(S)/\mathcal{J}, \arrow[u, "\rho_S"'] \end{tikzcd} \tag{3.3}$$

wobei π den kanonischen Epimorphismus, r die Restriktionsabbildung und τ, ρ_S die oben definierten Abbildungen bezeichnen.

Beweis: Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ und $\lambda \in \sigma_{ap}(S)$. Wähle $\phi \in \mathcal{M}(C^*(S))$ mit $\lambda = (\phi(S_i))_{i=1}^n$. Dann gilt

$$\Big[(\rho_S \circ \pi \circ \tau)(\overline{z}^\alpha z^\beta)\Big](\lambda) = \rho_S(S^{*\alpha} S^\beta + \mathcal{J})(\lambda) = (\widehat{S^{*\alpha} S^\beta})(\varrho^{-1}(\lambda)) = (\widehat{S^{*\alpha} S^\beta})(\phi) = \overline{\lambda}^\alpha \lambda^\beta.$$

Da nach dem Satz von Stone-Weierstraß die Polynome in z und $\overline{z}$ dicht liegen in $C(\sigma_n(S))$, gilt $\rho_S \circ \pi \circ \tau = r$ wie behauptet. ■

Aus Satz 3.2.6 ergibt sich unmittelbar:

Korollar 3.2.7 *Für $f \in C(\sigma_n(S))$ gilt:*

$$T_f \in \mathcal{J} \quad \Leftrightarrow \quad f(\lambda) = 0 \text{ für alle } \lambda \in \sigma_{ap}(S).$$

Sei $T = (T_1, ..., T_n) \in L(H)^n$ ein beliebiges (nicht notwendig vertauschendes) Tupel und seien $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$, $\phi \in \mathcal{M}(C^*(T))$ mit $\phi(T) = \lambda$ und $(x_m)_m$ eine Folge von Einheitsvektoren in H mit $\lim_{m\to\infty}(\lambda_i - T_i)x_m = 0$ für $i = 1, ..., n$. Dann ist

$$\mathcal{A} = \{A \in C^*(T); \lim_{m\to\infty} (A - \phi(A))x_m = 0\}$$

eine unitale abgeschlossene Teilalgebra von $C^*(T)$ mit $T_1, ..., T_n \in \mathcal{A}$. Sind $T_1, ..., T_n$ hyponormal, so enthält $\mathcal{A}$ wegen

$$\|(T_i^* - \phi(T_i^*))x_m\| = \|(T_i - \phi(T_i))^* x_m\| \leq \|(T_i - \phi(T_i))x_m\| \to 0 \quad (m \to \infty)$$

für $i = 1, ..., n$ auch die Operatoren $T_1^*, ..., T_n^*$. In diesem Fall ist $\mathcal{A} = C^*(T)$.

Proposition 3.2.8 *Sei $T = (T_1, ..., T_n) \in L(H)^n$ ein (nicht notwendig vertauschendes) Tupel hyponormaler Operatoren, $A \in C^*(T)$ und $\mathcal{J}$ das Kommutatorideal von $C^*(T)$. Dann sind äquivalent:*

(i) $A \in \mathcal{J}$.

(ii) *Für beliebiges $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ und jede Folge $(x_m)_m$ von Einheitsvektoren in H mit $\lim_{m\to\infty}(\lambda_i - T_i)x_m = 0$ für $i = 1, ..., n$ gilt: $\lim_{m\to\infty} Ax_m = 0$.*

(iii) *Für $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ gilt: Es existiert eine Folge $(x_m)_m$ von Einheitsvektoren in H mit $\lim_{m\to\infty}(\lambda_i - T_i)x_m = 0$ für $i = 1, ..., n$ und $\lim_{m\to\infty} Ax_m = 0$.*

Beweis: (i)$\Rightarrow$(ii): Sei $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$, $\phi \in \mathcal{M}(C^*(T))$ mit $\phi(T) = \lambda$ und $(x_m)_m$ eine Folge von Einheitsvektoren in H mit $\lim_{m\to\infty}(\lambda_i - T_i)x_m = 0$ für $i = 1, ..., n$. Wegen $A \in \mathcal{J}$ ist $\phi(A) = 0$ und deshalb $A = A - \phi(A)$. Also folgt aus der zuvor gemachten Bemerkung, dass $\lim_{m\to\infty} Ax_m = 0$ ist.

(ii)$\Rightarrow$(iii) ist klar.

(iii)$\Rightarrow$(i): Sei $\phi \in \mathcal{M}(C^*(T))$, $\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^n = \varrho(\phi) \in \sigma_{ap}(T)$ und $(x_m)_m$ eine Folge von Einheitsvektoren in H mit $\lim_{m\to\infty}(\lambda_i - T_i)x_m = 0$ für $i = 1, ..., n$ und $\lim_{m\to\infty} Ax_m = 0$. Dann gilt $\phi(A)x_m = Ax_m - (A - \phi(A))x_m \to 0$ $(m \to \infty)$. Demzufolge muss $\phi(A) = 0$ sein und da die Aussage für alle $\phi \in \mathcal{M}(C^*(T))$ richtig ist, folgt $A \in \bigcap\{\phi^{-1}(0); \phi \in \mathcal{M}(C^*(T))\} = \mathcal{J}$. ■

Soweit zu den allgemeinen Aussagen. Beispiel 3.2.2 rechtfertigt die Betrachtung spezieller Situationen, insbesondere das Studium subnormaler Operatortupel, die irreduzibel und wesentlich normal sind.

Lemma 3.2.9 *Sei $T \in L(H)^n$ ein (nicht notwendig vertauschendes) Tupel, das irreduzibel und wesentlich normal ist. Dann ist das Kommutatorideal $\mathcal{J}$ von $C^*(T)$ gegeben durch $\mathcal{J} = K(H)$. Insbesondere ist $K(H) \subset C^*(T)$.*

Beweis: Zunächst wird $C^*(T) \cap K(H) \neq \emptyset$ gezeigt. Dies ist klar, wenn $T = (T_1, ..., T_n)$ nicht vertauschend ist, denn da T wesentlich vertauschend ist, existieren in diesem Fall $i, j \in \{1, ..., n\}$ mit $0 \neq [T_i, T_j] \in C^*(T) \cap K(H)$. Ist T vertauschend, so kann T aufgrund der Irreduzibilität jedenfalls nicht normal sein, d.h. es existiert $i \in \{1, ..., n\}$ mit $0 \neq [T_i^*, T_i] \in C^*(T) \cap K(H)$. Also ist $C^*(T) \cap K(H) \neq \emptyset$ gezeigt.

Da mit T auch $C^*(T)$ irreduzibel ist und da $C^*(T)$ einen kompakten Operator enthält, gilt $K(H) \subset C^*(T)$ ([Mur90], Theorem 2.4.9). Da $K(H)$ ein Ideal in $C^*(T)$ und $T + K(H)$ nach Voraussetzung ein $C^*(T)/K(H)$ erzeugendes normales Tupel ist, ist $C^*(T)/K(H)$ eine kommutative C^*-Algebra. Für $A, B \in C^*(T)$ gilt deshalb $AB - BA \in K(H)$ und damit $\mathcal{J} \subset K(H)$. Da $K(H)$ keine nicht-trivialen multiplikativen Linearformen besitzt ([Arv76], Corollary 1 zu Theorem 1.4.2), folgt wegen $\mathcal{J} = \bigcap\{\phi^{-1}(0) : \phi \in \mathcal{M}(C^*(T))\}$ auch die umgekehrte Inklusion $K(H) \subset \mathcal{J}$. ■

Satz 3.2.10 *Sei $S \in L(H)^n$ ein subnormales Tupel, das irreduzibel und wesentlich normal ist. Dann gilt:*

$$C^*(S) = \{T_f + K : f \in C(\sigma_n(S)), K \in K(H)\}.$$

Beweis: Das Kommutatorideal von $C^*(S)$ ist $K(H)$ (Lemma 3.2.9). Für alle $f \in C(\sigma_n(S))$ ist $T_f \in C^*(S)$ (Lemma 3.2.3). Die Inklusion „$\supset$“ ist damit geklärt. Ist umgekehrt $T \in C^*(S)$, ρ_S die Abbildung aus Korollar 3.2.5 und f eine stetige Fortsetzung von $\rho_S(T + K(H))$ auf $\sigma_n(S)$ (Fortsetzungssatz von Tietze), so ist $\rho_S(T_f - T + K(H)) = r(f) - \rho_S(T + K(H)) = 0$ (Satz 3.2.6). Folglich ist $T_f - T + K(H) \in \ker \rho_S = \{0\}$, d.h. $T = T_f + K$ für ein $K \in K(H)$. Das ist „$\subset$“. ■

Über subnormale Operatortupel, die irreduzibel und wesentlich normal sind, lässt sich noch mehr sagen. Für die erste Aussage wird lediglich die Hyponormalität gebraucht.

Satz 3.2.11 *Sei $T \in L(H)^n$ ein (nicht notwendig vertauschendes) Tupel hyponormaler Operatoren, das irreduzibel und wesentlich normal ist. Dann gilt:*

$$\sigma_e(T) = \sigma_{ap}(T).$$

Beweis: Wegen $\mathcal{J} = K(H)$ (Lemma 3.2.9) ist $\rho_T : C^*(T)/K(H) \to C(\sigma_{ap}(T))$ ein $*$-Isomorphismus (Korollar 3.2.5). Es ist $\rho_T(T_i + K(H)) = z_i$ für $i = 1, ..., n$. Also ist (siehe §0.3)

$$\sigma_e(T) = \sigma_{\mathcal{C}(H)}(T + K(H)) = \sigma_{C^*(T)/K(H)}(T + K(H)) \overset{\rho_T}{=} \sigma_{ap}(T).$$

■

Für $m \in \mathbb{N}$ und $h = (h_1, ..., h_m) \in C(\sigma_n(S))^m$ sei das Tupel $T_h \in L(H)^m$ definiert durch $T_h = (T_{h_1}, ..., T_{h_m})$. Der nächste Satz zeigt unter anderem, dass unter geeigneten Bedingungen das Operatortupel T_h wesentlich vertauschend ist.

Satz 3.2.12 *Sei $S \in L(H)^n$ ein subnormales Tupel, das irreduzibel und wesentlich normal ist. Dann ist $\sigma_e(S) \subset \sigma_n(S)$ und für $f, g \in C(\sigma_n(S))$ sowie $h \in C(\sigma_n(S))^m$ $(m \in \mathbb{N})$ gilt:*

(a) $T_f \in K(H) \iff f(\sigma_e(S)) = \{0\}$

(b) $\|T_f + K(H)\|$ $(= \inf\{\|T_f + K\| : K \in K(H)\})$ $= \|f\|_{\infty,\sigma_e(S)}$

(c) $T_{fg} - T_f T_g \in K(H)$

(d) T_h *ist wesentlich vertauschend und* $\sigma_e(T_h) = h(\sigma_e(S))$

Beweis: Nach Satz 3.2.11 gilt $\sigma_e(S) = \sigma_{ap}(S) \subset \sigma_n(S)$ und nach Lemma 3.2.9 ist $K(H)$ das Kommutatorideal von $C^*(S)$. Teil (a) ist dann nichts anderes als Korollar 3.2.7. Nach Satz 3.2.6 und Korollar 3.2.5 gilt $\|T_f + K(H)\| = \|\pi \circ \tau(f)\| = \|r(f)\| = \|f\|_{\infty,\sigma_e(S)}$; das ist (b). Teil (c) ergibt sich ebenfalls aus Satz 3.2.6:

$$\rho_S(T_{fg} - T_f T_g + K(H)) = r(fg) - r(f)r(g) = 0,$$

und da ρ_S injektiv ist, muss $T_{fg} - T_f T_g \in K(H)$ sein. Schließlich folgt (d) aus (c) und $\sigma_e(T_h) = \sigma_{\mathcal{C}(H)}(T_h + K(H)) = \sigma_{C^*(S)/K(H)}(T_h + K(H)) = \sigma_{C(\sigma_e(S))}(r(h)) = h(\sigma_e(S))$. ∎

Nachdem in Satz 3.2.10 die formale Gestalt der von einem subnormalen Operatortupel, das irreduzibel und wesentlich normal ist, erzeugten C^*-Algebra beschrieben wurde, geht es jetzt um die Frage, wann die von einem solchen Tupel erzeugte C^*-Algebra bereits von weniger als n Operatoren erzeugt wird.

Satz 3.2.13 *Sei $S \in L(H)^n$ ein subnormales Tupel, das irreduzibel und wesentlich normal ist. Seien $m \in \mathbb{N}$, $f = (f_1, ..., f_m) \in C(\sigma_n(S))^m$ und $K = (K_1, ..., K_m) \in K(H)^m$. Dann sind äquivalent:*

(i) $C^*(S) = C^*(T_f + K)$;

(ii) $T_f + K$ *ist irreduzibel und* $f_1, ..., f_m$ *trennen die Punkte von* $\sigma_e(S)$.[5]

Bevor der Beweis dieses Satzes durch ein einfaches Lemma vorbereitet wird, noch eine Bemerkung zu (ii): Die entscheidende Bedingung ist, dass die $f_1, ..., f_m$ die Menge $\sigma_e(S)$ trennen, denn zu jedem stetigen Operator T auf einem Hilbertraum H existiert ein kompakter Operator K derart, dass $T + K$ irreduzibel ist ([Her82], Lemma 4.33). Trennen also $f_1, ..., f_m$ das Spektrum $\sigma_e(S)$, so ist es immer möglich, ein Tupel K kompakter Operatoren zu finden so, dass $T_f + K$ irreduzibel ist. In der Tat kann man sogar $K = (0, .., 0, \tilde{K}_i, 0, ..., 0)$ mit geeignetem $\tilde{K}_i \in K(H)$ wählen, $i \in \{1, ..., m\}$.

Lemma 3.2.14 *Sei S wie in Satz 3.2.13, $f = (f_1, ..., f_m) \in C(\sigma_n(S))^m$, P ein Polynom in $2m$ nicht-kommutierenden Variablen und p das zugehörige Polynom mit kommutierenden Variablen. Für ein Tupel $K = (K_1, ..., K_m) \in K(H)^m$ gilt dann*

$$P(T_f^* + K^*, T_f + K) = T_{p(\overline{f}, f)} + \tilde{K}$$

mit einen kompakten Operator $\tilde{K}$ auf H.

[5] Dass die Funktionen $f_1, ..., f_m$ die Punkte von $\sigma_e(S)$ trennen bedeutet nicht anderes, als dass $f = (f_1, ..., f_m) : \sigma_e(S) \to \mathbb{C}^m$ injektiv ist.

Der Beweis des Lemmas ist eine einfache Folgerung aus Satz 3.2.12(c); auf den Beweis wird verzichtet.

Beweis: (von Satz 3.2.13) Die Gleichheit $\sigma_e(S) = \sigma_{ap}(S)$ wurde in Satz 3.2.11 bewiesen. (i)$\Rightarrow$(ii): Ist S irreduzibel, so auch $C^*(S)$ und wegen $C^*(S) = C^*(T_f + K)$ somit auch $T_f + K$. Wegen $S_i \in C^*(T_f + K)$ für $i \in \{1, ..., n\}$ existiert eine Folge $(P_k^{(i)})_k$ von Polynomen in $2m$ nicht-kommutierenden Variablen mit $P_k^{(i)}(T_f^* + K^*, T_f + K) \to S_i$ für $k \to \infty$. Sei $(p_k^{(i)})_k$ die zugehörige Folge von Polynomen mit kommutierenden Variablen. Aufgrund von Lemma 3.2.14 existiert für alle $k \in \mathbb{N}$ und $i = 1, ..., n$ ein kompakter Operator $K_k^{(i)}$ mit $P_k^{(i)}(T_f^* + K^*, T_f + K) = T_{p_k^{(i)}(\overline{f}, f)} + K_k^{(i)}$. Dann gilt aufgrund von Satz 3.2.12

$$\rho_S(T_{p_k^{(i)}(\overline{f},f)} + K_k^{(i)} - S_i + K(H)) = p_k^{(i)}(\overline{f}, f)|_{\sigma_e(S)} - z_i|_{\sigma_e(S)} \to 0 \text{ für } k \to \infty$$

und $i = 1, ..., n$. Somit ist $z_i|_{\sigma_e(S)} \in C^*(f|_{\sigma_e(S)})$ für alle $i = 1, ..., n$. Es muss also $C^*(f|_{\sigma_e(S)}) = C(\sigma_e(S))$ sein und die $f_1, ..., f_m$ müssen die Menge $\sigma_e(S)$ trennen.

(ii)$\Rightarrow$(i): Da $T_f + K$ irreduzibel und wesentlich normal ist, gilt nach Lemma 3.2.9 die Inklusion $K(H) \subset C^*(T_f + K)$. Da wegen Satz 3.2.10 offensichtlich $C^*(T_f + K) \subset C^*(S)$ ist, muss nur gezeigt werden, dass $T_{z_i} = S_i \in C^*(T_f + K)$ für $i = 1, ..., n$ gilt. Sei $g = z_i$ für ein $i \in \{1, ..., n\}$. Da $f|_{\sigma_e(S)}$ die Punkte von $\sigma_e(S)$ trennt, liefert Stone-Weierstrass $C^*(f|_{\sigma_e(S)}) = C(\sigma_e(S))$. Dann existiert eine Folge von Polynomen $(p_k)_k$ in $2m$ kommutierenden Variablen mit $\|p_k(\overline{f}, f) - g\|_{\infty,\sigma_e(S)} \to 0$ für $k \to \infty$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $h_k : \sigma_n(S) \to \mathbb{C}$ eine stetige Fortsetzung von $p_k(\overline{f}, f)|_{\sigma_e(S)} - g|_{\sigma_e(S)}$ auf $\sigma_n(S)$ mit $\|h_k\|_{\infty,\sigma_n(S)} \leq \|p_k(\overline{f}, f) - g\|_{\infty,\sigma_e(S)}$ (Tietze). Dann gilt

$$\|T_{h_k+g} - T_g\| \leq \|h_k + g - g\|_{\infty,\sigma_n(S)} \leq \|p_k(\overline{f}, f) - g\|_{\infty,\sigma_e(S)} \to 0 \text{ für } k \to \infty. \tag{3.4}$$

Wegen $\rho_S(T_{h_k+g} - T_{p_k(\overline{f},f)} + K(H)) = (h_k + g - p_k(\overline{f}, f))|_{\sigma_e(S)} = 0$ folgt nach Korollar 3.2.7 die Existenz eines kompakten Operators K_k mit $K_k + T_{p_k(\overline{f},f)} = T_{h_k+g}$. Ist P_k, $k \in \mathbb{N}$, ein nicht-kommutierendes Polynom in $2m$ Variablen, für das p_k das zugehörige kommutierende Polynom ist, so gilt $P_k(T_f^* + K^*, T_f + K) = T_{p_k(\overline{f},f)} + \tilde{K}_k$ für einen kompakten Operator $\tilde{K}_k$ (Lemma 3.2.14). Folglich ist $T_{h_k+g} = K_k - \tilde{K}_k + P_k(T_f^* + K^*, T_f + K)$. Wegen $K(H) \subset C^*(T_f + K)$ ist $(T_{h_k+g})_k$ eine Folge von Operatoren in $C^*(T_f + K)$. Da $C^*(T_f + K)$ Norm-abgeschlossen ist, folgt die Behauptung aus (3.4). ■

Als Korollar ergibt sich:

Korollar 3.2.15 *Sei $S \in L(H)^n$ ein subnormales Tupel, das irreduzibel und wesentlich normal ist. Dann sind äquivalent:*

(i) $\sigma_e(S)$ ist homöomorph zu einem Kompaktum in $\mathbb{C}^m$;

(ii) $C^*(S)$ wird (als C^*-Algebra) von m Operatoren erzeugt.

Beweis: (i)$\Rightarrow$(ii): Sei $h : \sigma_e(S) \to \mathbb{C}^m$ eine injektive stetige Abbildung. Nach dem Fortsetzungssatz von Tietze hat h eine stetige Fortsetzung $f : \sigma_n(S) \to \mathbb{C}^m$. Satz 3.2.13 und die sich anschließende Bemerkung zeigen, dass $C^*(S)$ von m Operatoren erzeugt wird.

(ii)⇒(i): Ist $h = (h_1, ..., h_m) \in C(\sigma_n(S))^m$, $K = (K_1, ..., K_m) \in K(H)^m$ und wird $C^*(S)$ von den Operatoren $T_{h_1}+K_1, ..., T_{h_m}+K_m$ erzeugt, so ist $h|_{\sigma_e(S)} : \sigma_e(S) \to h(\sigma_e(S))$ ein Homöomorphismus auf eine kompakte Menge in $\mathbb{C}^m$. ■

3.3 Spektrale Inklusionseigenschaften für Toeplitz-Operatoren

Sei $S \in L(H)$ subnormal und μ ein skalares Spektralmaß für S. Keough untersucht in [Keo81], unter welchen Bedingungen S die C^*- bzw. W^*-Inklusionseigenschaft besitzt, d.h. für welche subnormalen Operatoren S für alle $f \in C(\sigma_n(S))$ die Inklusion $f(\sigma_n(S)) \subset \sigma(T_f)$ im ersten, und für alle $f \in L^\infty(\mu)$ die Inklusion $f(\sigma_n(S)) \subset \sigma(T_f)$ im zweiten Fall gilt.[6] Motiviert werden diese Untersuchungen von einem Resultat von Hartman und Wintner ([Dou72], Corollary 7.7), das in der klassischen Hardy-Raum-Situation besagt (vgl. Beispiel 3.2.1): Ist $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, so ist $\varphi(\mathbb{T}) = \sigma(M_\varphi) \subset \sigma(T_\varphi)$. Dieses Resultat bleibt auch in der Situation eines mehrdimensionalen Toeplitz-Tupels richtig (vgl. Beispiel 3.2.2). Eine wichtige Rolle spielt dabei jeweils die Identität $\sigma_{ap}(T_z) = \sigma_n(T_z) = \sigma(M_z)$. Wir werden sehen, dass für subnormale Tupel S diese Eigenschaft äquivalent zur C^*-Inklusionseigenschaft ist.

Definition 3.3.1 *Sei $S \in L(H)^n$ ein subnormales Tupel und sei μ ein skalares Spektralmaß für S.*

(a) *Das Tupel S besitzt die C^*-*Inklusionseigenschaft *(kurz die C^*-*SIP *für „Spectral Inclusion Property"), wenn für alle $f \in C(\sigma_n(S))$ die Inklusion $f(\sigma_n(S)) \subset \sigma(T_f)$ erfüllt ist.*

(b) *Das Tupel S besitzt die W^*-*Inklusionseigenschaft *(kurz W^*-*SIP*), wenn für alle $f \in L^\infty(\mu)$ die Inklusion $f(\sigma_n(S)) \subset \sigma(T_f)$ erfüllt ist.*

Bevor die Ergebnisse dieses Paragraphen formuliert und bewiesen werden, sei an den Begriff des *Winkels* $\sphericalangle(H_1, H_2)$ zwischen zwei abgeschlossenen Teilräumen H_1, H_2 eines Hilbertraumes H erinnert: Es handelt sich um die eindeutige Zahl α in $[0, \frac{\pi}{2}]$, die

$$\cos\alpha = \sup\{|\langle h_1, h_2\rangle| : h_i \in H_i, \|h_i\| = 1, i = 1, 2\}$$

erfüllt.

Lemma 3.3.2 *Sei K ein Hilbertraum und seien $P, Q \in L(K)$ zwei orthogonale Projektionen. Dann sind äquivalent:*

(i) $\|PQP\| = 1$;

(ii) $\sphericalangle(QK, PK) = 0$;

[6]Für $f \in L^\infty(\mu)$ bezeichnet $f(\sigma_n(S))$ das wesentliche Bild von $\sigma_n(S)$ unter f, d.h. das Komplement der Vereinigung aller offenen Mengen $G \subset \mathbb{C}$ mit $\mu(f^{-1}(G)) = 0$.

(iii) es existiert eine Folge $(x_m)_m$ von Einheitsvektoren in PK mit $\lim_{m\to\infty} \|Qx_m - x_m\| = 0$.

Beweis: (i)⇒(ii): Sei $(z_m)_m$ eine Folge in K mit $\|z_m\| = 1$ und $\|PQPz_m\| \geq 1 - \frac{1}{2m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Seien $(x_m)_m, (y_m)_m$ in K definiert durch $x_m = \frac{Pz_m}{\|QPz_m\|}$ und $y_m = \frac{QPz_m}{\|PQPz_m\|}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Wegen $1 \geq \|QPz_m\| \geq \|PQPz_m\| \geq \frac{1}{2}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ sind die Folgen wohldefiniert mit $\|Qx_m\| = \|Py_m\| = 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$1 \geq \langle Qx_m, Py_m\rangle = \frac{\langle QPz_m, PQPz_m\rangle}{\|QPz_m\|\,\|PQPz_m\|} = \frac{\langle PQPz_m, PQPz_m\rangle}{\|QPz_m\|\,\|PQPz_m\|} \geq 1 - \frac{1}{2m} \to 1$$

für $m \to \infty$. Das ist (ii).

(ii)⇒(iii): Es existieren Folgen $(\tilde{x}_m)_m, (y_m)_m$ in K mit $\|P\tilde{x}_m\| = \|Qy_m\| = 1$ und $|\langle P\tilde{x}_m, Qy_m\rangle| \geq 1 - \frac{1}{m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Durch geeignete Wahl von $\xi_m \in \mathbb{T}$ und vermöge $x_m = \xi_m P\tilde{x}_m$ kann man $\mathbb{R} \ni \langle x_m, Qy_m\rangle \geq 1 - \frac{1}{m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ erreichen. Es gilt:

$$\|x_m - Qy_m\|^2 = \|x_m\|^2 - 2\langle x_m, Qy_m\rangle + \|Qy_m\|^2 \leq \frac{2}{m} \to 0 \quad \text{für } m \to \infty.$$

Daraus ergibt sich

$$\|Qx_m - x_m\| \leq \|Qx_m - Q^2y_m\| + \|Qy_m - x_m\| \leq 2\|Qy_m - x_m\| \to 0 \quad \text{für } m \to \infty.$$

Da $\|x_m\| = 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt, folgt die Behauptung.

(iii)⇒(i): Sei $(x_m)_m$ eine Folge in PK mit $\|x_m\| = 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und $\|Qx_m - x_m\| \to 0$ für $m \to \infty$. Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$1 = \|x_m\| \leq \|Px_m - PQPx_m\| + \|PQPx_m\| \leq \|x_m - Qx_m\| + \|PQPx_m\|,$$

d.h. $\liminf_{m\to\infty} \|PQPx_m\| \geq 1$. Da $\|PQP\| \leq 1$ gilt, folgt die Behauptung. ∎

Auch das nachfolgende Lemma erweist sich als nützlich:

Lemma 3.3.3 *Sei $T = (T_1, ..., T_n) \in L(H)^n$ ein vertauschendes Tupel und sei $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$. Dann existieren für jeden Multiindex $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ Operatoren $A_j \in \{T\}'$, $j = 1, ..., n$, mit*

$$T^\beta - \lambda^\beta = \sum_{j=1}^n A_j(T_j - \lambda_j).$$

Für zwei Multiindizes $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ existieren Operatoren $A_j, B_j \in \{T\}'$, $j = 1, ..., n$, mit

$$T^{*\alpha}T^\beta - \overline{\lambda}^\alpha\lambda^\beta = \sum_{j=1}^n T^{*\alpha}A_j(T_j - \lambda_j) + \sum_{j=1}^n B_j^*(T_j^* - \overline{\lambda}_j).$$

Beweis: Der Beweis des ersten Teils kann durch Induktion über $|\beta|$ geführt werden. Sei $|\beta| = 1$ und sei $i \in \{1, ..., n\}$ mit $\beta_i = 1$. Dann ist $T^\beta - \lambda^\beta = T_i - \lambda_i$ und die Aussage ist richtig mit $A_i = \mathrm{id}_H$ und $A_j = 0$ für $j = 1, ..., n$, $j \neq i$. Sei $|\beta| = m + 1$ $(m > 0)$ und sei die Behauptung gezeigt für alle Multiindizes α mit $|\alpha| = m$. Sei $i \in \{1, ..., n\}$ mit

$\beta_i \geq 1$. Sei dann $\tilde{\beta} = \beta - e_i$ mit $e_i = (\delta_{ij})_{j=1}^n$ (δ_{ij} das Kronecker-Symbol). Dann gilt nach Induktionsvoraussetzung für geeignete Operatoren $\tilde{A}_1, ..., \tilde{A}_n \in \{T_1, ..., T_n\}'$

$$\begin{aligned} T^\beta - \lambda^\beta &= T^{\tilde{\beta}} T_i - \lambda^{\tilde{\beta}} \lambda_i = T^{\tilde{\beta}}(T_i - \lambda_i) + \lambda_i (T^{\tilde{\beta}} - \lambda^{\tilde{\beta}}) \\ &= T^{\tilde{\beta}}(T_i - \lambda_i) + \lambda_i \sum_{j=1}^n \tilde{A}_j (T_j - \lambda_j) \\ &= (T^{\tilde{\beta}} + \lambda_i \tilde{A}_i)(T_i - \lambda_i) + \sum_{j=1, j\neq i}^n \lambda_i \tilde{A}_j (T_j - \lambda_j). \end{aligned}$$

Wegen $T^{*\alpha} T^\beta - \overline{\lambda}^\alpha \lambda^\beta = T^{*\alpha}(T^\beta - \lambda^\beta) + \lambda^\beta (T^{*\alpha} - \overline{\lambda}^\alpha)$ folgt der zweite Teil direkt aus dem ersten. ■

Der Beweis des nächsten Lemmas ist eine direkte Verallgemeinerung von [Keo81], Lemma 1.1.

Lemma 3.3.4 *Die Menge $\{f \in L^\infty(\mu) : f(\sigma_n(S)) \subset \sigma(T_f)\}$ ist Norm-abgeschlossen in $L^\infty(\mu)$.*

Für einen Hilbertraum K, einen abgeschlossenen Teilraum H von K und ein Tupel $T = (T_1, ..., T_n) \in L(K)^n$ steht in den folgenden beiden Sätzen $\sigma_{ap,H}(T)$ für die Menge derjenigen $\lambda \in \mathbb{C}^n$, für die die Abbildung $T - \lambda : H \to K^n$, $x \mapsto ((T_i - \lambda_i)x)_{i=1}^n$ nicht nach unten beschränkt ist. Es sei außerdem daran erinnert, dass für ein normales Operatortupel N, ein skalares Spektralmaß μ von N und $f = (f_1, ..., f_k) \in L^\infty(\mu)^k$ das Tupel $f(N)$ definiert ist durch $f(N) = (f_1(N), ..., f_k(N))$.

Satz 3.3.5 *Seien $S \in L(H)^n$ subnormal, $N \in L(K)^n$ eine minimale normale Erweiterung von S, E das Spektralmaß von N und μ ein skalares Spektralmaß für S. Dann sind äquivalent:*

(i) $f(\sigma_n(S)) \subset \sigma(T_f)$ *für alle* $f \in L^\infty(\mu)$, *d.h. S besitzt die W^*-SIP;*

(ii) $\|T_f\| = \|f\|_{\infty,\mu}$ *für alle* $f \in L^\infty(\mu)$;

(iii) *für jede Borelmenge $U \subset \sigma_n(S)$ mit $E(U) \neq 0$ gilt:* $\sphericalangle(E(U)K, H) = 0$;

(iv) $f(\sigma_n(S)) = \sigma_{ap,H}(f(N))$ *für alle $k \in \mathbb{N}$ und $f \in L^\infty(\mu)^k$.*

Beweis: (i)⇒(ii): Besitzt S die W^*-SIP und ist $f \in L^\infty(\mu)$, so gilt

$$\begin{aligned} \|f(N)\| &= \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(f(N)) = f(\sigma_n(S))\} \\ &\leq \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T_f)\} \leq \|T_f\| \leq \|f(N)\|. \end{aligned}$$

Also ist $\|T_f\| = \|f(N)\| = \|f\|_{\infty,\mu}$.

(ii)⇒(iii): Sei $U \subset \sigma_n(S)$ eine Borelmenge mit $E(U) \neq 0$ und sei $f = \chi_U$. Nach (ii) gilt $1 = \|T_f\| = \|PE(U)|_H\| \leq \|PE(U)P\| \leq 1$. Also ist $\|PE(U)P\| = 1$ und nach Lemma 3.3.2 daher $\sphericalangle(E(U)K, H) = 0$.

(iii)⇒(iv): Seien $k \in \mathbb{N}$, $f = (f_1, ..., f_k) \in L^\infty(\mu)^k$ und $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k) \in f(\sigma_n(S))$. Dann existiert für alle $m \in \mathbb{N}$ eine offene Menge $V_m \subset \mathbb{C}^k$ mit Durchmesser $< \frac{1}{m}$, $\lambda \in V_m$ und $E(f^{-1}(V_m)) \neq 0$. Wegen $\sphericalangle(E(f^{-1}(V_m))K, H) = 0$ existiert ein Vektor $x_m \in H$ mit $\|x_m\| = 1$ und $\|x_m - E(f^{-1}(V_m))x_m\| = \|E(\sigma_n(S)\backslash f^{-1}(V_m))x_m\| \leq \frac{1}{m}$ (Lemma 3.3.2). Hieraus folgt für $i = 1, ..., k$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|(f_i(N) - \lambda_i)x_m\|^2 &= \left(\int_{f^{-1}(V_m)} + \int_{\sigma_n(S)\backslash f^{-1}(V_m)}\right) |f_i(z) - \lambda_i|^2 dE_{x_m,x_m} \\ &\leq \frac{1}{m^2}\|x_m\|^2 + 4\|f\|^2_{\infty,\mu}\|E(\sigma_n(S)\backslash f^{-1}(V_m))x_m\|^2 \\ &\leq \frac{1}{m^2}\left(1 + 4\|f\|^2_{\infty,\mu}\right). \end{aligned}$$

Also ist $\lambda \in \sigma_{ap,H}(f(N))$. Es folgt $f(\sigma_n(S)) \subset \sigma_{ap,H}(f(N))$. Die umgekehrte Inklusion ist immer erfüllt. Insgesamt folgt (iv).

(iv)⇒(i): Sei $f \in L^\infty(\mu)$ und sei $\lambda \in f(\sigma_n(S))$. Wegen $\lambda \in \sigma_{ap,H}(f(N))$ existiert eine Folge $(x_m)_m$ von Einheitsvektoren in H mit $\lim_{m\to\infty}(\lambda - f(N))x_m = 0$. Dann folgt $\lim_{m\to\infty} P(\lambda - f(N))x_m = \lim_{m\to\infty}(\lambda - Pf(N))x_m = 0$, wobei $P : K \to H$ die orthogonale Projektion ist. Also ist $\lambda \in \sigma_{ap}(T_f) \subset \sigma(T_f)$. ■

Der Beweis von Satz 3.3.5 zeigt, dass man (i) und (iv) ersetzen kann durch

(i') $f(\sigma_n(S)) \subset \sigma_{ap}(T_f)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $f \in L^\infty(\mu)^k$ und

(iv') $f(\sigma_n(S)) = \sigma_{ap,H}(f(N))$ für alle $f \in L^\infty(\mu)$,

und dass wegen Lemma 3.3.2 Bedingung (iii) durch

(iii') für jede Borelmenge $U \subset \sigma_n(S)$ mit $E(U) \neq 0$ gilt: $\|PE(U)P\| = 1$

ersetzt werden kann.

Der Beweis des vorangegangenen Satzes wird in der eindimensionalen Situation in [Keo79] geführt.[7]

Satz 3.3.6 *Seien $S \in L(H)^n$ subnormal, $N \in L(K)^n$ eine minimale normale Erweiterung von S und E das Spektralmaß von N. Dann sind äquivalent:*

(i) $f(\sigma_n(S)) \subset \sigma(T_f)$ für alle $f \in C(\sigma_n(S))$, d.h. S besitzt die C^*-SIP;

(ii) $\|T_f\| = \|f\|_{\infty,\sigma_n(S)}$ für alle $f \in C(\sigma_n(S))$;

(iii) für jede relativ offene Menge $U \subset \sigma_n(S)$ mit $E(U) \neq 0$ gilt: $\sphericalangle(E(U)K, H) = 0$;

(iv) $f(\sigma_n(S)) = \sigma_{ap,H}(f(N))$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $f \in C(\sigma_n(S))^k$;

(v) $\sigma_n(S) = \sigma_{ap}(S)$.

[7] Formuliert wird der Satz auch in [Keo81].

Beweis: Die Implikation (i)⇒(ii) ergibt sich genau wie im Beweis von Satz 3.3.5.

(ii)⇒(iii): Sei $U \subset \sigma_n(S)$ relativ offen. Dann ist $\chi_U : \sigma_n(S) \to \mathbb{C}$ nach unten halbstetig, und es gibt eine Folge $(f_k)_k$ nicht negativer stetiger Funktionen auf $\sigma_n(S)$, die punktweise monoton wachsend gegen χ_U konvergiert. Dann ist

$$1 = \sup_k \|f_k\|_{\infty,\sigma_n(S)} = \sup_k \|Pf_k(N)|_H\| \leq \|PE(U)|_H\| = \|PE(U)P\| \leq 1,$$

und damit $\sphericalangle(E(U)K, H) = 0$.

(iii)⇒(iv): Es gelte (iii). Da für $f \in C(\sigma_n(S))^k$ die im Beweis der entsprechenden Implikation von Satz 3.3.5 auftretende Menge $f^{-1}(V_m) \subset \sigma_n(S)$ relativ offen und nicht leer ist, erhält man wie dort die Inklusion $f(\sigma_n(S)) \subset \sigma_{ap,H}(f(N))$. Die umgekehrte Inklusion gilt offensichtlich.

(iv)⇒(v): Die Gleichheit der Spektren folgt, wenn man $k = n$ und $f \equiv (z_1, ..., z_n)$ wählt.

(v)⇒(i): Sei $p : \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}$, $(w, z) \mapsto \sum_{j=0}^{k} \left(\sum_{|\alpha+\beta|=j} c_{\alpha\beta} w^\alpha z^\beta\right)$, $c_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$ und sei $f : \sigma_{ap}(S) \to \mathbb{C}$, $f(z) = p(\overline{z}, z)$. Dann ist

$$T_f = Pf(N)|_H = \sum_{j=0}^{k} \left(\sum_{|\alpha+\beta|=j} c_{\alpha\beta} P N^{*\alpha} N^\beta|_H \right) = \sum_{j=0}^{k} \left(\sum_{|\alpha+\beta|=j} c_{\alpha\beta} S^{*\alpha} S^\beta \right)$$

und für $\lambda \in \sigma_n(S)$ gilt

$$T_f - f(\lambda) = \sum_{j=0}^{k} \left(\sum_{|\alpha+\beta|=j} c_{\alpha\beta} (S^{*\alpha} S^\beta - \overline{\lambda}^\alpha \lambda^\beta) \right).$$

Für $\lambda \in \sigma_{ap}(S)$ existiert eine Folge $(x_m)_m$ in H mit $\|x_m\| = 1$ und $\lim_{m\to\infty}(S_i - \lambda_i)x_m = 0$ für $i = 1, ..., n$. Da die S_i, $i = 1, ..., n$, als subnormale Operatoren hyponormal sind, gilt auch $\lim_{m\to\infty}(S_i^* - \overline{\lambda}_i)x_m = 0$ für $i = 1, ..., n$. Aus Lemma 3.3.3 ergibt sich hieraus $\lim_{m\to\infty}(T_f - f(\lambda))x_m = 0$, d.h. $f(\lambda) \in \sigma_{ap}(T_f) \subset \sigma(T_f)$. Mit dem Satz von Stone-Weierstraß und Lemma 3.3.4 folgt die in (i) behauptete Inklusion für alle stetigen Funktionen $f \in C(\sigma_n(S))$. ■

Genau wie im Beweis von Satz 3.3.5 kann man die Implikation (iv)⇒(i) von Satz 3.3.6 auch direkt beweisen. Insbesondere kann man die Bedingungen (i) und (iv) von Satz 3.3.6 ersetzen durch die äquivalenten Bedingungen:

(i') $f(\sigma_n(S)) \subset \sigma_{ap}(T_f)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $f \in C(\sigma_n(S))^k$ $(k \in \mathbb{N})$ und

(iv') $f(\sigma_n(S)) = \sigma_{ap,H}(f(N))$ für alle $f \in C(\sigma_n(S))$.

Der Vergleich der Bedingungen (iii) in Satz 3.3.5 und Satz 3.3.6 zeigt, dass die W^*-SIP die C^*-SIP impliziert.

3.4 $\mathscr{K}$-, $\mathcal{F}$- und $A_0(\mathscr{K})$-subnormale Operatortupel

Ein nützliches Hilfsmittel beim Studium subnormaler Operatoren ist die Existenz geeigneter Funktionalkalküle. Während bekanntlich jeder stetige Operator T auf einem Banachraum E über jeder offenen Umgebung U seines Spektrums $\sigma(T)$ einen *holomorphen Funktionalkalkül* $\Phi_T : \mathscr{O}(U) \to L(E)$ besitzt ([Con85], §VII.4), ist es für einen normalen Operator N auf einem Hilbertraum H die Existenz eines *stetigen Funktionalkalküls* $\Phi_N : C(\sigma(N)) \to L(H)$, die das Studium dieser Operatoren interessant macht ([Con85], §VIII.2). Da subnormale Operatoren S *von Neumann-Operatoren* sind, d.h. Operatoren, die für jede rationale Funktion f mit Polen außerhalb von $\sigma(S)$ die Ungleichung $\|f(S)\| \leq \|f\|_{\infty,\sigma(S)}$ erfüllen, existiert über jeder kompakten Menge $\mathscr{K} \supset \sigma(S)$ ein Funktionalkalkül $\Phi_S : R(\mathscr{K}) \to L(H)$, wobei $R(\mathscr{K})$ für den gleichmäßigen Abschluss der rationalen Funktionen mit Polen außerhalb $\mathscr{K}$ in $C(\mathscr{K})$ steht ([Con91a], §9). Die Existenz eines geeigneten positiven regulären Borelmaßes μ mit kompaktem Träger sowie die Möglichkeit, den Kalkül $\Phi_N : C(\mathscr{K}) \to L(H)$ zu einem Kalkül $\Phi_N : L^\infty(\mu) \to L(H)$ fortzusetzen, der nicht nur isometrisch bzgl. den kanonischen Normtopologien auf $L^\infty(\mu)$ und $L(H)$, sondern zusätzlich w^*-stetig ist ([Con85], §IX.8), bringt in das Studium normaler Operatoren N maßtheoretische Aspekte, die sich auch in der Theorie subnormaler Operatoren wiederfinden.[8] In der Tat existiert für einen subnormalen Operator S ein isometrischer Kalkül $\Phi_S : R^\infty(\mathscr{K}, \mu) \to L(H)$, wobei $R^\infty(\mathscr{K}, \mu)$ für den $L^\infty(\mu)$-Abschluss von $R(\mathscr{K})$ in $L^\infty(\mu)$ steht und μ für ein geeignetes positives reguläres Borelmaß ([Con91a], §II.11). Dieser Kalkül bringt die Theorie der Funktionenalgebren und rationale Approximation ins Spiel und erlaubt eine weitreichende Strukturanalyse subnormaler Operatoren.

Anders sieht die Situation in mehreren Dimensionen aus. Eine Schwierigkeit beim Studium subnormaler Operatortupel besteht darin, dass es keine vergleichbare mehrdimensionale Theorie über Funktionenalgebren und rationale Approximation gibt, gleichwenn Ansätze in dieser Richtung vorhanden sind (vgl. [Con91b], Seite 544). Mehrdimensional geht es also zum einen darum, geeignete Funktionenalgebren mit „guten Eigenschaften“ zu finden, zum anderen aber auch um die Existenz entsprechender mehrdimensionaler Funktionalkalküle. Ist $N = (N_1, ..., N_n)$ ein normales Tupel auf einem Hilbertraum H, so existiert ein *stetiger Funktionalkalkül* $\Phi_N : C(\sigma(N)) \to L(H)$ über den stetigen Funktionen auf dem Spektrum von N, in völliger Analogie zum eindimensionalen Fall (vgl. [Vas77]). Für $\Phi_N(f)$, $f \in C(\sigma(N))$, wird im Folgenden $f(N)$ geschrieben. Wie sieht es aber für ein subnormales Operatortupel S mit Funktionenalgebren „zwischen“ $\mathscr{O}(U)$, $U \supset \sigma(S)$ offen, und $C(\sigma(S))$, sowie zugehörigen Funktionalkalkülen aus? Was kann als Ersatz für die Räume $R(\mathscr{K})$ bzw. $R^\infty(\mathscr{K}, \mu)$ im Eindimensionalen dienen? Starten wir mit einer gleichmäßig abgeschlossenen Unteralgebra $\mathcal{F}$ von $C(\mathscr{K})$ mit $\mathbb{C}[z_1, ..., z_n]|_{\mathscr{K}} \subset \mathcal{F}$. Eine solche Unteralgebra wird im Folgenden eine $\mathcal{P}$-*Unteralgebra* von $C(\mathscr{K})$ genannt ($\mathcal{P}$ für

[8] Die w^*-Topologie auf $L^\infty(\mu)$ ist die w^*-Topologie bzgl. der Dualität $\langle L^1(\mu), L^\infty(\mu)\rangle$. Die w^*-Topologie auf $L(H)$ ist die w^*-Topologie aus der Dualität $\langle N(H), L(H)\rangle$, wobei $N(H)$ für den Banachraum der Spurklasse-Operatoren mit der Spur-Norm in $L(H)$ steht.

Polynom). Typischerweise ist $\mathcal{F}$ eine gleichmäßig abgeschlossene Unteralgebra von $A(D)$, wobei D eine relativ-kompakte, offene Teilmenge von $\mathbb{C}^n$ (oder einer komplexen Untermannigfaltigkeit $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^n$) ist und $A(D) = \{f \in C(\overline{D}); f|_D \in \mathscr{O}(D)\}$. Jedes vertauschende Tupel besitzt einen stetigen $A(D)$-Kalkül über jeder beschränkten offenen Umgebung D des Spektrums. Ist N ein normales Tupel auf einem Hilbertraum H und μ ein skalares Spektralmaß von N, so besitzt N einen isometrischen, w^*-stetigen Kalkül $\Phi_N : L^\infty(\mu) \to L(H)$. Für alle $f \in L^\infty(\mu)$ wird zur Abkürzung wieder $f(N)$ statt $\Phi_N(f)$ geschrieben. Auch beim Studium subnormaler Operatortupel spielen daher maßtheoretische Aspekte eine wichtige Rolle.

Exkurs: Die klassische Ausgangssituation

Sei $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^n$ kompakt und sei $\mu \in M^+(\mathscr{K})$. Sei $P^2(\mu) = \overline{\mathbb{C}[z_1, ..., z_n]}^{L^2(\mu)}$. Für $i = 1, ..., n$ sei

$$M_{z_i}^\mu : L^2(\mu) \to L^2(\mu), \quad g \mapsto z_i g \quad \text{und sei} \quad M_z^\mu = (M_{z_1}^\mu, ..., M_{z_n}^\mu).$$

Dann ist M_z^μ ein normales Operatortupel. Ist $f \in L^\infty(\mu)$ und $M_f^\mu : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$, $g \mapsto fg$, so gilt für $h \in L^\infty(\mu) \cap P^2(\mu)$ die Inklusion $M_h^\mu P^2(\mu) \subset P^2(\mu)$ (vgl. Lemma 3.4.5). Ist insbesondere

$$S_{z_i}^\mu = M_{z_i}^\mu|_{P^2(\mu)} \text{ für } i = 1, ..., n \quad \text{und} \quad S_z^\mu = (S_{z_1}^\mu, ..., S_{z_n}^\mu),$$

so ist S_z^μ ein subnormales Operatortupel mit minimaler normaler Erweiterung M_z^μ.

Ist $\mathscr{K} = \overline{\mathbb{D}}^n$ und $\mu = m$ das Haar-Maß auf $\mathbb{T}^n$ (aufgefasst als Maß in $M^+(\overline{\mathbb{D}}^n)$), so wird S_z^m das *Cauchy-Tupel* genannt. Ist $\mathscr{K} = \overline{\mathbb{B}}^n$ und $\mu = \sigma$ das Oberflächenmaß auf $\mathbb{S}^{2n-1}$ (aufgefasst als Maß in $M^+(\overline{\mathbb{B}}^n)$), so heißt S_z^σ das *Szegö-Tupel* und ist $\mathscr{K} = \overline{\mathbb{B}}^n$ und $\mu = \lambda^n$ das n-dimensionale Lebesgue-Maß, so nennt man $S_z^{\lambda^n}$ das *Bergman-Tupel*.

Ist $T = (T_1, ..., T_n) \in L(H)^n$ ein vertauschendes Operatortupel, so heißt T *zyklisch*, wenn ein Vektor $x_0 \in H$ existiert derart, dass der kleinste Teilraum von H, der x_0 enthält und T-invariant ist, H selber ist, oder äquivalent, wenn

$$H = \overline{\{p(T)x_0; p \in \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]\}} \tag{3.5}$$

gilt. Der Vektor x_0 heißt in diesem Fall ein *zyklischer Vektor für T*.

Alle subnormalen Operatortupel der Form S_z^μ sind zyklisch; die von Null verschiedenen konstanten Funktionen sind beispielsweise zyklische Vektoren. Insbesondere sind das Cauchy-, das Szegö- und das Bergman-Tupel zyklisch. Eine *zyklische Funktion in $P^2(\mu)$* ist definitionsgemäß ein zyklischer Vektor für S_z^μ.

Der nachfolgende Satz von Hastings stellt einen Zusammenhang zwischen zyklischen subnormalen Operatortupeln und Operatortupeln der Form S_z^μ her:

Satz 3.4.1 *([Has78], Theorem 0)*
Ist $S = (S_1, ..., S_n) \in L(H)^n$ ein zyklisches subnormales Tupel mit zyklischem Vektor $x_0 \in H$ und ist $N = (N_1, ..., N_n) \in L(K)^n$ eine minimale normale Erweiterung von S, so existieren eine kompakte Menge $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^n$ mit $\sigma(N) \subset \mathscr{K}$, ein Wahrscheinlichkeitmaß $\mu \in M(\mathscr{K})$ und ein unitärer Operator $U : K \to L^2(\mu)$ mit $Ux_0 = 1$, $UN_i = M_{z_i}^\mu U$ für $i = 1, ..., n$, $UH = P^2(\mu)$ und, falls $U_0 = U|_H : H \to P^2(\mu)$, $U_0 S_i = S_{z_i}^\mu U_0$ für $i = 1, ..., n$. Insbesondere sind S und S_z^μ unitär äquivalent. Für $\mathscr{K}$ kann $\sigma_n(S) = \sigma(N)$ und für μ ein skalares Spektralmaß von S gewählt werden.

Der Satz von Hastings gestattet es manchmal, operatortheoretische Fragen auf funktionen- und maßtheoretische zurückzuführen. Wir wollen im Folgenden allgemeiner subnormale Tupel betrachten, die bezüglich einer $\mathcal{P}$-Unteralgebra $\mathcal{F} \subset C(\mathscr{K})$ zyklisch sind.

$\mathscr{K}$- und $\mathcal{F}$-subnormale Operatortupel

Definition 3.4.2 *Sei $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^n$ kompakt und sei $\mathcal{F}$ eine $\mathcal{P}$-Unteralgebra von $C(\mathscr{K})$. Ein Tupel $S \in L(H)^n$ wird* $\mathscr{K}$-subnormal *genannt, wenn es subnormal ist und $\sigma(S) \subset \mathscr{K}$ erfüllt. Ein Tupel $S \in L(H)^n$ wird* $\mathcal{F}$-subnormal *genannt, wenn es $\mathscr{K}$-subnormal ist und wenn für eine (dann alle) minimalen normalen Erweiterungen N von S die Inklusion $f(N)H \subset H$ für alle $f \in \mathcal{F}$ gilt.*

Sei $S \in L(H)^n$ subnormal, $N \in L(K)^n$ eine minimale normale Erweiterung von S und μ ein skalares Spektralmaß für S. Conway betrachtet in [Con91b] die Menge

$$\mathscr{R}(S) = \{f \in L^\infty(\mu) : f(N)H \subset H\}$$

und bemerkt, dass es es sich hierbei um eine w^*-abgeschlossene Unteralgebra von $L^\infty(\mu)$ handelt. Die Abbildung $\tilde{\Phi}_S : \mathscr{R}(S) \to L(H)$, $f \mapsto f(N)|_H$ induziert einen isometrischen Isomorphismus und w^*-Homöomorphismus von $\mathscr{R}(S)$ auf eine w^*-abgeschlossene Unteralgebra von $\{S\}' = \{T \in L(H); TS_i = S_iT$ für $i = 1, ..., n\}$ ([Con91b], Proposition 1.1). Der Kalkül $\tilde{\Phi}_S$ werde *kanonischer $\mathscr{R}(S)$-Kalkül von S* genannt. Ist S ein $\mathcal{F}$-subnormales Tupel, so erhält man, wenn man die Elemente in $\mathcal{F}$ mit ihren Restklassen in $L^\infty(\mu)$ identifiziert, die Inklusion $\mathcal{F} \subset \mathscr{R}(S)$ und einen $\mathcal{F}$-Kalkül $\Phi_S : \mathcal{F} \to L(H)$ für S durch $\Phi_S = \tilde{\Phi}_S|_{\mathcal{F}}$. Dieser Kalkül werde *kanonischer $\mathcal{F}$-Kalkül von S* genannt. Ein Operator $T \in L(H)$ werde *Φ_S-vertauschend* genannt, wenn $T\Phi_S(f) = \Phi_S(f)T$ für alle $f \in \mathcal{F}$ gilt.

Definition 3.4.3 *Ein $\mathcal{F}$-subnormales Tupel $S \in L(H)^n$ heißt* $\mathcal{F}$-zyklisch, *wenn ein $x_0 \in H$ existiert mit*

$$H = \overline{\{\Phi_S(f)x_0; f \in \mathcal{F}\}},$$

wobei Φ_S der kanonische $\mathcal{F}$-Kalkül von S ist. Jeder solche Vektor x_0 wird $\mathcal{F}$-zyklischer Vektor für S *genannt.*

Als Standardbeispiel eines $\mathcal{F}$-subnormalen, $\mathcal{F}$-zyklischen Operatortupels wird sich das folgende erweisen: Sei $\mu \in M^+(\mathscr{K})$ beliebig und sei $H^2_{\mathcal{F}}(\mu) = \overline{\mathcal{F}}^{L^2(\mu)}$. Dann sind $S_{z_i}^{\mathcal{F},\mu} = M_{z_i}^{\mu}|_{H^2_{\mathcal{F}}(\mu)} \in L(H^2_{\mathcal{F}}(\mu))$ für $i = 1, ..., n$ subnormale Operatoren, und $S_z^{\mathcal{F},\mu} = (S_{z_1}^{\mathcal{F},\mu}, ..., S_{z_n}^{\mathcal{F},\mu})$ ist ein subnormales Operatortupel mit minimaler normaler Erweiterung M_z^{μ}.

Satz 3.4.4 *Sei $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^n$ kompakt und $\mathcal{F}$ eine $\mathcal{P}$-Unteralgebra von $C(\mathscr{K})$. Sei $S = (S_1, ..., S_n) \in L(H)^n$ ein $\mathcal{F}$-subnormales und $\mathcal{F}$-zyklisches Tupel mit $\mathcal{F}$-zyklischem Vektor $x_0 \in H$ und minimaler normaler Erweiterung $N = (N_1, ..., N_n) \in L(K)^n$. Dann existiert ein $\mu \in M^+(\mathscr{K})$ und ein unitärer Operator $U : K \to L^2(\mu)$ mit $UH = H^2_{\mathcal{F}}(\mu)$, $Ux_0 = 1$, $UN_i = M_{z_i}^{\mu} U$ und, falls $U_0 = U|_H : H \to H^2_{\mathcal{F}}(\mu)$, $U_0 S_i = S_{z_i}^{\mathcal{F},\mu} U_0$ für $i = 1, ..., n$. Insbesondere sind S und $S_z^{\mathcal{F},\mu}$ unitär äquivalent. Für μ kann kann man ein skalares Spektralmaß von S wählen.*

Beweis: Man beachte, dass für den kanonischen $\mathcal{F}$-Kalkül Φ_S von S für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $x \in H$ die Beziehung $\Phi_S(f)x = f(N)x$ gilt. Wegen $H = \overline{\{\Phi_S(f)x_0; f \in \mathcal{F}\}}$ und der Minimalität von N ist $K = \overline{\{f(N)x_0; f \in L^\infty(\mu)\}}$. Sei E das Spektralmaß von N. Dann ist $\mu = \langle E(\cdot)x_0, x_0\rangle$ ein skalares Spektralmaß für S. Für $f \in L^\infty(\mu)$ gilt dann

$$\begin{aligned} \|f(N)x_0\|^2 &= \langle f(N)x_0, f(N)x_0\rangle = \langle |f|^2(N)x_0, x_0\rangle = \int |f|^2 d\mu \\ &= \|f\|^2_{L^2(\mu)}. \end{aligned}$$

Fasst man $L^\infty(\mu)$ als Teilraum von $L^2(\mu)$ auf, so liegt $L^\infty(\mu)$ dicht in $L^2(\mu)$. Also gibt es einen eindeutig bestimmten unitären Operator $U : K \to L^2(\mu)$ mit

$$Uf(N)x_0 = f \qquad \text{für alle } f \in L^\infty(\mu).$$

Offensichtlich gilt $Ux_0 = 1$, $UN_i = M_{z_i}^{\mu} U$ für $i = 1, ..., n$ und

$$UH = U\overline{\{f(N)x_0; f \in \mathcal{F}\}} = \overline{\mathcal{F}}^{L^2(\mu)} = H^2_{\mathcal{F}}(\mu).$$

Insbesondere ist $U_0 : H \to H^2_{\mathcal{F}}(\mu)$, $x \mapsto Ux$ unitär mit $U_0 S_i = S_{z_i}^{\mathcal{F},\mu} U_0$ für $i = 1, ..., n$. ■

Für $f \in \mathcal{F}$ gilt $f(M_z^{\mu})H^2_{\mathcal{F}}(\mu) = M_f^{\mu} H^2_{\mathcal{F}}(\mu) \subset H^2_{\mathcal{F}}(\mu)$ und

$$\overline{\{f(M_z^{\mu})1; f \in \mathcal{F}\}}^{L^2(\mu)} = \overline{\mathcal{F}}^{L^2(\mu)} = H^2_{\mathcal{F}}(\mu).$$

Also ist für ein beliebiges Maß $\mu \in M^+(\mathscr{K})$ das Tupel $S_z^{\mathcal{F},\mu} \in L(H^2_{\mathcal{F}}(\mu))^n$ ein $\mathcal{F}$-subnormales Tupel mit $\mathcal{F}$-zyklischem Vektor 1, falls $\sigma(S_z^{\mathcal{F},\mu}) \subset \mathscr{K}$ gilt. Ist $U : K \to L^2(\mu)$ wie im Beweis von Satz 3.4.4 gewählt, dann gilt

$$M_f^{\mu} U = Uf(N)$$

für alle $f \in L^\infty(\mu)$. Es folgt in der Situation von Satz 3.4.4, dass

$$\mathscr{R}(S) = \{f \in L^\infty(\mu); f(N)H \subset H\} = \{f \in L^\infty(\mu); M_f^{\mu} H^2_{\mathcal{F}}(\mu) \subset H^2_{\mathcal{F}}(\mu)\}.$$

Definiert man für $f \in \mathscr{R}(S)$ den Operator $S_f^{\mathcal{F},\mu} : H^2_{\mathcal{F}}(\mu) \to H^2_{\mathcal{F}}(\mu)$ durch $S_f^{\mathcal{F},\mu} = M_f^\mu|_{H^2_{\mathcal{F}}(\mu)}$, so ist zudem $S_f^{\mathcal{F},\mu} U_0 = U_0 \tilde{\Phi}_S(f)$ für alle $f \in \mathscr{R}(S)$.

Das nachfolgende Lemma enthält eine konkrete Beschreibung der Restriktionalgebra $\mathscr{R}(S_z^{\mathcal{F},\mu})$.

Lemma 3.4.5 *Für ein beliebiges Maß $\mu \in M^+(\mathscr{K})$ gilt:*

$$\mathscr{R}(S_z^{\mathcal{F},\mu}) = \{f \in L^\infty(\mu); M_f^\mu H^2_{\mathcal{F}}(\mu) \subset H^2_{\mathcal{F}}(\mu)\} = H^2_{\mathcal{F}}(\mu) \cap L^\infty(\mu).$$

Beweis: Ist $f \in H^2_{\mathcal{F}}(\mu) \cap L^\infty(\mu)$, so existiert eine Folge $(f_k)_k$ in $\mathcal{F}$ mit $f_k \xrightarrow{L^2} f$. Für $g \in \mathcal{F}$ ist dann $(f_k g)_k$ eine Folge in $\mathcal{F}$, und da g beschränkt ist, folgt $f_k g \xrightarrow{L^2} fg$. Folglich ist $M_f^\mu \mathcal{F} \subset H^2_{\mathcal{F}}(\mu)$. Da M_f^μ stetig ist, folgt auch die Inklusion $M_f^\mu H^2_{\mathcal{F}}(\mu) \subset H^2_{\mathcal{F}}(\mu)$. Die Gleichheit der ersten beiden Mengen gilt definitionsgemäß. Wegen $1 \in H^2_{\mathcal{F}}(\mu)$ ist auch die verbleibende Inklusion richtig. ■

Im Folgenden sei $S_f^{\mathcal{F},\mu} : H^2_{\mathcal{F}}(\mu) \to H^2_{\mathcal{F}}(\mu)$ für jedes $f \in H^2_{\mathcal{F}}(\mu) \cap L^\infty(\mu)$ der stetige Operator, der definiert ist durch

$$S_f^{\mathcal{F},\mu} = M_f^\mu|_{H^2_{\mathcal{F}}(\mu)}. \tag{3.6}$$

Für den kanonischen $\mathcal{F}$-Kalkül $\Phi_{S_z^{\mathcal{F},\mu}}$ von $S_z^{\mathcal{F},\mu}$ gilt

$$\Phi_{S_z^{\mathcal{F},\mu}}(f) = S_f^{\mathcal{F},\mu} \tag{3.7}$$

für alle $f \in \mathcal{F}$. Welche Operatoren in $L(H^2_{\mathcal{F}}(\mu))$ vertauschen mit allen Operatoren $S_f^{\mathcal{F},\mu}$, $f \in \mathcal{F}$? Eine Antwort auf diese Frage liefert der nachfolgende Satz, der eine Verallgemeinerung eines entsprechenden 1-dimensionalen Ergebnisses von Yoshino ist (vgl. [Con91a], Theorem II.5.4).

Satz 3.4.6 *Sei $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^n$ kompakt und sei $\mathcal{F}$ eine $\mathcal{P}$-Unteralgebra von $C(\mathscr{K})$. Sei $\mu \in M^+(\mathscr{K})$ und sei $T \in \{S_g^{\mathcal{F},\mu}; g \in \mathcal{F}\}' \subset L(H^2_{\mathcal{F}}(\mu))$. Dann ist T ein subnormaler Operator, und es existiert ein $f \in H^2_{\mathcal{F}}(\mu) \cap L^\infty(\mu)$ mit $T = S_f^{\mathcal{F},\mu}$.*

Beweis: Ohne Einschränkung sei $\|T\| \leq 1$. Sei $f = T1 \in H^2_{\mathcal{F}}(\mu)$. Nach Voraussetzung ist $Tg = TS_g^{\mathcal{F},\mu}1 = S_g^{\mathcal{F},\mu}T1 = gf$ für alle $g \in \mathcal{F}$. Wir zeigen, dass letzteres auch für $g \in H^2_{\mathcal{F}}(\mu)$ gilt und dass $f \in L^\infty(\mu)$ ist. Sei $g \in H^2_{\mathcal{F}}(\mu)$ beliebig und sei $(g_k)_k$ eine Folge in $\mathcal{F}$ mit $g_k \xrightarrow{L^2} g$ und $g_k(z) \to g(z)$ für μ-fast alle $z \in \mathscr{K}$. Dann ist

$$0 = \lim_{k\to\infty} \|Tg - Tg_k\| = \lim_{k\to\infty} \|Tg - fg_k\| \quad (\text{in } L^2(\mu))$$

und wegen $(fg_k)(z) \to (fg)(z)$ für μ-fast alle $z \in \mathscr{K}$ folgt $Tg = fg$.

Sei $A = \{z \in \mathscr{K}; |f(z)| > 1\}$. Dann ist $\|1\|^2 \geq \|T^n(1)\|^2 = \|f^n\|^2 = \int |f|^{2n} d\mu \geq \int_A |f|^{2n} d\mu$. Wegen $|f(z)|^{2n} \to \infty$ punktweise monoton wachsend auf A, folgt mit dem Satz der monotonen Konvergenz, dass $\mu(A) = 0$ und deshalb $\|f\|_{\infty,\mu} \leq 1$ gilt. Demnach ist $f \in H^2_{\mathcal{F}}(\mu) \cap L^\infty(\mu)$ und somit $T = S_f^{\mathcal{F},\mu}$. ■

Satz 3.4.6 impliziert die nicht-triviale Inklusion der Identität

$$\{S_g^{\mathcal{F},\mu}; g \in \mathcal{F}\}' = \{S_f^{\mathcal{F},\mu}; f \in H^2_{\mathcal{F}}(\mu) \cap L^\infty(\mu)\}.$$

Korollar 3.4.7 *Seien $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^n$ kompakt, $\mathcal{F}$ eine $\mathcal{P}$-Unteralgebra von $C(\mathscr{K})$ und $S \in L(H)^n$ ein $\mathcal{F}$-subnormales und $\mathcal{F}$-zyklisches Tupel. Sei das Maß $\mu \in M^+(\mathscr{K})$ wie im Beweis von Satz 3.4.4 gewählt. Dann ist*

$$\mathscr{R}(S) = H^2_{\mathcal{F}}(\mu) \cap L^\infty(\mu) \quad \textit{und} \quad \{\Phi_S(f); f \in \mathcal{F}\}' = \tilde{\Phi}_S(\mathscr{R}(S)).$$

Beweis: Die Gleichheit $\mathscr{R}(S) = H^2_{\mathcal{F}}(\mu) \cap L^\infty(\mu)$ folgt aus Lemma 3.4.5 zusammen mit den Bemerkungen, die diesem Lemma vorausgehen. Sei $T \in \{\Phi_S(f); f \in \mathcal{F}\}'$. Dann vertauscht $U_0 T U_0^{-1}$ mit allen Operatoren $S_g^{\mathcal{F},\mu}$ $(g \in \mathcal{F})$ und nach Satz 3.4.6 gibt es eine Funktion $f \in \mathscr{R}(S)$ mit $U_0 T U_0^{-1} = S_f^{\mathcal{F},\mu}$. Aber dann ist $T = U_0^{-1} S_f^{\mathcal{F},\mu} U_0 = \tilde{\Phi}_S(f)$. Die umgekehrte Inklusion gilt offensichtlich. ■

Im Allgemeinen gilt $\{S_z^{\mathcal{F},\mu}\}' \supset \{S_g^{\mathcal{F},\mu}; g \in \mathcal{F}\}'$. Weiter unten werden wir sehen, dass es auch Fälle gibt, in denen Gleichheit besteht.

$A_0(\mathscr{K})$-subnormale Operatortupel

Wir spezialisieren nun die Funktionenalgebra $\mathcal{F}$. Die einzuführende Algebra $A_0(\mathscr{K})$ spielt insbesondere im nächsten Paragraphen eine zentrale Rolle.

Sei $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^n$ kompakt und sei $A_0(\mathscr{K})$ die Banachalgebra

$$A_0(\mathscr{K}) = \overline{\mathscr{O}(\mathscr{K})|\mathscr{K}}^{C(\mathscr{K})};$$

hierbei ist

$$\mathscr{O}(\mathscr{K}) = \{f; f \in \mathscr{O}(U) \text{ für eine offene Umgebung } U \text{ von } \mathscr{K}\}.$$

Bevor wir eine wichtige Proposition über $\mathscr{K}$-subnormale Operatortupel im Zusammenhang mit der Algebra $A_0(\mathscr{K})$ beweisen, sei an das folgende Resultat aus der mehrdimensionalen Spektraltheorie erinnert.

Lemma 3.4.8 *([EP96], Theorem 5.2.4)*
Sei $T \in L(H)^n$ ein vertauschendes Tupel. Für $U \subset \mathbb{C}^n$ offen mit $\sigma(T) \subset U$ bezeichne $\Phi_U : \mathscr{O}(U) \to L(H)$ den holomorphen und $\Psi_U : \mathscr{O}(U) \to L(H)$ einen beliebigen stetigen $\mathscr{O}(U)$-Kalkül für T. Gilt dann die Gleichheit

$$\sigma(\Psi_U(f)) = f(\sigma(T)) \quad \textit{für alle } f \in \mathscr{O}(U)^k,\ k \geq 1,$$

so ist $\Phi_U = \Psi_U$.

Proposition 3.4.9 *Sei $S \in L(H)^n$ subnormal mit $\sigma(S) \subset \mathscr{K}$. Dann ist S automatisch $A_0(\mathscr{K})$-subnormal und für den kanonischen $A_0(\mathscr{K})$-Kalkül Φ_S von S gilt: Für alle $U \supset \mathscr{K}$ offen und alle $F \in \mathscr{O}(U)$ ist*

$$\Phi_S(F|_{\mathscr{K}}) = F(S),$$

wobei $F(S)$ für den holomorphen Kalkül von S an der Stelle F steht.

Beweis: Sei $N \in L(K)^n$ eine minimale normale Erweiterung von S. Für eine offene Umgebung U von $\mathscr{K}$ sei $\Psi_U : \mathscr{O}(U) \to L(K)$ definiert durch $\Psi_U(F) = (F|_{\mathscr{K}})(N)$, wobei auf der rechten Seite der stetige Kalkül von N steht. Für alle $F \in \mathscr{O}(U)^k$, $k \geq 1$, ist dann

$$\sigma(\Psi_U(F)) = \sigma(((F_i|_{\mathscr{K}})(N))_{i=1}^k) = F(\sigma(N)).$$

Aus Lemma 3.4.8 folgt hieraus $\Psi_U(F) = F(N)$, wobei auf der rechten Seite der holomorphe Kalkül von N steht. Ist $\imath : H \to K$ die kanonische Inklusion, so gilt $\imath \circ S_i = N_i \circ \imath$ für $i = 1, ..., n$ und $\sigma(S) \cup \sigma(N) \subset \mathscr{K}$. Dann gilt $F(N) \circ \imath = \imath \circ F(S)$, d.h. $F(N)H \subset H$ und $F(S) = F(N)|_H$ für alle $F \in \mathscr{O}(U)$ ([EP96], Lemma 2.5.8), also $\Phi_S(F|_{\mathscr{K}}) = F(S)$. ∎

In Proposition 3.4.9 wurde der kanonische $A_0(\mathscr{K})$-Kalkül eines $\mathscr{K}$-subnormalen Operatortupels beschrieben. Wenn $\mathscr{K}$ ein *Steinsches Kompaktum* ist, d.h. eine Umgebungsbasis aus Steinschen offenen Mengen besitzt, dann ist der kanonische $A_0(\mathscr{K})$-Kalkül eines $\mathscr{K}$-subnormalen Tupels der einzige stetige $A_0(\mathscr{K})$-Kalkül. Wir formulieren diesen Sachverhalt in der nachfolgenden Bemerkung.

Bemerkung 3.4.10 *Sei $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^n$ eine Steinsche kompakte Menge und sei $S \in L(H)^n$ ein subnormales Tupel mit $\sigma(S) \subset \mathscr{K}$. Dann gibt es genau einen stetigen $A_0(\mathscr{K})$-Kalkül für S.*

Beweis: Sei $\Psi_S : A_0(\mathscr{K}) \to L(H)$ ein weiterer stetiger $A_0(\mathscr{K})$-Kalkül für S. Via $\mathscr{O}(U) \to A_0(\mathscr{K}) \stackrel{\Psi_S}{\to} L(H)$, $U \supset \mathscr{K}$ offen, erhält man einen stetigen $\mathscr{O}(U)$-Kalkül für S. Ist U Steinsch, so muss es sich um den holomorphen Kalkül handeln ([EP96], Lemma 5.1.1b). Die Abbildungen Ψ_S und Φ_S stimmen dann auf einer dichten Teilmenge von $A_0(\mathscr{K})$ überein und wegen der Stetigkeit müssen sie gleich sein. ∎

Nimmt man statt $A_0(\mathscr{K})$ die Algebra

$$A_{00}(\mathscr{K}) = \overline{\left\{ f \in C(\mathscr{K}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es existiert eine Steinsche offene Umgebung } U \text{ von } \mathscr{K} \\ \text{und } F \in \mathscr{O}(U) \text{ mit } f = F|_{\mathscr{K}} \end{array} \right\}},$$

so ist auch der zugehörige $A_{00}(\mathscr{K})$-Kalkül eindeutig bestimmt. Man kann hierfür den Beweis von Bemerkung 3.4.10 imitieren.

Neben der Eigenschaft, automatisch $A_0(\mathscr{K})$-subnormal zu sein, besitzen $\mathscr{K}$-subnormale Operatortupel noch die folgende Eigenschaft:

Lemma 3.4.11 *Seien $S \in L(H)^n$ und $\tilde{S} \in L(\tilde{H})^n$ zwei $\mathscr{K}$-subnormale Tupel und sei $T \in L(H, \tilde{H})$ ein Operator mit $TS_i = \tilde{S}_i T$ für $i = 1, ..., n$. Dann gilt*

$$T\Phi_S(f) = \Phi_{\tilde{S}}(f)T$$

für alle $f \in A_0(\mathscr{K})$, wobei Φ_S und $\Phi_{\tilde{S}}$ die kononischen $A_0(\mathscr{K})$-Kalküle von S und $\tilde{S}$ sind.

Beweis: Wegen $TS_i = \tilde{S}_i T$ für $i = 1, ..., n$ und $\sigma(S) \cup \sigma(\tilde{S}) \subset \mathscr{K}$ folgt $TF(S) = F(\tilde{S})T$ für alle $F \in \mathscr{O}(U)$, $U \supset \mathscr{K}$ offen ([EP96], Lemma 2.5.8). Dies zeigt $T\Phi_S(f) = \Phi_{\tilde{S}}(f)T$ für f aus einer dichten Teilmenge von $A_0(\mathscr{K})$. Wegen der Stetigkeit beider Abbildungen folgt die Behauptung. ■

Die bisherigen Ergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen, wobei hier und im Folgenden zur Vereinfachung der Notation $H_0^2(\mu) = H^2_{A_0(\mathscr{K})}(\mu)$ und $S_f^\mu = S_f^{A_0(\mathscr{K}),\mu}$ gesetzt wird.

Satz 3.4.12 *Sei $S = (S_1, ..., S_n) \in L(H)^n$ ein subnormales Tupel mit $\sigma(S) \subset \mathscr{K}$ und $A_0(\mathscr{K})$-zyklischem Vektor $x_0 \in H$. Sei $N = (N_1, ..., N_n) \in L(K)^n$ eine minimale normale Erweiterung von S. Dann gilt:*
Es existiert ein Maß $\mu \in M^+(\mathscr{K})$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Es existiert ein unitärer Operator $U : K \to L^2(\mu)$ mit $Ux_0 = 1$, $UH = H_0^2(\mu)$, $UN_i = M_{z_i}^\mu U$ für $i = 1, ..., n$ und, falls $U_0 = U|_H$, $U_0 S_i = S_{z_i}^\mu U_0$ für $i = 1, ..., n$. Insbesondere sind S und S_z^μ unitär äquivalent.

(ii) Ist $T \in \{S\}'$, so ist T ein subnormaler Operator und es existiert eine Funktion $f \in H_0^2(\mu) \cap L^\infty(\mu)$ mit $T = \tilde{\Phi}_S(f)$, wobei $\tilde{\Phi}_S$ der kanonische $\mathscr{R}(S)$-Kalkül von S ist.

(iii) Der kanonische $\mathscr{R}(S)$-Kalkül von S ist ein isometrischer, w^*-stetiger Algebreniso-morphismus $\tilde{\Phi}_S : H_0^2(\mu) \cap L^\infty(\mu) \to \{S\}'$.

Beweis: Teil (i) ist Satz 3.4.4. Teil (ii) ist Lemma 3.4.11 und Korollar 3.4.7. Teil (iii) folgt direkt aus (ii). ■

3.5 Quasiähnlichkeit und $\mathscr{K}$-subnormale Operatortupel

In diesem Paragraphen untersuchen wir Quasiähnlichkeitsfragen im Zusammenhang mit $A_0(\mathscr{K})$-subnormalen Operatortupeln. Wir werden sehen, wie klassische Resultate von Hastings und Athavale vereinheitlicht und verallgemeinert werden können.

Zunächst zum Begriff der Quasiähnlichkeit: Der Begriff der *Quasiähnlichkeit* zweier einzelner Operatoren wurde zu Beginn der sechziger Jahre von B. Sz.-Nagy und C. Foiaş eingeführt. Hier die mehrdimensionale Version: Ein Operator $X \in L(E, F)$ zwischen zwei Banachräumen E und F heißt *quasiinvertierbar*, wenn er injektiv ist und dichtes Bild hat.

Sind $T = (T_1, ..., T_n) \in L(E)^n$ und $S = (S_1, ..., S_n) \in L(F)^n$ zwei vertauschende Tupel und $X \in L(E, F)$ ein Operator, so nennt man X einen *(T, S)-vertauschenden Operator*, wenn $XT_i = S_i X$ für alle $i = 1, ..., n$ gilt. Zwei solche Tupel T und S heißen *quasiähnlich*, wenn ein (T, S)-vertauschender, quasiinvertierbarer Operator $X \in L(E, F)$ und ein (S, T)-vertauschender, quasiinvertierbarer Operator $Y \in L(F, E)$ existieren.

Sei $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^n$ eine kompakte Menge. Der *Shilov-Rand* $\mathscr{S}(\mathcal{F})$ einer beliebigen abgeschlossenen und punktetrennenden Unteralgebra $\mathcal{F}$ von $C(\mathscr{K})$ ist definiert durch

$$\mathscr{S}(\mathcal{F}) = \bigcap \left\{ R \subset \mathscr{K}; R = \overline{R}, \|f\|_{\infty,\mathscr{K}} = \|f\|_{\infty,R} \text{ für alle } f \in \mathcal{F} \right\}.^9$$

Wir setzen

$$\partial_0 \mathscr{K} = \mathscr{S}(A_0(\mathscr{K})).$$

Definition 3.5.1 *Sei $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^n$ kompakt. Ein Operatortupel S wird eine $\mathscr{K}$-*Isometrie *genannt, wenn es $\mathscr{K}$-subnormal ist und $\sigma_n(S) \subset \partial_0 \mathscr{K}$ erfüllt.*

Da der Träger eines skalaren Spektralmaßes von S mit dem Normalenspektrum $\sigma_n(S)$ von S übereinstimmt, erhält man:

Lemma 3.5.2 *Sei $S \in L(H)^n$ eine $\mathscr{K}$-Isometrie und sei μ ein skalares Spektralmaß für S. Dann gilt* $\operatorname{supp}(\mu) \subset \partial_0 \mathscr{K}$.

Sei $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^n$ kompakt. Für $\mu \in M^+(\mathscr{K})$ ist S_z^μ eine $\mathscr{K}$-Isometrie genau dann, wenn $\sigma(S_z^\mu) \subset \mathscr{K}$ und $\operatorname{supp}(\mu) \subset \partial_0 \mathscr{K}$ gilt. Die $A_0(\mathscr{K})$-zyklischen $\mathscr{K}$-Isometrien sind bis auf unitäre Äquivalenz genau die Tupel S_z^μ. Ist $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^n$ ein Steinsches Kompaktum, so ist für jedes Maß $\mu \in M^+(\mathscr{K})$ die spektrale Inklusion $\sigma(S_z^\mu) \subset \mathscr{K}$ automatisch erfüllt. Um die letzte Behauptung einzusehen, beachte man, dass S_z^μ den $A_0(\mathscr{K})$-Kalkül

$$\Phi_{S_z^\mu} : A_0(\mathscr{K}) \to L(H_0^2(\mu)), \quad f \mapsto S_f^\mu$$

besitzt und dass es zu jedem Punkt $\lambda \in \mathbb{C}^n \backslash \mathscr{K}$ holomorphe Funktionen $f_1, ..., f_n \in \mathscr{O}(U)$ auf einer geeigneten offenen Umgebung U von $\mathscr{K}$ gibt mit

$$1 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - z_i) f_i(z)$$

für alle $z \in U$.

Die Definition der $\mathscr{K}$-Isometrie umfasst die beiden wichtigen Klassen der $\overline{\mathbb{D}}^n$- und $\overline{\mathbb{B}}^n$-Isometrien, die respektive auch als *torische* und *sphärische Isometrien* bekannt sind. Unter einer *torischen Isometrie* versteht man i.Allg. ein vertauschendes Tupel $C = (C_1, ..., C_n) \in L(H)^n$ bestehend aus Isometrien C_i, $i = 1, ..., n$. Torische Isometrien sind stets subnormal mit $\sigma_n(C) \subset \mathbb{T}^n = \partial_0 \overline{\mathbb{D}}^n$. Umgekehrt ist ein subnormales Operatortupel $C \in L(H)^n$ mit $\sigma_n(C) \subset \mathbb{T}^n$ eine torische Isometrie ([Ath90], Proposition 1). Unter einer

[9] Vergleiche [AW98], Chapter 9.

sphärischen Isometrie versteht man ein vertauschendes Tupel $S = (S_1, ..., S_n) \in L(H)^n$ mit $\sum_{i=1}^n S_i^* S_i = \mathrm{id}_H$. Sphärische Isometrien $S \in L(H)^n$ sind ebenfalls stets subnormal und erfüllen $\sigma_n(S) \subset \mathbb{S}^{2n-1} = \partial_0 \overline{\mathbb{B}}^n$. Erfüllt umgekehrt ein subnormales Operatortupel $S \in L(H)^n$ die Inklusion $\sigma_n(S) \subset \mathbb{S}^{2n-1}$, so ist S eine sphärische Isometrie ([Ath90], Proposition 2). Man beachte, dass für $\mathscr{K} = \overline{\mathbb{D}}^n$ bzw. $\mathscr{K} = \overline{\mathbb{B}}^n$ die Algebra $A_0(\mathscr{K})$ gegeben ist durch

$$A_0(\mathscr{K}) = \overline{\mathbb{C}[z_1, ..., z_n]|_{\mathscr{K}}}^{C(\mathscr{K})}.$$

Im Zusammenhang mit sphärischen Isometrien hat Athavale 1988 den folgenden Satz über die Quasiähnlichkeit zum Szegö-Tupel bewiesen. Für ein Maß $\mu \in M(\mathbb{C}^n)$ ist das Maß $\mu^{\mathbb{S}^{2n-1}} : \mathcal{B}or(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}$ hierbei definiert durch $\mu^{\mathbb{S}^{2n-1}}(A) = \mu(A \cap \mathbb{S}^{2n-1})$ für alle $A \in \mathcal{B}or(\mathbb{C}^n)$.

Satz 3.5.3 *([Ath88], Theorem 1)*
Sei $\nu \in M^+(\mathbb{S}^{2n-1})$ und sei $\mu \in M^+(\mathbb{C}^n)$ mit $\mathrm{supp}(\mu)$ kompakt. Dann sind äquivalent:

(i) *S_z^ν und S_z^μ sind quasiähnlich;*

(ii) *es existieren zyklische Funktionen $g \in P^2(\nu)$ und $h \in P^2(\mu)$ derart, dass für alle $p \in \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$ gilt*

$$\int |gp|^2 d\nu \leq \int |p|^2 d(\mu^{\mathbb{S}^{2n-1}}) \quad \textit{und} \quad \int |hp|^2 d\mu \leq \int |p|^2 d\nu.$$

In seinem Beweis benutzt Athavale entscheidend eine Approximationseigenschaft der Polynome auf der abgeschlossenen Einheitskugel $\overline{\mathbb{B}}^n$. Diese Eigenschaft ist eng verbunden mit dem Problem der Existenz nicht-konstanter innerer Funktionen auf $\mathbb{B}^n$ ($n \geq 2$), d.h. der Frage, ob es nicht-konstante beshränkte holomorphe Funktionen $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$ gibt derart, dass $\lim_{r \to 1^-} |f(rz)| = 1$ für σ-fast alle $z \in \mathbb{S}^{2n-1}$ gilt (σ=Oberflächenmaß). Die Approximation ist wie folgt gegeben:

Lemma 3.5.4 *([Rud86], Theorem 3.5)*
Sei $\varphi \in C(\overline{\mathbb{B}}^n)$ mit $\varphi > 0$ und sei $\mu \in M^+(\mathbb{S}^{2n-1})$. Dann existiert eine Folge $(p_k)_k$ in $\mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$ derart, dass $|p_k| < \varphi$ auf $\overline{\mathbb{B}}^n$, $p_k \to 0$ kompakt-gleichmäßig auf $\mathbb{B}^n$ und $\lim_{k \to \infty} |p_k(z)| = \varphi(z)$ für μ-fast alle $z \in \mathbb{S}^{2n-1}$.

Satz 3.5.3 (zusammen mit Satz 3.4.1) erlaubt eine Charakterisierung aller zyklischen subnormalen Operatortupel, die quasiähnlich zum Szegö-Tupel sind, und zeigt beispielsweise, dass das Szegö-Tupel nicht quasiähnlich zum Bergman-Tupel sein kann, da $\lambda^n|_{\mathbb{S}^{2n-1}} \equiv 0$ ist.

Eine entsprechende Charakterisierung für das Cauchy-Tupel wurde einige Jahre zuvor bereits von Hastings in vergleichbarer Weise angegeben ([Has78], Theorem 2).

Quasiähnlichkeit von zyklischen $\mathscr{K}$-subnormalen Operatortupeln

Wir wenden uns jetzt der Quasiähnlichkeit von $\mathscr{K}$-Isometrien zu. Danach gehen wir auf die Frage ein, wann $\mathscr{K}$-subnormale Operatortupel und $\mathscr{K}$-Isometrien quasiähnlich sein können, und wann nicht. Zunächst sind einige Vorbereitungen nötig.

Die nachfolgende Proposition verallgemeinert ein Lemma von Conway ([Con80], Lemma 2.4):

Proposition 3.5.5 *Seien $S \in L(H)^n$, $\tilde{S} \in L(\tilde{H})^n$ zwei $\mathscr{K}$-subnormale Tupel und sei $A \in L(H, \tilde{H})$ ein $(S, \tilde{S})$-vertauschender und $B \in L(\tilde{H}, H)$ ein $(\tilde{S}, S)$-vertauschender Operator, beide mit dichtem Bild. Dann gilt: Ist S ein $A_0(\mathscr{K})$-zyklisches Tupel, so ist auch $\tilde{S}$ ein $A_0(\mathscr{K})$-zyklisches Tupel und A, B sind injektiv. Insbesondere sind S und $\tilde{S}$ quasiähnlich.*

Beweis: Bezeichnen Φ_S und $\Phi_{\tilde{S}}$ die kanonischen $A_0(\mathscr{K})$-Kalküle von S und $\tilde{S}$, so gilt $A\Phi_S(f) = \Phi_{\tilde{S}}(f)A$ für alle $f \in A_0(\mathscr{K})$ (Lemma 3.4.11). Sei $x_0 \in H$ ein $A_0(\mathscr{K})$-zyklischer Vektor für S und sei $\tilde{x}_0 = Ax_0$. Da A dichtes Bild hat, ist $\tilde{x}_0$ ein $A_0(\mathscr{K})$-zyklischer Vektor für $\tilde{S}$. Nach Satz 3.4.12(i) gibt es deshalb Maße $\mu, \tilde{\mu} \in M^+(\mathscr{K})$ derart, dass man $S = S_z^\mu$ und $\tilde{S} = S_z^{\tilde{\mu}}$ annehmen kann. Dann aber gilt $BA \in \{S_z^\mu\}'$ und nach Satz 3.4.12(ii) existiert eine Funktion $f \in H_0^2(\mu) \cap L^\infty(\mu)$ mit $BA = \tilde{\Phi}_{S_z^\mu}(f) = S_f^\mu$. Da B und A dichtes Bild haben, gilt dasselbe für S_f^μ, f kann also auf keiner Menge mit positivem μ-Maß verschwinden. Dann aber ist S_f^μ injektiv. Wegen $\ker A \subset \ker BA = \ker S_f^\mu = \{0\}$ muss A injektiv sein. Analog folgt die Injektivität von B und insgesamt die Aussage über die Quasiähnlichkeit von S und $\tilde{S}$. ■

Für eine kompakte Menge $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^n$ und ein Maß $\mu \in M^+(\mathscr{K})$ wurde der Raum $H_0^2(\mu)$ in §3.4 auf Seite 85 definiert.

Proposition 3.5.6 *Sei $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^n$ kompakt und seien $\mu, \tilde{\mu} \in M^+(\mathscr{K})$ so, dass S_z^μ und $S_z^{\tilde{\mu}}$ zwei $\mathscr{K}$-subnormale Tupel sind. Sei $B : H_0^2(\tilde{\mu}) \to H_0^2(\mu)$ ein $(S_z^{\tilde{\mu}}, S_z^\mu)$-vertauschender stetiger Operator mit dichtem Bild. Dann existiert eine $A_0(\mathscr{K})$-zyklische Funktion $g \in H_0^2(\mu)$ mit*

$$\int |fg|^2 d\mu \leq \|B\|^2 \int |f|^2 d\tilde{\mu} \tag{3.8}$$

für alle $f \in A_0(\mathscr{K})$.

Beweis: Sei $g = B1$. Dann ist g eine $A_0(\mathscr{K})$-zyklische Funktion für $H_0^2(\mu)$. Für alle $f \in A_0(\mathscr{K})$ gilt offensichtlich $S_f^\mu B = BS_f^{\tilde{\mu}}$ (Lemma 3.4.11 und (3.7)). Damit hat man für alle $f \in A_0(\mathscr{K})$

$$\begin{aligned} \int |fg|^2 d\mu &= \int |S_f^\mu B1|^2 d\mu = \int |BS_f^{\tilde{\mu}}1|^2 d\mu = \|BS_f^{\tilde{\mu}}1\|_{L^2(\mu)}^2 \\ &\leq \|B\|^2 \|S_f^{\tilde{\mu}}1\|_{L^2(\tilde{\mu})}^2 = \|B\|^2 \int |f|^2 d\tilde{\mu}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

■

Natürlich kann man in der Situation von Proposition 3.5.6 immer erreichen, dass $\|B\| = 1$ ist, indem man gegebenenfalls den Operator B durch $\frac{B}{\|B\|}$ ersetzt.

Satz 3.5.7 *Sei $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^n$ kompakt und seien $\mu, \tilde{\mu} \in M^+(\mathscr{K})$ so, dass S_z^μ und $S_z^{\tilde{\mu}}$ zwei $\mathscr{K}$-subnormale Tupel sind. Dann sind äquivalent:*

(i) *S_z^μ und $S_z^{\tilde{\mu}}$ sind quasiähnlich;*

(ii) *es existieren $A_0(\mathscr{K})$-zyklische Funktionen $g \in H_0^2(\mu)$ und $h \in H_0^2(\tilde{\mu})$ mit*

$$\begin{aligned} \int |fg|^2 d\mu &\leq \int |f|^2 d\tilde{\mu} \quad \textit{und} \\ \int |fh|^2 d\tilde{\mu} &\leq \int |f|^2 d\mu \end{aligned} \tag{3.10}$$

für alle $f \in A_0(\mathscr{K})$.

Beweis: Aus Gründen der Symmetrie folgt die Implikation (i)⇒(ii) aus Proposition 3.5.6. Für die Implikation (ii)⇒(i) sei $A_0 : A_0(\mathscr{K}) \to H_0^2(\tilde{\mu})$ definiert durch $A_0 f = hf$. Dann zeigt (3.10), dass A_0 ein beschränkter Operator mit $\|A_0\| \leq 1$ ist. Somit lässt sich A_0 fortsetzen zu einem stetigen Operator $A : H_0^2(\mu) \to H_0^2(\tilde{\mu})$. Wegen der Zyklizität von h hat A dichtes Bild und nach Definition ist A ein $(S_z^\mu, S_z^{\tilde{\mu}})$-vertauschender Operator. Auf dieselbe Art und Weise erhält man einen stetigen $(S_z^{\tilde{\mu}}, S_z^\mu)$-vertauschenden Operator $B : H_0^2(\tilde{\mu}) \to H_0^2(\mu)$ mit dichtem Bild. Aus Proposition 3.5.5 folgt die Behauptung. ■

Für den Beweis der Implikation (ii)⇒(i) in Satz 3.5.7 wird nicht benötigt, dass das Spektrum der Tupel S_z^μ oder $S_z^{\tilde{\mu}}$ in $\mathscr{K}$ enthalten ist. Denn die in diesem Beweisteil konstruierten Operatoren A und B vertauschen offensichtlich mit allen Multiplikationsoperatoren S_f^μ auf $H_0^2(\mu)$ bzw. $S_f^{\tilde{\mu}}$ auf $H_0^2(\tilde{\mu})$, die durch Funktionen $f \in A_0(\mathscr{K})$ gegeben sind. Also folgt die Injektivität von A und B wie im Beweis von Proposition 3.5.5 unter Benutzung von Korollar 3.4.7.

Als nächstes soll die Quasiähnlichkeit $\mathscr{K}$-subnormaler Operatortupel zu $A_0(\mathscr{K})$-zyklischen $\mathscr{K}$-Isometrien untersucht werden. Notwendig hierfür ist, dass die $\mathscr{K}$-subnormalen Operatortupel, die für die Quasiähnlichkeit in Frage kommen, $A_0(\mathscr{K})$-zyklisch sind. Um befriedigende Resultate zu erhalten, müssen zudem zusätzliche Bedingungen an die kompakte Menge $\mathscr{K}$ gestellt werden. In diesem Zusammenhang sei an die *Aleksandrov-Regularität* einer kompakten Menge $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^n$ erinnert:

Definition 3.5.8 *([Ale84], Definition nach Remark 11)*
Ein Tripel $(\mathcal{A}, \mathscr{K}, \mu)$ bestehend aus einem kompakten Hausdorffraum $\mathscr{K}$, einer abgeschlossenen Unteralgebra $\mathcal{A}$ von $C(\mathscr{K})$ und einem Maß $\mu \in M^+(\mathscr{K})$ heißt Aleksandrov-regulär, *wenn ein $\tau > 0$ existiert mit*

$$\sup\left\{\int_{\mathscr{K}} |f|^2 d\mu : f \in \mathcal{A}, |f| < \varphi\right\} \geq \tau \int_{\mathscr{K}} \varphi^2 d\mu$$

für alle $\varphi \in C(\mathscr{K})$ *mit* $\varphi > 0$.

Die entscheidende Approximationseigenschaft, die sich aus der Aleksandrov-Regularität eines Tripels $(\mathscr{A}, \mathscr{K}, \mu)$ ergibt, steht im folgenden Lemma.

Lemma 3.5.9 *([Ale84], Theorem 37)*
Sei $(\mathcal{A}, \mathscr{K}, \mu)$ *ein Aleksandrov-reguläres Tripel. Dann gilt: Zu jeder Funktion* $\varphi \in C(\mathscr{K})$ *mit* $\varphi > 0$ *und jedem* $\varepsilon > 0$ *existiert eine Funktion* $g \in \mathcal{A}$ *mit*

$$|g| \leq \varphi \quad \textit{und} \quad \mu(\{|g| < \varphi\}) < \varepsilon.$$

Ist $(\mathcal{A}, \mathscr{K}, \mu)$ ein Aleksandrov-reguläres Tripel, so gilt notwendigerweise $\operatorname{supp}(\mu) \subset \varphi(\mathscr{K})$.

Definition 3.5.10 *Eine kompakte Menge* $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^n$ *heißt* Aleksandrov-regulär, *wenn für alle* $\nu \in M^+(\partial_0 \mathscr{K})$ *das Tripel* $(A_0(\mathscr{K}), \mathscr{K}, \nu)$ *Aleksandrov-reguär ist.*

Beispiele kompakter Mengen, die Aleksandrov-regulär sind, sind der Polyzylinder $\overline{\mathbb{D}}^n$ und die Kugel $\overline{\mathbb{B}}^n$ in $\mathbb{C}^n$, oder allgemeiner der Abschluss jedes beschränkten symmetrischen oder streng pseudokonvexen Gebietes im $\mathbb{C}^n$.

Zur Formulierung der nachfolgenden Aussagen wird folgende Bezeichnung eingeführt: Für $\mu \in M(\mathscr{K})$ und $f \in H_0^2(\mu)$ sei $\mu_f : \mathcal{B}or(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}$ definiert durch $\mu_f(E) = \int_E |f|^2 d\mu$. Für $A \in \mathcal{B}or(\mathbb{C}^n)$ und $\mu \in M(\mathscr{K})$ ist $\mu^A : \mathcal{B}or(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}$ definiert durch $\mu^A(E) = \mu(E \cap A)$.

Proposition 3.5.11 *Sei* $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^n$ *eine Aleksandrov-reguläre kompakte Menge und seien* $\mu, \tilde{\mu} \in M^+(\mathscr{K})$ *so, dass* S_z^μ *und* $S_z^{\tilde{\mu}}$ *zwei* $\mathscr{K}$*-subnormale Tupel sind und* $\operatorname{supp}(\tilde{\mu}) \subset \partial_0 \mathscr{K}$ *gilt. Sei* $B : H_0^2(\tilde{\mu}) \to H_0^2(\mu)$ *ein* $(S_z^{\tilde{\mu}}, S_z^\mu)$*-vertauschender stetiger Operator,* $\tilde{g} \in H_0^2(\tilde{\mu})$ *und* $g = B\tilde{g}$. *Dann gilt*

$$\mu_g^{\partial_0 \mathscr{K}} \leq \|B\|^2 \tilde{\mu}_{\tilde{g}} \ll \tilde{\mu}.$$

Besitzt B *dichtes Bild, so gilt* $\mu^{\partial_0 \mathscr{K}} \ll \tilde{\mu}$.

Beweis: Die Beziehung $\tilde{\mu}_{\tilde{g}} \ll \tilde{\mu}$ ist klar. Es wird $\mu_g^{\partial_0 \mathscr{K}} \leq \|B\|^2 \tilde{\mu}_{\tilde{g}}$ gezeigt. Hierfür dürfen wir ohne Einschränkung voraussetzen, dass $\|B\| = 1$ ist.

Für alle $f \in A_0(\mathscr{K})$ gilt offensichtlich $S_f^\mu B = B S_f^{\tilde{\mu}}$ (Lemma 3.4.11). Damit hat man für alle $f \in A_0(\mathscr{K})$

$$\begin{aligned} \int |f|^2 d\mu_g &= \int |fg|^2 d\mu = \int |S_f^\mu B \tilde{g}|^2 d\mu = \int |B S_f^{\tilde{\mu}} \tilde{g}|^2 d\mu \\ &= \|B S_f^{\tilde{\mu}} \tilde{g}\|_{L^2(\mu)}^2 \leq \|S_f^{\tilde{\mu}} \tilde{g}\|_{L^2(\tilde{\mu})}^2 = \int |f\tilde{g}|^2 d\tilde{\mu} = \int |f|^2 d\tilde{\mu}_{\tilde{g}}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Sei $\theta = \mu_g^{\partial_0 \mathscr{K}} + \tilde{\mu}_{\tilde{g}}$. Dann ist $\operatorname{supp}(\theta) \subset \partial_0 \mathscr{K}$, und da $\mathscr{K}$ Aleksandrov-regulär ist, existiert für alle $\varphi \in C(\mathscr{K})$ mit $\varphi > 0$ und alle $\varepsilon > 0$ ein $f \in A_0(\mathscr{K})$ mit $|f| \leq \sqrt{\varphi}$ und $\theta(\{|f| < \sqrt{\varphi}\}) < \varepsilon$ (Lemma 3.5.9). Für $\omega = \mu_g^{\partial_0 \mathscr{K}}$ bzw. $\omega = \tilde{\mu}_{\tilde{g}}$ gilt

$$0 \leq \int (\varphi - |f|^2) d\omega \leq \int (\varphi - |f|^2) d\theta \leq \varepsilon \|\varphi\|_\infty. \tag{3.12}$$

Angenommen, es existiert $\varphi \in C(\mathscr{K})$ mit $\varphi > 0$ und $d = \int \varphi d\mu_g^{\partial_0\mathscr{K}} - \int \varphi d\tilde{\mu}_{\tilde{g}} > 0$. Sei dann $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass $\varepsilon\|\varphi\|_\infty < d$. Für geeignetes $f \in A_0(\mathscr{K})$ ist wegen (3.12)

$$0 \leq \int \varphi d\omega - \int |f|^2 d\omega < d$$

und damit

$$\int |f|^2 (d\mu_g^{\partial_0\mathscr{K}} - d\tilde{\mu}_{\tilde{g}}) = \underbrace{\int (|f|^2 - \varphi) d\mu_g^{\partial_0\mathscr{K}}}_{>-d} + \underbrace{\int \varphi (d\mu_g^{\partial_0\mathscr{K}} - d\tilde{\mu}_{\tilde{g}})}_{=d} + \underbrace{\int (\varphi - |f|^2) d\tilde{\mu}_{\tilde{g}}}_{\geq 0},$$

also $\int |f|^2 d\tilde{\mu}_{\tilde{g}} < \int |f|^2 d\mu_g^{\partial_0\mathscr{K}} \leq \int |f|^2 d\mu_g$, im Widerspruch zu (3.11). Folglich muss für alle $\varphi \in C(\mathscr{K})$ mit $\varphi > 0$ die Ungleichung $\int \varphi d\mu_g^{\partial_0\mathscr{K}} \leq \int \varphi d\tilde{\mu}_{\tilde{g}}$ erfüllt sein. Hieraus folgt $\mu_g^{\partial_0\mathscr{K}} \leq \tilde{\mu}_{\tilde{g}}$.

Besitzt B dichtes Bild und wählt man $\tilde{g} \equiv 1$, so ist $g = B1$ eine $A_0(\mathscr{K})$-zyklische Funktion für $H_0^2(\mu)$. Die Funktion g verschwindet deshalb auf keiner Menge mit positivem μ-Maß. Folglich ist $\mu \ll \mu_g$ und deshalb nach dem ersten Teil des Beweises $\mu^{\partial_0\mathscr{K}} \ll \mu_g^{\partial_0\mathscr{K}} \leq \|B\|^2 \tilde{\mu}$. ■

Proposition 3.5.12 *Sei $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^n$ eine Aleksandrov-reguläre kompakte Menge und seien $\mu, \tilde{\mu} \in M^+(\mathscr{K})$ so, dass S_z^μ und $\tilde{S}_z^{\tilde{\mu}}$ $\mathscr{K}$-subnormal mit $\operatorname{supp}(\tilde{\mu}) \subset \partial_0\mathscr{K}$ sind. Sei $A : H_0^2(\mu) \to H_0^2(\tilde{\mu})$ ein $(S_z^\mu, S_z^{\tilde{\mu}})$-vertauschender stetiger Operator, $h \in H_0^2(\mu)$ und $\tilde{h} = Ah$. Dann gilt:*

$$\tilde{\mu}_{\tilde{h}} \leq \|A\|^2 \mu_h^{\partial_0\mathscr{K}} \ll \mu^{\partial_0\mathscr{K}}.$$

Besitzt A dichtes Bild, so gilt $\tilde{\mu} \ll \mu^{\partial_0\mathscr{K}}$, und es existiert eine $A_0(\mathscr{K})$-zyklische Funktion $\tilde{h}$ für $H_0^2(\tilde{\mu})$ mit

$$\int |f\tilde{h}|^2 d\tilde{\mu} \leq \int |f|^2 d\mu^{\partial_0\mathscr{K}} \tag{3.13}$$

für alle $f \in A_0(\mathscr{K})$.

Beweis: Die Beziehung $\mu_h^{\partial_0\mathscr{K}} \ll \mu^{\partial_0\mathscr{K}}$ ist klar. Es wird $\tilde{\mu}_{\tilde{h}} \leq \|A\|^2 \mu_h^{\partial_0\mathscr{K}}$ gezeigt. Hierfür dürfen wir ohne Einschränkung voraussetzen, dass $\|A\| = 1$ ist.

Wir betrachten zunächst den Fall $\partial_0\mathscr{K} \neq \mathscr{K}$. Sei $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine kompakte Ausschöpfung von $\mathscr{K}\backslash\partial_0\mathscr{K}$, d.h. $K_i \subset \mathscr{K}$ kompakt, $K_i \subset \operatorname{Int}_{\mathscr{K}}(K_{i+1})$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_i K_i = \mathscr{K}\backslash\partial_0\mathscr{K}$. [10] Sei $\varphi \in C(\mathscr{K})$ mit $\varphi > 0$, sei $i_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|\varphi\|_{\infty,\partial_0\mathscr{K}} > \frac{1}{i_0}$ und sei $(\varphi_i)_{i\geq i_0}$ eine Folge in $C(\mathscr{K})$ mit $\varphi_i(\mathscr{K}) \subset (0, \|\varphi\|_\infty]$, $\varphi_i = \varphi$ auf $\partial_0\mathscr{K}$ und $\varphi_i(z) = \frac{1}{i}$ für alle $z \in K_i$ und $i \geq i_0$. Sei $\theta = \tilde{\mu}_{\tilde{h}} + \mu_h^{\partial_0\mathscr{K}}$. Dann ist $\operatorname{supp}(\theta) \subset \partial_0\mathscr{K}$, und da $\mathscr{K}$ Aleksandrov-regulär ist, existiert eine Folge $(f_i)_{i\geq i_0}$ in $A_0(\mathscr{K})$ mit $|f_i| \leq \sqrt{\varphi_i}$ und $\theta(\{|f_i| < \sqrt{\varphi_i}\}) < \frac{1}{i}$ für alle $i \geq i_0$ (Lemma 3.5.9).

Wegen $\tilde{\mu}_{\tilde{h}} \leq \theta$ gilt

$$\lim_{i\to\infty} \int |f_i\tilde{h}|^2 d\tilde{\mu} = \lim_{i\to\infty} \left(\int_{\{|f_i|<\sqrt{\varphi_i}\}} + \int_{\{|f_i|=\sqrt{\varphi_i}\}} \right) |f_i\tilde{h}|^2 d\tilde{\mu} = \int \varphi|\tilde{h}|^2 d\tilde{\mu}, \tag{3.14}$$

[10] Für ein Kampaktum $\mathscr{K}$ und $K \subset \mathscr{K}$ bezeichnet $\operatorname{Int}_{\mathscr{K}}(K)$ das relativ $\mathscr{K}$ gebildete Innere von K.

da
$$0 \leq \lim_{i\to\infty} \int_{\{|f_i|<\sqrt{\varphi_i}\}} |f_i\tilde{h}|^2 d\tilde{\mu} \leq \lim_{i\to\infty} \|\varphi\|_\infty \tilde{\mu}_{\tilde{h}}(\{|f_i| < \sqrt{\varphi_i}\}) = 0$$
und
$$\tilde{\mu}_{\tilde{h}}(\{|f_i| = \sqrt{\varphi_i}\}) = \tilde{\mu}_{\tilde{h}}(\{|f_i| = \sqrt{\varphi}\} \cap \partial_0\mathscr{K}) \geq \tilde{\mu}_{\tilde{h}}(\partial_0\mathscr{K}) - \frac{1}{i} \text{ für } i \geq i_0$$
und damit
$$\lim_{i\to\infty} \int_{\{|f_i|=\sqrt{\varphi_i}\}} |f_i\tilde{h}|^2 d\tilde{\mu} = \int \varphi|\tilde{h}|^2 d\tilde{\mu}$$
gilt. Dieselbe Argumentation führt wegen $\mu_h^{\partial_0\mathscr{K}} \leq \theta$ auf
$$\lim_{i\to\infty} \int |f_i h|^2 d\mu^{\partial_0\mathscr{K}} = \int \varphi|h|^2 d\mu^{\partial_0\mathscr{K}}. \tag{3.15}$$

Es ist $\lim_{i\to\infty} \int_{K_i} |f_i h|^2 d\mu \leq \lim_{i\to\infty} \frac{1}{i}\mu_h(\mathscr{K}) = 0$ und wegen $\mu_h(\mathscr{K}\backslash K_i) \to \mu_h(\partial_0\mathscr{K})$ erhält man
$$\lim_{i\to\infty} \int |f_i h|^2 d\mu = \lim_{i\to\infty} \int |f_i|^2 d\mu_h^{\partial_0\mathscr{K}} \overset{(3.15)}{=} \int \varphi|h|^2 d\mu^{\partial_0\mathscr{K}}. \tag{3.16}$$

Außerdem gilt für $i \geq i_0$
$$\begin{aligned}\int |f_i\tilde{h}|^2 d\tilde{\mu} &= \int |S_{f_i}^{\tilde{\mu}} Ah|^2 d\tilde{\mu} = \int |AS_{f_i}^{\mu} h|^2 d\tilde{\mu} = \|AS_{f_i}^{\mu} h\|_{L^2(\tilde{\mu})}^2 \\ &\leq \|S_{f_i}^{\mu} h\|_{L^2(\mu)}^2 = \int |S_{f_i}^{\mu} h|^2 d\mu = \int |f_i h|^2 d\mu. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Also folgt
$$\int \varphi d\tilde{\mu}_{\tilde{h}} \overset{(3.14)}{=} \lim_{i\to\infty} \int |f_i\tilde{h}|^2 d\tilde{\mu} \overset{(3.17)}{\leq} \lim_{i\to\infty} \int |f_i h|^2 d\mu \overset{(3.16)}{=} \int \varphi d\mu_h^{\partial_0\mathscr{K}}. \tag{3.18}$$

Da (3.18) für alle $\varphi \in C(\mathscr{K})$ mit $\varphi > 0$ gilt, folgt $\tilde{\mu}_{\tilde{h}} \leq \mu_h^{\partial_0\mathscr{K}}$. Das ist der erste Teil der Behauptung im Fall $\partial_0\mathscr{K} \neq \mathscr{K}$.

Ist $\partial_0\mathscr{K} = \mathscr{K}$, so setze man $\varphi_i = \varphi$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und argumentiere dann genau wie oben.

Hat A dichtes Bild und setzt man $h \equiv 1$, so ist $\tilde{h}$ eine $A_0(\mathscr{K})$-zyklische Funktion für $H_0^2(\tilde{\mu})$. Folglich verschwindet $\tilde{h}$ auf keiner Menge mit positivem $\tilde{\mu}$-Maß. Dann ist $\tilde{\mu} \ll \tilde{\mu}_{\tilde{h}}$ und deshalb $\tilde{\mu} \ll \mu^{\partial_0\mathscr{K}}$, und es folgt (3.13), wenn man in (3.18) $\varphi = |f|^2$ für $f \in A_0(\mathscr{K})$ setzt (und $h \equiv 1$ berücksichtigt). Man beachte, dass die in (3.18) für alle $\varphi \in C(\mathscr{K})$, $\varphi > 0$, bewiesene Ungleichung richtig bleibt für alle $\varphi \in C(\mathscr{K})$ mit $\varphi \geq 0$. ■

Zusammenfassend erhält man den nachfolgenden Satz:

Satz 3.5.13 *Sei $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^n$ eine Aleksandrov-reguläre kompakte Menge und seien $\mu, \tilde{\mu} \in M^+(\mathscr{K})$ so, dass S_z^μ und $S_z^{\tilde{\mu}}$ zwei $\mathscr{K}$-subnormale Tupel mit supp$(\tilde{\mu}) \subset \partial_0\mathscr{K}$ sind. Dann sind äquivalent:*

(i) S_z^μ und $S_z^{\tilde{\mu}}$ sind quasiähnlich;

(ii) es existieren $A_0(\mathscr{K})$-zyklische Funktionen h für $H_0^2(\tilde{\mu})$ und g für $H_0^2(\mu)$ mit

$$\int |fh|^2 d\tilde{\mu} \leq \int |f|^2 d\mu^{\partial_0 \mathscr{K}} \qquad \text{und}$$
$$\int |fg|^2 d\mu \leq \int |f|^2 d\tilde{\mu}$$

für alle $f \in A_0(\mathscr{K})$.

Beweis: Die Implikation (i)⇒(ii) folgt aus den Propositionen 3.5.6 und 3.5.12. Die Implikation (ii)⇒(i) folgt aus der entsprechenden Implikation in Satz 3.5.7. ■

Damit haben wir die angekündigte Verallgemeinerung des Satzes von Athavale (Satz 3.5.3) auf beliebige Aleksandrov-reguläre Kompakta $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^n$ bewiesen. Als eine Folgerung aus diesem Satz ergibt sich:

Korollar 3.5.14 *Sei $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^n$ eine Aleksandrov-reguläre kompakte Menge und sei $\mu \in M^+(\mathscr{K})$ ein Maß so, dass S_z^μ ein $\mathscr{K}$-subnormales Tupel ist. Existiert ein Maß $\tilde{\mu} \in M^+(\partial_0 \mathscr{K})$ mit den Eigenschaften:*

(i) $S_z^{\tilde{\mu}}$ ist $\mathscr{K}$-subnormal,

(ii) S_z^μ und $S_z^{\tilde{\mu}}$ sind quasiähnlich,

so ist S_z^μ quasiähnlich zu $S_z^{\mu^{\partial_0 \mathscr{K}}}$.

Beweis: Seien die Voraussetzungen von Korollar 3.5.14 erfüllt. Nach Satz 3.5.13 gibt es $A_0(\mathscr{K})$-zyklische Funktionen h für $H_0^2(\tilde{\mu})$ und g für $H_0^2(\mu)$, die die Ungleichungen aus Bedingung (ii) von Satz 3.5.13 erfüllen. Dann ist g aber auch eine $A_0(\mathscr{K})$-zyklische Funktion für $H_0^2(\mu^{\partial_0 \mathscr{K}})$ und die Ungleichungen in Bedingung (ii) bleiben richtig, wenn man μ durch $\mu^{\partial_0 \mathscr{K}}$ ersetzt. Aus den Bemerkungen im Anschluss an Satz 3.5.7 folgt, dass $S_z^{\tilde{\mu}}$ und $S_z^{\mu^{\partial_0 \mathscr{K}}}$ quasiähnlich sind. Da die Quasiähnlichkeit eine Äquivalenzrelation ist, folgt die Behauptung. ■

Quasiähnlichkeit von $\mathscr{K}$-Isometrien

Nicht immer führt die Quasiähnlichkeit subnormaler Operatortupel zur Quasiähnlichkeit ihrer minimalen normalen Erweiterungen (vgl. etwa [Ath90], Remark 3). Für eine Aleksandrov-reguläre kompakte Menge $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^n$ und $\mathscr{K}$-Isometrien ist das anders (Satz 3.5.20). Auf dem Weg zum Beweis dieser Aussage kann man einige Erkenntnisse über $\mathscr{K}$-subnormale Operatortupel und spezielle Dilatationen gewinnen. Wir beginnen mit einigen Definitionen:

Sei $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^n$ kompakt. Wir nennen ein vertauschendes Tupel $T \in L(H)^n$ ein *von Neumann-Tupel über $\mathscr{K}$*, falls $\sigma(T) \subset \mathscr{K}$ gilt und

$$\|f(T)\| \leq \|f\|_{\infty,\mathscr{K}}$$

für alle $f \in \mathscr{O}(\mathscr{K})$. In diesem Fall besitzt T einen eindeutigen kontraktiven Funktionalkalkül $\Phi_T : A_0(\mathscr{K}) \to L(H)$ mit der Eigenschaft

$$\Phi_T(f) = f(T) \quad \text{für alle } f \in \mathscr{O}(\mathscr{K}).$$

Sei $T \in L(H)^n$ ein von Neumann-Tupel über $\mathscr{K}$. Unter einer *$A_0(\mathscr{K})$-unitären Dilatation von T* verstehen wir ein normales Tupel $N \in L(K)^n$ auf einem Hilbertraum $K \supset H$ so, dass $\sigma(N) \subset \partial_0 \mathscr{K}$ und

$$\Phi_T(f) = Pf(N)|_H$$

für alle $f \in A_0(\mathscr{K})$ gilt. Wir nennen eine $A_0(\mathscr{K})$-unitäre Dilatation $N \in L(K)^n$ von $T \in L(H)^n$ *minimal*, falls K der einzige N-reduzierende Teilraum ist, der H enthält, oder äquivalent, falls

$$K = \bigvee(N^\alpha N^{*\beta} H; \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n).$$

Ist $N \in L(K)^n$ eine $A_0(\mathscr{K})$-unitäre Dilatation für $T \in L(H)^n$, so ist

$$K_0 = \bigvee(N^\alpha N^{*\beta} H; \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n)$$

der kleinste N-reduzierende Teilraum von K, der H enthält, und $N|_{K_0} \in L(K_0)^n$ ist eine minimale $A_0(\mathscr{K})$-unitäre Dilatation von T. Proposition 3.4.9 zeigt, dass jedes $\mathscr{K}$-subnormale Tupel ein von Neumann-Tupel über $\mathscr{K}$ ist.

In der folgenden Proposition wird ein Resultat von Arveson aus der Theorie der Operatorräume benötigt. Unter einem *(konkreten) Operatorraum* versteht man ein Tupel $(V, \mathcal{A})$ bestehend aus einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$ und einem abgeschlossenen Teilraum V von $\mathcal{A}$. Bezeichnen wir mit M_k die komplexen $(k \times k)$-Matrizen $(k \in \mathbb{N})$, so setzen wir $M_k(V) = M_k \otimes V$. Ist $k \in \mathbb{N}$ und beachtet man, dass $M_k(\mathcal{A})$ mit einer eindeutigen C^*-Norm versehen werden kann und dass man $M_k(V)$ als Teilraum von $M_k(\mathcal{A})$ auffassen kann, so erhält $M_k(V)$ eine kanonische Norm für alle $k \in \mathbb{N}$. Den Banachraum, den man auf diese Weise erhält, bezeichnen wir mit $M_k(V)_{\mathcal{A}}$.

Sind $(V, \mathcal{A})$ und $(W, \mathcal{B})$ zwei Operatorräume und ist $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung, so induziert ϕ für alle $k \in \mathbb{N}$ eine Abbildung $\phi_k : M_k(V)_{\mathcal{A}} \to M_k(W)_{\mathcal{B}}$ vermöge $\phi_k((a_{ij})_{ij}) = (\phi(a_{ij}))_{ij}$. Die Abbildung ϕ heißt *vollständig kontraktiv*, wenn $\|\phi_k\| \leq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Ist $(V, \mathcal{A})$ eine *Operatoralgebra*, d.h. ist $\mathcal{A}$ eine unitale C^*-Algebra und V eine abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{A}$, die die Eins von $\mathcal{A}$ enthält, und ist $\phi : V \to L(H)$ ein unitaler Algebrenhomomorphismus, so sagt man, ϕ besitze eine *$\mathcal{A}$-Dilatation*, wenn eine Vergrößerung K von H und ein unitaler $*$-Homomorphismus $\pi : \mathcal{A} \to L(K)$ existieren mit

$$\phi(a) = P\pi(a)|_H$$

für alle $a \in V$, wobei P die orthogonale Projektion von K auf H ist. Der Satz von Arveson besagt:

Satz 3.5.15 *([Pau86], Corollary 6.7)*
Sei $(V, \mathcal{A})$ eine Operatoralgebra und sei $\phi : V \to L(H)$ ein unitaler Algebrenhomomorphismus. Dann sind äquivalent:

(i) ϕ *besitzt eine* $\mathcal{A}$*-Dilatation;*

(ii) ϕ *ist vollständig kontraktiv.*

Offensichtlich sind $(A_0(\mathscr{K}), C(\mathscr{K}))$ und $(A_0(\mathscr{K}), C(\partial_0\mathscr{K}))$ Operatoralgebren, wobei im zweiten Fall $A_0(\mathscr{K})$ vermöge der isometrischen Abbildung $r : A_0(\mathscr{K}) \to C(\partial_0\mathscr{K})$, $f \mapsto f|_{\partial_0\mathscr{K}}$ als unitale Unteralgebra von $C(\partial_0\mathscr{K})$ aufzufassen ist. Ist $\imath : A_0(\mathscr{K}) \to C(\mathscr{K})$ die kanonische Inklusion, so ergibt sich für $\imath_k : M_k(A_0(\mathscr{K}))_{C(\partial_0\mathscr{K})} \to M_k(C(\mathscr{K}))$ nach [Pau86], Theorem 3.8, und für $F \in M_k(A_0(\mathscr{K}))$:

$$\|F\|_{M_k(C(\mathscr{K}))} \leq \|F\|_{M_k(C(\partial_0\mathscr{K}))}$$

Dasselbe Theorem zeigt auch die umgekehrte Ungleichung. Insbesondere bedeutet die vollständige Kontraktivität einer Abbildung $\phi : A_0(\mathscr{K}) \to L(H)$ bzgl. $(A_0(\mathscr{K}), C(\mathscr{K}))$ und bzgl. $(A_0(\mathscr{K}), C(\partial_0\mathscr{K})$ dasselbe.

Die nachfolgende Proposition 3.5.16, die eine Verallgemeinerung von [Did02], Theorem 4.1.1, darstellt, ist für sich betrachtet interessant und im Folgenden nützlich.

Proposition 3.5.16 *Sei* $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^n$ *kompakt und sei* $S \in L(H)^n$ *ein* $\mathscr{K}$*-subnormales Tupel. Dann besitzt* S *eine (minimale)* $A_0(\mathscr{K})$*-unitäre Dilatation* $N \in L(K)^n$*.*

Beweis: Sei Φ_S der kanonische $A_0(\mathscr{K})$-Kalkül von S und $\tilde{N}$ eine minimale normale Erweiterung von S. Dann gilt

$$\Phi_S(f) = f(\tilde{N})|_H$$

für alle $f \in A_0(\mathscr{K})$ und Φ_S ist ein unitaler Algebrenhomomorphismus. Aus Satz 3.5.15 folgt die vollständige Kontraktivität von Φ_S bzgl. $(A_0(\mathscr{K}), C(\mathscr{K}))$. Da Φ_S dann aber auch bzgl. $(A_0(\mathscr{K}), C(\partial_0\mathscr{K}))$ vollständig kontraktiv ist, existiert wieder nach Satz 3.5.15 eine $C(\partial_0\mathscr{K})$-Dilatation π von Φ_S, d.h. eine Vergrößerung K von H und ein unitaler $*$-Homomorphismus $\pi : C(\partial_0\mathscr{K}) \to L(K)$ mit

$$\Phi_S(f) = P\pi(f|_{\partial_0\mathscr{K}})|_H$$

für alle $f \in A_0(\mathscr{K})$, wobei P die orthogonale Projektion von K auf H ist. Offensichtlich ist $N = (\pi(z_i))_{i=1}^n$ ein normales Tupel mit $\sigma(N) \subset \partial_0\mathscr{K}$ und $\Phi_S(f) = Pf(N)|_H$ für alle $f \in A_0(\mathscr{K})$. ∎

Zur Vorbereitung des Beweises von Proposition 3.5.18 wird das folgende Lemma, das implizit in einer Arbeit von Mlak enthalten ist ([Mla72], §4), formuliert und der Vollständigkeit halber bewiesen.

Lemma 3.5.17 *Sei* $\mathscr{X}$ *ein kompakter Hausdorffraum und seien* $e : \mathcal{B}or(\mathscr{X}) \to L(H)$, $\tilde{e} : \mathcal{B}or(\mathscr{X}) \to L(\tilde{H})$ *zwei positive operatorwertige Maße mit* $e(\mathscr{X}) = \mathrm{id}_H$, $\tilde{e}(\mathscr{X}) = \mathrm{id}_{\tilde{H}}$*. Seien* $E : \mathcal{B}or(\mathscr{X}) \to L(K)$, $\tilde{E} : \mathcal{B}or(\mathscr{X}) \to L(\tilde{K})$ *spektrale Dilatationen von* e *und* $\tilde{e}$*. Sei* $X \in L(H, \tilde{H})$ *ein Operator und* $c > 0$ *mit*

$$\langle \tilde{e}(A)Xx, Xx\rangle \leq c^2\langle e(A)x, x\rangle$$

für alle $A \in \mathcal{B}or(\mathscr{X})$ *und* $x \in H$*. Dann gilt:*

(a) Ist E minimal, so existiert eine eindeutige Fortsetzung $Y \in L(K, \tilde{K})$ von X mit $\tilde{E}(A)Y = YE(A)$ für alle $A \in \mathcal{B}or(\mathscr{X})$. Für diese Fortsetzung ist $\|Y\| \leq c$.

(b) Sind E und $\tilde{E}$ minimal und besitzt X dichtes Bild, so besitzt auch der eindeutig bestimmte Operator Y aus (a) dichtes Bild.

Beweis: (a) Wegen der Minimalität von E gilt

$$K = \overline{\left\{ \sum_{i=1}^{n} E(A_i)x_i \;\middle|\; \begin{array}{l} n \in \mathbb{N}, (A_i)_{i=1}^n \text{ messbare Zerlegung} \\ \text{von } \mathscr{X}, (x_i)_{i=1}^n \text{ Folge in } H \end{array} \right\}}.$$

Für eine beliebige messbare Zerlegung $(A_i)_{i=1}^n$ von $\mathscr{X}$ und beliebige Vektoren $(x_i)_{i=1}^n$ in H gilt

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{n} \tilde{E}(A_i)Xx_i \right\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \|\tilde{E}(A_i)Xx_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle \tilde{e}(A_i)Xx_i, Xx_i \rangle \\ &\leq c^2 \sum_{i=1}^{n} \langle e(A_i)x_i, x_i \rangle = c^2 \sum_{i=1}^{n} \langle E(A_i)x_i, x_i \rangle = c^2 \left\| \sum_{i=1}^{n} E(A_i)x_i \right\|^2. \end{aligned}$$

Wegen der Minimalität von E lässt sich durch

$$Y \sum_{i=1}^{n} E(A_i)x_i = \sum_{i=1}^{n} \tilde{E}(A_i)Xx_i \tag{3.19}$$

ein wohldefinierter Operator $Y \in L(K, \tilde{K})$ definieren mit $\|Y\| \leq c$. Aus Definition (3.19) folgt unmittelbar $\tilde{E}(A)Xx = YE(A)x$ für alle $A \in \mathcal{B}or(\mathscr{X})$ und alle $x \in H$ ($n = 2$, $A_1 = A$, $A_2 = \mathscr{X} \backslash A_1$, $x_1 = x$ und $x_2 = 0$). Insbesondere ist $Yx = Xx$ für alle $x \in H$, d.h. Y ist eine Fortsetzung von X. Außerdem gilt

$$\tilde{E}(A)Y \sum_{i=1}^{n} E(A_i)x_i = \sum_{i=1}^{n} \tilde{E}(A \cap A_i)Xx_i = YE(A) \sum_{i=1}^{n} E(A_i)x_i,$$

und damit (wieder wegen der Minimalität von E) $\tilde{E}(A)Y = YE(A)$ für alle $A \in \mathcal{B}or(\mathscr{X})$. Die Eindeutigkeit von Y ist wegen der letzten Eigenschaft klar, denn für jede solche Fortsetzung muss (3.19) erfüllt sein.
(b) Die Definition (3.19) zusammen mit der Minimalität von $\tilde{E}$ zeigen, dass mit X auch Y dichtes Bild hat. ■

Proposition 3.5.18 *Sei $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^n$ eine Aleksandrov-reguläre kompakte Menge. Sei $S \in L(H)^n$ ein $\mathscr{K}$-subnormales Tupel und $N \in L(K)^n$ eine minimale $A_0(\mathscr{K})$-unitäre Dilatation von S. Sei $\tilde{S} \in L(\tilde{H})^n$ eine $\mathscr{K}$-Isometrie mit minimaler normaler Erweiterung $\tilde{N} \in L(\tilde{K})^n$. Dann gilt: Ist $X \in L(H, \tilde{H})$ ein $(S, \tilde{S})$-vertauschender Operator, so existiert eine eindeutige $(N, \tilde{N})$-vertauschende Fortsetzung $Y \in L(K, \tilde{K})$ von X. Für diese gilt $\|Y\| = \|X\|$. Hat X dichtes Bild in $\tilde{H}$, so hat Y dichtes Bild in $\tilde{K}$.*

Beweis: Seien E und $\tilde{E}$ die Spektralmaße von N und $\tilde{N}$. Wegen $\operatorname{supp}(E) = \sigma(N) \subset \partial_0\mathscr{K}$ und $\operatorname{supp}(\tilde{E}) = \sigma(\tilde{N}) \subset \partial_0\mathscr{K}$ kann man annehmen, dass E und $\tilde{E}$ auf $\mathcal{B}or(\partial_0\mathscr{K})$ definiert sind. Für alle $f \in A_0(\mathscr{K}) \subset L^\infty(\partial_0\mathscr{K})$ gilt dann:

$$f(N)^*f(N) = \int_{\partial_0\mathscr{K}} |f|^2\, dE, \qquad f(\tilde{N})^*f(\tilde{N}) = \int_{\partial_0\mathscr{K}} |f|^2\, d\tilde{E}.$$

Seien $e : \mathcal{B}or(\partial_0\mathscr{K}) \to L(H)$, $\tilde{e} : \mathcal{B}or(\partial_0\mathscr{K}) \to L(\tilde{H})$ die durch Kompression von E auf H bzw. von $\tilde{E}$ auf $\tilde{H}$ gegebenen positiven Operatormaße. Dann gilt für $x \in H$ und $f \in A_0(\mathscr{K})$:

$$\|\Phi_S(f)x\|^2 = \|Pf(N)x\|^2 \le \|f(N)x\|^2 = \int_{\partial_0\mathscr{K}} |f|^2\, de_{x,x}. \tag{3.20}$$

Somit ergibt sich aus Lemma 3.4.11

$$\begin{aligned} \int_{\partial_0\mathscr{K}} |f|^2\, d\tilde{e}_{Xx,Xx} &= \|f(\tilde{N})Xx\|^2 = \|\Phi_{\tilde{S}}(f)Xx\|^2 = \|X\Phi_S(f)x\|^2 \\ &\le \|X\|^2\|\Phi_S(f)x\|^2 \le \|X\|^2 \int_{\partial_0\mathscr{K}} |f|^2\, de_{x,x} \end{aligned} \tag{3.21}$$

für alle $f \in A_0(\mathscr{K})$ und $x \in H$. Für $x \in H$ ist $\mu = \tilde{e}_{Xx,Xx} \in M^+(\partial_0\mathscr{K})$. Da $\mathscr{K}$ Aleksandrov-regulär ist, existiert zu $\varphi \in C(\mathscr{K})$ mit $\varphi > 0$ und $\varepsilon > 0$ eine Funktion $f \in A_0(\mathscr{K})$ mit $|f| \le \sqrt{\varphi}$ und $\mu(\{|f| < \sqrt{\varphi}\}) \le \varepsilon$ (Lemma 3.5.9). Es folgt

$$\int_{\partial_0\mathscr{K}} (\varphi - |f|^2)\, d\mu = \int_{\{|f|<\sqrt{\varphi}\}} (\varphi - |f|^2) d\mu \le \|\varphi\|_\infty \varepsilon, \tag{3.22}$$

und somit

$$\begin{aligned} &\int_{\partial_0\mathscr{K}} \varphi \left(\|X\|^2 de_{x,x} - d\tilde{e}_{Xx,Xx}\right) \\ &\qquad \overset{(3.22)}{\ge} \int_{\partial_0\mathscr{K}} |f|^2 \left(\|X\|^2 de_{x,x} - d\tilde{e}_{Xx,Xx}\right) - \|\varphi\|_\infty\varepsilon \overset{(3.21)}{\ge} -\|\varphi\|_\infty\varepsilon. \end{aligned}$$

Da ε beliebig gewählt werden kann, folgt für alle $x \in H$ und jede stetige Funktion $\varphi \in C(\mathscr{K})$ mit $\varphi > 0$

$$\int_{\partial_0\mathscr{K}} \varphi\, d\tilde{e}_{Xx,Xx} \le \|X\|^2 \int_{\partial_0\mathscr{K}} \varphi de_{x,x}.$$

Da die Maße auf beiden Seiten endlich sind, erhält man dieselbe Ungleichung für alle $\varphi \in C(\mathscr{K})$ mit $\varphi \ge 0$. Also ist $\langle \tilde{e}(A)Xx, Xx\rangle \le \|X\|^2\langle e(A)x, x\rangle$ für alle $A \in \mathcal{B}or(\partial_0\mathscr{K})$ und $x \in H$. Die Existenz einer stetigen linearen Fortsetzung $Y \in L(K, \tilde{K})$ von X mit $YE(A) = \tilde{E}(A)Y$ für alle $A \in \mathcal{B}or(\partial_0\mathscr{K})$ und $\|Y\| = \|X\|$ ist somit gesichert (Lemma 3.5.17). Dann ist Y auch $(N, \tilde{N})$-vertauschend. Außerdem kann Y mit dichtem Bild gewählt werden, wenn X dichtes Bild hat. ■

Aus Proposition 3.5.18 ergibt sich das folgende Korollar:

Korollar 3.5.19 *Sei $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^n$ eine Aleksandrov-reguläre kompakte Menge, seien $S \in L(H)^n$ und $\tilde{S} \in L(\tilde{H})^n$ zwei $\mathscr{K}$-Isometrien und seien $N \in L(K)^n$ und $\tilde{N} \in L(\tilde{K})^n$ minimale normale Erweiterungen von S und $\tilde{S}$. Dann gilt: Ist $X \in L(H, \tilde{H})$ ein $(S, \tilde{S})$-vertauschender Operator, so existiert eine $(N, \tilde{N})$-vertauschende Fortsetzung $Y \in L(K, \tilde{K})$ von X. Hat X dichtes Bild in $\tilde{H}$, so hat Y dichtes Bild in $\tilde{K}$.*

Korollar 3.5.19 verallgemeinert Ergebnisse von Mlak ([Mla72], Proposition 5.2) für den Einheitspolyzylinder und von Athavale ([Ath90], Proposition 8) für die Einheitskugel auf den Fall beliebiger Aleksandrov-regulärer Kompakta $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^n$. Entsprechend zu [Ath90], Proposition 9, erhält man als Korollar, dass auch über Aleksandrov-regulären Kompakta $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^n$ die minimalen normalen Erweiterungen quasiähnlicher $\mathscr{K}$-Isometrien unitär äquivalent sind.

Satz 3.5.20 *Sei $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^n$ eine Aleksandrov-reguläre kompakte Menge, seien $S \in L(H)^n$ und $\tilde{S} \in L(\tilde{H})^n$ zwei $\mathscr{K}$-Isometrien und seien $N \in L(K)^n$ und $\tilde{N} \in L(\tilde{K})^n$ minimale normale Erweiterungen von S und $\tilde{S}$. Dann gilt: Sind S und $\tilde{S}$ quasiähnlich, so sind N und $\tilde{N}$ unitär äquivalent.*

Beweis: Sind S und $\tilde{S}$ quasiähnlich und sind $X_1 \in L(H, \tilde{H})$ und $X_2 \in L(\tilde{H}, H)$ zwei quasiinvertierbare Operatoren, die respektive $(S, \tilde{S})$- und $(\tilde{S}, S)$-vertauschend sind, so existieren Fortsetzungen $Y_1 \in L(K, \tilde{K})$ und $Y_2 \in L(\tilde{K}, K)$ von X_1 und X_2 respektive zu $(N, \tilde{N})-$ und $(\tilde{N}, N)-$vertauschenden Operatoren mit dichtem Bild (Proposition 3.5.19). Dann aber sind N und $\tilde{N}$ unitär äquivalent ([Ath90], Lemma 1). ■

3.6 Wesentlich subnormale Operatortupel

Die Hauptaussage dieses Paragraphen lautet[11]:

Satz 3.6.1 *Sei $S = (S_1, ..., S_n) \in L(H)^n$ beliebig. Dann sind äquivalent:*

(i) S ist ein wesentlich subnormales Tupel;

(ii) S besitzt eine wesentlich normale Erweiterung;

(iii) S besitzt eine Erweiterung zu einer kompakten Störung eines normalen Tupels.

Satz 3.6.1 ist eine direkte Verallgemeinerung von [Fel99], Theorem 3.1. Der Beweis des Satzes wird durch einige Ergebnisse vorbereitet und erfolgt deshalb etwas später. Er zeigt, dass für ein wesentlich normales Tupel $T = (T_1, ..., T_n) \in L(K)^n$ und einen T-invarianten Teilraum H von K das Tupel $T|_H = (T_1|_H, ..., T_n|_H) \in L(H)^n$ wesentlich subnormal ist und dass man alle wesentlich subnormalen Tupel auf diese Weise erhält.

[11] Die Definitionen der in Satz 3.6.1 benutzten Begriffe wurden in §3.1 angegeben.

Beispiel 3.6.2 Sei $S = (S_1, ..., S_n) \in L(H)^n$ ein subnormales Tupel, $N = (N_1, ..., N_n) \in L(K)^n$ eine minimale normale Erweiterung von S und μ ein skalares Spektralmaß für S. Für $f \in L^\infty(\mu)$ ist der *(abstrakte) Hankel-Operator mit Symbol f bzgl. S* definiert durch $H_f : H \to H^\perp$, $H_f = (1-P)f(N)|_H$, wobei $H^\perp$ der zu H orthogonale Raum in K ist und P die orthogonale Projektion von K auf H. Ist $\tilde{N} \in L(\tilde{K})^n$ eine weitere minimale normale Erweiterung von S und ist $U : K \to \tilde{K}$ der eindeutige unitäre Operator mit $Ux = x$ für alle $x \in H$ und $UN_i = \tilde{N}_i U$ für $i = 1, ..., n$, so gilt für die bezüglich N und $\tilde{N}$ gebildeten Hankel-Operatoren mit Symbol $f \in L^\infty(\mu)$, H_f und $\tilde{H}_f$, die Beziehung $H_f = U_0 \tilde{H}_f$, falls $U_0 : K \ominus H \to \tilde{K} \ominus H$ den durch U induzierten unitären Operator bezeichnet. Ist der Hankel-Operator H_f kompakt, so ist der Toeplitz-Operator $T_f = Pf(N)|_H$ mit Symbol f wesentlich subnormal. Denn bzgl. $K = H \oplus H^\perp$ besitzt $f(N)$ die Zerlegung

$$f(N) = \begin{pmatrix} T_f & * \\ H_f & * \end{pmatrix},$$

und $f(N) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -H_f & 0 \end{pmatrix}$ ist eine Erweiterung von S zu einer kompakten Störung eines normalen Tupels.

Ist $f = (f_1, ..., f_m) \in L^\infty(\mu)^m$ ein Tupel, für das die Hankel-Operatoren H_{f_i}, $i = 1, ..., m$, kompakt sind, dann ist das Toeplitz-Tupel $T_f = (T_{f_1}, ..., T_{f_m})$ mit Symbol f wesentlich subnormal. Sind außerdem auch die Operatoren $H_{\overline{f}_i}$, $i = 1, ..., m$, kompakt, so sind T_f und T_f^* wesentlich subnormal und damit T_f wesentlich normal.

Unter einer positiven Abbildung $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen zwei unitalen C^*-Algebren versteht man eine lineare Abbildung mit $\rho(a) \geq 0$ für alle $a \geq 0$.

Proposition 3.6.3 *Sei $S = (S_1, ..., S_n) \in L(H)^n$ beliebig. Dann sind äquivalent:*

(i) *S ist subnormal;*

(ii) *es existieren eine kompakte Menge $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^n$ und eine unitale positive Abbildung $\rho : C(\mathscr{K}) \to L(H)$ mit $\rho(z_i) = S_i$ und $\rho(\overline{z}_i z_i) = S_i^* S_i$ für $i = 1, ..., n$.*

Ist S subnormal und sind $\mathscr{K}$ und ρ wie in (ii), so gilt $\sigma_n(S) \subset \mathscr{K}$.

Beweis: (i)⇒(ii): Seien $\mathscr{K} = \sigma_n(S)$ und $\rho = \tau : C(\sigma_n(S)) \to L(H)$, $f \mapsto T_f$ (vgl. §3.2, Seite 66). Dann erfüllen $\mathscr{K}$ und ρ die gewünschten Eigenschaften.

(ii)⇒(i): Seien $\mathscr{K}$ und ρ wie in (ii). Da $C(\mathscr{K})$ eine kommutative C^*-Algebra ist, ist ρ vollständig positiv ([Pau86], Theorem 3.10). Da ρ unital ist, existiert nach einem Satz von Stinespring eine Dilatation von ρ zu einem unitalen $*$-Homomorphismus $\kappa : C(\mathscr{K}) \to L(K)$ mit $\rho(f) = P\kappa(f)|_H$ für alle $f \in C(\mathscr{K})$ ([Pau86], Theorem 4.1); hierbei ist P die orthogonale Projektion von K auf H. Sei $N_i = \kappa(z_i)$ für $i = 1, ..., n$. Dann ist $N = (N_1, ..., N_n) \in L(K)^n$ ein normales Tupel mit $\sigma(N) \subset \mathscr{K}$ und es gilt $S_i = \rho(z_i) = P\kappa(z_i)|_H = PN_i|_H$ für $i = 1, ..., n$. Es muss nur noch gezeigt werden, dass H ein N-invarianter Teilraum von K ist. Hierzu wird N_i bzgl. $K = H \oplus H^\perp$ in der Form

$$N_i = \begin{pmatrix} S_i & * \\ R_i & * \end{pmatrix}$$

geschrieben mit $R_i \in L(H, H^\perp)$ für $i = 1, ..., n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} S_i^* S_i &= \rho(\overline{z}_i z_i) = P N_i^* N_i|_H = P \begin{pmatrix} S_i^* & R_i^* \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_i & * \\ R_i & * \end{pmatrix}\Bigg|_H \\ &= P \begin{pmatrix} S_i^* S_i + R_i^* R_i & * \\ * & * \end{pmatrix}\Bigg|_H = S_i^* S_i + R_i^* R_i. \end{aligned}$$

Folglich ist $R_i^* R_i = 0$ und damit $N_i = \begin{pmatrix} S_i & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ für $i = 1, ..., n$. Dies zeigt, dass H ein N-invarianter Teilraum von K ist. Also ist N eine normale Erweiterung von S. ■

Korollar 3.6.4 *Sei $S = (S_1, ..., S_n) \in L(H)^n$ subnormal, $\rho : C^*(S) \to L(\tilde{H})$ eine unitale positive Abbildung und $T_i = \rho(S_i)$ für $i = 1, ..., n$. Es gelte $\rho(S_i^* S_i) = T_i^* T_i$ für $i = 1, ..., n$. Dann ist $T = (T_1, ..., T_n) \in L(\tilde{H})^n$ subnormal mit $\sigma_n(T) \subset \sigma_n(S)$.*

Beweis: Sei $\tau : C(\sigma_n(S)) \to L(H)$, $f \mapsto T_f$ (vgl. §3.2, Seite 66). Wegen $\operatorname{im} \tau \subset C^*(S)$ (Lemma 3.2.3) ist $\rho \circ \tau$ wohldefiniert und positiv mit $\rho \circ \tau(z_i) = T_i$ und $\rho \circ \tau(\overline{z}_i z_i) = T_i^* T_i$ für $i = 1, ..., n$. Nach Proposition 3.6.3 ist T subnormal und $\sigma_n(T) \subset \sigma_n(S)$. ■

Sei $\mathcal{A}$ eine unitale C^*-Algebra und $s = (s_1, ..., s_n) \in \mathcal{A}^n$ subnormal. Aufgrund der Definition der Subnormalität ist für eine treue Darstellung (H, φ) von $\mathcal{A}$ das Tupel $S = \varphi(s) = (\varphi(s_1), ..., \varphi(s_n)) \in L(H)^n$ subnormal.

Korollar 3.6.5 *$\sigma_n(s) = \sigma_n(\varphi(s))$ ist wohldefiniert.*

Beweis: Sei $(\tilde{H}, \tilde{\varphi})$ eine weitere treue Darstellung von $\mathcal{A}$. Die durch φ und $\tilde{\varphi}$ induzierten $*$-Isomorphismen $\psi : C^*(s) \to C^*(S)$ und $\tilde{\psi} : C^*(s) \to C^*(\tilde{\varphi}(s))$ liefern einen $*$-Homomorphismus $\rho : C^*(S) \to L(\tilde{H})$ vermöge $\rho(T) = \tilde{\psi} \circ \psi^{-1}(T)$ für $T \in C^*(S)$. Für diesen gilt $\rho(\psi(s_i)) = \tilde{\psi}(s_i)$ und $\rho(\psi(s_i)^* \psi(s_i)) = \tilde{\psi}(s_i)^* \tilde{\psi}(s_i)$ für $i = 1, ..., n$. Nach Korollar 3.6.4 gilt deshalb $\sigma_n(\tilde{\psi}(s)) \subset \sigma_n(\psi(s))$. Aus Symmetriegründen folgt Gleichheit. ■

Korollar 3.6.6 *Sei $s = (s_1, ..., s_n) \in \mathcal{A}^n$ beliebig. Dann sind äquivalent:*

(i) s ist subnormal;

(ii) es existieren eine kompakte Menge $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^n$ und eine unitale positive Abbildung $\rho : C(\mathscr{K}) \to \mathcal{A}$ mit $\rho(z_i) = s_i$ und $\rho(\overline{z}_i z_i) = s_i^* s_i$ für $i = 1, ..., n$.

Ist s subnormal und sind $\mathscr{K}$ und ρ wie in (ii), so gilt $\sigma_n(s) \subset \mathscr{K}$.

Beweis: (i)⇒(ii): Ist (H, φ) eine treue Darstellung von $\mathcal{A}$ und $S = \varphi(s)$, so ist S subnormal und $C^*(S) \subset \varphi(\mathcal{A})$. Sei $\tau : C(\sigma_n(s)) \to L(H)$ wie in §3.2 definiert. Wegen

$\operatorname{im}\tau \subset C^*(S)$ (Lemma 3.2.3) leisten die Menge $\mathscr{K} = \sigma_n(S)$ und die Abbildung $\rho = \varphi^{-1} \circ \tau : C(\sigma_n(S)) \to \mathcal{A}$ das Verlangte.

(ii)⇒(i): Seien $\mathscr{K}$ und ρ wie in (ii) und sei (H, φ) eine treue Darstellung von $\mathcal{A}$. Vermöge $\tilde{\rho} : C(\mathscr{K}) \to L(H)$, $\tilde{\rho} = \varphi \circ \rho$ erhält man eine unitale positive Abbildung mit $\tilde{\rho}(z_i) = \varphi(s_i)$. Dann ist $S = \varphi(s) \in L(H)^n$ nach Proposition 3.6.3 subnormal. Folglich ist auch $s = (s_1, ..., s_n)$ subnormal und $\sigma_n(s) = \sigma_n(\varphi(s)) \subset \mathscr{K}$. ■

Wir sind nun in der Lage, Satz 3.6.1 zu beweisen:

Beweis: (von Satz 3.6.1)

(iii)⇒(ii): Das ist klar.

(ii)⇒(i): Sei $T = (T_1, ..., T_n) \in L(K)^n$ eine wesentlich normale Erweiterung von S. Sei $\rho : C(\sigma_e(T)) \to \mathcal{C}(H)$ definiert durch $\rho(f) = P\tilde{f}(T)|_H + K(H)$, wobei $\tilde{f}(T)$ für einen Repräsentanten von $f(T + K(K)) \in \mathcal{C}(K)$ steht und P für die orthogonale Projektion von K auf H. Die Abbildung ρ ist wohldefiniert, unital, positiv und erfüllt $\rho(z_i) = PT_i|_H + K(H) = S_i + K(H)$ und $\rho(\overline{z}_i z_i) = PT_i^* T_i|_H + K(H) = (S_i + K(H))^*(S_i + K(H))$ für $i = 1, ..., n$. Nach Korollar 3.6.6 ist $S + K(H) \in \mathcal{C}(H)^n$ subnormal.

(i)⇒(iii): Sei S wesentlich subnormal, $\mathscr{K} \subset \mathbb{C}^n$ eine kompakte Menge und $\rho : C(\mathscr{K}) \to \mathcal{C}(H)$ eine unitale positive Abbildung mit $\rho(z_i) = S_i + K(H)$ und $\rho(\overline{z}_i z_i) = S_i^* S_i + K(H)$ für $i = 1, ..., n$ (Korollar 3.6.6). Dann existiert ein positives unitales Lifting $\tilde{\rho} : C(\mathscr{K}) \to L(H)$ mit $\rho = \pi \circ \tilde{\rho}$ ([Dav96], Theorem IX.4.10), wobei $\pi : L(H) \to \mathcal{C}(H)$ der kanonische Epimorphismus ist. Da $C(\mathscr{K})$ kommutativ und $\tilde{\rho}$ deshalb vollständig positiv ist ([Pau86], Theorem 3.10), existiert eine Dilatation von $\tilde{\rho}$ zu einem unitalen $*$-Homomorphismus $\kappa : C(\mathscr{K}) \to L(K)$ ([Pau86], Theorem 4.1). Sei $N_i = \kappa(z_i)$ und $T_i = \tilde{\rho}(z_i)$ für $i = 1, ..., n$, sowie $N = (N_1, ..., N_n) \in L(K)^n$ und $T = (T_1, ..., T_n) \in L(H)^n$. Dann ist N normal, $\sigma(N) \subset \mathscr{K}$, $T_i = PN_i|_H$ und deshalb

$$N_i = \begin{pmatrix} T_i & * \\ R_i & * \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } K = H \oplus H^\perp$$

mit $R_i \in L(H, H^\perp)$ für $i = 1, ..., n$. Es folgt

$$N_i^* N_i = \begin{pmatrix} T_i^* & R_i^* \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_i & * \\ R_i & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_i^* T_i + R_i^* R_i & * \\ * & * \end{pmatrix},$$

und somit

$$\begin{aligned} S_i^* S_i + K(H) &= \rho(\overline{z}_i z_i) = \tilde{\rho}(\overline{z}_i z_i) + K(H) = PN_i^* N_i|_H + K(H) \\ &= T_i^* T_i + R_i^* R_i + K(H) \quad \text{sowie} \\ S_i^* S_i + K(H) &= (S_i + K(H))^*(S_i + K(H)) = (T_i + K(H))^*(T_i + K(H)) \\ &= T_i^* T_i + K(H) \end{aligned}$$

für $i = 1, ..., n$. Demzufolge sind $S_i^* S_i - T_i^* T_i$ und $S_i^* S_i - T_i^* T_i - R_i^* R_i$ kompakt, also auch $R_i^* R_i$ und damit R_i für $i = 1, ..., n$. Da für $i = 1, ..., n$ die Differenz $S_i - T_i$ kompakt ist, gilt dasselbe für $C_i = \begin{pmatrix} S_i - T_i & 0 \\ -R_i & 0 \end{pmatrix}$. Somit ist

$$N_i + C_i = \begin{pmatrix} S_i & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

für $i = 1, ..., n$ und $N + C$ eine Erweiterung von S zu einer kompakten Störung eines normalen Tupels. ■

Korollar 3.6.7 *Sei $S \in L(H)^n$ ein wesentlich subnormales Operatortupel. Dann gilt:*

(a) Ist T eine wesentlich normale Erweiterung von S, so gilt $\sigma_n(S + K(H)) \subset \sigma_e(T)$.

(b) Es existiert eine Erweiterung von S der Form $N + C$ mit einem normalen Operatortupel N, einem Tupel C kompakter Operatoren und mit $\sigma_e(N) = \sigma(N) = \sigma_n(S + K(H))$.

(c) Ist H_0 ein S-invarianter Teilraum, so ist $S|_{H_0}$ wesentlich subnormal und es gilt $\sigma_n(S|_{H_0} + K(H_0)) \subset \sigma_n(S + K(H))$.

Beweis: (a) Ist S ein Operatortupel auf H, T eine wesentlich normale Erweiterung von S auf K und $\rho : C(\sigma_e(T)) \to \mathcal{C}(H)$ definiert wie im Beweisteil (ii)⇒(i) von Satz 3.6.1, so ist ρ unital und positiv mit $\rho(z_i) = S_i + K(H)$ und $\rho(\overline{z}_i z_i) = S_i^* S_i + K(H)$ für $i = 1, ..., n$. Dann ist $\sigma_n(S + K(H)) \subset \sigma_e(T)$ nach Korollar 3.6.6.

(b) Wiederholt man den Beweisteil (i)⇒(iii) von Satz 3.6.1 mit $\mathscr{K} = \sigma_n(S + K(H))$, so erhält man eine Erweiterung von S der Form $N + C$. Mit den dortigen Notationen ist $N_i = \kappa(z_i)$ für $i = 1, ..., n$ mit einem unitalen $*$-Homomorphismus $\kappa : C(\sigma_n(S+K(H))) \to L(K)$. Dann ist $\sigma(N) \subset \sigma_n(S + K(H))$ und somit $\sigma_e(N) \subset \sigma(N) \subset \sigma_n(S + K(H))$. Nach (a) gilt $\sigma_n(S + K(H)) \subset \sigma_e(N + C) = \sigma_e(N)$.

(c) Nach Satz 3.6.1 existiert eine wesentlich normale Erweiterung T von S. Diese ist auch eine wesentlich normale Erweiterung von $S|_{H_0}$, d.h. $S|_{H_0}$ ist nach demselben Satz wesentlich subnormal. Die wesentlich normale Erweiterung T kann nach (b) so gewählt werden, dass $\sigma_n(S+K(H)) = \sigma_e(T)$ gilt. Wegen (a) ist dann $\sigma_n(S|_{H_0}+K(H_0)) \subset \sigma_e(T) = \sigma_n(S + K(H))$. ■

Wir nennen ein vertauschendes Tupel $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathcal{A}^n$ in einer unitalen C^*-Algebra $\mathcal{A}$ eine *sphärische Isometrie*, wenn $\sum_{i=1}^n x_i^* x_i = 1$ ist. Ein Tupel $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathcal{A}^n$ heißt *sphärisch unitär*, falls $x_1, ..., x_n$ vertauschende, normale Elemente in $\mathcal{A}$ sind mit $\sum_{i=1}^n x_i^* x_i = 1$. Ein Tupel $S \in L(H)^n$ von Operatoren auf einem Hilbertraum heißt eine *wesentlich sphärische Isometrie* (bzw. *wesentlich sphärisch unitär*), falls $S + K(H)$ als Tupel in der Calkin-Algebra $\mathcal{C}(H)$ eine sphärische Isometrie (bzw. sphärisch unitär) ist.

Wir benutzen Korollar 3.6.7, um eine Charakterisierung wesentlich sphärischer Isometrien anzugeben.

Korollar 3.6.8 *Für ein beliebiges Tupel $S \in L(H)^n$ sind äquivalent:*

(i) *S ist eine wesentlich sphärische Isometrie;*

(ii) *S ist wesentlich subnormal und $\sigma_n(S + K(H)) \subset \partial\mathbb{B}^n$;*

(iii) *S besitzt eine Erweiterung der Form $U + C$, wobei $U \in L(K)^n$ sphärisch unitär ist und $C \in L(K)^n$ ein Tupel kompakter Operatoren auf einem größeren Hilbertraum K;*

(iv) *S besitzt eine Erweiterung zu einem wesentlich sphärisch unitären Tupel $U \in L(K)^n$.*

Beweis: (i)⇒(ii): Ist $\rho : \mathcal{C}(H) \to L(K)$ eine unitale treue Darstellung der Calkin-Algebra $\mathcal{C}(H)$ und $S = (S_1, ..., S_n)$, so ist $\rho(S + K(H)) = (\rho(S_1 + K(H)), ..., \rho(S_n + K(H))) \in L(K)^n$ eine sphärische Isometrie. Nach [Ath90], Proposition 2, ist $\rho(S+K(H))$ subnormal (d.h. S wesentlich subnormal) mit $\sigma_n(S + K(H)) \subset \partial\mathbb{B}^n$.

(ii)⇒(iii): Dies folgt direkt aus Teil (b) von Korollar 3.6.7.

(iii)⇒(iv): Das ist klar.

(iv)⇒(i): Es gelte (iv). Nach Satz 3.6.1 ist S wesentlich subnormal und nach Teil (a) von Korollar 3.6.7 ist $\sigma_n(S + K(H)) \subset \sigma_e(U) \subset \partial\mathbb{B}^n$. Ist $\rho : \mathcal{C}(H) \to L(\tilde{H})$ eine unitale treue Darstellung der Calkin-Algebra $\mathcal{C}(H)$, so ist $\rho(S + K(H)) \in L(\tilde{H})^n$ subnormal mit $\sigma_n(\rho(S+K(H))) = \sigma_n(S+K(H)) \subset \partial\mathbb{B}^n$. Also ist $\rho(S+K(H))$ eine sphärische Isometrie und damit auch $S + K(H)$. ■

Wir schließen diesen Paragraphen mit einer Strukturaussage über wesentlich subnormale Operatortupel:

Satz 3.6.9 *Sei $S \in L(H)^n$ ein wesentlich subnormales Tupel. Dann gilt:*

(a) $C^*(S) \cap K(H) = \{0\} \implies S$ *ist subnormal.*

(b) *Es existiert eine orthogonale direkte Zerlegung*

$$L_0 \oplus \left(\bigoplus_{j \in M} H_j \right)$$

von H in S-reduzierende Teilräume derart, dass für $S_0 = S|_{L_0}$ und $S_j = S|_{H_j}$ gilt: S_0 ist subnormal und S_j ist irreduziebel und wesentlich subnormal mit $K(H_j) \subset C^*(S_j)$ für alle $j \in M$.

Beweis: (a) Es bezeichne $\pi : L(H) \to \mathcal{C}(H)$ den kanonischen Epimorphismus. Für $T, R \in C^*(S)$ mit $\pi(T) = \pi(R)$ gilt dann $T - R \in C^*(S) \cap K(H) = \{0\}$, d.h. $T = R$, und $\pi|_{C^*(S)} : C^*(S) \to \pi(C^*(S))$ ist ein $*$-Isomorphismus. Insbesondere ist mit $\pi(S)$ auch S subnormal.

(b) Nach Satz A.4.1 besitzt H eine orthogonale direkte Zerlegung in S-reduzierende Teilräume der Form

$$H = H_0 \oplus \left(\bigoplus_{i \in N} \hat{H}_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{j \in M} \tilde{H}_j \right),$$

wobei H_0 keinen minimalen S-reduzierenden Teilraum enthält und $C^*(S|_{\hat{H}_i}) \cap K(\hat{H}_i) = \{0\}$ für alle $i \in N$ und $K(\tilde{H}_j) \subset C^*(S|_{\tilde{H}_j})$ für alle $j \in M$ gilt. Es ist offensichtlich, dass $T_0 = S|_{H_0}$, $T_i = S|_{\hat{H}_i}$, $S_j = S|_{\tilde{H}_j}$ für $i \in N$ und $j \in M$ wesentlich subnormale Operatortupel sind. Proposition A.4.2 zeigt, dass $C^*(T_0) \cap K(H_0) = \{0\}$ gilt. Mit Teil (a) folgt deshalb die Subnormalität von $S_0 = T_0 \oplus \left(\bigoplus_{i \in N} T_i\right) \in L(L_0)$ mit $L_0 = H_0 \oplus \left(\bigoplus_{i \in N} \hat{H}_i\right)$. Satz A.4.1 beinhaltet auch die Irreduzibilität der Operatortupel S_j. ∎

Anhang

A.1 Holomorphe Funktionen und Steinsche Mengen

Ein zentrales Objekt dieser Arbeit ist der Raum $\mathscr{O}(\Omega)$ der holomorphen Funktionen auf einer komplexen Mannigfaltigkeit Ω.[12] Er wird mit der Fréchetraum-Topologie der kompakt gleichmäßigen Konvergenz versehen und ist dann nuklear, wie das folgende Argument zeigt:

Ist $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine beliebige offene Überdeckung von Ω, so ist

$$0 \to \mathscr{O}(\Omega) \xrightarrow{r} \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{O}(U_i) \xrightarrow{s} \prod_{i,j\in\mathbb{N}} \mathscr{O}(U_i \cap U_j) \tag{A.1}$$

mit $r(f) = (f|_{U_i})_{i\in\mathbb{N}}$ und $s((f_i)_{i\in\mathbb{N}}) = (f_i|_{U_i\cap U_j} - f_j|_{U_i\cap U_j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ exakt. Die Abbildungen r und s sind stetig und r sogar ein topologischer Monomorphismus. Wählt man die Überdeckung so, dass jedes U_i, $i \in \mathbb{N}$, konform äquivalent zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{C}^n$ ist, so ist $\mathscr{O}(U_i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ nuklear ([EP96], Theorem A1.4), und damit auch $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{O}(U_i)$ und $\mathscr{O}(\Omega)$ ([EP96], Theorem A1.3).

Für Ω wie oben und für einen Banachraum E benutzen wir die topologische Identifizierung der Räume $\mathscr{O}(\Omega)\hat{\otimes}E$ und $\mathscr{O}(\Omega, E)$, wobei der erste für das vollständige projektive Tensorprodukt von $\mathscr{O}(\Omega)$ und E steht und der zweite Raum der Fréchetraum der holomorphen E-wertigen Funktionen über Ω ist. Es handelt sich bei dieser Identifizierung um ein klassisches Resultat, dass auf Grothendieck zurückgeht ([Gro66]). Mit der Sequenz (A.1) kann man die Gültigkeit dieser topologischen Identifizierung im Falle von Mannigfaltigkeiten zurückführen auf den Fall offener Mengen in $\mathbb{C}^n$:

Mit (A.1) ist auch die Sequenz

$$0 \to \mathscr{O}(\Omega)\hat{\otimes}E \xrightarrow{r\otimes \mathrm{id}_E} \left(\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{O}(U_i)\right)\hat{\otimes}E \xrightarrow{s\otimes \mathrm{id}_E} \left(\prod_{i,j\in\mathbb{N}} \mathscr{O}(U_i \cap U_j)\right)\hat{\otimes}E$$

exakt, wobei die Abbildungen $r \otimes \mathrm{id}_E$ und $s \otimes \mathrm{id}_E$ stetig sind ([EP96], Theorem A1.6). Im folgenden Diagramm sind die horizontalen Sequenzen exakt und die beiden vertikalen

[12] Eine komplexe Mannigfaltigkeit ist in dieser Arbeit immer metrisierbar und separabel.

Identifikationen rechts topologisch (vgl. [Jar81], Theorem 16.3.1 und Corollary 16.7.5):

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \mathscr{O}(\Omega)\hat{\otimes}E & \longrightarrow & \left(\prod\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{O}(U_i)\right)\hat{\otimes}E & \longrightarrow & \left(\prod\limits_{i,j\in\mathbb{N}} \mathscr{O}(U_i\cap U_j)\right)\hat{\otimes}E\,. \\
& \Big\downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\cong} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\cong} \\
0 \longrightarrow & \mathscr{O}(\Omega, E) & \longrightarrow & \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{O}(U_i, E) & \longrightarrow & \prod\limits_{i,j\in\mathbb{N}} \mathscr{O}(U_i\cap U_j, E)
\end{array}$$

Die Abbildung φ ist die stetige Fortsetzung der kanonisch definierten und stetigen Abbildung $\tilde{\varphi} : \mathscr{O}(\Omega)\otimes E \to \mathscr{O}(\Omega, E)$, $f\otimes x \mapsto f(\cdot)x$. Aus dem Diagramm kann man folgern, dass φ ein topologischer Isomorphismus ist.

In vergleichbarer Weise lassen sich die Räume

$$C^\infty_{i,j}(U)\hat{\otimes}E \quad \text{und} \quad C^\infty_{i,j}(U,E)$$

topologisch identifizieren, wobei $C^\infty_{i,j}(U)$ der Raum der unendlich oft reell differenzierbaren komplexen Formen vom Bigrad (i,j) auf U und $C^\infty_{i,j}(U,E)$ der entsprechende Raum mit Werten in E ist, beide jeweils versehen mit ihrer kanonischen Fréchetraum-Topologie.

Die Relevanz dieser Räume hat mit der *$\overline{\partial}$-Sequenz*

$$0 \to \mathscr{O}(U) \xrightarrow{i} C^\infty_{0,0}(U) \xrightarrow{\overline{\partial}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}} C^\infty_{0,n}(U) \to 0 \tag{A.2}$$

zu tun und der zugehörigen tensorierten Sequenz

$$0 \to \mathscr{O}(U,E) \xrightarrow{i\otimes\mathrm{id}_E} C^\infty_{0,0}(U,E) \xrightarrow{\overline{\partial}\otimes\mathrm{id}_E} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}\otimes\mathrm{id}_E} C^\infty_{0,n}(U,E) \to 0. \tag{A.3}$$

Die erste Sequenz impliziert eine azyklische Auflösung der Garbe $\mathscr{O}_U$ der Keime holomorpher Funktionen auf U und die zweite eine azyklische Auflösung der Garbe $\mathscr{O}^E_U$ der Keime holomorpher E-wertiger Funktionen auf U. Damit ist Folgendes gemeint:

Sei $\mathscr{A}$ eine Garbe von Ringen und sei $\mathscr{G}$ eine Garbe von $\mathscr{A}$-Moduln über dem topologischen Raum Ω.[13] Dann ist eine *(rechtsseitige) Auflösung* von $\mathscr{G}$ eine Familie $(\mathscr{G}^p, \delta^p)_{p\geq 0}$ von $\mathscr{A}$-Modul-Garben $\mathscr{G}^p$ und $\mathscr{A}$-Modul-Homomorphismen $\delta^p : \mathscr{G}^p \to \mathscr{G}^{p+1}$ derart, dass die Sequenz

$$0 \to \mathscr{G} \xrightarrow{\varepsilon} \mathscr{G}^0 \xrightarrow{\delta^0} \mathscr{G}^1 \xrightarrow{\delta^1} \cdots \tag{A.4}$$

mit einem geeigneten $\mathscr{A}$-Modul-Homomorphismus $\varepsilon : \mathscr{G} \to \mathscr{G}^0$ exakt ist. Für die Familie $(\mathscr{G}^p, \delta^p)_{p\geq 0}$ wird vereinfachend $\mathscr{G}^\bullet$ geschrieben. Sind die $\mathscr{A}$-Modul-Garben $\mathscr{G}^p$ einer Auflösung von $\mathscr{G}$ *welk*, so spricht man von einer *welken Auflösung* von $\mathscr{G}$.[14] Für $U \subset \Omega$ werden die Schnitträume der Garben $\mathscr{A}$ und $\mathscr{G}$ mit $\Gamma(U,\mathscr{A})$ bzw. $\Gamma(U,\mathscr{G})$ bezeichnet; ersterer ist ein Ring mit 1, letzterer ein $\Gamma(U,\mathscr{A})$-Modul. Jede $\mathscr{A}$-Modul-Garbe besitzt eine

[13] Zur Garbentheorie vergleiche man etwa [Kul70].

[14] Eine $\mathscr{A}$-Modul-Garbe $\mathscr{G}$ heißt *welk*, wenn jede ihrer Schnittflächen über einer offenen Teilmenge $U \subset \Omega$ sich fortsetzen lässt zu einer Schnittfläche über Ω.

kononische welke Auflösung ([Kul70], §17). Ist eine (beliebige) Auflösung von $\mathscr{G}$ gegeben, so erhält man hieraus einen $\Gamma(\Omega, \mathscr{A})$-Modul-Komplex globaler Schnitte:

$$0 \to \Gamma(\Omega, \mathscr{G}^0) \xrightarrow{\delta_\Omega^0} \Gamma(\Omega, \mathscr{G}^1) \xrightarrow{\delta_\Omega^1} \cdots .$$

Für eine welke Auflösung $\mathscr{G}^\bullet$ von $\mathscr{G}$ sind die Homologieräume

$$H^p(\Omega, \mathscr{G}) = \ker \delta_\Omega^p / \operatorname{im} \delta_\Omega^{p-1}, \quad p \geq 0 \quad (\delta_\Omega^{-1} = 0)$$

eindeutig bis auf Isomorphie von $\Gamma(\Omega, \mathscr{A})$-Moduln ([Kul70], §18). Eine $\mathscr{A}$-Modul-Garbe $\mathscr{G}$ über Ω heißt *azyklisch*, falls $H^p(\Omega, \mathscr{G}) = 0$ für alle $p \geq 1$ gilt.

Es wird kurz die zentrale Folgerung aus der Azyklizität einer $\mathscr{A}$-Modul-Garbe $\mathscr{G}$ erläutert: Ist

$$0 \to \mathscr{G} \to \mathscr{G}' \to \mathscr{G}'' \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von $\mathscr{A}$-Modul-Garben und $\mathscr{A}$-Modul-Homomorphismen, so erhält man eine lange exakte Sequenz

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow \Gamma(\Omega, \mathscr{G}) \longrightarrow \Gamma(\Omega, \mathscr{G}') \xrightarrow{\rho} \Gamma(\Omega, \mathscr{G}'') \longrightarrow \\ \longrightarrow H^1(\Omega, \mathscr{G}) \longrightarrow H^1(\Omega, \mathscr{G}') \longrightarrow H^1(\Omega, \mathscr{G}'') \longrightarrow \\ \longrightarrow H^2(\Omega, \mathscr{G}) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

([Kul70], Satz 18.4). Ist $\mathscr{G}$ azyklisch, so ergibt sich statt der langen eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \Gamma(\Omega, \mathscr{G}) \longrightarrow \Gamma(\Omega, \mathscr{G}') \xrightarrow{\rho} \Gamma(\Omega, \mathscr{G}'') \longrightarrow 0$$

mit wichtigen Konsequenzen (vgl. §2.2). Es gilt: Ist $\mathscr{G}$ azyklisch, so ist $\mathscr{G}'$ azyklisch genau dann, wenn $\mathscr{G}''$ azyklisch ist.

Sei Ω eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension n. Eine *analytische Garbe* $\mathscr{G}$ über Ω ist eine $\mathscr{O}_\Omega$-Modul-Garbe. Ist Ω eine Steinsche Mannigfaltigkeit, so ist die Garbe $\mathscr{O}_\Omega$ azyklisch. Eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}^n$ ist Steinsch genau dann, wenn sie ein Holomorphiebereich ist bzw. genau dann, wenn sie holomorph-konvex ist.

In zwei wichtigen Fällen ist eine analytische Garbe $\mathscr{G}$ über einer komplexen Mannigfaltigkeit stets azyklisch:

Eine $\mathscr{A}$-Modul-Garbe $\mathscr{G}$ über einem topologischen Raum Ω heißt *kohärent*, wenn $\mathscr{G}$ lokal endlich erzeugt ist (d.h. wenn jeder Punkt $x \in \Omega$ eine offene Umgebung U besitzt so, dass $\Gamma(U, \mathscr{G})$ ein endlich erzeugter $\Gamma(U, \mathscr{A})$-Modul ist) und wenn für jede offene Menge $U \subset \Omega$ und jeden $\mathscr{O}_U$-Modul-Homomorphismus $u : \mathscr{O}_U^p \to \mathscr{G}|_U$ der Kern von u lokal endlich erzeugt ist. Cartans Theorem B (z. Bsp. [EP96], Theorem 4.1.4) besagt, dass kohärente analytische Garben über Steinschen Mannigfaltigkeiten azyklisch sind.

Im zweiten Fall sei E ein Banachraum und Ω eine Steinsche Mannigfaltigkeit der Dimension n. Dann ist $\mathscr{O}_\Omega^E$ azyklisch. Dies beweist man mit der E-wertigen $\overline{\partial}$-Sequenz.

A.2 Das Garbenmodell

Sei E ein Banachraum und $T \in L(E)^n$ ein vertauschendes Tupel. Dann kann man E mit einer kanonischen $\mathscr{O}(\mathbb{C}^n)$-Modulstruktur versehen, indem man die Moduloperation $\mathscr{O}(\mathbb{C}^n) \times E \to E$ durch $(f, x) \mapsto f.x = f(T)x$ $(f \in \mathscr{O}(\mathbb{C}^n), x \in E)$ definiert. Hierbei ist $f(T) \in L(E)$ der Operator, den man erhält, wenn man in der Potenzreihendarstellung von f die Variablen $z_1, ..., z_n$ durch die Operatoren $T_1, ..., T_n$ ersetzt. Die so definierte $\mathscr{O}(\mathbb{C}^n)$-Modulstruktur auf E macht E zu einem topologischen $\mathscr{O}(\mathbb{C}^n)$-Modul (siehe [EP96]).

Mit Hilfe des Koszul-Komplex

$$K^\bullet(z - T, E) : 0 \to \Lambda^0(s, E) \xrightarrow{\delta_T^0(z)} \cdots \to \Lambda^{n-1}(s, E) \xrightarrow{\delta_T^{n-1}(z)} \Lambda^n(s, E) \to 0$$

kann man für alle offenen $U \subset \mathbb{C}^n$ einen lokalkonvexen Raum

$$F_T(U) = \mathscr{O}(U, E)/\operatorname{im} \delta_{T,U}^{n-1}$$

definieren (wobei $E \cong \Lambda^n(s, E)$ ausgenutzt wird). Mit den kanonisch definierten Restriktionsabbildungen $r_{U,V} : F_T(U) \to F_T(V)$ $(V \subset U$ offen) erhält man ein Garbendatum $(F_T(U), r_{U,V}; V, U \subset \mathbb{C}^n$ offen$, V \subset U)$. Die zugehörige $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}$-Garbe wird mit $\mathcal{F}_T$ bezeichnet und das *kanonische Garbenmodell* von T genannt.

Unter zusätzlichen Voraussetzungen an T kann man aus Eigenschaften des kanonischen Garbenmodells von T auf Eigenschaften von T schließen:

Ein vertauschendes Tupel $T \in L(E)$ besitzt die *SVEP* (= *single valued extension property*), wenn der Fréchetraum-Komplex

$$0 \to \mathscr{O}(U, E^0) \xrightarrow{\delta_{T,U}^0} \mathscr{O}(U, E^1) \to \cdots \xrightarrow{\delta_{T,U}^{n-1}} \mathscr{O}(U, E^n)$$

mit $E^p = \Lambda^p(s, E)$ für $p = 0, ..., n$ für alle Steinschen offenen Mengen $U \subset \mathbb{C}^n$ exakt ist. Putinar zeigt in [Put83], Proposition 1.3, dass für ein Operatortupel T, das die SVEP besitzt, über allen Steinschen offenen Menge $U \subset \mathbb{C}^n$ die Räume $F_T(U)$ und $\Gamma(U, \mathcal{F}_T)$ als $\mathscr{O}(U)$-Moduln isomorph sind. In derselben Arbeit zeigt Putinar auch das folgende Resultat ([Put83], Lemma 2.1):

Proposition A.2.1 *Seien E ein Banachraum, $T \in L(E)^n$ ein vertauschendes Tupel mit der SVEP und $\mathcal{F}_T$ das kanonische Garbenmodell von T. Dann gilt:*

$$\sigma(T) = \operatorname{supp} \mathcal{F}_T \tag{A.5}$$

Besitzt das vertauschende Tupel T auf E darüberhinaus die *Eigenschaft (β)*, d.h. T hat die SVEP und $\operatorname{im} \delta_{T,U}^{n-1}$ ist abgeschlossen in $\mathscr{O}(U, E)$ für alle Steinschen offenen Menge $U \subset \mathbb{C}^n$,[15] so trägt $F_T(U)$ für alle Steinschen offenen Mengen $U \subset \mathbb{C}^n$ eine kanonische

[15] Die Eigenschaft (β) wurde 1959 von Bishop für einzelne Operatoren eingeführt ([Bis59]) und 1975 von Frunza auf die mehrdimensionale Situation verallgemeinert ([Fru75]).

Fréchetraum-Topologie. Vermöge der Identifizierung $F_T(U) \cong \Gamma(U, \mathcal{F}_T)$ kann man in diesem Fall auch $\Gamma(U, \mathcal{F}_T)$ mit einer Fréchetraum-Topologie versehen. Bezüglich dieser sind die $\mathscr{O}(U)$-Moduloperation auf $\Gamma(U, \mathcal{F}_T)$ und die bzgl. Steinschen offenen Mengen betrachteten Restriktionsabbildungen $r_{U,V} : \Gamma(U, \mathcal{F}_T) \to \Gamma(V, \mathcal{F}_T)$ stetig. In der bereits zitierten Arbeit von Putinar wird gezeigt, dass dann auch $\Gamma(U, \mathcal{F}_T)$ für beliebiges offenes $U \subset \mathbb{C}^n$ mit einer Fréchetraum-Topologie versehen werden kann. Hierzu wählt man eine offene Überdeckung $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von U aus Steinschen offenen Mengen und benutzt zur Definition der Topologie auf $\Gamma(U, \mathcal{F}_T)$ die Exaktheit der Sequenz

$$0 \to \Gamma(U, \mathcal{F}_T) \to \prod_{k \in \mathbb{N}} \Gamma(U_k, \mathcal{F}_T) \to \prod_{k,l \in \mathbb{N}} \Gamma(U_k \cap U_l, \mathcal{F}_T);$$

der Raum $\Gamma(U, \mathcal{F}_T)$ wird hierbei mit der Relativtopologie der Produkttopologie von $\prod_{k \in \mathbb{N}} \Gamma(U_k, \mathcal{F}_T)$ versehen. Eine Anwendung des Satzes vom abgeschlossenen Graphen zeigt, dass die so erhaltene Topologie auf $\Gamma(U, \mathcal{F}_T)$ unabhängig von der gewählten Überdeckung von U ist. Bezüglich dieser Topologie sind die $\mathscr{O}(U)$-Moduloperation auf $\Gamma(U, \mathcal{F}_T)$ und die Restriktionsabbildungen $r_{U,V} : \Gamma(U, \mathcal{F}_T) \to \Gamma(V, \mathcal{F}_T)$ ($V \subset U$ offen) stetig. Diese Erkenntnisse führen zu der folgenden Definition:

Eine *analytische Fréchet-Garbe* $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{C}^n$ ist eine $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n}$-Modulgarbe $\mathcal{F}$, für die für jede offene Menge $U \subset \mathbb{C}^n$ der Schnittraum $\Gamma(U, \mathcal{F})$ mit einer Fréchetraum-Topologie versehen ist, bzgl. der sowohl die $\mathscr{O}(U)$-Moduloperation auf $\Gamma(U, \mathcal{F})$ als auch die Restriktionsabbildungen $\Gamma(U, \mathcal{F}) \to \Gamma(V, \mathcal{F})$ ($V \subset U$ offen) stetig sind.

Das bzgl. eines vertauschenden Tupels $T \in L(E)^n$ mit Eigenschaft (β) gebildete kanonische Garbenmodell gemeinsam mit der oben eingeführten Fréchetraum-Topologie auf den Schnitträumen ist also ein Beispiel einer analytischen Fréchet-Garbe. In diesem besonderen Fall gilt zusätzlich: Der globale Schnittraum $\Gamma(\mathbb{C}^n, \mathcal{F}_T)$ ist topologisch und als $\mathscr{O}(\mathbb{C}^n)$-Modul isomorph zu E ([Put83], Lemma 1.6). Dies führt zu einer weiteren Definition:

Ein vertauschendes Tupel $T \in L(E)^n$ besitzt ein *analytisches Fréchet-Garbenmodell*, wenn es eine analytische Fréchet-Garbe $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{C}^n$ gibt so, dass $\Gamma(\mathbb{C}^n, \mathcal{F})$ und E topologisch und als $\mathscr{O}(\mathbb{C}^n)$-Moduln isomorph sind.

In Proposition A.2.1 wird das Spektrum von T mit dem Träger einer geeigneten Garbe identifiziert. Im Folgenden geht es darum, eine geeignete Garbe anzugeben bzgl. der eine ähnliche Gleichung für das wesentliche Spektrum $\sigma_e(T)$ gilt.

Sei F ein Fréchetraum mit erzeugendem Halbnormensystem $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Auf dem Raum F^∞ der beschränkten Folgen in F lässt sich zu jeder stetigen Halbnorm p auf F eine Halbnorm p^∞ definieren:

$$p^\infty((x_k)_{k \in \mathbb{N}}) = \sup\{p(x_k); k \in \mathbb{N}\}.$$

Dann ist $(p_n^\infty)_{n \in \mathbb{N}}$ ein abzählbares Halbnormensystem auf F^∞ bzgl. dem F^∞ ein Fréchetraum ist. Die Zuordnung $F \mapsto F^\infty$, die jedem Fréchetraum F den Fréchetraum F^∞

zuordnet, wird zu einem Funktor auf der Kategorie $\mathscr{F}$ der Frécheträume und ihrer stetigen linearen Abbildungen, wenn man für $T \in L(F,G)$ (F,G Frécheträume) die Abbildung $T^\infty : F^\infty \to G^\infty$ definiert durch $T^\infty((x_k)_{k\in\mathbb{N}}) = (Tx_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Sei F^{pc} die Menge der präkompakten Folgen in F. Man kann zeigen, dass F^{pc} ein abgeschlossener Teilraum von F^∞ ist und dass die Zuordnung $F \mapsto F^{pc}$ ein Funktor auf $\mathscr{F}$ ist, wenn man für $T \in L(F,G)$ die Abbildung $T^{pc} : F^{pc} \to G^{pc}$ definiert durch $T^{pc} = T^\infty|_{F^{pc}}$.

Definiert man schließlich F^q durch $F^q = F^\infty/F^{pc}$, so ist auch F^q ein Fréchetraum und die Zuordnung $F \mapsto F^q$ ein Funktor auf $\mathscr{F}$, falls $T^q((x_k)_{k\in\mathbb{N}} + F^{pc}) = T^\infty(x_k)_{k\in\mathbb{N}} + G^{pc}$ für $T \in L(F,G)$ definiert wird.

Proposition A.2.2 *Für ein vertauschendes Operatortupel T auf E mit Eigenschaft (β) gilt*

$$\sigma_e(T) = \operatorname{supp} \mathcal{G}_T,$$

wobei $\mathcal{G}_T$ die Garbe ist, die man aus dem Garbendatum $(\Gamma(U,\mathcal{F}_T)^q, r^q_{U,V};\, V,U \subset \mathbb{C}^n$ offen, $V \subset U)$ erhält.

Beweis: Nach [EP96], Corollary 6.3.3, hat das vertauschende Tupel $T^q = (T_1^q, ..., T_n^q) \in L(E^q)$ die Eigenschaft (β) und besitzt das Garbenmodell $\mathcal{G}_T$. Also gilt nach §2.6 in [EP96] und Propositon A.2.1 die Identität

$$\sigma_e(T) = \sigma(T^q) = \operatorname{supp}(\mathcal{G}_T).$$

■

A.3 Modul-Komplexe

Sei $f^\bullet : (M^\bullet, d^\bullet) \to (\tilde{M}^\bullet, \tilde{d}^\bullet)$ ein Morphismus zwischen zwei A-Modul-Komplexen $(M^\bullet, d^\bullet)$ und $(\tilde{M}^\bullet, \tilde{d}^\bullet)$ (A kommutativer Ring mit 1). Dann ist der *Abbildungskegel* $C^\bullet(f^\bullet)$ von $f^\bullet$ ein Komplex

$$(C^\bullet(f^\bullet), \delta^\bullet) : \cdots \to C^{n-1}(f^\bullet) \xrightarrow{\delta^{n-1}} C^n(f^\bullet) \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1}(f^\bullet) \to \cdots$$

von A-Moduln mit

$$C^n(f^\bullet) = \tilde{M}^{n-1} \oplus M^n, \quad \delta^n = \delta^n(f^\bullet) = \begin{pmatrix} \tilde{d}^{n-1} & (-1)^n f^n \\ 0 & d^n \end{pmatrix}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Bezeichnet man mit $(M^\bullet, d^\bullet)^{+1}$ den Komplex $(\overline{M}^\bullet, \overline{d}^\bullet)$ mit

$$\overline{M}^n = M^{n-1}, \quad \overline{d}^n = d^{n-1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z},$$

so nennt man zwei Morphismen $f^\bullet, g^\bullet : (M^\bullet, d^\bullet) \to (\tilde{M}^\bullet, \tilde{d}^\bullet)$ *homotop*, wenn es einen Morphismus $h^\bullet : (M^\bullet, d^\bullet) \to (\tilde{M}^\bullet, \tilde{d}^\bullet)^{+1}$ gibt derart, dass

$$f^{n-1} - g^{n-1} = \tilde{d}^{n-1} h^n + h^{n+1} d^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

Der Morphismus $h^\bullet$ heißt in diesem Fall eine *Homotopie* zwischen $f^\bullet$ und $g^\bullet$. Existiert zwischen zwei Morphismen $f^\bullet$ und $g^\bullet$ eine Homotopie, d.h. sind $f^\bullet$ und $g^\bullet$ homotop, so wird $f^\bullet \sim g^\bullet$ bzw. $f^\bullet \overset{h^\bullet}{\sim} g^\bullet$ geschrieben.

Zwei A-Modul-Komplexe $(M^\bullet, d^\bullet)$ und $(\tilde{M}^\bullet, \tilde{d}^\bullet)$ heißen *homotopieäquivalent*, wenn es zwei Morphismen $f^\bullet : (M^\bullet, d^\bullet) \to (\tilde{M}^\bullet, \tilde{d}^\bullet)$ und $g^\bullet : (\tilde{M}^\bullet, \tilde{d}^\bullet) \to (M^\bullet, d^\bullet)$ gibt mit

$$f^\bullet g^\bullet \sim \mathrm{id}^\bullet_{(\tilde{M}^\bullet, \tilde{d}^\bullet)} \quad \text{und} \quad g^\bullet f^\bullet \sim \mathrm{id}^\bullet_{(M^\bullet, d^\bullet)}.$$

In diesem Fall heißt $f^\bullet$ eine *Homotopieäquivalenz* und $g^\bullet$ eine *Homotopieinverse* zu $f^\bullet$.

Eine A-Modul-Komplex $(M^\bullet, d^\bullet)$ heißt *split-exakt*, wenn er exakt ist und es eine Familie $(\varepsilon^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ von A-Modul-Morphismen $\varepsilon^n : M^n \to M^{n-1}$ gibt derart, dass

$$\mathrm{id}_{M^n} = d^{n-1}\varepsilon^n - \varepsilon^{n+1} d^n$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt. Die Familie $\varepsilon^\bullet = (\varepsilon^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ heißt in diesem Fall eine *splittende Familie* für $(M^\bullet, d^\bullet)$.

Ein nützliches technisches Lemma lautet:

Lemma A.3.1 *Sind $(M^\bullet, d^\bullet)$ und $(\tilde{M}^\bullet, \tilde{d}^\bullet)$ zwei A-Modul-Komplexe und ist $f^\bullet : (M^\bullet, d^\bullet) \to (\tilde{M}^\bullet, \tilde{d}^\bullet)$ ein Morphismus, so gilt: Ist $C^\bullet(f^\bullet)$ split-exakt, so ist $f^\bullet$ eine Homotopieäquivalenz. Ist $\varepsilon^\bullet$ eine splittende Familie für $C^\bullet(f^\bullet)$, so lässt sich die Homotopieinverse $g^\bullet = (g^p)_{p\in\mathbb{Z}} : (\tilde{M}^\bullet, \tilde{d}^\bullet) \to (M^\bullet, d^\bullet)$ explizit angeben:*

$$g^p = (-1)^p \pi_2 \varepsilon^{p+1}|_{\tilde{M}^p} \qquad (p \in \mathbb{Z}).$$

Beweis: Als splittende Familie für $C^\bullet(f^\bullet)$ besitzt $\varepsilon^\bullet = (\varepsilon^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ die Eigenschaft

$$1_{C^p(f^\bullet)} = \varepsilon^{p+1}\delta^p + \delta^{p-1}\varepsilon^p$$

für alle $p \in \mathbb{Z}$; hierbei bezeichnet $\delta^\bullet$ die Randabbildungen des Abbildungskegels.

Es wird der Reihe nach gezeigt:

i) $g^\bullet : (\tilde{M}^\bullet, \tilde{d}^\bullet) \to (M^\bullet, d^\bullet)$ ist ein Morphismus

ii) $g^\bullet$ ist homotopieinvers zu $f^\bullet$.

Zu i): Es ist $d^p g^p - g^{p+1}\tilde{d}^p = 0$ zu zeigen.

Für $x \in M^p \subset C^p(f^\bullet) = \tilde{M}^{p-1} \oplus M^p$ gilt:

$$\delta^p(x) = \begin{pmatrix} \tilde{d}^{p-1} & (-1)^p f^p \\ 0 & d^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^p f^p(x) \\ d^p(x) \end{pmatrix},$$

also $d^p = \pi_2\delta^p|_{M^p}$. Außerdem gilt $\delta^p|_{\tilde{M}^{p-1}} = \tilde{d}^{p-1}$. Damit ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
&(-1)^p(d^p g^p - g^{p+1}\tilde{d}^p)\\
&\quad = d^p\pi_2\varepsilon^{p+1}|_{\tilde{M}^p} + \pi_2\varepsilon^{p+2}|_{\tilde{M}^{p+1}}\tilde{d}^p = \pi_2\delta^p\pi_2\varepsilon^{p+1}|_{\tilde{M}^p} + \pi_2\varepsilon^{p+2}\tilde{d}^p\\
&\quad = \pi_2(\delta^p\varepsilon^{p+1}|_{\tilde{M}^p} - \delta^p\pi_1\varepsilon^{p+1}|_{\tilde{M}^p} + \varepsilon^{p+2}\delta^{p+1}|_{\tilde{M}^p})\\
&\quad = \underbrace{\pi_2 1_{C^{p+1}(f^\bullet)}|_{\tilde{M}^p}}_{=0} - \underbrace{\pi_2\tilde{d}^{p-1}}_{=0}\pi_1\varepsilon^{p+1}|_{\tilde{M}^p} = 0
\end{aligned}
$$

Damit ist i) gezeigt.

Zu ii): Um zu zeigen, dass $g^\bullet$ eine Homotopieinverse von $f^\bullet$ ist, beweisen wir a) die Existenz einer Homotopie $r^\bullet$ mit $g^\bullet f^\bullet \overset{r^\bullet}{\sim} 1_{(M^\bullet, d^\bullet)}$, d.h. die Existenz einer Familie $(r^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ von Morphismen mit

$$1 - g^p f^p = d^{p-1}r^p + r^{p+1}d^p \qquad \text{für alle } p \in \mathbb{Z}$$

und
b) die Existenz einer Homotopie $s^\bullet = (s^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ mit $f^\bullet g^\bullet \overset{s^\bullet}{\sim} 1_{(\tilde{M}^\bullet, \tilde{d}^\bullet)}$, d.h. mit

$$1 - f^p g^p = \tilde{d}^{p-1}s^p + s^{p+1}\tilde{d}^p \qquad \text{für alle } p \in \mathbb{Z}.$$

zu a): Für $p \in \mathbb{Z}$ sei $r^p = \pi_2\varepsilon^p|_{M^p} : M^p \to M^{p-1}$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
1_{M^p} - g^p f^p &= 1_{M^p} - (-1)^p\pi_2\varepsilon^{p+1}|_{\tilde{M}^p} f^p\\
&= 1_{M^p} - \pi_2\varepsilon^{p+1}(\delta^p|_{M^p} - d^p),\ \text{da } (-1)^p f^p = \delta^p|_{M^p} - d^p\\
&= 1_{M^p} - \pi_2(1_{C^p(f^\bullet)}|_{M^p} - \delta^{p-1}\varepsilon^p|_{M^p} - \varepsilon^{p+1}d^p)\\
&= \pi_2\delta^{p-1}(\pi_1 + \pi_2)\varepsilon^p|_{M^p} + \pi_2\varepsilon^{p+1}|_{M^{p+1}}d^p\\
&= \pi_2\delta^{p-1}\pi_2\varepsilon^p|_{M^p} + r^{p+1}d^p,\ \text{da } \pi_2\delta^{p-1}\pi_1 = 0\\
&= d^{p-1}r^p + r^{p+1}d^p,\ \text{da } \pi_2\delta^{p-1}|_{M^{p-1}} = d^{p-1}
\end{aligned}
$$

zu b): Für $p \in \mathbb{Z}$ sei $s^p = \pi_1\varepsilon^{p+1}|_{\tilde{M}^p} : \tilde{M}^p \to \tilde{M}^{p-1}$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
1_{\tilde{M}^p} - f^p g^p &= 1_{\tilde{M}^p} - (-1)^p f^p\pi_2\varepsilon^{p+1}|_{\tilde{M}^p}\\
&= 1_{\tilde{M}^p} - \pi_1\delta^p\pi_2\varepsilon^{p+1}|_{\tilde{M}^p},\ \text{da } \pi_1\delta^p|_{M^p} = (-1)^p f^p\\
&= 1_{\tilde{M}^p} - \pi_1\delta^p\varepsilon^{p+1}|_{\tilde{M}^p} + \pi_1\delta^p\pi_1\varepsilon^{p+1}|_{\tilde{M}^p}\\
&= 1_{\tilde{M}^p} - \pi_1(1_{C^{p+1}(f^\bullet)}|_{\tilde{M}^p} - \varepsilon^{p+2}\delta^{p+1}|_{\tilde{M}^p}) + \tilde{d}^{p-1}s^p,\\
&\qquad\qquad \text{da } \pi_1\delta^p|_{\tilde{M}^{p-1}} = \tilde{d}^{p-1}\\
&= \pi_1\varepsilon^{p+2}|_{\tilde{M}^{p+1}}\tilde{d}^p + \tilde{d}^{p-1}s^p,\ \text{da } \delta^{p+1}|_{\tilde{M}^p} = \tilde{d}^p\\
&= s^{p+1}\tilde{d}^p + \tilde{d}^{p-1}s^p.
\end{aligned}
$$

Damit ist ii) gezeigt und das Lemma bewiesen. ■

Alle definierten Begriffe und das Lemma machen weiterhin Sinn, wenn man zu additiven Unterkategorien der Kategorie der A-Modul-Komplexe übergeht. Bei allen Objekten und Morphismen beschränkt man sich hierbei auf solche, die in der entsprechenden Unterkategorie liegen. Ist die Unterkategorie additiv und hat man sich für einen Exaktheitsbegriff in der Unterkategorie entschieden, macht es auch keine Probleme, den Begriff der Split-Exaktheit für die Unterkategorie zu definieren. In einem solchen Fall wird von der splittenden Familie $\{\varepsilon^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ gefordert, dass die Morphismen ebenfalls zur Unterkategorie gehören.

A.4 Ein Zerlegungssatz für Operatormengen

In diesem Teil des Anhangs wird ein Zerlegungssatz für eine Menge $\mathcal{T}$ von Operatoren auf einem Hilbertraum H bewiesen. Für einen einzelnen Operator wird ein entsprechender Satz in [Fel99] gezeigt. Zur einfacheren Formulierung des Satzes wird ein abgeschlossener Teilraum $H_0 \neq \{0\}$ von H ein *minimaler $\mathcal{T}$-reduzierender Teilraum* genannt, wenn er $\mathcal{T}$-reduzierend ist, und wenn es keinen anderen $\mathcal{T}$-reduzierenden Teilraum H_1 von H mit $H_1 \subset H_0$ und $\{0\} \neq H_1 \neq H_0$ gibt.

Satz A.4.1 *Sei $\emptyset \neq \mathcal{T} \subset L(H)$ eine Menge von Operatoren auf einem Hilbertraum H. Dann existiert eine orthogonale Zerlegung von H in $\mathcal{T}$-reduzierende Teilräume der Form*

$$H = H_0 \oplus \left(\bigoplus_{i\in N} \hat{H}_i\right) \oplus \left(\bigoplus_{j\in M} \tilde{H}_j\right)$$

mit Indexmengen N und M so, dass gilt:

(a) H_0 enthält keinen minimalen $\mathcal{T}$-reduzierenden Teilraum;

(b) für alle $i \in N$ ist $\mathcal{T}|_{\hat{H}_i}$ eine irreduzible Operatormenge mit $C^*(\mathcal{T}|_{\hat{H}_i}) \cap K(\hat{H}_i) = \{0\}$;

(c) für alle $j \in M$ ist $\mathcal{T}|_{\tilde{H}_j}$ eine irreduzible Operatormenge mit $K(\tilde{H}_j) \subset C^*(\mathcal{T}|_{\tilde{H}_j})$.

In der Zerlegung von H können Summanden fehlen.

Beweis: Gibt es keinen minimalen $\mathcal{T}$-reduzierenden Teilraum von H, so kann man $H_0 = H$ setzen, und der Satz ist bewiesen. Andernfalls kann man mit Hilfe des Zornschen Lemmas ein maximales System $\mathcal{H} = \{L_d : d \in D\}$ von paarweise orthogonalen, minimalen $\mathcal{T}$-reduzierenden Teilräumen L_d wählen. Dann besitzt $H_0 = \left(\bigoplus_{d\in D} L_d\right)^\perp \subset H$ wegen der Maximalität von $\mathcal{H}$ keinen minimalen $\mathcal{T}$-reduzierenden Teilraum. Für alle $d \in D$ ist $\mathcal{T}|_{L_d}$ eine irreduzible Menge von Operatoren. Für jeden Index $d \in D$ gilt entweder $C^*(\mathcal{T}|_{L_d}) \cap K(L_d) = \{0\}$ oder $K(L_d) \subset C^*(\mathcal{T}|_{L_d})$ ([Mur90], Theorem 2.4.9). Folglich zerfällt die Indexmenge D in zwei disjunkte Indexmengen N und M derart, dass sich für $\hat{H}_i = L_i$ für alle $i \in N$ und $\tilde{H}_j = L_j$ für alle $j \in M$ die Aussage des Satzes ergibt. ■

Nützlich ist noch die folgende Feststellung:

Proposition A.4.2 *Sei $\emptyset \neq \mathcal{T} \subset L(H)$ eine Menge von Operatoren auf einem Hilbertraum H, die keinen minimalen $\mathcal{T}$-reduzierende Teilraum besitzt. Dann gilt:*

$$C^*(\mathcal{T}) \cap K(H) = \{0\}.$$

Beweis: Sei $\mathcal{I} = C^*(\mathcal{T}) \cap K(H) \neq \{0\}$. Dann ist $\mathcal{I}$ ein von $\{0\}$ verschiedenes Ideal kompakter Operatoren in $C^*(\mathcal{T})$. Folglich existiert ein minimaler $\mathcal{I}$-reduzierender Teilraum H_0 von H mit $\mathcal{I}|_{H_0} = K(H_0)$ ([Dav96], Lemma I.10.5). Der Raum H_0 ist ein $\mathcal{T}$-reduzierender Teilraum: Für alle $y \in H_0$ existiert ein Operator $R \in \mathcal{I}$ mit $R|_{H_0} = \langle \cdot, y \rangle y \in K(H_0)$. Für alle $T \in \mathcal{T}$ ist $T \circ \mathcal{I} \subset \mathcal{I}$ und daher $\langle y, y \rangle Ty = (T \circ R)y \in H_0$. Ebenso zeigt man $T^*y \in H_0$ für alle $y \in H_0$ und alle $T \in \mathcal{T}$. Ist $\emptyset \neq H_1 \subset H_0$ ein weiterer $\mathcal{T}$-reduzierender Teilraum, so ist H_1 auch $C^*(\mathcal{T})$-reduzierend und erst recht $\mathcal{I}$-reduzierend. Da H_0 minimal mit der letzten Eigenschaft ist, folgt $H_1 = H_0$, d.h. H_0 ist ein minimaler $\mathcal{T}$-reduzierender Teilraum. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. Also gilt $C^*(\mathcal{T}) \cap K(H) = \{0\}$. ■

Literaturverzeichnis

[Abr78] M.B. Abrahamse, *Commuting subnormal operators*, Illinois J. Math. 22(1978), 171-176

[Alb74] E. Albrecht, *Der spektrale Abbildungssatz für nicht-analytische Funktionalkalküle in mehreren Veränderlichen*, Manuskripta Math. 14(1974), 263-277

[AH] P. Alexandroff, H. Hopf, *Topologie*, Erster Band, Springer, 1935

[Ale84] A.B. Aleksandrov, *Inner Functions on compact spaces*, Funct. Anal. Appl. 18(1984), 87-98

[Ale86] A.B. Aleksandrov, *Inner Functions: Results, Methods, Problems*, Proceedings of International Congress of Mathematics 1986, Vol. 1, 699-707

[AW98] H. Alexander, J. Wermer, *Several complex variables and Banach algebras*, Springer, 1998

[Arv76] W. Arveson, *An Invitation to C^*-Algebras*, Springer, 1976

[Ath87] A. Athavale, *Holomorphic kernels and commuting operators*, Trans. AMS 304(1987), 101-110

[Ath88] A. Athavale, *Subnormal tuples quasisimilar to the Szegö tuple*, Michigan Math. J. 35(1988), 409-412

[Ath90] A. Athavale, *On the intertwining of joint isometries*, J. Oper. Th. 23 (1990), 339-350

[AP90] A. Athavale, S. Pedersen, *Moment Problems and Subnormality*, J. Math. Anal. App. 146(1990), 434-441

[Ber66] S.K. Berberian, *Notes on spectral theory*, van Nostrand mathematical studies, 1966

[Bis59] E. Bishop, *A duality theorem for an arbitrary operator*, Pac. J. Math. 9(1959), 379-397

[Bra55] J. Bram, *Subnormal operators*, Duke Math. J. 22(1955), 75-94

[Bur79] R.B. Burckel, *An introduction to classical complex analysis*, Vol. 1, Birkhäuser, 1979

[Cla75] S. Clary, *Equality of spectra of quasi-similar hyponormal operators*, Proc. AMS 53(1975), 88-90

[Cob67] L.A. Coburn, *The C^*-Algebra generated by an isometry I*, Bull. AMS 73(1967), 722-726

[Con80] J.B. Conway, *On quasisimilarity for subnormal operators*, Illinois J. Math. 24(1980), 689-702

[Con85] J.B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer, 1985

[Con91a] J.B. Conway, *The Theory of Subnormal Operators*, AMS Mathematical Surveys and Monographs Vol. 36, AMS, 1991

[Con91b] J.B. Conway, *Towards a functional calculus for subnormal tuples: The minimal normal extension*, Trans. AMS 326(1991), 543-567

[Dav96] K.R. Davidson, *C^*-Algebras by Examples*, AMS, Providence, Rhode Island, 1996

[Dei74] K. Deimling, *Nichtlineare Gleichungen und Abbildungsgrade*, Springer, 1974

[Did02] M. Didas, *On the structure of von Neumann n-tuples over strictly pseudoconvex sets*, Dissertation, Universität des Saarlandes, 2002

[Dou72] R.G. Douglas, *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*, Academic Press, 1972

[Dug66] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, 1966

[Eil40] S. Eilenberg, *Cohomology and continuous mappings*, Ann. Math. 41(1940), 231-251

[Esc00] J. Eschmeier, *On the essential spectrum of Banach-space operators*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 43 (2000), 511-528

[EP96] J. Eschmeier, M. Putinar, *Spectral Decompositions and Analytic Sheaves*, London Mathematical Society Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1996

[EP01] J. Eschmeier, M. Putinar, *Some remarks on spherical isometries*, Systems, approximation, singular integral operators, and related topics, Birkhäuser, 2001, 271-291

[ER00] E.G. Effros, Z.-J. Ruan, *Operator Spaces*, London Mathematical Society Monographs, Clarendon Press, Oxford, 2000

[Fel99] N.S. Feldman, *Essentially subnormal operators*, Proc. AMS 127(1999), no. 4, 1171-1181

[Fru75] S. Frunza, *An axiomatic theory of spectral decompositions of operators. I* (in Romanian), St. Cerc. Math. 27(1975),655-711

[GR71] H. Grauert, R. Remmert, *Analytische Stellenalgebren*, Springer, 1971

[GR77] H. Grauert, R. Remmert, *Theorie der Steinschen Räume*, Springer, 1977

[GR84] H. Grauert, R. Remmert, *Coherent Analytic Sheaves*, Springer, 1984

[Gro66] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Memoirs AMS, 1966

[GP74] V. Guillemin, A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974

[Hal50] P.R. Halmos, *Normal dilations and extensions of operators*, Summa. Bras. Math. 2(1950), 125-134

[Has78] W.W. Hastings, *Commuting subnormal operators simultaneously quasisimilar to unilateral shifts*, Illinois J. Math. 22(1978), 506-519

[Her82] D.A. Herrero, *Approximation of Hilbert Space Operators*, Research Notes in Mathematics, Vol. 72, Pitman Advanced Publishing Program, 1982

[Her88] D.A. Herrero, *On the essential spectra of quasisimilar operators*, Can. J. Math. 40(1988), 1436-1457

[Hu59] S.-T. Hu, *Homotopy Theory*, Pure and Applied Mathematics, Vol. VIII, Academic Press, 1959

[Hu48] S.-T. Hu, *Mappings of a normal space into an absolute neighborhood retract*, Trans. AMS 64(1948), 336-358

[Ito58] T. Itô, *On the commuting family of subnormal operators*, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. 14(1958), 1-15

[Jar81] H. Jarchow, *Locally Connvex Spaces*, Teubner, 1981

[Kat66] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, 2nd edition, Springer, 1966

[Keo79] G.E. Keough, *Subnormal Operators, Toeplitz Operators, and the Spectral Inclusion Theorem*, Dissertation, Indiana University, 1979

[Keo81] G.E. Keough, *Subnormal Operators, Toeplitz Operatots and Spectral Inclusion*, Trans. AMS 263(1981), 125-135

[Köt83a] G. Köthe, *Topological Vector Spaces I*, Springer, 1983

[Köt83b] G. Köthe, *Topological Vector Spaces II*, Springer, 1983

[Kul70] R. Kultze, *Garbentheorie*, Teubner, 1970

[Man88] F. Mantlik, *Parameterabhängige lineare Gleichungen in Banach- und in Frécheträumen*, Dissertation, Universität Dortmund, 1988

[McG88] P. McGuire, *C^*-Algebras Generated by Subnormal Operators*, J. Funct. Anal. 79(1988), 423-445

[MV92] R. Meise, D. Vogt, *Einführung in die Funktionalanalysis*, Vieweg, 1992

[Mla72] W. Mlak, *Intertwinig operators*, Studia Math. 43(1972), 219-233

[Mur90] G.J. Murphy, *C^*-Algebras and Operator Theory*, Academic Press, 1990

[OT82] R.F. Olin, J.E. Thomson, *Algebras generated by a subnormal operator*, Trans. AMS 271(1982), 299-311

[Pau86] V.I. Paulsen, *Completely bounded maps and dilations*, Pitman Research Notes in Mathematics, 1986

[Put82] M. Putinar, *Some invariants for semi-Fredholm systems of essentially commuting operators*, J. Operator Theory 8(1982), 65-90

[Put83] M. Putinar, *Spectral Theory ans Sheaf Theory I*, Operator Theory: Advances and Applications, Proceedings of the 7th Conference on Operator Theory, Timisoara and Herculane, 1983

[Put84] M. Putinar, *Spectral Inclusions for subnormal n-tuples*, Proc. AMS 90(1984), 405-406

[Put92] M. Putinar, *Quasi-similarity of tuples with Bishop's property* (β), Inter. Equ. Op. Th. 15(1992), 1047-1052

[Rud86] W. Rudin, *New constructions of functions holomorphic in the unit ball of* $\mathbb{C}^n$, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, AMS, 1986

[Rud91] W. Rudin, *Functional Analysis*, 2nd edition, McGraw-Hill, 1991

[Schae66] H.H. Schaefer, *Topological Vector Spaces*, Macmillan, 1966

[Schr00] H. Schröder, *Funktionalanalysis*, 2.Auflage, Verlag Harri Deutsch, 2000

[FSzN63] B. Sz.-Nagy, C. Foiaş, *Propriétés des fonctions caractéristiques, modèles triangulaires et une classification des contractions de l'espace de Hilbert*, C.R. Acad. Sci. Paris 256(1963), 3413-3415

[FSzN67] B. Sz.-Nagy, C. Foiaş, *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert*, Akadémia Kiadó, Budapest, 1967

[Tay70a] J.L. Taylor, *A joint spectrum for several commuting operators*, J. Funct. Analysis 6(1970), 172-191

[Tay70b] J.L. Taylor, *The analytic functional calculus for several commuting operators*, Acta Math. 125(1970), 1-48

[tomD00] T. tom Dieck, *Topologie*, 2. Auflage, de Gruyter, 2000

[Upm96] H. Upmeier, *Toeplitz Operators and Index Theory in Several Complex Variables*, Birkhäuser, 1996

[Vas77] F.H. Vasilescu, *A characterization of the joint spectrum in Hilbert spaces*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 22(1977), 1003-1009

[Vas82] F.H. Vasilescu, *A multi-dimensional spectral theory in C^*-algebras*, Banach Center Publications 8(1982), 471-491

[Vas82b] F.H. Vasilescu, *Analytic Functional Calculus and Spectral Decomposition*, Reidel, 1982

[von Neu51] J. von Neumann, *Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes*, Math. Nachr. 4(1951), 258-281

[Yos69] T. Yoshino, *Subnormal operators with a cyclic vector*, Tohoku Math. J. 21(1969), 47-55

[Zei86] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I*, Springer, 1986

Index