Asymptotisches Verhalten diskreter und kontinuierlicher Operatorhalbgruppen

Diplomarbeit

angefertigt von Eric Réolon
im Fachbereich Mathematik der Universität des Saarlandes
unter Betreuung von Professor Dr. Jörg Eschmeier

Saarbrücken
1997

Einleitung

Für komplexe Zahlen λ und a hat das Anfangswertproblem

$$u' = \lambda u, \qquad u(0) = a$$

in der Menge der stetigen, komplexwertigen Funktionen über $[0, +\infty)$ bekanntlich die eindeutige Lösung $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ mit

$$f(t) = e^{\lambda t}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

In der mathematische Physik stößt man auf ganz ähnlich geartete Probleme. Die Wärmeleitungsgleichung etwa beschreibt den zeitlichen Verlauf der Wärmeverteilung in einem homogenen, nach außen hin isolierten Materials. Nehmen wir das Material kugelförmig mit Radius 1 an, so läßt sich die Wärmeleitungsgleichung wie folgt beschreiben: Die Temperturverteilung zu einem beliebigen Zeitpunkt t wird gegen durch eine stetige Funktion auf $K = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq 1\}$; den zeitlichen Verlauf der Verteilung drückt dann eine Funktion $u : [0, +\infty) \to C(K)$ mit $u(0) = f$ aus, wobei $f \in C(K)$ für die Temperaturverteilung zum Zeitpunkt $t = 0$ steht. Die Wärmeleitungsgleichung schreibt sich dann

$$\dot{u} = -\frac{1}{c}\Delta u, \qquad u(0) = f,$$

wobei $\dot{u}$ für die Ableitung von u nach der Zeit, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ für den Laplace-Operator und $c > 0$ für eine vom Material abhängige Konstante steht. Man sieht leicht, daß man es hier mit einem Anfangswertproblem in einem verallgemeinerten Sinn zu tun hat. Dies führt zu dem *abstrakten Cauchy-Problem* .

Gegeben sei ein Banachraum X, ein Element $x \in X$ und ein unbeschränkter Operator A auf X mit Definitinsbereich $\mathfrak{D}(A)$. Gesucht ist eine differenzierbare Funktion $u : [0, +\infty) \to X$ mit

$$\dot{u} = Au, \qquad u(0) = x. \tag{1}$$

Die Lösung des abstrakten Cauchy-Problems führt in kanonischer Weise auf (stark-stetige) Operatorhalbgruppen, die formal ganz ähnliche Eigenschaften besitzen wie die Exponentialfunktion als Lösung des eigangs gestellten Anfangswertproblems. Ist $\mathcal{T} : [0, +\infty) \to \mathcal{L}(X)$ eine solche Operatorhalbgruppe, so ist definitionsgemäß $\mathcal{T}(0) = \mathrm{id}_X$ und $\mathcal{T}(s + t) = \mathcal{T}(s)\mathcal{T}(t)$ für alle $s, t \geq 0$. Stark-stetig nennt man die Halbgruppe, wenn zudem $[0, +\infty) \to X$, $t \mapsto \mathcal{T}(t)x$ stetig ist für alle $x \in X$. Im günstigsten Fall, also wenn A hinreichend „gutartig“ ist, läßt sich ein Lösung von (1) schreiben in der Form

$$u(t) = \mathcal{T}(t)x, \qquad t \in [0, +\infty),$$

mit einer stark-stetigen Operatorhalbgruppe $\mathcal{T} : [0, +\infty) \to \mathcal{L}(X)$.

Im Rahmen mathematischer Untersuchungen ist man nun am Verhalten der Lösung auf „lange Sicht", d.h. für $t \to \infty$ interessiert. In den letzten zehn Jahren hat eine rege Tätigkeit in diesem Bereich stattgefunden, die einen ersten Niederschlag in dem kürzlich erschienen Buch von J. Neerven „The Asymptotic Behaviour of Semigroups of Linear Operators" ([17]) gefunden hat. Wie der Titel des Buches bereits verrät, liegt der Schwerpunkt auf dem asymptotischen Verhalten von Operatorhalbgruppen. Diese Arbeit ist ein (bescheidener) Beitrag zu diesen Entwicklungen.

Für eine gleichmäßig beschränkte, stark-stetige Operatorhalbgruppe $\mathcal{T}$ mit infinitesimalem Erzeuger A, dessen peripheres Spektrum $\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ höchstens abzählbar ist und für den das periphere Punktspektrum $\sigma_p(A') \cap i\mathbb{R}$ des adjungierten Operators A' von A leer ist, haben Arendt und Batty in [1] sowie Lyubich und Phong in [20] zeigen können, daß die Operatorhalbgruppe $\mathcal{T}$ in der starken Operatortopologie für $t \to \infty$ gegen Null konvergiert. Phong hat dieses Ergebnis in [19] verallgemeinert: Ist die Operatorhalbgruppe $\mathcal{T}$ zwar nicht mehr gleichmäßig beschränkt, aber läßt sich das Wachtum von $\|\mathcal{T}(t)\|$ für $t \to \infty$ durch eine geeignete (nicht zu schnell wachsende) Funktion α kontrollieren, so läßt sich unter denselben Voraussetzungen wie eben zeigen, daß $\frac{\mathcal{T}}{\alpha}$ für $t \to \infty$ in der starken Operatortopologie gegen Null konvergiert.

Die Beweise all dieser Aussagen beruhen auf der Reduktion der gegeben Operatothalbgruppe zuerst auf isometrische Operatorhalbgruppen und dann auf isometrische Operatorgruppen. Die Anwendung von Spektraltheorie für gleichmäßig beschränkte, stark-stetige Operatorhalbgruppen führt dann zu den Ergebnissen. In der verallgemeinerten Version von Phong werden im wesentlichen dieselben Ideen aufgegriffen und das vorhandene Gewicht α eingearbeitet.

Wir werden in dieser Arbeit einen neuen Beweis der obigen Sachverhalte bringen, die auf eine Ideen von Eschmeier zurückgehen ([10]). Kurz gesagt beruht diese Idee darauf, einen Intertwining-Operator aus verallgemeinerten Limiten zu konstruieren, der den infinitesimalen Erzeuger der zu betrachtenden stark-stetigen Operatorhalbgruppe mit einem Multiplikationsoperator auf einer Beuerling-Algebra stetiger Funktionen vertauscht. Aus Eigenschaften dieses Multiplikationsoperators lassen sich dann Rückschlüsse auf die Operatorhalbgruppe selber ziehen. Es ist uns dabei gelungen, das obige Resultat in einem noch zu klärenden Sinn zu verallgemeinern.

Wir haben unsere Untersuchungen in 4 Kapitel unterteilt, deren Inhalt wir an dieser Stelle in Kurzform wiedergeben wollen.

In Kapitel I führen wir Beuerling-Algebren ein, die die Grundlage dieser Arbeit bilden, und ohne die eine möglichst geschlossene Darstellung unserer Ergebnisse nicht zu bewerkstelligen ist.

In Kapitel II setzen wir uns mit den diskreten Versionen der oben zitieren Resultate auseinander. Wir gewinnen letztere zurück, es gelingt uns aber auch, sie etwas zu verbessern.

In Kapitel III definieren wir stark-stetige Operatorhalbgruppen und beweisen einige ihrer Eigenschaften. Wir gehen dabei gerade so weit, wie es für den weiteren Verlauf notwendig ist. Außerdem untersuchen wir wichtige Beispiele, die im nächsten Kapitel von Bedeutung sein werden.

Kapitel IV beschäftigt sich schließlich mit den weiter oben angesprochen Sätzen von Arendt und Batty sowie Lyubich und Phong. Wir werden zeigen, wie diese vermittels Intertwining-Operatoren gewonnen werden können, und wie man die Ergebnisse sogar noch verbessern kann.

Eine ausführlichere Inhaltsangabe der einzelnen Kapitel findet man zu Beginn derselben.

Zum Abschluß dieser Einleitung möchte ich die Gelegenheit wahrnehmen und all denjenigen danken, die tatkräftig mein Studium unterstützt und zu einem glücklichen Ende geführt haben.

Als erstes möchte ich Herrn Prof. Dr. Jörg Eschmeier danken, der mich zu dieser Arbeit angeregt und während der Arbeit betreut hat. Herr Eschmeier stand mir stets mit Rat und Tat zur Seite, wann auch immer ich völlig unangemeldet in seinem Büro auftauchte.

Herr Priv.-Doz. Dr. Martin Mathieu und Herr Prof. Dr. Ernst Albrecht habe ich die sehr positive Erfahrung zu verdanken, im Rahmen des ERASMUS-Programmes ein Jahr in Paris studiert zu haben. Hierfür ein herzliches Dankeschön.

Ich möchte die seltene Gelegenheit wahrnehmen und an dieser Stelle meinen Eltern Anneliese und Georges Réolon danken, die mir das Studium der Mathematik erst ermöglicht haben, und ohne deren finanzielle Unterstützung das Studienjahr in Paris nicht möglich gewesen wäre. Mit dieser Arbeit hoffe ich ihnen einen Teil ihrer Investitionen zurückgeben zu können.

Meinem Freund und Komilitonen Torsten Becker danke ich für die Durchsicht von Teilen dieser Arbeit.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I
Beurling-Algebren

Zum Inhalt dieses Kapitels

Wir stellen in diesem Kapitel ein für diese Arbeit entscheidendes Hilfsmittel zur Verfügung. Es handelt sich dabei um eine Klasse von Funktionenräumen, die auf *A. Beurling* und seine im Jahre 1939 erschienene Arbeit „Sur les intégrales de Fourier absolument convergentes et leur application à une transformation fonctionelle“ zurückgeht. Im §1 wollen wir diese Klasse von Funktionenräumen einführen; sie werden als *Beurling-Algebren* bezeichnet.

In §4 wird sich herausstellen, daß gewisse Beurling-Algebren (im Sinne den Banachalgebren-Theorie) regulär sind. Wir geben deshalb in §2 einen kurzen Abriß der Theorie regulärer Banachalgebren, auf die wir uns dann beziehen können. Die Gelfand-Theorie spielt in diesem Zusammenhang eine wichtige Rolle. Im §3 berechnen wir deshalb die Gelfandtransformation für ausgewählte Beurling-Algebren. Die für den weiteren Verlauf diese Arbeit relevanten Aussagen formulieren und beweisen wir in §5.

§1
Einführung der Beurling-Algebren

A. Defintion

Ein Maßraum ist ein geordnetes Tripel $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A}, \mu)$, in dem $\mathfrak{X}$ für eine beliebige Menge, $\mathfrak{A}$ für eine σ-Algebra auf $\mathfrak{X}$ und μ für ein positives Maß auf $\mathfrak{A}$ steht. Die Elemente von $\mathfrak{A}$ nennt man meßbare Mengen von $\mathfrak{X}$. Eine Funktion $f : \mathfrak{X} \to \mathbb{C}$ heißt meßbar, wenn das Urbild jeder offenen Menge in $\mathbb{C}$ meßbar in $\mathfrak{X}$ ist. Auf den in dieser Arbeit benutzen Mengen $\mathfrak{X}$ wird eine σ-Algebra $\mathfrak{A}$ stets angegeben und dann fixiert sein; wir erlauben uns deshalb, einen Maßraum kürzer in der Form $(\mathfrak{X}, \mu)$ zu schreiben.

Auf einem Maßraum $(\mathfrak{X},\mu)$ kann man Integrationstheorie betreiben. Eine meßbare Funktion $f:\mathfrak{X}\to\mathbb{C}$ heißt μ-integriebar, wenn $\int_{\mathfrak{X}}|f|\,d\mu<+\infty$ ist. Versieht man den Vektorraum[1] $\mathfrak{L}^1(\mathfrak{X},\mu)$ der komplexwertigen, μ-integrierbaren Funktionen auf $\mathfrak{X}$ mit der Halbnorm

$$p:\mathfrak{L}^1(\mathfrak{X},\mu)\to\mathbb{R},\qquad f\mapsto\int_{\mathfrak{X}}|f|\,d\mu,$$

und geht man dann zum Quotienten $\mathfrak{L}^1(\mathfrak{X},\mu)/\ker p$ über, so gelangt man zum Vektorraum $L^1(\mathfrak{X},\mu)$, auf dem eine Norm $\|\cdot\|_{1,\mu}$ definiert ist durch $\|[f]\|_{1,\mu}=p(f)$ ($[f]$ bezeichnet die Restklasse von $f\in\mathfrak{L}^1(\mathfrak{X},\mu)$ in $L^1(\mathfrak{X},\mu)$). Wie in der Literatur üblich, fassen wir die Elemente von $L^1(\mathfrak{X},\mu)$ als Funktionen auf und schreiben

$$L^1(\mathfrak{X},\mu)=\left\{f:\mathfrak{X}\to\mathbb{C}\text{ meßbar}:\textstyle\int_{\mathfrak{X}}|f|\,d\mu<+\infty\right\},$$
$$\|f\|_{1,\mu}=\textstyle\int_{\mathfrak{X}}|f|\,d\mu,\qquad f\in L^1(\mathfrak{X},\mu),$$

wohlwissend, daß $f=g$ für $f,g\in L^1(\mathfrak{X},\mu)$ genau dann gilt, wenn $p(f-g)=0$ ist. Wir nennen eine Funktion $f\in L^1(\mathfrak{X},\mu)$ *stetig*, wenn es in der Restklasse von f eine (im üblich Sinne) stetige Funktion gibt[2].

Auf ähnliche Weise ist $L^\infty(\mathfrak{X},\mu)$ definiert: Für meßbares $f:\mathfrak{X}\to\mathbb{C}$ setzt man $p_\infty(f):=\sup\{K\in\mathbb{R}:\mu(|f|\geq K)>0\}$ und definiert

$$\mathfrak{L}^\infty(\mathfrak{X},\mu):=\{f:\mathfrak{X}\to\mathbb{C}\text{ meßbar}:p_\infty(f)<+\infty\}.$$

Man erhält $L^\infty(\mathfrak{X},\mu)$ als Quotienten $\mathfrak{L}^\infty(\mathfrak{X},\mu)/\ker p_\infty$ und schreibt

$$L^\infty(\mathfrak{X},\mu)=\{f:\mathfrak{X}\to\mathbb{C}\text{ meßbar}:\sup\{K\in\mathbb{R}:\mu(|f|\geq K)>0\}<+\infty\},$$
$$\|f\|_{\infty,\mu}=\sup\{K\in\mathbb{R}:\mu(|f|\geq K)>0\},\qquad f\in L^\infty(\mathfrak{X},\mu),$$

mit $f=g$ genau dann, wenn $p_\infty(f-g)=0$ ist.

1.1 Ein wohlbekanntes Ergebnis der Integrationstheorie (Rudin[23], Theorem 3.11) garantiert, daß *$(L^1(\mathfrak{X},\mu),\ \|\cdot\|_{1,\mu})$ bzw. $(L^\infty(\mathfrak{X},\mu),\ \|\cdot\|_{\infty,\mu})$ für jedes positive Maß μ (auf einer auf $\mathfrak{X}$ definierten σ-Algebra) ein Banachraum ist.*

Im Hinblick auf unsere späteren Untersuchungen sind die Räume $L^1(\mathbb{Z},\zeta)$ und $L^1(\mathbb{R},\lambda)$ von besonderem Interesse. Die jeweiligen σ-Algebren auf $\mathbb{Z}$ und auf $\mathbb{R}$ seien die Borel-σ-Algebren, die von den natürlichen Topologien auf $\mathbb{Z}$ und auf $\mathbb{R}$ herrühren, $\mathfrak{A}(\mathbb{Z}):=\mathfrak{B}(\mathbb{Z})$, $\mathfrak{A}(\mathbb{R}):=\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Auf $\mathbb{Z}$ ist dies die diskrete Topologie und auf $\mathbb{R}$ die euklidsche. Die Symbole ζ und λ stehen für das Zählmaß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{Z})$ und das Lebesgue-Maß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Für $L^1(\mathbb{Z},\zeta)$ und $L^1(\mathbb{R},\lambda)$ werden wir kürzer $\ell^1(\mathbb{Z})$ und $L^1(\mathbb{R})$ schreiben. Genauer gesagt sind uns die Räume $\ell^1(\mathbb{Z})$ und $L^1(\mathbb{R})$ in einem gewissen Sinne „zu groß“. Unser Ziel ist es deshalb, zu geeigneten, linearen Teilräumen überzugehen, die unseren Bedürfnissen besser angepaßt sind. Dazu führen wir unsere Untersuchungen zunächst noch in einem möglichst allgemeinen Rahmen fort.

[1] Die Vektorräume und Algebren dieser Arbeit sind meist über dem Skalarkörper $\mathbb{C}$ definiert; wir präzisieren den Skalarkörper deshalb nur dann, wenn eine Abweichung hiervon dies notwendig macht.

[2] Wenn diese existiert, ist sie eindeutig bestimmt.

Eine Möglichkeit, zu linearen Teilräumen von $L^1(\mathfrak{X},\mu)$ zu gelangen, besteht darin, sich eine meßbare Funktion $w : \mathfrak{X} \to [1,+\infty)$ vorzugeben, und dann die Menge

$$\mathfrak{L}^1_w(\mathfrak{X},\mu) := \left\{ f : \mathfrak{X} \to \mathbb{C} \text{ meßbar} : \int_{\mathfrak{X}} |f| w \, d\mu < +\infty \right\}$$

zu betrachten. Die Abbildung $p_w : \mathfrak{L}^1_w(\mathfrak{X},\mu) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_{\mathfrak{X}} |f| w \, d\mu$, definiert eine Halbnorm auf $\mathfrak{L}^1_w(\mathfrak{X},\mu)$. Durch Übergang zum Quotienten $\mathfrak{L}^1_w(\mathfrak{X},\mu)/\ker p_w$ erhält man den normierten Vektorraum $L^1_w(\mathfrak{X},\mu)$. Wieder fassen wir die Elemente von $L^1_w(\mathfrak{X},\mu)$ als Funktionen auf und schreiben

$$L^1_w(\mathfrak{X},\mu) := \left\{ f : \mathfrak{X} \to \mathbb{C} \text{ meßbar} : \textstyle\int_{\mathfrak{X}} |f| w \, d\mu < +\infty \right\},$$
$$\|f\|_{1,w} = \textstyle\int_{\mathfrak{X}} |f| w \, d\mu, \qquad f \in L^1_w(\mathfrak{X},\mu),$$

mit $f = g$ genau dann, wenn $p_w(f-g) = 0$ ist. Wir sprechen wieder von einer *stetigen Funktion* $f \in L^1_w(\mathbb{R})$, wenn in der Restklasse von f eine (im üblichen Sinne) stetige Funktion existiert.

Für Funktionen $f \in \mathfrak{L}^1_w(\mathfrak{X},\mu)$ ergibt sich wegen

$$\int_{\mathfrak{X}} |f| \, d\mu \le \int_{\mathfrak{X}} |f| w \, d\mu < +\infty$$

sofort $\mathfrak{L}^1_w(\mathfrak{X},\mu) \subset \mathfrak{L}^1(\mathfrak{X},\mu)$. Diese Inklusion überträgt sich auch auf die Quotientenräume, denn für jedes $f \in L^1_w(\mathfrak{X},\mu)$ stimmen die Äquivalenzklassen von f in $\mathfrak{L}^1_w(\mathfrak{X},\mu)$ und $\mathfrak{L}^1(\mathfrak{X},\mu)$ überein. Wir haben also

$$L^1_w(\mathfrak{X},\mu) \subset L^1(\mathfrak{X},\mu). \tag{2}$$

Wir erinnern, daß eine meßbare Funktion $h : \mathfrak{X} \to [0,+\infty)$ auf einem Maßraum $(\mathfrak{X},\mu)$ ein (positives[3]) Maß $\nu : \mathfrak{A}(\mathfrak{X}) \to [0,+\infty)$ definiert vermöge

$$\nu(E) := \int_{\mathfrak{X}} \chi_E h \, d\mu, \qquad E \in \mathfrak{A}(\mathfrak{X}),$$

wobei $\chi_E : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion von E ist (Bauer[2], Satz 17.1). Dieses Maß ν wird mit $h\mu$ bezeichnet. Es gilt dann die in [2] als Satz 17.3 zu findende Aussage:

1.2 *Ist $\nu := h\mu$ für meßbares $h : \mathfrak{X} \to [0,+\infty)$, und ist $f : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ eine meßbare Funktion, so ist f genau dann ν-integrierbar, wenn fh μ-integrierbar ist. Es gilt*

$$\int_{\mathfrak{X}} f \, d\nu = \int_{\mathfrak{X}} fh \, d\mu. \tag{3}$$

In Anbetracht von 1.2 ist für $\nu = w\mu$ also $L^1_w(\mathfrak{X},\mu) = L^1(\mathfrak{X},\nu)$, und wir können mit Hilfe von 1.1 die nachfolgende Proposition aussprechen:

[3] Wir betrachten nur positive Maße. Insbesondere ist μ positiv.

1.3 Proposition: *Ist* $(\mathfrak{X}, \mu)$ *ein Maßraum und ist* $w : \mathfrak{X} \to [1, +\infty)$ *eine meßbare Funktion, dann ist*

$$L^1_w(\mathfrak{X}, \mu) = \left\{ f : \mathfrak{X} \to \mathbb{C} \text{ meßbar} : \int_{\mathfrak{X}} |f| w \, d\mu < +\infty \right\}$$

mit der Norm

$$\|f\|_{1,w} = \int_{\mathfrak{X}} |f| w \, d\mu, \qquad f \in L^1_w(\mathfrak{X}, \mu),$$

und der Identifikation zweier Elemente $f, g \in L^1_w(\mathfrak{X}, \mu)$ *wenn* $\|f - g\|_{1,w} = 0$ *ist, ein Banachraum.*

Anmerkung: Proposition 1.3 bleibt richtig, wenn man statt $w \geq 1$ einfach $w \geq 0$ fordert. Da wir aber im weiteren Verlauf an der Beziehung (2) interessiert sind, wollen wir uns in der hier angegebenen Form auf die Proposition beziehen.

Da für $\nu = w\mu$ mit meßbarem $w : \mathfrak{X} \to [1, +\infty)$ die μ-Nullmengen mit den ν-Nullmengen genau übereinstimmen, gilt

$$L^\infty(\mathfrak{X}, \mu) = L^\infty(\mathfrak{X}, \nu). \tag{4}$$

B. Dualräume

Es erweist sich oftmals als nützlich, die Dualräume gegebener Banachräume genauer zu kennen. Damit auch wir von diesem Vorteil profitieren können, wollen wir deshalb die Dualräume der in Proposition 1.3 definierten Banachräume explizit angeben. Hierzu bedienen wir uns des nachfolgenden Resultates.

1.4 *Ist* $(\mathfrak{X}, \nu)$ *ein Maßraum mit* σ*-endlichem Maß* ν *und ist* Φ *ein beschränktes lineares Funktional auf* $L^1(\mathfrak{X}, \nu)$*, so existiert ein eindeutig bestimmtes* $g \in L^\infty(\mathfrak{X}, \nu)$ *mit*

$$\Phi(f) = \int_{\mathfrak{X}} f g \, d\nu$$

für alle $f \in L^1(\mathfrak{X}, \nu)$*; es gilt:* $\|\Phi\| = \|g\|_{\infty,\nu}$ (Rudin[23], Theorem 6.16).

Ist das Maß $\nu = w\mu$ aus Proposition 1.3 also σ-endlich, so erhält man wegen $L^1_w(\mathfrak{X}, \mu) = L^1(\mathfrak{X}, \nu)$ sofort

$$(L^1_w(\mathfrak{X}, \mu))' = L^\infty(\mathfrak{X}, \nu),$$

wobei das Gleichheitszeichen im Sinne einer isometrischen Isomorphie von Banachräumen zu verstehen ist. Unsere Bemühungen werden sich also an der σ-Endlichkeit von ν ausrichten.

Ein angemessener Rahmen, in dem wir dies erreichen können und dem auch unsere speziellen Situationen $\ell^1(\mathbb{Z})$ und $L^1(\mathbb{R})$ unterliegen, wird gegeben durch die Annahme, daß $\mathfrak{X}$ ein lokalkompakter Hausdorffraum mit abzählbarer Basis und daß μ ein reguläres Borel-Maß auf $\mathfrak{X}$ ist. Nehmen wir für $w : \mathfrak{X} \to [1, +\infty)$ neben seiner Meßbarkeit auch noch lokale Endlichkeit an, d.h. ist w auf kompakten Teilmengen von $\mathfrak{X}$ beschränkt, so läßt sich der Dualraum eines $L^1_w(\mathfrak{X}, \mu)$

genau angeben. Dies werden wir in Proposition 1.8 tun. Doch zuvor zitieren wir aus Cohn[4] die Propositionen 7.2.3 und 7.2.5.

1.5 *Ist $\mathfrak{X}$ ein lokal-kompakter Hausdorffraum mit abzählbarer Basis und ist μ ein Borel-Maß auf $\mathfrak{X}$, welches endlich auf den kompakten Teilmengen von $\mathfrak{X}$ ist, so ist μ regulär.*

1.6 *Ist $\mathfrak{X}$ ein lokal-kompakter Hausdorffraum mit abzählbarer Basis, so ist jedes reguläre Borel-Maß auf $\mathfrak{X}$ bereits σ-endlich.*

Diese beiden Aussagen bilden den Kern des nachfolgenden Lemmas.

1.7 Lemma: *Sei $\mathfrak{X}$ ein lokal-kompakter Hausdorffraum mit abzählbarer Basis und sei μ ein reguläres Borel-Maß auf $\mathfrak{X}$. Sei $\nu := w\mu$ mit meßbarem, lokal-endlichem $w \geq 1$ auf $\mathfrak{X}$. Dann sind μ und ν σ-endlich und ν ist außerdem regulär.*

$\triangleright$ **Beweis :** Aufgrund von 1.6 ist μ σ-endlich. Da außerdem w lokal-endlich ist, existiert zu jeder kompakten Menge K eine Konstante C_K mit $|w| \leq C_K$ auf K. Wir erhalten:

$$\nu(K) = \int_{\mathfrak{X}} \chi_K w \, d\mu \leq C_K \mu(K) < +\infty,$$

was die Endlichkeit von ν auf kompakten Teilmengen von $\mathfrak{X}$ bedeutet. Aussage 1.5 impliziert, daß ν regulär ist. Die Regularität von ν zusammen mit 1.6 liefert schließlich die σ-Endlichkeit von ν. $\triangleleft$

Unter den Voraussetzungen von Proposition 1.3 definieren wir nun den Raum $L_w^\infty(\mathfrak{X}, \mu)$. Es ist zunächst wieder

$$\mathfrak{L}_w^\infty(\mathfrak{X}, \mu) := \left\{ f : \mathfrak{X} \to \mathbb{C} \text{ meßbar} : \frac{f}{w} \in \mathfrak{L}^\infty(\mathfrak{X}, \mu) \right\}$$

mit $p_{\infty,w}(f) = p_\infty(\frac{f}{w})$ für $f \in \mathfrak{L}_w^\infty(\mathfrak{X}, \mu)$ ein halbnormierter Vektorraum. $L_w^\infty(\mathfrak{X}, \mu)$ ist dann definiert als der Quotient $\mathfrak{L}_w^\infty(\mathfrak{X}, \mu)/\ker p_{\infty,w}$. Zwei Elemente $f, g \in \mathfrak{L}_w^\infty(\mathfrak{X}, \mu)$ gehören genau dann zur selben Äquivalenzklasse, wenn $\frac{f}{w} = \frac{g}{w}$ im $L^\infty(\mathfrak{X}, \mu)$-Sinne gilt. Die Elemente von $\mathfrak{L}_w^\infty(\mathfrak{X}, \mu)$ schreiben und behandeln wir wieder als Funktionen, und notieren deshalb – wenn auch nicht ganz korrekt –

$$L_w^\infty(\mathfrak{X}, \mu) = \left\{ f : \mathfrak{X} \to \mathbb{C} \text{ meßbar} : \frac{f}{w} \in \mathfrak{L}^\infty(\mathfrak{X}, \mu) \right\}.$$

Die Norm auf $L_w^\infty(\mathfrak{X}, \mu)$ ist gegeben durch

$$\|f\|_{\infty,w} = \left\| \frac{f}{w} \right\|_{\infty,\mu} \tag{5}$$

für alle $f \in L_w^\infty(\mathfrak{X}, \mu)$, wobei $f = g$ in $L_w^\infty(\mathfrak{X}, \mu)$ genau dann gilt, wenn $p_{\infty,w}(f - g) = 0$ ist.

1.8 Proposition: *Sei $\mathfrak{X}$ ein lokal-kompakter Hausdorffraum mit abzählbarer Basis und regulärem Borel-Maß μ. Sei $w : \mathfrak{X} \to [1, +\infty)$ eine meßbare, lokal-endliche Funktion. Dann* *existiert zu jeder stetigen Linearform* Φ *auf* $L^1_w(\mathfrak{X},\mu)$ *ein eindeutig bestimmtes* $g \in L^\infty_w(\mathfrak{X},\mu)$ *mit*

$$\Phi(f) = \int_{\mathfrak{X}} fg\,d\mu$$

für alle $f \in L^1_w(\mathfrak{X},\mu)$ *und*

$$\|\Phi\| = \|g\|_{\infty,w}.$$

Umgekehrt induziert jedes $g \in L^\infty_w(\mathfrak{X},\mu)$ *auf diese Weise eine stetige Linearform auf* $L^1_w(\mathfrak{X},\mu)$.

In diesem Sinne sind $(L^1_w(\mathfrak{X},\mu))'$ *und* $L^\infty_w(\mathfrak{X},\mu)$ *isometrisch isomorphe Banachräume.*

$\triangleright$ **Beweis :** Es ist klar, daß $(L^\infty_w(\mathfrak{X},\mu), \|\cdot\|_{\infty,w})$ ein normierter Vektorraum ist. Für eine Cauchy-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty_w(\mathfrak{X},\mu)$ ist wegen (5) $\left(\frac{f_n}{w}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^\infty(\mathfrak{X},\mu)$ und konvergiert deshalb gegen ein $h \in L^\infty(\mathfrak{X},\mu)$ (Aussage 1.1). Offenbar konvergiert dann $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen hw in $L^\infty_w(\mathfrak{X},\mu)$, und $L^\infty_w(\mathfrak{X},\mu)$ ist vollständig.

Ist Φ eine stetige Linearform auf $L^1_w(\mathfrak{X},\mu)$, so ist, wenn wir $\nu := w\mu$ setzen, Φ insbesondere eine Linearform auf $L^1(\mathfrak{X},\nu)$. Wir befinden uns in der Situation von Lemma 1.7; die beiden Maße μ und ν sind σ-endlich. Dies garantiert uns die Existenz eines eindeutig bestimmten $h \in L^\infty(\mathfrak{X},\nu)$ mit

$$\Phi(f) = \int_{\mathfrak{X}} fh\,d\nu$$

für alle $f \in L^1(\mathfrak{X},\nu)$ und $\|\Phi\| = \|h\|_{\infty,\nu}$ (Aussage 1.4). Wegen (3) haben wir

$$\int_{\mathfrak{X}} fh\,d\nu = \int_{\mathfrak{X}} fhw\,d\mu.$$

Setzen wir also $g := hw$, so ist $g \in L^\infty_w(\mathfrak{X},\mu)$ wegen $L^\infty(\mathfrak{X},\mu) = L^\infty(\mathfrak{X},\nu)$ (siehe (4)), und wir haben

$$\Phi(f) = \int_{\mathfrak{X}} fg\,d\mu \tag{6}$$

für alle $f \in L^1(\mathfrak{X},\nu) = L^1_w(\mathfrak{X},\mu)$.

Umgekehrt definiert jedes $g \in L^\infty_w(\mathfrak{X},\mu)$ vermöge (6) eine stetige Linearform auf $L^1_w(\mathfrak{X},\mu)$. Für alle $f \in L^1_w(\mathfrak{X},\mu)$ gilt nämlich

$$\left|\int_{\mathfrak{X}} fg\,d\mu\right| = \left|\int_{\mathfrak{X}} fw\frac{g}{w}\,d\mu\right| \leq \left\|\frac{g}{w}\right\|_{\infty,\mu} \|f\|_{1,w}.$$

Wegen

$$\int_{\mathfrak{X}} fg\,d\mu = \int_{\mathfrak{X}} f\frac{g}{w}w\,d\mu = \int_{\mathfrak{X}} f\frac{g}{w}\,d\nu,$$

und 1.4 ist $\frac{g}{w}$ (in $L^\infty(\mathfrak{X},\nu) = L^\infty(\mathfrak{X},\mu)$) insbesondere eindeutig bestimmt. Man erhält

$$\|\Phi\| = \left\|\frac{g}{w}\right\|_{\infty,\mu} = \|g\|_{\infty,w}.$$

$\triangleleft$

C. Approximation durch stetige Funktionen

Für einen lokal-kompakten Hausdorffraum $\mathfrak{X}$ mit abzählbarer Basis, auf dem ein reguläres Borel-Maß μ und eine meßbare, lokal-endliche Funktion $w : \mathfrak{X} \to [1, +\infty)$ gegeben sind, stellt sich die Frage, ob die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger dicht in $L^1_w(\mathfrak{X}, \mu)$ liegen. Dem ist tatsächlich so, wie man in Rudin[23], Theorem 3.14, nachlesen kann:

1.9 *Ist ν ein reguläres Borel-Maß auf dem lokal-kompakten Hausdorffraum $\mathfrak{X}$, so liegt $C_c(\mathfrak{X})$, die Menge der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in $\mathfrak{X}$, dicht in $L^1(\mathfrak{X}, \nu)$.*

Unter den obigen Voraussetzungen haben wir bereits gesehen, daß $\nu = w\mu$ regulär ist (Lemma 1.7). Wir haben also

1.10 Proposition: *Ist $\mathfrak{X}$ ein lokal-kompakter Hausdorffraum mit abzählbarer Basis, ist μ ein reguläres Borel-Maß auf $\mathfrak{X}$ und ist $w : \mathfrak{X} \to [1, +\infty)$ meßbar und lokal-endlich, so liegt $C_c(\mathfrak{X})$ dicht in $L^1_w(\mathfrak{X}, \mu)$.*

Anmerkung: Fordert man die Stetigkeit von w, so kann man auf die Voraussetzung der Abzählbarkeit der Basis in Proposition 1.10 verzichten.

D. Faltung

Bekanntlich sind $\ell^1(\mathbb{Z})$ und $L^1(\mathbb{R})$ nicht nur Banachräume, sondern vermöge der Faltungen $*_\mathbb{Z} : \ell^1(\mathbb{Z}) \times \ell^1(\mathbb{Z}) \to \ell^1(\mathbb{Z})$,

$$a *_\mathbb{Z} b = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{\cdot - k} b_k, \qquad a, b \in \ell^1(\mathbb{Z}),$$

und $*_\mathbb{R} : L^1(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$,

$$f *_\mathbb{R} g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\mathbb{R} f(\cdot - x) g(x) \, d\lambda(x), \qquad f, g \in L^1(\mathbb{R}),$$

sogar kommutative Banachalgebren. Die Gründe hierfür liegen neben den topologischen Eigenschaften von $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{R}$ in der Gruppenstruktur dieser Räume.

Sei $\mathfrak{G}$ eine lokal-kompakte, abelsche Gruppe mit Gruppenoperation $(x, y) \mapsto x + y$. (Für abelsche Gruppen schreiben wir die Gruppenoperation immer additiv.) Dann existiert auf der Borel-σ-Algebra von $\mathfrak{G}$ ein von Null verschiedenes, positives, reguläres, bis auf Multiplikation mit einem konstanten Faktor eindeutig bestimmtes Maß m, das sogenannte *Haar-Maß* von $\mathfrak{G}$, welches die Eigenschaft hat, translations-invariant im Sinne von $m(x + E) = m(E)$ für alle $E \in \mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ zu sein. (Man vergleiche hierzu die Ausführungen in Cohn[4], Chapter 9; $x + E := \{x + y : y \in E\}$). Mit Hilfe dieses Maßes kann man die Faltung zweier m-integrierbarer Funktionen $f, g : \mathfrak{G} \to \mathbb{C}$ definieren:

$$\begin{array}{rcl} *_\mathfrak{G} : L^1(\mathfrak{G}, m) \times L^1(\mathfrak{G}, m) & \to & L^1(\mathfrak{G}, m), \\ (f, g) & \mapsto & \left(f *_\mathfrak{G} g : x \mapsto \displaystyle\int_\mathfrak{G} f(x - y) g(y) \, dm(y) \right). \end{array}$$

Um die Bezeichnung $*_{\mathfrak{G}}$ der Faltung zu entlasten, wollen wir im folgenden den Index $\mathfrak{G}$ weglassen; Mehrdeutigkeiten werden nicht auftreten. Die Faltung definiert auf $L^1(\mathfrak{G}, m)$ eine kommutative Multiplikation, die darüberhinaus stetig ist mit $\|f * g\|_{1,m} \leq \|f\|_{1,m}\|g\|_{1,m}$ (Rudin[22], Seite 4). Mit ihr wird $L^1(\mathfrak{G}, m)$ zur kommutativen Banachalgebra.

Wir haben weiter oben gesehen, daß wir für geeignetes $w : \mathfrak{G} \to \mathbb{R}$ die Beziehung $L^1_w(\mathfrak{G}, m) \subset L^1(\mathfrak{G}, m)$ haben. Damit besteht die Möglichkeit, die Faltung $*$ von $L^1(\mathfrak{G}, m)$ auf $L^1_w(\mathfrak{G}, m)$ einzuschränken. Die Frage, die wir uns stellen, lautet: Welche Eigenschaften muß w zusätzlich erfüllen, damit das Faltungsprodukt zweier Funktionen aus $L^1_w(\mathfrak{G}, m)$ wieder in $L^1_w(\mathfrak{G}, m)$ landet und außerdem stetig ist. Darüber gibt die nachfolgende Proposition Aufschluß.

1.11 Proposition: *Sei $\mathfrak{G}$ eine lokal-kompakte, abelsche Gruppe und m das Haar-Maß auf $\mathfrak{G}$. Sei $w : \mathfrak{G} \to [1, +\infty)$ meßbar und $w(x+y) \leq w(x)w(y)$ für alle $x, y \in \mathfrak{G}$. Dann ist $L^1_w(\mathfrak{G}, m)$ mit der von $L^1(\mathfrak{G}, m)$ geerbten Faltung eine kommutative Banachalgebra.*

$\triangleright$ **Beweis :** Wir haben bereits gesehen, daß $L^1_w(\mathfrak{G}, m)$ ein Banachraum ist mit $L^1_w(\mathfrak{G}, m) \subset L^1(\mathfrak{G}, m)$ (Proposition 1.3). Wir müssen zeigen, daß $f * g \in L^1_w(\mathfrak{G}, m)$ für alle $f, g \in L^1_w(\mathfrak{G}, m)$ und daß $\|f * g\|_{1,w} \leq \|f\|_{1,w}\|g\|_{1,w}$ ist. Wir beginnen mit letzterem:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathfrak{G}} |f * g| w \, dm &\leq \int_{\mathfrak{G}} \int_{\mathfrak{G}} |f(x-y)g(y)| w(x) \, dm(y) \, dm(x) \\
&\leq \int_{\mathfrak{G}} \int_{\mathfrak{G}} |f(x-y)g(y)| w(x-y) w(y) \, dm(y) \, dm(x) \\
&\leq \int_{\mathfrak{G}} |g(y)| w(y) \int_{\mathfrak{G}} |f(x-y)| w(x-y) \, dm(x) \, dm(y) \\
&= \|g\|_{1,w}\|f\|_{1,w},
\end{aligned}$$

wobei für die letzten beiden Umformungen der Satz von Fubini[4] und die Translationsinvarianz von m benutzt wurden. Damit haben wir tatsächlich $\|f * g\|_{1,w} \leq \|f\|_{1,w}\|g\|_{1,w}$, was insbesondere $f * g \in L^1_w(\mathfrak{G}, m)$ bedeutet.

$L^1_w(\mathfrak{G}, m)$ ist kommutativ, da die Faltung auf $L^1(\mathfrak{G}, m)$ bereits kommutativ ist. $\triangleleft$

Bevor wir uns zum Abschluß dieses Paragraphen den Spezialfällen $\ell^1_\varrho(\mathbb{Z})$ und $L^1_w(\mathbb{R})$ zuwenden, beweisen wir zwei Aussagen, die uns im §3 und §12 dienlich sein werden. Zuvor sei für alle $y \in \mathfrak{G}$ die Abbildung τ_y erklärt durch

$$\begin{aligned}
\tau_y : L^1_w(\mathfrak{G}, m) &\to L^1_w(\mathfrak{G}, m) \\
f &\mapsto (\tau_y f : x \mapsto f(x-y)) \,.
\end{aligned}$$

Die Wohldefiniertheit dieser Abbildung ist Teil der nachfolgenden Proposition.

1.12 Proposition: *Sei $\mathfrak{G}$ eine lokal-kompakte, abelsche Gruppe mit abzählbarer Basis und m das Haar-Maß auf $\mathfrak{G}$. Sei $w : \mathfrak{G} \to [1, +\infty)$ meßbar und $w(x+y) \leq w(x)w(y)$ für alle $x, y \in \mathfrak{G}$. Sei außerdem w lokal-endlich. Dann gilt:*

(a) Für alle $y \in \mathfrak{G}$ ist die Abbildung τ_y linear und stetig mit $\|\tau_y\| \leq w(y)$.

[4] in einer Version für lokal-kompakte Hausdorffräume (Cohn[4], Proposition 7.6.5)

(b) Für alle $f \in L^1_w(\mathfrak{G}, m)$ ist die Abbildung $y \mapsto \tau_y f$ von $\mathfrak{G}$ nach $L^1_w(\mathfrak{G}, m)$ stetig.

$\triangleright$ **Beweis :** Wir beginnen mit (a): Sei $y \in \mathfrak{G}$. Für $f \in L^1_w(\mathfrak{G}, m)$ haben wir:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathfrak{G}} |\tau_y f| w \, dm &= \int_{\mathfrak{G}} |f(x-y)| w(x) \, dm(x) \\
&\leq \int_{\mathfrak{G}} |f(x-y)| w(x-y) w(y) \, dm(x) \\
&= w(y) \int_{\mathfrak{G}} |f(x)| w(x) \, dm(x) \qquad \text{(Translationsinvarianz)} \\
&= w(y) \|f\|_{1,w}.
\end{aligned}$$

Damit ist $\|\tau_y f\|_{1,w} \leq w(y)\|f\|_{1,w}$ und τ_y wohldefiniert. Die Linearität von τ_y ist klar; es gilt $\|\tau_y\| \leq w(y)$.

Wir kommen zu (b): Aufgrund von Proposition 1.10 liegt die Menge $C_c(\mathfrak{G})$ dicht in $L^1_w(\mathfrak{G}, m)$. Wir beweisen die Aussage deshalb zunächst für Funktionen $g \in C_c(\mathfrak{G})$ und nutzen dann die Dichtheit aus, um die Aussage auch für alle anderen $f \in L^1_w(\mathfrak{G}, m)$ zu haben.

Sei dazu $y_0 \in \mathfrak{G}$, $\varepsilon > 0$ und $g \in C_c(\mathfrak{G})$. Dann ist für alle $y \in \mathfrak{G}$

$$\|\tau_y g - \tau_{y_0} g\|_{1,w} = \|\tau_{y_0}(\tau_{y-y_0} g - g)\|_{1,w} \leq w(y_0)\|\tau_{y-y_0} g - g\|_{1,w}.$$

Wir wählen eine kompakte Nullumgebung V in $\mathfrak{G}$. Setzen wir $\operatorname{supp}(g) := \overline{\{x \in \mathfrak{G} : g(x) \neq 0\}}$ (Abschluß in $\mathfrak{G}$) und $K := \operatorname{supp}(g) + V := \{x + y : x \in \operatorname{supp}(g), y \in V\}$, so gilt für $y \in V$:

$$\begin{aligned}
\|\tau_y g - g\|_{1,w} &= \int_{\mathfrak{G}} |\tau_y g - g| w \, dm \\
&= \int_{\mathfrak{G}} |g(x-y) - g(x)| w(x) \, dm(x) \\
&= \int_K |g(x-y) - g(x)| w(x) \, dm(x).
\end{aligned}$$

Da w nach Voraussetzung lokal-endlich ist, existiert in Abhängigkeit der kompakten Menge $K \subset \mathfrak{X}$ eine Konstante $C > 0$ mit $w(x) \leq C$ für alle $x \in K$. Dies führt auf

$$\|\tau_y g - g\|_{1,w} \leq C m(K) \sup_{x \in K} |g(x-y) - g(x)|.$$

Da g gleichmäßig stetig ist als stetige Funktion mit kompaktem Träger, kann man nun ein Umgebung U von 0 finden mit $U \subset V$ und $\sup_{x \in K} |g(x-y) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{C w(y_0) m(K)}$ für alle $y \in U$. Damit ist

$$\|\tau_y g - g\|_{1,w} < \frac{\varepsilon}{w(y_0)}$$

für alle $y \in U$. Für $y \in y_0 + U$ erhalten wir dann

$$\|\tau_y g - \tau_{y_0} g\|_{1,w} < \varepsilon.$$

Da $y_0 \in \mathfrak{G}$ beliebig war, folgt die Stetigkeit von $y \mapsto \tau_y g$ für $g \in C_c(\mathfrak{G})$.

Für $f \in L^1_w(\mathfrak{G}, m)$ schreiben wir nun $\tau_y f - \tau_{y_0} f = (\tau_y f - \tau_y g) + (\tau_y g - \tau_{y_0} g) + (\tau_{y_0} g - \tau_{y_0} f)$ mit $g \in C_c(\mathfrak{G})$ und erhalten

$$\|\tau_y f - \tau_{y_0} f\|_{1,w} \leq (w(y) + w(y_0))\|f - g\|_{1,w} + \|\tau_y g - \tau_{y_0} g\|_{1,w}.$$

Für eine kompakte Umgebung V von y_0 ist nun w wieder beschränkt, sagen wir durch $C > 0$. Wählen wir zuerst $g \in C_c(\mathfrak{G})$ mit $\|f - g\|_{1,w} < \frac{\varepsilon}{2(C + w(y_0))}$ und dann eine Umgebung $U \subset V$ von y_0 mit $\|\tau_y g - \tau_{y_0} g\|_{1,w} < \frac{\varepsilon}{2}$ für $y \in U$, so ist

$$\|\tau_y f - \tau_{y_0} f\|_{1,w} < \varepsilon$$

für alle $y \in U$. Da diese Überlegungen unabhängig sind von $y_0 \in \mathfrak{G}$, ist damit die Stetigkeit der Abbildung $y \mapsto \tau_y f$ nachgewiesen. $\triangleleft$

Anmerkung: Proposition 1.12 enthält den Spezialfall $w \equiv 1$ auf $\mathfrak{G}$; für diesen kann man die Aussage in Rudin[22], Seite 3, finden. Der hier geführte Beweis entspricht wesentlich dem dort niedergeschriebenen.

E. Approximative Einsen

Bevor wir eine Proposition über approximative Einsen formulieren, definieren wir:

1.13 Definition: *Ist $\mathfrak{G}$ eine lokal-kompakte Gruppe und $w : \mathfrak{G} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit*

(i) w meßbar,

(ii) w lokal-endlich,

(iii) $w(x) \geq 1$ für alle $x \in \mathfrak{G}$,

(iv) $w(x + y) \leq w(x)w(y)$ für alle $x, y \in \mathfrak{G}$,

so nennen nennen wir w ein Gewicht *auf $\mathfrak{G}$.*

1.14 Definition: *Sei $\mathfrak{G}$ eine lokal-kompakte Gruppe mit abzählbarer Basis, m das Haar-Maß auf $\mathfrak{G}$ und $w : \mathfrak{G} \to \mathbb{R}$ ein Gewicht auf $\mathfrak{G}$. Dann nennen wir die Banachalgebra $L^1_w(\mathfrak{G}, m)$ eine* Beurling-Algebra*.*

Man findet diese Definition der Beurling-Algebren – neben zusätzlichen Eigenschaften – z.B. in Reiter[21], Chapter 3, §7, allerdings unter Verzicht auf die Abzählbarkeit der Basis der Topologie der Gruppe $\mathfrak{G}$. Wir haben die Abzählbarkeit explizit gefordert, damit wir die σ-Endlichkeit des Haar-Maßes m erzwingen können (Aussage 1.6), und damit wir in der Lage sind, die Dualräume der $L^1_w(\mathfrak{G}, m)$ anzugeben.

1.15 Definition: *Sei $L^1_w(\mathfrak{G}, m)$ eine Beurling-Algebra im Sinne der Definition 1.14. Eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^1_w(\mathfrak{G}, m)$ heißt eine* approximative Eins *für $L^1_w(\mathfrak{G}, m)$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathfrak{G}} |u_n| \, dm < +\infty$

2) $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{G}} u_n\, dm = 1$

3) für jede Umgebung V *von 0 gilt:* $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{G}\setminus V} |u_n| w\, dm = 0$

1.16 Proposition: *Sei* $L^1_w(\mathfrak{G}, m)$ *eine Beurling-Algebra im Sinne der Defintion 1.14, und sei* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine approximative Eins für* $L^1_w(\mathfrak{G}, m)$*. Dann gilt für alle* $f \in L^1_w(\mathfrak{G}, \mu)$*:* $f * u_n \to f$ *für* $n \to \infty$ *in* $L^1_w(\mathfrak{G}, \mu)$*.*

Wir werden an entsprechender Stelle sehen, daß approximative Einsen in den für uns wichtigen Fällen existieren.

$\triangleright$ **Beweis von Proposition 1.16:** Sei $f \in L^1_w(\mathfrak{G}, m)$ mit $f \not\equiv 0$ (ohne Einschränkung), und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für m-fast alle $x \in \mathfrak{G}$:

$$\begin{aligned} \left|(f * u_n)(x) - f(x)\int_{\mathfrak{G}} u_n\, dm\right| &= \left|\int_{\mathfrak{G}} f(x-y)u_n(y)\, dm(y) - \int_{\mathfrak{G}} f(x)u_n(y)\, dm(y)\right| \\ &\le \int_{\mathfrak{G}} |f(x-y) - f(x)|\, |u_n(y)|\, dm(y). \end{aligned}$$

Sei $g \in L^\infty_w(\mathfrak{G}, m)$. Dann ist

$$\begin{aligned} &\int_{\mathfrak{G}} |g(x)| \left|(f * u_n)(x) - f(x)\int_{\mathfrak{G}} u_n\, dm\right| dm(x) \\ &\qquad \le \int_{\mathfrak{G}} |g(x)| \left(\int_{\mathfrak{G}} |f(x-y) - f(x)|\, |u_n(y)|\, dm(y)\right) dm(x) \\ &\qquad \le \int_{\mathfrak{G}} |u_n(y)| \left(\int_{\mathfrak{G}} |g(x)|\, |f(x-y) - f(x)|\, dm(x)\right) dm(y) \qquad \text{(Fubini)} \\ &\qquad = \int_{\mathfrak{G}} |u_n(y)| \left(\int_{\mathfrak{G}} \frac{|g(x)|}{w(x)} |f(x-y) - f(x)| w(x)\, dm(x)\right) dm(y) \\ &\qquad \le \|g\|_{\infty,w} \int_{\mathfrak{G}} |u_n(y)|\, \|\tau_y f - f\|_{1,w}\, dm(y). \end{aligned} \tag{7}$$

Man beachte, daß die Endlichkeit des letzten Integrals aus Proposition 1.12(a) folgt. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \quad L^\infty_w(\mathfrak{G}, m) &\to \mathbb{C} \\ g &\mapsto \int_{\mathfrak{G}} g(x) \left((f * u_n)(x) - f(x)\int_{\mathfrak{G}} u_n\, dm\right) dm(x), \end{aligned}$$

n fest, ist eine beschränkte, lineare Abbildung auf $L^\infty_w(\mathfrak{G}, m)$. Aufgrund der isometrischen Einbettung $L^1_w(\mathfrak{G}, m) \hookrightarrow (L^\infty_w(\mathfrak{G}, m))'$ (Werner[24], Satz III.3.1) haben wir

$$\|\Phi\| = \left\|f * u_n - f\int_{\mathfrak{G}} u_n\, dm\right\|_{1,w},$$

und wegen (7) damit

$$\left\|f * u_n - f\int_{\mathfrak{G}} u_n\, dm\right\|_{1,w} \le \int_{\mathfrak{G}} |u_n(y)|\, \|\tau_y f - f\|_{1,w}\, dm(y).$$

Sei $M := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int \mathfrak{G}|u_n|\,dm < +\infty$ gemäß Eigenschaft 1) einer approximativen Eins, und sei V eine kompakte Umgebung der 0. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{G}} |u_n(y)|\,\|\tau_y f - f\|_{1,w}\,dm(y) &= \left(\int_{\mathfrak{G}\setminus V} + \int_V\right) |u_n(y)|\,\|\tau_y f - f\|_{1,w}\,dm(y)\\ &\leq 2\|f\|_{1,w}\int_{\mathfrak{G}\setminus V} |u_n(y)|w(y)\,dm(y) + M\sup_{y\in V}\|\tau_y f - f\|_{1,w}.\end{aligned}$$

Wählt man V so, daß der zweite Summand kleiner als $\frac{\varepsilon}{4}$ wird (Proposition 1.12(b)) und dann gemäß Eigenschaft 3) einer approximativen Eins $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß für $n \geq n_0$ der erste Summand ebenfalls kleiner als $\frac{\varepsilon}{4}$ wird, so erhält man für $n \geq n_0$:

$$\left\| f * u_n - f\int_{\mathfrak{G}} u_n\,dm \right\|_{1,w} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Schließlich kann man gemäß Eigenschaft 2) einer approximativen Eins ein $n_1 \geq n_0$ angeben mit $\left|\int_{\mathfrak{G}} u_n\,dm - 1\right| < \frac{\varepsilon}{2\|f\|_{1,w}}$ für alle $n \geq n_1$. Eine einfache Anwendung der Dreiecksungleichung liefert somit

$$\|f * u_n - f\|_{1,w} < \varepsilon.$$

◁

F. Spezialfälle

Bis zum Ende dieses Paragraphen wollen wir uns noch mit den für diese Arbeit relevanten Spezialfällen der Definition 1.14 beschäftigen. Dies geschieht in den Nummern 1.17 und 1.18.

1.17 Versieht man $\mathbb{Z}$ mit der diskreten Topologie, so ist $\mathbb{Z}$ bezüglich der gewöhnlichen Addition eine lokal-kompakte, abelsche Gruppe mit abzählbarer Basis, auf der alle Abbildungen in einen weiteren meßbaren Raum meßbar sind. Das (normierte) Haar-Maß auf $\mathbb{Z}$ ist bekanntlich das Zählmaß ζ. Außerdem sind die kompakten Teilmengen von $\mathbb{Z}$ gerade die endlichen; sämtliche Abbildungen $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ sind von daher lokal-endlich. Wir befinden uns somit in einer denkbar einfachen Situation. Ist ϱ ein Gewicht auf $\mathbb{Z}$, so garantieren Proposition 1.3 und Proposition 1.11, daß

$$\ell^1_\varrho(\mathbb{Z}) = \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|\varrho_n < +\infty \right\} \subset \ell^1(\mathbb{Z})$$

mit der Norm $\|a\|_{1,\varrho} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|\varrho_n$, $a \in \ell^1_\varrho$, eine kommutative Banachalgebra ist. Aufgrund von Proposition 1.10 liegen die Folgen mit endlichem Träger dicht in $\ell^1_\varrho(\mathbb{Z})$. Die stetigen Linearformen auf $\ell^1_\varrho(\mathbb{Z})$ lassen sich schreiben in der Form

$$a \overset{\phi}{\longmapsto} \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n b_n$$

mit eindeutig bestimmten $b \in \ell^\infty_\varrho(\mathbb{Z})$,

$$\ell^\infty_\varrho(\mathbb{Z}) = \left\{ b \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \sup\{\frac{b_n}{\varrho_n} : n \in \mathbb{Z}\} < +\infty \right\}.$$

Es gilt $\|\phi\| = \|b\|_{\infty,\varrho}$. Im Sinne von Proposition 1.8 ist $(\ell^1_\varrho(\mathbb{Z}))' = \ell^\infty_\varrho(\mathbb{Z})$.

1.18 Mit der üblichen Topologie und der gewöhnlichen Addition ist auch $\mathbb{R}$ eine lokal-kompakte Gruppe mit abzählbarer Basis. Als Haar-Maß nehmen wir das mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ versehene Lebesgue-Maß λ auf $\mathbb{R}$. Sei w ein Gewicht auf $\mathbb{R}$. Die Propositionen 1.3 und 1.11 beinhalten die Aussage, daß

$$L^1_w(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ meßbar} : \int_{\mathbb{R}} |f| w \, d\lambda < +\infty \right\} \subset L^1(\mathbb{R})$$

mit der Norm $\|f\|_{1,w} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f| w \, d\lambda$ und der Faltung als Produkt eine kommutative Banachalgebra ist. In ihr liegen – Proposition 1.10 – die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger dicht. Die stetigen Linearformen auf $L^1_w(\mathbb{R})$ lassen sich schreiben in der Form

$$f \overset{\phi}{\longmapsto} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f g \, d\lambda$$

mit eindeutig bestimmten $g \in L^\infty_w(\mathbb{R})$, wobei

$$L^\infty_w(\mathbb{R}) = \left\{ g : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ meßbar} : \frac{g}{w} \in L^\infty(\mathbb{R}) \right\}.$$

Man hat $\|\phi\| = \|g\|_{\infty,w}$. Im Sinn von Proposition 1.8 ist $(L^1_w(\mathbb{R}))' = L^\infty_w(\mathbb{R})$.

Die Funktionenfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R})$ mit

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } |x| \geq \frac{1}{n} \\ \frac{n}{C} \exp\left(\frac{1}{n^2x^2-1}\right) & \text{falls } |x| < \frac{1}{n} \end{cases}$$

und $C := \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) dx$ liegt wegen Proposition 1.10 in $L^1_w(\mathbb{R})$. Man überprüft leicht, daß sie eine approximative Eins für $L^1_w(\mathbb{R})$ ist.

§2
Reguläre Banachalgebren

A. Allgemeines

Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, daß für eine lokal-kompakte Gruppe $\mathfrak{G}$ mit Haar-Maß m und Gewicht w der Raum $L^1_w(\mathfrak{G}, m)$ eine kommutative Banachalgebra ist. In diesem Abschnitt wollen wir allgemeine Ergebnisse der Theorie kommutativer Banachalgebren zusammenstellen und insbesondere auf die Theorie regulärer Banachalgebren eingehen. Dies wird sich als besonders nützlich erweisen, denn wie sich zeigen wird, sind $\ell^1_\varrho(\mathbb{Z})$ und $L^1_w(\mathbb{R})$ für gewisse Gewichte ϱ und w Beispiele solcher Algebren.

Bevor wir uns der Gelfandtransformation und regulären Banachalgebren zuwenden wollen, geben wir einen kurzen Abriß der Theorie kommutativer Banachalgebren. Wir beziehen uns dabei auf Katznelson[15], Chapter VIII.

In der Theorie kommutativer Banachalgebren spielen maximale Ideal eine wichtige Rolle. Die nachfolgende Aussage 2.1 gibt diesbezüglich das Wichtigste wieder.

2.1 *In einer kommutativen Banachalgebra $\mathcal{A}$ mit 1 sind die maximalen Ideale abgeschlossen. Jedes echte Ideal I in $\mathcal{A}$ ist in einem maximalen Ideal enthalten.*

Begründung: Da ein echtes Ideal I in $\mathcal{A}$ keine invertierbaren Elemente enthalten kann, gilt für alle $x \in I$: $\|1 - x\| \geq 1$. Insbesondere ist der Abschluß $\overline{I}$ von I wieder ein echtes Ideal in $\mathcal{A}$ ($1 \notin \overline{I}$). Für maximale Ideale M ergibt sich somit $M = \overline{M}$. Daß jedes echte Ideal I in einem maximalen Ideal enthalten ist, ist eine einfache Folgerung aus dem Lemma von Zorn und der Tatsache, daß kein echtes, I enthaltendes Ideal in $\mathcal{A}$ die 1 enthält.

Auch die multiplikativen Lineraformen auf $\mathcal{A}$ spielen eine wichtige Rolle. Wir fassen sie zur Menge $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ zusammen[5].

2.2 *Die multiplikativen Linearformen einer kommutativen Banachalgebra sind automatisch stetig und durch 1 nach oben beschränkt. Enthält die Algebra $\mathcal{A}$ eine 1, so besitzt sogar jede multiplikative Linearform Norm 1.*

Begründung: Wegen $1 = \phi(1)$ für eine kommutative Banachalgebra $\mathcal{A}$ mit 1 und $\phi \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ ergibt sich sofort $\|\phi\| \geq 1$. $\|\phi\| > 1$ kann aber nicht sein, denn für $x \in \mathcal{A}$ mit $|\phi(x)| > \|x\|$ ist $x_0 = x - \phi(x)1$ wegen $\left\|1 + \frac{x_0}{\phi(x)}\right\| = \frac{\|x\|}{|\phi(x)|} < 1$ invertierbar. Es ist aber auch $\phi(x_0) = 0$, was wegen $1 = \phi(1) = \phi(x_0 x_0^{-1}) = \phi(x_0)\phi(x_0^{-1})$ nicht möglich ist. Enthält die Algebra $\mathcal{A}$ keine 1, so geht man zur Algebra $(\mathcal{A}, 1)$ über, die aus $\mathcal{A}$ durch Adjungieren einer 1 hervorgeht, $(\mathcal{A}, 1) := \mathcal{A} \times \mathbb{C}$, $\|(x, \lambda)\| := \|x\|_{\mathcal{A}} + |\lambda|$ ($x \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$). Ist ϕ eine multiplikative Linearform auf $\mathcal{A}$, so ist

$$\pi(\phi) : (\mathcal{A}, 1) \to \mathbb{C}, \quad (x, \lambda) \mapsto \pi(\phi)(x, \lambda) := \phi(x) + \lambda \tag{8}$$

eine multiplikative Linearform auf $(\mathcal{A}, 1)$, die ϕ fortsetzt. Man hat dann

$$1 = \|\pi(\phi)\| = \sup\{|\phi(x) + \lambda| : \|x\|_{\mathcal{A}} + |\lambda| = 1\} \geq \sup\{|\phi(x)| : \|x\|_{\mathcal{A}} = 1\} = \|\phi\|.$$

Als günstig erweist sich auch der Zusammenhang zwischen den multiplikativen Linearformen und den maximalen Idealen einer kommutativen Banachalgebra mit 1.

2.3 *Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative Banachalgebra mit 1. Dann besteht vermöge $\phi \mapsto \ker\phi$ für $\phi \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ ein bijektives Verhältnis zwischen den multiplikativen Linearformen auf $\mathcal{A}$ und der Menge der maximalen Ideal in $\mathcal{A}$.*

Begründung: Der Kern einer multiplikativen Linearform ist ein abgeschlossenes Ideal mit Codimension 1 in $\mathcal{A}$, also maximal. Umgekehrt ist für ein maximales Ideal M der Quotient $\mathcal{A}/M$ ein Körper, und damit als Divisions-Banachalgebra isomorph zu $\mathbb{C}$ (Gelfand-Mazur). Vermöge $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/M \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ gewinnt man daraus eine eindeutig bestimmte, multiplikative Linearform auf $\mathcal{A}$ mit Kern M[6].

Aus der letzten Aussage läßt sich eine nützliche Folgerung ziehen:

[5] Multiplikative Linearformen sind für uns immer nicht-trivial.

[6] Die multiplikativen Linearformen sind durch ihre Kerne eindeutig bestimmt.

2.4 *Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative Banachalgebra mit 1. Ein Element $x \in \mathcal{A}$ ist genau dann invertierbar, wenn für alle $\phi \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ gilt: $\phi(x) \neq 0$.*

Begründung: Wir haben bereits in der Begründung von 2.2 gesehen, daß die Bedingung notwendig ist. Sie ist aber auch hinreichend, denn ist x nicht invertierbar, so definiert $x\mathcal{A}$ ein Ideal in $\mathcal{A}$, welches nach 2.1 und 2.4 in einem maximalen Ideal $\ker \phi$ für ein $\phi \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ enthalten ist. Wegen $1 \in \mathcal{A}$ ist $x = x \cdot 1 \in x\mathcal{A}$ und damit $\phi(x) = 0$.

Mit diesen Vorbereitungen wenden wir uns nun der Gelfandtransformation und den regulären Banachalgebren zu. Auch hierzu präsentieren wir nur einen kleinen Auszug aus der Theorie, eben jene Aussagen, die uns im Verlauf dieser Arbeit dienlich sein werden. Wir verweisen für eine detailiertere Darstellung wieder auf Katznelson[15] und außerdem auf Naimark[16], §15.

B. Gelfandtransformation und reguläre Banachalgebren

Im folgenden bezeichne $\mathcal{A}'$ den topologischen Dualraum der Banachalgebra $\mathcal{A}$.

Für die Gelfandtransformation einer kommutativen Banachalgebra $\mathcal{A}$ mit 1 spielen die multiplikativen Linearformen eine wesentliche Rolle. Dies liegt zum einen an der Tatsache, daß die duale Einheitskugel eines Banachraumes schwach*-kompakt ist (Banach-Alaoglu), und zum andern daran, daß die multiplikativen Linearformen einer kommutativen Banachalgebra mit 1 eine schwach*-abgeschlossene Teilmenge dieser dualen Einheitskugel bilden. Versieht man nämlich die Menge $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ der multiplikativen Linearformen auf $\mathcal{A}$ mit der schwach*-Relativtopologie von $\mathcal{A}'$ und berücksichtigt man, daß $\mathcal{A}'$ bezüglich der schwach*-Topologie Hausdorffsch ist (Hahn-Banach), so folgert man sofort, daß $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ ein kompakter Hausdorffraum ist. Für jedes $x \in \mathcal{A}$ definiert $\phi \mapsto \phi(x)$ eine stetige Abbildung $\widehat{x} : \mathcal{M}_{\mathcal{A}} \to \mathbb{C}$ (Definition der schwach*-Topologie), und man erhält die Gelfandtransformation vermöge

$$\widehat{\ }: \quad \mathcal{A} \to C(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}), \quad x \mapsto \widehat{x},$$

wobei $C(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$ für die Menge der stetigen Funktionen auf $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ steht und $\widehat{x}$ für $\phi \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ definiert ist durch $\widehat{x}(\phi) := \phi(x)$.

Besitzt die kommutative Banachalgebra $\mathcal{A}$ keine 1, so bildet $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ zwar nach wie vor eine Teilmenge der dualen Einheitskugel $\mathcal{A}'_1$, ist aber nicht mehr schwach*-abgeschlossen. Von der kommutativen Banachalgebra $(\mathcal{A}, 1)$ wissen wir aber nach dem bereits Gesagten, daß $\mathcal{M}_{(\mathcal{A},1)}$ schwach*-kompakt in $(\mathcal{A}, 1)'_1$ ist. Ein Vergleich der multiplikativen Linearformen von $\mathcal{A}$ mit denen von $(\mathcal{A}, 1)$ ergibt $\mathcal{M}_{(\mathcal{A},1)} = \pi(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}) \cup \{\varphi_1\}$, wobei φ_1 die multiplikative Linearform auf $(\mathcal{A}, 1)$ mit $\ker \varphi_1 = \mathcal{A} \times \{0\}$ und π gemäß (8) definiert ist. Da also $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} \cong \mathcal{M}_{(\mathcal{A},1)} \backslash \{\varphi_1\}$ und $\mathcal{M}_{(\mathcal{A},1)}$ schwach*-kompakt ist, ist $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ immerhin noch ein lokal-kompakter Hausdorffraum, und die Gelfandtransformation kann definiert werden durch

$$\widehat{\ }: \mathcal{A} \to C_0(\mathcal{M}_{\mathcal{A}}), \quad x \mapsto \widehat{x},$$

wobei $C_0(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$ für die Menge der stetigen Funktionen auf $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ steht, die im Unendlichen verschwinden, und $\widehat{x}$ für $\phi \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ definiert ist durch $\widehat{x}(\phi) := \phi(x)$.

Ausgehend von der Gelfandtransformation kann man reguläre Banachalgebren definieren. Dazu erinnern wir, daß eine Familie $\mathfrak{F}$ von Funktionen auf einem topologischen Raum $\mathfrak{X}$ mit Werten in $\mathbb{C}$ regulär heißt, wenn zu jeder abgeschlossenen Teilmenge $F \subset \mathfrak{X}$ und jedem Punkt $t_0 \in X \backslash F$ eine Funktionen $f \in \mathfrak{F}$ existiert mit $f(t_0) = 1$ und $f(t) = 0$ für alle $t \in F$. Eine kommutative Banachalgebra $\mathcal{A}$ mit 1 heißt *regulär*, wenn das Bild von $\mathcal{A}$ unter der Gelfandtransformation, die Funktionenfamilie $\widehat{\mathcal{A}} \subset C(\mathcal{M}_{\mathcal{A}})$, regulär ist. Entsprechend heißt eine kommutative Banachalgebra $\mathcal{A}$ ohne 1 *regulär*, wenn die Banachalgebra $(\mathcal{A}, 1)$ regulär ist. Eine Formulierung, die beiden Situationen gerecht wird, ist die folgende: Eine kommutative Banachalgebra $\mathcal{A}$ (mit oder ohne 1) heißt *regulär*, wenn zu jedem abgeschlossenen $F \subset \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ und jedem Punkt $\phi_0 \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}} \backslash F$ eine Abbildung $\widehat{x} \in \widehat{\mathcal{A}}$ existiert mit $\widehat{x}(\phi_0) = \phi_0(x) = 1$ und $\widehat{x}(\phi) = \phi(x) = 0$ für alle $\phi \in F$.

Kann man in einer kommutativen Banachalgebra zu jedem $\phi_0 \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ und jeder Umgebung V von ϕ_0 ein $x \in \mathcal{A}$ angeben mit $\widehat{x}(\phi_0) = \phi_0(x) \neq 0$ und $\widehat{x}(\phi) = \phi(x) = 0$ für alle $\phi \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}} \backslash V$, so ist die Banachalgebra natürlich regulär, und umgekehrt.

Reguläre Banachalgebren haben einige bemerkenswerte Eigenschaften, die wir nun anführen wollen. Dazu definieren wir zuvor die *Hülle* $h(I)$ eines abgeschlossenen Ideals I in $\mathcal{A}$ durch

$$h(I) := \{\phi \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}} : I \subset \ker \phi\} = \bigcap_{x \in I} N(\widehat{x}),$$

wobei $N(\widehat{x}) := \{\phi \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}} : \widehat{x}(\phi) = \phi(x) = 0\}$ ist.
Der *Kern* $k(F)$ einer abgeschlossen Teilmenge F von $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ ist erklärt durch

$$k(F) := \bigcap_{\phi \in F} \ker \phi.$$

Als Durchschnitt abgeschlossener Ideale ($\phi \in F$ stetig!), ist $k(F)$ wieder ein abgeschlossenes Ideal. Die Quotientenalgebra $\mathcal{A}/k(F)$ ist dann mit der Quotientennorm wieder eine kommutative Banachalgebra.

Sei I ein abgeschlossenes Ideal in $\mathcal{A}$ und $\phi \in h(I)$. Dann definiert $\widetilde{\phi} : \mathcal{A}/I \to \mathbb{C}$, $[x] \mapsto \widetilde{\phi}([x]) := \phi(x)$ ($[x]$ die Restklasse von $x \in \mathcal{A}$ in $\mathcal{A}/I$) eine wohldefinierte, multiplikative Linearform auf $\mathcal{A}/I$. Ist nämlich $[x] = [y]$ für $x, y \in \mathcal{A}$, so ist $x - y \in I \subset \ker \phi$ und damit $\phi(x) = \phi(y)$, d.h. $\widetilde{\phi}([x]) = \widetilde{\phi}([y])$. Daß $\widetilde{\phi}$ linear und multiplikativ ist (und damit stetig), ist klar. Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} {}^{\sim} : h(I) & \to & \mathcal{M}_{\mathcal{A}/I} \\ \phi & \longmapsto & \widetilde{\phi} \end{array}$$

ist somit ebenfalls wohldefiniert. Darüberhinaus ist $^{\sim}$ injektiv: ist nämlich $\widetilde{\phi} = \widetilde{\psi}$ für $\phi, \psi \in h(I)$, so $\widetilde{\phi}([x]) = \phi(x) = \psi(x) = \widetilde{\psi}([x])$ für alle $x \in \mathcal{A}$. Dies aber bedeutet $\phi = \psi$.

Es stellt sich nun die Frage, ob die Abbildung $^{\sim}$ nicht auch schon surjektiv ist. Eine Antwort gibt die Proposition 2.5.

2.5 Proposition: *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra (mit oder ohne 1). Dann ist die Abbildung $^{\sim}$ ein Homöomorphismus zwischen $h(I)$ und $\mathcal{M}_{\mathcal{A}/I}$.*

▷ **Beweis :** Wir haben bereits gezeigt, daß $\widetilde{\ }$ wohldefiniert und injektiv ist. Zum Nachweis der Surjektivität sei $\varphi : \mathcal{A}/I \to \mathbb{C}$ irgendeine multiplikative Linearform auf $\mathcal{A}/I$. Dann definiert $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, $\phi(x) := \varphi([x])$, trivialerweise eine multiplikative Linearform auf $\mathcal{A}$. Offenbar ist $\widetilde{\phi} = \varphi$.

Wegen $|\widetilde{\phi_\alpha}([x]) - \widetilde{\phi}([x])| = |\phi_\alpha(x) - \phi(x)|$ für alle $x \in \mathcal{A}$ gilt: $\phi_\alpha \overset{\alpha}{\to} \phi$ schwach* in $h(I)$ genau dann, wenn $\widetilde{\phi_\alpha} \overset{\alpha}{\to} \widetilde{\phi}$ schwach* in $\mathcal{M}_{\mathcal{A}/I}$. Das ist die Bistetigkeit. ◁

Ist $F \subset \mathcal{M}_\mathcal{A}$ kompakt und $I = k(F)$, so kann man im Falle regulärer Banachalgebren die folgende Aussage beweisen:

2.6 Proposition: *Sei $\mathcal{A}$ eine reguläre Banachalgebra (mit oder ohne 1) und F eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{M}_\mathcal{A}$. Dann gilt*

$$F = h(k(F)) \tag{9}$$

und damit

$$F \cong \mathcal{M}_{\mathcal{A}/k(F)}.$$

▷ **Beweis :** Mit (9) und $I = k(F)$ folgt die Aussage bezüglich der Homöomorphie aus Proposition 2.5. Es genügt also, (9) zu zeigen.

Für $\phi \in F$ und $x \in k(F)$ ist $\widehat{x}(\phi) = \phi(x) = 0$. Also ist $\phi \in \bigcap_{x \in k(F)} N(\widehat{x}) = h(k(F))$, was $F \subset h(k(F))$ mit sich bringt.

Für $\phi \in h(k(F)) = \bigcap_{x \in k(F)} N(\widehat{x})$ gilt $\widehat{x}(\phi) = \phi(x) = 0$ für alle $x \in k(F)$. Wäre $\phi \notin F$, so exsistierte wegen der Abgeschlossenheit von F und der Regularität von $\mathcal{A}$ ein $y \in \mathcal{A}$ mit $\widehat{y}(\phi) = \phi(y) = 1$ und $\widehat{y}(\psi) = \psi(y) = 0$ für alle $\psi \in F$. Letzteres bedeutete $y \in k(F)$ und dies $\widehat{y}(\phi) = \phi(y) = 0$, ein Widerspruch zu $\widehat{y}(\phi) = 1$. Die Annahme $\phi \notin F$ muß also falsch sein; in Wirklichkeit ist $\phi \in F$. Damit ist die Inklusion $h(k(F)) \subset F$ gezeigt. ◁

Proposition 2.6 verhilft nun zu einem weiteren nützlichen Resultat:

2.7 Proposition: *Ist I ein abgeschlossenes Ideal in der regulären Banachalgebra $\mathcal{A}$, und ist $F \neq \emptyset$ eine kompakte Teilmenge von $\mathcal{M}_\mathcal{A}$ mit der Eigenschaft, daß $h(I) \cap F = \emptyset$ ist, so existiert $x \in I$ mit $\widehat{x}|_F \equiv 1$.*

▷ **Beweis :** Wir starten den Beweis mit der Annahme, daß $\mathcal{A}$ eine 1 besitzt.

Bezeichnen wir mit $[\cdot]$ die kanonische Quotientenabbildung von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{A}_F := \mathcal{A}/k(F)$, so ist mit I Ideal in $\mathcal{A}$ auch $[I]$ ein Ideal in $\mathcal{A}_F$.

Wir zeigen, daß $[I] = \mathcal{A}_F$ ist. Angenommen, dem wäre nicht so. Dann wäre $[I]$ ein echtes Ideal in $\mathcal{A}_F$ und als solches enthalten in einem maximalen Ideal in $\mathcal{A}_F$ (Aussage 2.1). Die maximalen Ideale einer kommuativen Banachalgebra mit 1 sind aber gerade die Kerne der multiplikativen Linearformen dieser Algebren (Aussage 2.3). Es wäre also $[I] \subset \ker \widetilde{\phi}$ für ein $\phi \in F$ nach Proposition 2.6. Dann wäre aber wegen $0 = \widetilde{\phi}([x]) = \phi(x)$ für alle $x \in I$ auch $I \subset \ker \phi$, d.h. $\phi \in h(I)$ im Widerspruch zu $h(I) \cap F = \emptyset$ und $\phi \in F$. Unsere Annahme $[I] \subsetneq \mathcal{A}_F$ muß falsch sein, $[I] = \mathcal{A}_F$ damit richtig.

Da $1 \in \mathcal{A}$, können wir $[1] \in \mathcal{A}_F = [I]$ betrachten und feststellen, daß es ein $x \in I$ mit $[1] = [x]$ gibt. Diese Gleichheit bedeutet $1 - x \in k(F)$, d.h. für alle $\phi \in F$ ist $0 = \phi(1-x) = 1 - \phi(x) = 1 - \widehat{x}(\phi)$. Es ist somit tatsächlich $\widehat{x}|_F \equiv 1$.

Besitzt $\mathcal{A}$ keine 1, so behelfen wir uns damit, daß wir I und F nach $(\mathcal{A}, 1)$ und $\mathcal{M}_{(\mathcal{A},1)}$ transportieren. Man muß nur wissen, daß für ein abgeschlossenes Ideal I in $\mathcal{A}$ auch $I \times \{0\}$ ein abgeschlossenes Ideal in $(\mathcal{A}, 1)$ ist, und daß mit π aus (8) und φ_1 mit $\ker \varphi_1 = \mathcal{A} \times \{0\}$ (vgl. Seite 15) $\pi(F)$ eine kompakte Teilmenge von $\mathcal{M}_{(\mathcal{A},1)}$ mit $\varphi_1 \notin \pi(F)$ ist (an dieser Stelle kommt die Voraussetzung „F kompakt" ins Spiel).

Wir überzeugen uns, daß $h(I) \cap F = \emptyset$ automatisch $h(I \times \{0\}) \cap \pi(F) = \emptyset$ mit sich bringt[7]. Angenommen, es existierte $\psi \in h(I \times \{0\}) \cap \pi(F)$. Dann wäre $\psi = \pi(\phi)$ für ein $\phi \in F$ und $\psi \in h(I \times \{0\})$ implizierte $I \times \{0\} \subset \ker \psi$, d.h. für alle $x \in I$ wäre $0 = \psi(x, 0) = \pi(\phi)(x, 0) = \phi(x) + 0$, d.h. $I \subset \ker \phi$. Man hätte $\phi \in h(I) \cap F$ im Widerspruch zu $h(I) \cap F = \emptyset$.

Nach dem bereits Gesagten wissen wir, daß ein $x \in I$ existiert mit $\widehat{(x,0)}|_{\pi(F)} \equiv 1$. Wegen $1 = \widehat{(x,0)}(\pi(\phi)) = \pi(\phi)(x, 0) = \phi(x) + 0 = \widehat{x}(\phi)$ für alle $\phi \in F$ folgt dann $\widehat{x} \in C_0(\mathcal{M}_\mathcal{A})$ mit $\widehat{x}|_F \equiv 1$. $\lhd$

§3
Gelfandtransformation für Beurling-Algebren

A. Allgemeines

Eine der schönsten Anwendungen der Gelfandtheorie ist das Wiedererkennen der Fouriertransformation als einen Spezialfall der Gelfandtransformation. Im Falle $\ell^1(\mathbb{Z})$ und $L^1(\mathbb{R})$ sind die Fouriertransformationen gegeben durch $\widehat{\ }: \ell^1(\mathbb{Z}) \to C(\Gamma)$, $a \mapsto \widehat{a}$, wobei

$$\widehat{a}(\xi) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m \xi^m \qquad (\xi \in \Gamma)$$

und $\widehat{\ }: L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$, $f \mapsto \widehat{f}$, wobei

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ixt}\, dt \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Es ist bekannt – und dies wird sich in Kürze nochmals ergeben –, daß die Mengen $\mathcal{M}_{\ell^1(\mathbb{Z})}$ und Γ sowie $\mathcal{M}_{L^1(\mathbb{R})}$ und $\mathbb{R}$ zueinander homöomorph sind. Die Fouriertransformationen gehen somit in kanonischer Weise aus den entsprechenden Gelfandtransformationen hervor.

Für Gewichte ϱ auf $\mathbb{Z}$ und w auf $\mathbb{R}$ stehen auf den Beurling-Algebren $\ell^1_\varrho(\mathbb{Z})$ und $L^1_w(\mathbb{R})$ zwei Abbildungen in eine Menge stetiger Funktionen zur Verfügung:

1. Wegen $\ell^1_\varrho(\mathbb{Z}) \subset \ell^1(\mathbb{Z})$ bzw. $L^1_w(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ (vgl. 1.17 bzw. 1.18) besteht die Möglichkeit, die jeweiligen Fouriertransformationen auf $\ell^1_\varrho(\mathbb{Z})$ bzw. $L^1_w(\mathbb{R})$ einzuschränken.

[7] Die Doppelbezeichnung von h als Hülle von abgeschlossenen Idealen in $\mathcal{A}$ und $(\mathcal{A}, 1)$ sollte keine Schwierigkeiten breiten; ebenso die Doppelbezeichnung der Gelfandtransformation für $\mathcal{A}$ und $(\mathcal{A}, 1)$.

2. Andererseits kann man auf den kommutativen Banachalgebren $\ell^1_\varrho(\mathbb{Z})$ und $L^1_w(\mathbb{R})$ die Gelfandtransformation betrachten, d.h. die in §2, Abschnitt B erklärten Abbildungen

$$\widehat{\ }: \ell^1_\varrho(\mathbb{Z}) \to C(\mathcal{M}_{\ell^1_\varrho(\mathbb{Z})}) \qquad \text{und} \qquad \widehat{\ }: L^1_w(\mathbb{R}) \to C(\mathcal{M}_{L^1_w(\mathbb{R})}).$$

Es stellt sich in natürlicher Weise die Frage (und wird durch die gleiche Bezeichnung der Abbildungen auch suggeriert), ob die Einschränkungen der Fouriertransformationen in einem vernünftigen Sinn (d.h. modulo einer Homöomorphie zu $\mathcal{M}_{\ell^1_\varrho(\mathbb{Z})}$ bzw. $\mathcal{M}_{L^1_w(\mathbb{R})}$) bereits die Gelfandtransformationen der Beurling-Algebren sind. Diese Frage ist *nicht* durchgehend positiv zu beantworten und hängt mit der Regularität von $\widehat{\ell^1_\varrho(\mathbb{Z})}$ bzw. $\widehat{L^1_w(\mathbb{R})}$ als Mengen stetiger Funktionen auf einem (lokal-)kompakten Hausdorffraum zusammen. Hier und im folgenden bezeichne $\widehat{\ }$ stets die (eingeschränkte) Fouriertransformation.

Wir wollen an dieser Stelle vereinfachende Bezeichnungen einführen. Als erstes definieren wir die Mengen $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ und $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ durch

$$\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) := \widehat{\ell^1_\varrho(\mathbb{Z})} \text{ und}$$
$$\mathfrak{F}_w(\mathbb{R}) := \widehat{L^1_w(\mathbb{R})}.$$

Versehen wir dann $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ mit der Norm $\|\widehat{a}\|_\varrho := \|a\|_{1,\varrho}$ für alle $a \in \ell^1_\varrho(\mathbb{Z})$ und $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ mit $\|\widehat{f}\|_w := \|f\|_{1,w}$ für alle $f \in L^1_w(\mathbb{R})$, so ist klar, daß $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ und $\ell^1_\varrho(\mathbb{Z})$ sowie $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ und $L^1_w(\mathbb{R})$ isometrisch isomorphe Banachalgebren sind; $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ und $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ wollen wir in diesem Sinn wieder als Beurling-Algebren bezeichnen. Die Multiplikation in $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ und $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ ist punktweise definiert. Die Elemente von $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ und $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ werden wir stets in der Form $\widehat{a}$ und $\widehat{f}$ schreiben, wobei $a \in \ell^1_\varrho(\mathbb{Z})$ und $f \in L^1_w(\mathbb{R})$ nicht immer erwähnt, sondern von selbst verstanden werden soll.

In diesem Paragraphen beschäftigen wir uns mit der Frage, welchen notwendigen Bedingungen die Gewicht ϱ und w unterliegen, wenn die zugehörigen Räume $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ und $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ als Funktionenalgebren regulär sind. Eine solche Bedingung wurde von *A. Beurling* in [3] angegeben und von dessen Schüler *Y. Domar* in [8] auf allgemeinere Situationen übertragen. Es wird sich zeigen, daß unter den Bedingungen von Beurling die Gelfandtransformationen von $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ und $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ gerade die Identitäten auf den jeweiligen Räumen sind; $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ und $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ sind somit auch als Banachalgebren im Sinn von §2 regulär.

3.1 Definition: *Wir nennen ein Gewicht ϱ auf $\mathbb{Z}$ bzw. w auf $\mathbb{R}$ ein* Beurling-Domar-Gewicht *oder kürzer* vom Typ $\mathfrak{BD}$, *wenn gilt:*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\log \varrho_n}{1+n^2} < +\infty \qquad \textit{bzw.} \qquad \int_{\mathbb{R}} \frac{\log w(t)}{1+t^2}\,dt < +\infty.$$

Die Bedingung von Beurling-Domar ist sogar in dem Sinne hinreichend, daß ihr Erfülltsein für Gewichte ϱ und w bereits die Regularität von $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ und $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ als Funktionenalgebren herbeiführt. Dies werden wir im nächsten Paragraphen zeigen. Auf die Frage, ob die Regularität von $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ bzw. $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ als Banachalgebren bereits die Regularität als Funktionenalgebren nach sich zieht, geben wir im Rahmen dieser Arbeit keine Antwort.

Der Grund, warum wir diese bekannten Zusammenhänge hier nochmals darstellen, hängt mit der Relevanz zusammen, die den regulären Beurling-Algebren in dieser Arbeit zukommt.

B. Für reguläres $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ ist w vom Typ $\mathfrak{BD}$

In diesem Abschnitt setzen wir $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ als regulär voraus und zeigen, daß dann w vom Typ $\mathfrak{BD}$ sein muß. Ohne zusätzliche Hilfsmittel ist dies allerdings nicht möglich. Als entscheidend erweist sich ein Satz von Paley und Wiener, den der Leser vollständig formuliert und bewiesen im Anhang B finden kann.

Die Grundlage für den zu zitierenden Satz bilden der Hilbertraum

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{R}) &:= \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ meßbar} : \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx < +\infty \right\}, \\ \|f\|_2 &:= \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx}, \qquad f \in L^2(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

mit der Identifikation zweier Elemente f, g, wenn $\|f-g\|_2 = 0$ ist (man vergleiche mit §1) und die *Planchereltransformation*

$$\mathfrak{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}),$$

die sich folgendermaßen definieren läßt: Man betrachtet zu einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ die Fouriertransformation $\widehat{f}$, stellt fest, daß diese ein Element in $L^2(\mathbb{R})$ ist und findet damit eine Abbildung $\widetilde{\mathfrak{F}} : L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, die überdies linear und stetig bzgl. den L^2-Normen ist. Da $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ bzgl. der L^2-Norm dicht in $L^2(\mathbb{R})$ liegt, kann man $\mathfrak{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ als die Fortsetzung von $\widetilde{\mathfrak{F}}$ auf $L^2(\mathbb{R})$ definieren. $\mathfrak{F}$ ist ein isometrischer Isomorphismus auf $L^2(\mathbb{R})$ (Werner[24], Kapitel V.2). Wir wollen Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R})$ *stetig* nennen, wenn es eine (im üblichen Sinne) stetige Funktion $g \in L^2(\mathbb{R})$ gibt mit $\|f-g\|_2 = 0$.

3.2 Wir zitieren an dieser Stelle die für uns relevante Teilaussage aus dem Satz von Paley und Wiener (Satz B.1). *Ist $f \in L^2(\mathbb{R})$ mit $\|f\|_2 \neq 0$ und existiert $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für fast alle $x \geq x_0$, so gilt:*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\log|\mathfrak{F}f(t)||}{1+t^2}\, dt < +\infty.$$

3.3 In den Beweisen der nachfolgenden Sätze spielt die *Inversionsformel* eine wichtige Rolle. Man findet sie beispielsweise in Rudin[23] als Theorem 9.11.

Sind $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, und ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$g(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t) e^{ixt}\, dt,$$

so ist $g \in C_0(\mathbb{R})$ und $\|f-g\|_1 = 0$.

Führen wir für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die Funktion $f^{\check{}} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(-x)$ ein, so wird die Inversionsformel meistens in der Form Anwendung finden, daß für ein $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ gilt: $\mathfrak{F}\widehat{f} = \widehat{\widehat{f}} = f^{\check{}}$. Dabei sind die Gleichheiten in Sinne von $L^1(\mathbb{R})$-Gleichheiten zu verstehen.

3.4 Satz: *Ist w ein Gewicht auf $\mathbb{R}$ und $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ als Funktionenalgebra für dieses Gewicht regulär, so ist w vom Typ $\mathfrak{BD}$.*

▷ **Beweis :** Aufgrund der Regularität von $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ als Funktionenalgebra existiert ein $f \in L^1_w(\mathbb{R})$ mit $f \not\equiv 0$ und $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset [-c, c]$ für ein $c > 0$. Da $\widehat{f}$ stetig ist mit kompaktem Träger, folgt $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ und damit $\mathfrak{F}\widehat{f} = \widehat{\widehat{f}} = f^- \in L^2(\mathbb{R})$ stetig, also auch $f \in L^2(\mathbb{R})$ stetig. Insbesondere ist $f \in L^1_w(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Aufgrund der Stetigkeit von f existiert sicherlich eine stetige Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit kompaktem Träger, so daß $\int_{\mathbb{R}} f(-t)h(t)\,dt \neq 0$ ist. Wir definieren $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ als $g := f * h$. Offensichtlich ist $g \in L^1(\mathbb{R})$ und $\widehat{g} = \widehat{f * h} = \widehat{f}\widehat{h}$ stetig mit kompakten Träger. Daraus folgt $\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ und $\mathfrak{F}\widehat{g} = \widehat{\widehat{g}} = g^- \in L^2(\mathbb{R})$, also auch $g \in L^2(\mathbb{R})$. Es gilt:

$$\begin{aligned} |g(t)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(t-s)h(s)| \frac{w(t)}{w(t)}\,ds \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}w(t)} \int_{\mathbb{R}} |f(t-s)h(s)| w(t-s)w(s)\,ds \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}w(t)} \sup\{|h(s)w(s)| : s \in \operatorname{supp} h\} \int_{\mathbb{R}} |f(t-s)| w(t-s)\,ds. \end{aligned}$$

Beachtet man $f \in L^1_w(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} h$ kompakt und w beschränkt auf kompakten Teilmengen, so ist also

$$|g(t)| \leq \frac{K}{w(t)} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

für eine Konstante $K > 0$. Wegen $w \geq 1$ ist $|g|$ nach oben beschränkt, und es macht Sinn, das nachfolgende Integral zu schreiben und abzuschätzen:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\log|g(s)|}{1+s^2}\,ds \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{\log K - \log w(s)}{1+s^2}\,ds.$$

Wäre nun $\int_{\mathbb{R}} \frac{\log w(s)}{1+s^2}\,ds = +\infty$, so ergäbe sich

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\log|g(s)|}{1+s^2}\,ds = -\infty.$$

Da g aber die Fourier- bzw. Planchereltransformierte von $\widehat{g}^-$ ist und diese Abbildung kompakten Träger hat, folgte hieraus mit dem Satz von Paley und Wiener, genauer: Teilaussage 3.2, $\widehat{g} \equiv 0$ und damit $g \equiv 0$. Dies stünde im Widerspruch zur Stetigkeit von g und

$$g(0) = \int_{\mathbb{R}} f(-t)h(t)\,dt \neq 0.$$

Also muß $\int_{\mathbb{R}} \frac{\log w(s)}{1+s^2}\,ds < +\infty$ sein, und der Satz ist bewiesen. ◁

C. Für reguläres $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ ist ϱ vom Typ $\mathfrak{BD}$

In diesem Abschnitt geht es um die zu Satz 3.4 analoge Aussage, daß ϱ vom Typ $\mathfrak{BD}$ ist, falls $\mathfrak{F}(\Gamma)$ eine reguläre Funktionenalgebra ist. Der Beweis ähnelt nur ansatzweise dem Beweis von Satz 3.4, da er mit dem Problem fertig werden muß, daß die Teilaussage 3.2 des Satzes von Paley und Wiener nicht direkt angewendet werden kann.

3.5 Satz: *Ist ϱ ein Gewicht auf $\mathbb{Z}$ und $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ als Funktionenalgebra für dieses Gewicht regulär, so ist ϱ vom Typ $\mathfrak{BD}$.*

$\triangleright$ **Beweis :** Aus der Regularität von $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ folgt die Existenz einer Folge $a \in \ell^1_\varrho(\mathbb{Z})$ mit $a \not\equiv 0$ und $\operatorname{supp} \widehat{a}(e^{i\cdot}) \subset [-c, c]$ für ein $0 < c < \frac{\pi}{2}$. Wegen $a \not\equiv 0$ existiert $l \in \mathbb{Z}$ mit $a_{-l} \neq 0$. Sei $b \in \ell^1_\varrho(\mathbb{Z})$ mit $b_l = \dfrac{1}{a_{-l}}$ und $b_n = 0$ für $n \neq l$. Definiere $c \in \ell^1_\varrho(\mathbb{Z})$ als $c := a * b$. Dann ist $c_n = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{n-m} b_m = \dfrac{a_{n-l}}{a_{-l}}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $c_0 = 1$. Es gilt:

$$|c_n| = \left|\frac{a_{n-l}}{a_{-l}}\right| \frac{\varrho_n}{\varrho_n} \leq \frac{1}{\varrho_n} \frac{1}{|a_{-l}|} |a_{n-l}| \varrho_{n-l} \varrho_l \leq \frac{1}{\varrho_n} \frac{1}{|a_{-l}|} \varrho_l \sum_{m\in\mathbb{Z}} |a_{m-l}| \varrho_{m-l} = \frac{1}{\varrho_n} \frac{\varrho_l}{|a_{-l}|} \|a\|_{1,\varrho}.$$

Bedenkt man $a \in \ell^1_\varrho(\mathbb{Z})$, so existiert also eine Konstante $K > 0$ mit

$$|c_n| \leq \frac{K}{\varrho_n} \qquad (n \in \mathbb{Z}). \tag{10}$$

Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \widehat{c}(e^{it}) \chi_{[-\pi,\pi]}(t)$. Wegen $\widehat{c} = \widehat{a}\widehat{b}$ ist h stetig mit $\operatorname{supp} h \subset [-c, c]$, also $h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Die Fourier- bzw. Planchereltransformation von h berechnet sich zu

$$\mathfrak{F}h(y) = \widehat{h}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} h(t) e^{-iyt}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{c}(e^{it}) e^{-iyt}\, dt.$$

Natürlich ist $\mathfrak{F}h \in L^2(\mathbb{R})$.

Man berechnet mit $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, der Substitution $t = s + \theta$ und dem Weierstraßchen Konvergenzkriterium

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}h(-y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{c}(e^{it}) e^{iyt}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi+\theta}^{\pi+\theta} \widehat{c}(e^{it}) e^{iyt}\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{c}(e^{i(s+\theta)}) e^{iy(s+\theta)}\, ds = e^{iy\theta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in(s+\theta)} e^{iys}\, ds \\
&= e^{iy\theta} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\theta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iys} e^{ins}\, ds = e^{iy\theta} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\theta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iys} e^{-ins}\, ds.
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit $a_n(y)$ den n-ten Fourierkoeffizienten von $s \mapsto e^{-iys}$ über $[-\pi, \pi]$ (periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt), so ist also

$$\mathfrak{F}h(-y) = \sqrt{2\pi} e^{iy\theta} \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(y) c_n e^{in\theta}.$$

Wegen $\mathfrak{F}h(0) = \sqrt{2\pi} c_0 = \sqrt{2\pi}$ existiert ein $0 < \delta < 1$ mit $|\mathfrak{F}h(-y)| \geq 2$ für alle $|y| < \delta$. Für solche y gilt

$$e^{-iy\theta} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\mathfrak{F}h(-y)} \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(y) c_n e^{in\theta} \qquad \left(|\theta| < \frac{\pi}{2}\right). \tag{11}$$

Daher gilt für $|y| < \delta$ und $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{F}h(n+y)| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{-\pi}^{\pi} \widehat{c}(e^{it})e^{-i(n+y)t}\,dt\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m e^{imt}e^{-int}e^{-iyt}\,dt\right| \\
&\overset{(11)}{=} \left|\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m e^{imt}e^{-int}\frac{1}{\mathfrak{F}h(-y)}\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(y)c_k e^{ikt}\,dt\right| \\
&= \left|\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m \frac{1}{\mathfrak{F}h(-y)}\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(y)c_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n+k)t}\,dt}_{=2\pi\delta_{k,n-m}}\right| \\
&\leq \pi\sum_{m\in\mathbb{Z}} |c_m||a_{n-m}(y)c_{n-m}|\frac{\varrho_n}{\varrho_n} \overset{(10)}{\leq} \pi K\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\varrho_m}|a_{n-m}(y)c_{n-m}|\frac{\varrho_{n-m}\varrho_m}{\varrho_n} \\
&= \frac{\pi K}{\varrho_n}\sum_{l\in\mathbb{Z}} |a_l(y)c_l|\varrho_l.
\end{aligned}$$

Wegen $|a_l(y)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iyt}e^{-ilt}\,dt\right| \leq 1$ ist $\sum_{l\in\mathbb{Z}} |a_l(y)c_l|\varrho_l \leq \|c\|_{1,\varrho} < +\infty$ und damit existiert eine Konstante $C > 0$ mit

$$|\mathfrak{F}h(n+y)| \leq \frac{C}{\varrho_n} \tag{12}$$

für $|y| < \delta$ und $n \in \mathbb{Z}$.

Wir wollen nun $\sum_{n\geq 0} \frac{\log \varrho_n}{1+n^2} = +\infty$ annehmen. Es existiert dann ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\varrho_n > C$ für alle $n \geq m$. Nach dem Satz von Paley und Wiener (Aussage 3.2) gilt

$$\begin{aligned}
+\infty > \int_{\mathbb{R}} \frac{|\log|\mathfrak{F}h(t)||}{1+t^2}\,dt &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_n^{n+1} \frac{|\log|\mathfrak{F}h(t)||}{1+t^2}\,dt \geq \sum_{n\geq m}\int_0^1 \frac{|\log|\mathfrak{F}h(n+y)||}{1+(n+y)^2}\,dy \\
&\geq \frac{1}{3}\sum_{n\geq m}\int_0^1 \frac{|\log|\mathfrak{F}h(n+y)||}{1+n^2}\,dy \geq \frac{1}{3}\sum_{n\geq m}\int_0^\delta \frac{|\log|\mathfrak{F}h(n+y)||}{1+n^2}\,dy
\end{aligned}$$

Wegen $\log|\mathfrak{F}h(n+y)| \overset{(12)}{\leq} \log C - \log\varrho_n < 0$ für $n \geq m$ folgt $|\log|\mathfrak{F}h(n+y)|| = -\log|\mathfrak{F}h(n+y)| \geq \log\varrho_n - \log C$, also

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{|\log|\mathfrak{F}h(t)||}{1+t^2}\,dt &\geq \frac{1}{3}\sum_{n\geq m}\int_0^\delta \frac{\log\varrho_n - \log C}{1+n^2}\,dy \\
&= \frac{\delta}{3}\left(\sum_{n\geq m}\frac{\log\varrho_n}{1+n^2} - \sum_{n\geq m}\frac{\log C}{1+n^2}\right) = +\infty.
\end{aligned}$$

Dieser Widerspruch zeigt, daß $\sum_{n\geq 0}\frac{\log\varrho_n}{1+n^2} < +\infty$ ist. Genauso folgt, daß $\sum_{n<0}\frac{\log\varrho_n}{1+n^2} < +\infty$ ist. Damit ist der Satz bewiesen. $\lhd$

D. Gelfand- und eingeschränkter Fouriertransformation auf $L^1_w(\mathbb{R})$

Wir haben in Abschnitt B gesehen, daß die Regularität von $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ als Funktionenalgebra das Gewicht w der Bedingung von Beurling-Domar unterwirft. Wir zeigen in diesem Abschnitt, daß noch mehr gefolgert werden kann: es besteht eine Homöomorphie zwischen $\mathcal{M}_{L^1_w(\mathbb{R})}$ und $\mathbb{R}$, und die Gelfandtransformation auf $L^1_w(\mathbb{R})$ stimmt mit der eingeschränkten Fouriertransformation überein.

3.6 Lemma: *Ist w ein Beurling-Domar-Gewicht auf $\mathbb{R}$ und ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit $f(x+y) = f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $|f(x)| = O(w(x))$ für $|x| \to +\infty$, so ist entweder $f \equiv 0$ oder es existiert ein $t \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{itx}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*

$\triangleright$ **Beweis :** Verschwindet $f(x)$ nicht für alle $x \in \mathbb{R}$, so muß $f(0) = 1$ wegen $f(x) = f(0)f(x)$ sein. Da f stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in [0, \delta]$. Wir setzen

$$c = \int_0^\delta f(y)\,dy \neq 0.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ erhält man

$$cf(x) = \int_0^\delta f(x)f(y)\,dy = \int_0^\delta f(x+y)\,dy = \int_x^{x+\delta} f(y)\,dy.$$

Da f stetig ist, ist die rechts stehend Funktion als Funktion von x stetig-differenzierbar, also auch f. Wir leiten $f(x+y) = f(x)f(y)$ nach y ab und erhalten $f'(x+y) = f(x)f'(y)$. Setzen wir $y = 0$ und $\lambda = f'(0)$, so ergibt dies $f'(x) = \lambda f(x)$. Mit der Anfangswertbedingung $f(0) = 1$ erhält man f eindeutig in der Form $f(x) = e^{\lambda x}$. Wir müssen zeigen, daß λ rein imaginär ist. Dazu schreiben wir $\lambda = r + it$ mit $r \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$ und zeigen, daß $r = 0$ ist.

Wegen $|f(x)| = O(w(x))$ für $|x| \to +\infty$ exsistiert ein $C > 0$ mit $|f(x)| \leq Cw(x)$ für $x \in \mathbb{R}$[8]. Es ist $|f(x)| = e^{rx}$. Ist $r \geq 0$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 \leq r\int_0^1 \frac{s}{1+s^2}\,ds &= \int_0^1 \frac{\log e^{rs}}{1+s^2}\,ds = \int_0^1 \frac{\log|f(s)|}{1+s^2}\,ds \leq \int_0^1 \frac{\log(Cw(s))}{1+s^2}\,ds \\ &\leq \log C \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+s^2}\,ds + \int_{\mathbb{R}} \frac{\log w(s)}{1+s^2}\,ds < +\infty. \end{aligned}$$

Es folgt $r = 0$. Ebenso zeigt man, daß $r \leq 0$ ebenfalls $r = 0$ zur Folge hat. Damit ist das Lemma bewiesen. $\triangleleft$

3.7 Proposition: *Sei w ein Beurling-Domar-Gewicht auf $\mathbb{R}$. Dann definiert für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Abbildung*

$$\phi_t : L^1_w(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$$

vermöge

$$\phi_t(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(s)e^{its}\,ds, \qquad f \in L^1_w(\mathbb{R}),$$

eine multiplikative Linearform auf $L^1_w(\mathbb{R})$. Außerdem läßt sich jede multiplikative Linearform ϕ auf $L^1_w(\mathbb{R})$ in dieser Weise schreiben mit eindeutig bestimmtem $t \in \mathbb{R}$.

[8] Dabei wird die lokale Endlichkeit von w ausgenutzt.

▷ **Beweis :** Sei $t \in \mathbb{R}$ und seien $f, g \in L^1_w(\mathbb{R})$. Der Satz von Fubini und die Translationsinvarianz des Lebesguemaßes liefern

$$\begin{aligned}\phi_t(f*g) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}(f*g)(s)e^{its}\,ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}f(s-u)g(u)\,du\right)e^{its}\,ds\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}f(s-u)e^{it(s-u)}\,ds\right)g(u)e^{itu}\,du = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}f(s)e^{its}\,ds\right)\phi_t(g)\\ &= \phi_t(f)\phi_t(g),\end{aligned}$$

d.h. ϕ_t ist multiplikativ und damit insbesondere stetig.

Wir zeigen nun, daß für jedes $\phi \in \mathcal{M}_{L^1_w(\mathbb{R})}$ ein eindeutig bestimmtes $t \in \mathbb{R}$ existiert mit $\phi = \phi_t$.

Wir haben in Proposition 1.8 gesehen, daß zu jeder stetigen Linearform ϕ auf $L^1_w(\mathbb{R})$ eine eindeutig bestimmte Funktion $h \in L^\infty_w(\mathbb{R})$ existiert mit

$$\phi(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}f(s)h(s)\,ds, \qquad f \in L^1_w(\mathbb{R}).$$

Wieder liefert der Satz von Fubini für $f, g \in L^1_w(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\phi(f*g) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}(f*g)(s)h(s)\,ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}f(s-u)g(u)\,du\right)h(s)\,ds\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}f(s-u)h(s)\,ds\right)g(u)\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}g(u)\phi(\tau_u f)\,du. \qquad (13)\end{aligned}$$

Nun gilt aber auch

$$\phi(f*g) = \phi(f)\phi(g) = \phi(f)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}g(u)h(u)\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}g(u)\phi(f)h(u)\,du. \qquad (14)$$

Wir schließen, daß wegen (13) und (14) $\phi(f)h(u) = \phi(\tau_u f)$ sein muß für alle $f \in L^1_w(\mathbb{R})$ und alle $u \in \mathbb{R}$; dies folgt aus der Eindeutigkeitsaussage in Proposition 1.8. Sei nun $f \in L^1_w(\mathbb{R})$ so gewählt, daß $\phi(f) \neq 0$ ist. Da die Abbildung $u \mapsto \tau_u f$ stetig $\mathbb{R} \to L^1_w(\mathbb{R})$ ist (Proposition 1.12), ist auch h wegen $h(u) = \frac{\phi(\tau_u f)}{\phi(f)}$ stetig. Wir ersetzen nun in der Gleichung $\phi(f)h(u) = \phi(\tau_u f)$ das u durch $s+u$ und das f durch $\tau_s f$ (man beachte $\tau_u\tau_s f = \tau_{s+u}f$). Dann erhalten wir $\phi(\tau_s f)h(s+u) = \phi(\tau_{s+u}f)$ und wegen $\phi(\tau_{s+u}f) = \phi(\tau_s f)h(u) = \phi(f)h(s)h(u)$ ist

$$\phi(f)h(s+u) = \phi(f)h(s)h(u)$$

für alle $s, u \in \mathbb{R}$, was $h(s+u) = h(s)h(u)$ bedeutet. Schließlich existiert $C > 0$ mit $|h(s)| \leq Cw(s)$ wegen $h \in L^\infty_w(\mathbb{R})$. Wir befinden uns mit h in der Situation von Lemma 3.6 und können von daher auf die Existenz eines eindeutig bestimmten $t \in \mathbb{R}$ schließen, für das $h(s) = e^{its}$ gilt für alle $s \in \mathbb{R}$. Damit ist

$$\phi(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}f(s)e^{its}\,ds = \phi_t(f), \qquad f \in L^1_w(\mathbb{R}),$$

und $\phi = \phi_t$. ◁

3.8 Proposition: *Sei w ein Beurling-Domar-Gewicht auf $\mathbb{R}$. Dann definiert die Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{L^1_w(\mathbb{R})}$, $t \mapsto \phi_{-t}$ mit ϕ_t aus Proposition 3.7 einen Homöomorphismus zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathcal{M}_{L^1_w(\mathbb{R})}$. Die auf $L^1_w(\mathbb{R})$ eingeschränkte Fouriertransformation kann vermöge dieser Homöomorphie als die Gelfandtransformation auf $L^1_w(\mathbb{R})$ aufgefaßt werden.*

▷ **Beweis :** In Proposition 3.7 haben wir bereits die Bijektivität von γ gezeigt. Wir müssen uns nur noch davon überzeugen, daß γ bistetig ist.

Seien dazu $t \in \mathbb{R}$, $f \in L^1_w(\mathbb{R})$ beliebig und $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $t_k \to t$ für $k \to +\infty$. Für $k \in \mathbb{N}$ setzen wir $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f_k(x) = f(x)(e^{-it_kx} - e^{-itx})$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wegen $|f_k| \leq 2|f|$ und $|f| \in L^1(\mathbb{R})$ gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(s)e^{-it_ks}\,ds = \int_{\mathbb{R}} f(s)e^{-its}\,ds$ (Lebesgue). Da f beliebig war und wir auf $\mathcal{M}_{L^1_w(\mathbb{R})}$ die schwach*-Topologie haben, folgt hieraus die Stetigkeit der Abbildung.

Sei umgekehrt $\phi_t \in \mathcal{M}_{L^1_w(\mathbb{R})}$ beliebig, $t \in \mathbb{R}$, $f \in L^1_w(\mathbb{R})$ mit $f(x) := e^{itx}\chi_{[0,1]}(x)$ und $(t_\alpha)_{\alpha\in I}$ ein Netz in $\mathbb{R}$ mit $\phi_{t_\alpha} \to \phi_t$ für $\alpha \to \infty$. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\alpha\to\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{its}\chi_{[0,1]}(s)(e^{-it_\alpha s} - e^{-its})\,ds \\ &= \lim_{\alpha\to\infty} \int_0^1 e^{i(t-t_\alpha)s}\,ds - 1 = \lim_{\alpha\to\infty} h(t-t_\alpha), \end{aligned}$$

wobei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die durch $h(s) = \frac{e^{is}-1}{is} - 1$ für $s \neq 0$, $h(0) = 0$ definierte, stetige Funktion sei. Da 0 die einzige Nullstelle von h ist, und da $\lim\limits_{|s|\to\infty} |h(s)| = 1$ ist, muß $\lim\limits_{\alpha\to\infty} t_\alpha = t$ gelten. Das ist die Stetigkeit der Umkehrabbildung. ◁

Mit Proposition 3.8 ist die eingangs gestellte Frage für ein Gewicht w vom Typ $\mathfrak{BD}$ geklärt: in diesem Fall stimmen Gelfand- und eingeschränkte Fouriertransformation überein. Insbesondere wenn $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ als Funktionenalgebra regulär ist, stimmen diese beiden Abbildungen also überein.

E. Gelfand- und eingeschränkter Fouriertransformation auf $\ell^1_\varrho(\mathbb{Z})$

Dieser Abschnitt enthält die zu Abschnitt D analoge Aussage bzgl. $\ell^1_\varrho(\mathbb{Z})$. Die Beweise der entsprechenden Aussagen sind aufgrund der „einfacheren" Struktur von $\ell^1_\varrho(\mathbb{Z})$ kürzer.

3.9 Lemma: *Ist ϱ ein Beurling-Domar-Gewicht auf $\mathbb{Z}$ und $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine komplexwertige Folge auf $\mathbb{Z}$ mit $a_{n+m} = a_n a_m$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ und $|a_n| = O(\varrho_n)$ für $|n| \to +\infty$, so ist entweder $a \equiv 0$ oder es existiert $t \in [0, 2\pi)$ mit $a_n = e^{itn}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.*

▷ **Beweis :** Verschwindet a_n nicht für alle $n \in \mathbb{Z}$, so muß $a_0 = 1$ wegen $a_n = a_0 a_n$ sein. Wir setzen $\zeta := a_1$ und erhalten induktiv $a_n = \zeta^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, denn $1 = a_0 = a_{-1}a_1 = a_{-1}\zeta$ induziert $\zeta \neq 0$ und $a_{-1} = \zeta^{-1}$. Induktiv folgt $a_{-n} = \zeta^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $a_n = \zeta^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Wir definieren $r \in \mathbb{R}$ und $t \in [0, 2\pi)$ durch $e^{r+it} = \zeta$. Wir müssen zeigen, daß $r = 0$ ist.

Der Beweis hierfür ist im Wesentlichen mit dem entsprechenden Beweisabschnitt von Lemma 3.6 identisch; es sind nur Integrale durch entsprechende Summen zu ersetzen. ◁

In derselben Art wie Proposition 3.7 beweist man die nachstehende Proposition 3.10. Man muß nur die Integrale durch Summen ersetzen, Funktionen durch Folgen und das Lebesguemaß durch das Zählmaß. Außerdem wird der Beweis dadurch vereinfacht, daß man keine Stetigkeitsprobleme hat. Natürlich benötigt man Lemma 3.9 anstelle von Lemma 3.6.

3.10 Proposition: *Sei ϱ ein Beurling-Domar-Gewicht auf $\mathbb{Z}$. Dann definiert für jedes $\xi \in \Gamma$ die Abbildung*

$$\phi_\xi : \ell^1_\varrho(\Gamma) \to \mathbb{C}$$

vermöge

$$\phi_\xi(a) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \xi^n, \qquad a \in \ell^1_\varrho(\Gamma),$$

eine multiplikative Linearform auf $\ell^1_\varrho(\mathbb{Z})$. Außerdem läßt sich jede multiplikative Linearform ϕ auf $\ell^1_\varrho(\Gamma)$ in dieser Weise schreiben mit eindeutig bestimmtem $\xi \in \Gamma$.

3.11 Proposition: *Sei ϱ ein Beurling-Domar-Gewicht auf $\mathbb{Z}$. Dann sind $\mathcal{M}_{\ell^1_\varrho(\mathbb{Z})}$ und Γ zueinander homöomorph und die Gelfandtransformation auf $\ell^1_\varrho(\mathbb{Z})$ kann als die Einschränkung der Fouriertransformation von $\ell^1(\mathbb{Z})$ auf $\ell^1_\varrho(\mathbb{Z})$ aufgefaßt werden.*

$\triangleright$ **Beweis :** Wir haben in Proposition 3.10 vermöge $\xi \mapsto \phi_\xi$ bereits eine bijektive Abbildung zwischen Γ und $\mathcal{M}_{\ell^1_\varrho(\Gamma)}$ angegeben. Wir müssen nur noch zeigen, daß diese Abbildung stetig ist; der Rest folgt dann aus der Tatsache, daß eine stetige, bijektive Abbildung zwischen einem kompakten Raum und einem Hausdorffraum automatisch bistetig ist.

Seien $\xi \in \Gamma$, $a \in \ell^1_\varrho(\mathbb{Z})$ beliebig und $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Γ mit $\xi_k \to \xi$ für $k \to +\infty$. Definieren wir für $k \in \mathbb{N}$ eine Folge $a^{(k)} \in \ell^1_\varrho(\mathbb{Z})$ durch $a^{(k)}_n := a_n(\xi^n_k - \xi^n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, so haben wir $|a^{(k)}_n| \le 2|a_n|$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $k \in \mathbb{N}$. Da $|a| \in \ell^1(\mathbb{Z})$, folgt $\lim\limits_{k\to+\infty} \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n \xi^n_k = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n \xi^n$ (Lebesgue). Da a beliebig war und wir auf $\mathcal{M}_{\ell^1_\varrho(\mathbb{Z})}$ die schwach*-Topologie haben, folgt hieraus die Stetigkeit. $\triangleleft$

F. Beurling-Domar-Gewichte

Abschließend wollen wir die Struktur der Menge aller Gewichte von Typ $\mathfrak{BD}$ untersuchen.

Man rechnet ohne Mühe nach, daß das punktweise Produkt zweier Gewichte von Typ $\mathfrak{BD}$, sowie das punktweise skalare Produkt eines Gewichts vom Typ $\mathfrak{BD}$ mit einer reellen Zahl > 1 wieder vom Typ $\mathfrak{BD}$ ist. Außerdem bleibt die Spiegelung eines Gewichts w vom Typ $\mathfrak{BD}$ – $\overline{w} : x \mapsto w(-x)$ – und die punktweise Maximumsbildung einer endlichen Anzahl $w_1, ..., w_n$, $n \in \mathbb{N}$, von Gewichten vom Typ $\mathfrak{BD}$ – $\max(w_1, ..., w_n) : x \mapsto \max\{w_1(x), ..., w_n(x)\}$ – wieder ein Gewicht vom Typ $\mathfrak{BD}$. Insbesondere gibt es zu jedem Gewicht w vom Typ $\mathfrak{BD}$ symmetrische Gewichte $\widetilde{w}$ vom Typ $\mathfrak{BD}$ mit $w \le \widetilde{w}$, z.B. $\widetilde{w} = \max(w, \overline{w})$. Die Summe zweier Gewichte vom Typ $\mathfrak{BD}$ ist vom Typ $\mathfrak{BD}$; man beachte lediglich $w_1 + w_2 \le 2\max(w_1, w_2)$.

Die beiden nachfolgenden Beispiele nicht-trivialer Gewichte vom Typ $\mathfrak{BD}$ formulieren wir nur für Gewichte auf $\mathbb{R}$; entsprechende Beispiele für nicht-triviale Gewichte auf $\mathbb{Z}$ lassen sich leicht übertragen.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto w(x) := (1 + |x|)^n$. Man rechnet leicht nach, daß w ein Gewicht auf $\mathbb{R}$ ist. Die Bedingung von Beurling-Domar ist in diesem Fall erfüllt:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\log(1+|s|)^n}{1+s^2}\,ds = \int\limits_{[-1,1]} \frac{n\log(1+|s|)}{1+s^2}\,ds + \int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} \frac{n\log(2|s|)}{1+s^2}\,ds < +\infty.$$

Das angeführte Beispiel zeigt bereits, daß alle Gewichte, die höchstens polynomiell wachsen, vom Typ $\mathfrak{BD}$ sind. Daß aber auch noch allgemeinere Gewichte vom Typ $\mathfrak{BD}$ sind, zeigt das Beispiel des nachfolgenden Gewichts.

Sei $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto w(x) := e^{\sqrt{|x|}}$. Dann erfüllt w die Voraussetzungen eines Gewichts und die Beurling-Domar-Bedingung schreibt sich in der Form

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\log e^{\sqrt{|s|}}}{1+s^2}\,ds \le \left(\int\limits_{[-1,1]} + \int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} \right) \frac{\sqrt{|s|}}{1+s^2}\,ds < +\infty.$$

Wir haben zu Beginn dieses Paragraphen $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ und $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ regulär als Funktionenalgebren vorausgesetzt und daraus das Erfülltsein der Bedingung von Beurling-Domar für die Gewichte ϱ und w nachgewiesen. Natürlich ist hiermit noch nicht geklärt, ob es überhaupt nicht-konstante Gewichte ϱ und w gibt, für die $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ und $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ regulär sind; dies wird im nächsten Paragraphen nachgeholt. Dort wird gezeigt, daß Beurling-Algebren $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ und $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$, deren Gewichte vom Typ $\mathfrak{BD}$ sind, bereits regulär als Funktionen- und Banachalgebren sind. Daß dies keine inhaltsleere Aussage ist, zeigen die obigen Beispiele nicht-trivialer Gewichte vom Typ $\mathfrak{BD}$.

§4
Regularität gewisser Beurling-Algebren

Im §3 haben wir gezeigt, daß die Regularität der Beurling-Algebren $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ und $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ als Funktionenalgebren den Gewichten ϱ und w die Bedingung von Beurling-Domar aufzwingt, d.h.

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\log \varrho_n}{1+n^2} < +\infty \qquad \text{bzw} \qquad \int_{\mathbb{R}} \frac{\log w(t)}{1+t^2}\,dt. \tag{15}$$

In diesem Paragraphen werden wir beweisen, daß umgekehrt das Erfülltsein der Bedingungen (15) für Gewichte ϱ auf $\mathbb{Z}$ bzw. w auf $\mathbb{R}$ die Regularität von $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ bzw. $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ als Funktionenalgebren bewirkt. Auch beim Beweis dieser Aussage spielt der Satz von Paley und Wiener, den wir bereits in §3 benutzt haben, eine wichtige Rolle. Die für diesen Paragraphen relevante Teilaussage lautet:

4.1 *Ist F eine $L^2(\mathbb{R})$-Funktion mit*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\log|\mathfrak{F}F(t)||}{1+t^2}\,dt < +\infty,$$

so existiert eine $L^2(\mathbb{R})$-Funktion f mit $f(x) = 0$ für fast alle $x \ge 0$ und $|\mathfrak{F}f| = |\mathfrak{F}F|$. Hierbei bedeutet $\mathfrak{F}$ wieder die Planchereltransformation, die zu Beginn von §3 angegeben wurde. (Einen Beweis von Aussage 4.1 findet man im Anhang B.)

A. Regularität von $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ für w vom Typ $\mathfrak{BD}$

Bevor wir in Satz 4.2 die Regularität von $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ für w vom Typ $\mathfrak{BD}$ behaupten, muß eine Bemerkung vorausgeschickt werden.

Sind nämlich w_1 und w_2 vom Typ $\mathfrak{BD}$ mit $w_1 \leq w_2$, so gilt

$$\mathfrak{F}_{w_2}(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{F}_{w_1}(\mathbb{R}). \tag{16}$$

Um dies einzusehen, stellt man zunächst für $f \in \mathfrak{L}^1_{w_2}(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} |f| w_1 \, d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} |f| w_2 \, d\lambda < +\infty$$

fest und somit $\mathfrak{L}^1_{w_2}(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{L}^1_{w_2}(\mathbb{R})$. Da die $(w_1\lambda)$-Nullmengen genau mit den $(w_2\lambda)$-Nullmengen übereinstimmen (sie stimmen mit den λ-Nullmengen überein), hat man sogar

$$L^1_{w_2}(\mathbb{R}) \subset L^1_{w_1}(\mathbb{R}),$$

also (16). Ist $\mathfrak{F}_{w_2}(\mathbb{R})$ als Funktionenalgebra regulär, so insbesondere auch $\mathfrak{F}_{w_1}(\mathbb{R})$.

4.2 Satz: *Für alle Gewichte w vom Typ $\mathfrak{BD}$ auf $\mathbb{R}$ ist $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ als Funktionenalgebra regulär.*

$\triangleright$ **Beweis :** Es genügt zu zeigen, daß für alle $t \in \mathbb{R}$ und jede Umgebung $V \subset \mathbb{R}$ von t eine Funktion $f \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ existiert mit $f(t) \neq 0$ und $\operatorname{supp} f \subset V$.

Definieren wir $\widetilde{w} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $\widetilde{w} := \max(w, \overline{w}, e^{\sqrt{|\cdot|}})$, so ist $\widetilde{w}$ vom Typ $\mathfrak{BD}$ (vgl. Abschnitt F in §3) und symmetrisch, und es genügt nach der Vorbemerkung offenbar zu zeigen, daß $\mathfrak{F}_{\widetilde{w}}(\mathbb{R})$ regulär ist. Wir wollen daher ohne Einschränkung von vorneherein w als symmetrisch mit $w \geq e^{\sqrt{|\cdot|}}$ annehmen.

Der Vorteil von $w \geq e^{\sqrt{|\cdot|}}$ beruht auf

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{w(x)} \, dx \leq \int_{\mathbb{R}} e^{-\sqrt{|x|}} \, dx < +\infty,$$

was nicht nur $\frac{1}{w} \in L^1(\mathbb{R})$ mit sich bringt, sondern wegen $e^{\sqrt{|\cdot|}} \geq 1$ auch noch $\frac{1}{w}, \frac{1}{w^2} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Es ist

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\log \frac{1}{w(t)^2}|}{1+t^2} \, dt = 2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\log w(t)}{1+t^2} \, dt < +\infty.$$

Es existiert von daher aufgrund des Satzes von Paley und Wiener, genauer: Teilaussage 4.1, eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ mit $f(x) = 0$ für fast alle $x \geq 0$ und $|\mathfrak{F}f| = \frac{1}{w^2}$. Wir setzen $h := \mathfrak{F}f$.

Wegen $|h| = \frac{1}{w^2}$ ist sowohl $h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, was $f^{\check{}} = \mathfrak{F}(\mathfrak{F}f) = \widehat{\mathfrak{F}f} = \widehat{h}$ und f stetig bedeutet, als auch $hw \in L^1(\mathbb{R})$, was $h \in L^1_w(\mathbb{R})$ zur Folge hat. Insbesondere ist damit $f^{\check{}} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$. Da w symmetrisch ist, liegt mit h auch $h^{\check{}}$ in $L^1_w(\mathbb{R})$. Eine leichte Rechnung zeigt $f = \widehat{h}^{\check{}} = \widehat{h^{\check{}}}$ und damit $f \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$.

Sei nun $\widetilde{x} := \sup\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} \leq 0$. Sei $\delta := \frac{1}{2}\mathrm{d}(t, V^c) > 0$. Dann existiert $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) \neq 0$ und $\widetilde{x} - \delta < x_0 < \widetilde{x}$. (Man beachte, daß f nicht identisch verschwinden kann.)

Mit $h^{\check{}}$ liegt auch $h^{\check{}} e^{i(t-x_0)\cdot}$ in $L^1_w(\mathbb{R})$ und es gilt für alle $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\left(h^{\check{}} e^{i(t-x_0)\cdot}\right)^{\widehat{}}(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}f(-x) e^{i(t-x_0)x} e^{-iyx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}f(x) e^{-i(t-x_0-y)x}\, dx \\ &= f^{\check{}}(t-x_0-y) = f(y-t+x_0) = (\tau_{t-x_0} f)(y)\end{aligned}$$

bzw. $\tau_{t-x_0} f \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$. Für alle $y \geq t+\delta$ ist $(\tau_{t-x_0} f)(y) = 0$. Entsprechend zeigt man, daß $\tau_{t+x_0} f^{\check{}} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ ist, wobei $(\tau_{t+x_0} f^{\check{}})(y) = 0$ für alle $y \leq t-\delta$ ist. Die gesuchte Funktion $\widehat{g}$ läßt sich somit definieren durch

$$\widehat{g} := \frac{(\tau_{t-x_0} f)\,(\tau_{t+x_0} f^{\check{}})}{f(x_0)^2}.$$

Offenbar ist $\widehat{g}(t) = 1$ und $\operatorname{supp} \widehat{g} \subset [t-\delta, t+\delta] \subset V$. ◁

B. Regularität von $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ für ϱ vom Typ $\mathfrak{BD}$

Bezeichnen wir mit $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ die Menge der 2π-periodischen, stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$, mit φ die Abbildung $\varphi : \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \to C_{2\pi}(\mathbb{R})$, $\widehat{a} \mapsto \varphi(\widehat{a})$, wobei $\varphi(\widehat{a}) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \widehat{a}(e^{ix})$, und mit $\mathfrak{F}^{2\pi}_\varrho(\mathbb{R})$ die Menge $\varphi(\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma))$, so ist eine 2π-periodische, stetige Funktion $f \in \mathfrak{F}^{2\pi}_\varrho(\mathbb{R})$ dadurch charakterisiert, daß mit

$$a_n^f := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}$$

$(a_n^f)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\ell^1_\varrho(\mathbb{Z})$ liegt[9]. Es ist nämlich für alle $f = \varphi(\widehat{a})$

$$a_n^f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\widehat{a}) e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m e^{i(m-n)x}\, dx = a_n;$$

insbesondere ist φ damit als Abbildung $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \to \mathfrak{F}^{2\pi}_\varrho(\mathbb{R})$ bijektiv.

Versehen wir $\mathfrak{F}^{2\pi}_\varrho(\mathbb{R})$ mit der Norm

$$\|\varphi(\widehat{a})\| := \|\widehat{a}\|_\varrho, \qquad \widehat{a} \in \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma),$$

so sind $\mathfrak{F}^{2\pi}_\varrho(\mathbb{R})$ und $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ isometrisch isomorphe Banachalgebren (mit jeweils punktweiser Multiplikation).

4.3 Satz: *Für alle ϱ vom Typ $\mathfrak{BD}$ auf $\mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{R}$ und $0 < \delta < \pi$ existiert eine 2π-periodische, stetige Funktion $g \in \mathfrak{F}^{2\pi}_\varrho(\mathbb{R})$ mit $g(t) = 1$ und $g(x) = 0$ für alle $x \in [t-\pi, t-\delta] \cup [t+\delta, t+\pi]$.*

▷ **Beweis :** Wie im Beweis von Satz 4.2 können wir ϱ symmetrisch mit $\varrho \geq e^{\sqrt{|\cdot|}}$ annehmen. (Es ist $\mathfrak{F}^{2\pi}_{\varrho_2}(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{F}^{2\pi}_{\varrho_1}(\mathbb{R})$ für $\varrho_2 \geq \varrho_1$). Wir definieren $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\phi(x) := \frac{1}{\varrho_n^2 (1+x^2)} \qquad \text{für } x \in [n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}), n \in \mathbb{Z}.$$

[9] a_n^f ist der n-te Fourierkoeffizient, wie man ihn für 2π-periodische, über ein Intervall der Länge 2π integrierbare Funktionen definiert.

Wegen $\varrho_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist $|\phi(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$ und $\phi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ mit $\phi(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Außerdem ist

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\log \phi(x)|}{1+x^2}\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{|\log \phi(x)|}{1+x^2}\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{2\log \varrho_n}{1+x^2}\,dx + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\,dx}_{<+\infty} < +\infty,$$

da

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\log \varrho_n}{1+x^2}\,dx &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\log \varrho_n}{1+n^2}(1+n^2) \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&\leq \max\left\{\frac{1+n^2}{1+n^2-|n|+\frac{1}{4}} : n \in \mathbb{Z}\right\} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\log \varrho_n}{1+n^2} < +\infty.
\end{aligned}$$

Aussage 4.1 impliziert somit die Existenz einer Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ mit $f(x) = 0$ für fast alle $x \geq 0$ und $|\mathfrak{F}f| = \phi$. Wir setzen $h := \mathfrak{F}f$. Wegen $\phi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ sind $f^{\check{}} = \mathfrak{F}(\mathfrak{F}f) = \widehat{\mathfrak{F}f} = \widehat{h}$ und f stetig.

Sei $\widetilde{x} := \sup\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} \leq 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\widetilde{x} - \delta < x_0 < \widetilde{x}$ und $f(x_0) \neq 0$ (vgl. mit dem Beweis von Satz 4.2). Mit $f \in L^2(\mathbb{R})$ sind auch $\tau_{t-x_0} f, \tau_{t+x_0} f^{\check{}} \in L^2(\mathbb{R})$ und es gilt

$$G := (\tau_{t-x_0} f)(\tau_{t+x_0} f^{\check{}}) \in L^1(\mathbb{R})$$

mit $\operatorname{supp} G \subset [t-\delta, t+\delta]$ und $G(t) = f(x_0)^2 \neq 0$. Sei g die 2π-periodische, stetige Funktion, die man als Fortsetzung von $G|_{[t-\pi,t+\pi]}$ auf $\mathbb{R}$ erhält (man beachte: $G(t-\pi) = G(t+\pi) = 0$). Offenbar ist $g(t) = G(t) \neq 0$ und $g(x) = 0$ für alle $x \in [t-\pi, t-\delta] \cup [t+\delta, t+\pi]$. Ohne Einschränkung können wir $g(t) = 1$ annehmen. Es muß dann nur noch gezeigt werden, daß $g \in \mathfrak{F}^{2\pi}_{\varrho}(\mathbb{R})$ ist.

Im Beweis von Satz 4.2 hatten wir

$$\tau_{t-x_0} f = \left(h^{\check{}} e^{i(t-x_0)\cdot}\right)^{\widehat{}} \text{ und } \tau_{t+x_0} f^{\check{}} = \left(h e^{i(t+x_0)\cdot}\right)^{\widehat{}}$$

hergeleitet. Es ergibt sich für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
a_n^g &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi} \int_{t-\pi}^{t+\pi} G(x) e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} G(x) e^{-inx}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{G}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left(h^{\check{}} e^{i(t-x_0)\cdot}\right)^{\widehat{}} \left(h e^{i(t+x_0)\cdot}\right)^{\widehat{}}\right)^{\widehat{}}(n) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(h^{\check{}} e^{i(t-x_0)\cdot} * h e^{i(t+x_0)\cdot}\right)^{\widehat{}\,\widehat{}}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(h^{\check{}} e^{i(t-x_0)\cdot} * h e^{i(t+x_0)\cdot}\right)(-n)
\end{aligned}$$

und damit

$$|a_{-n}^g| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |h^{\check{}}(n-t) h(t)|\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |\mathfrak{F}f(t-n) \mathfrak{F}f(t)|\,dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \phi(t-n)\phi(t)\, dt \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int\limits_{m-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} \frac{dt}{\varrho_m^2(1+t^2)\varrho_{m-n}^2(1+(t-n)^2)} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\varrho_n^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(1+t^2)(1+(t-n)^2)} \leq \frac{K}{\varrho_n^2}
\end{aligned}
$$

mit einer Konstanten $K > 0$. Aus Symmetriegründen ist somit

$$|a_n^g|\varrho_n \leq \frac{K}{\varrho_n} \leq K e^{-\sqrt{|n|}}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Dies bringt

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n^g|\varrho_n \leq K \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\sqrt{|n|}} < +\infty$$

mit sich, also $g \in \mathfrak{F}_\varrho^{2\pi}(\mathbb{R})$. $\triangleleft$

4.4 Korollar: *Für ein Gewichte ϱ vom Typ $\mathfrak{BD}$ auf $\mathbb{Z}$ ist $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ als Funktionenalgebra regulär.*

$\triangleright$ **Beweis :** Es ist zu zeigen, daß für alle kompakten Teilmengen K von Γ und jedes $\xi_0 \in \Gamma\backslash K$ eine Funktion $\widehat{a} \in \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ existiert mit $\widehat{a}(\xi_0) = 1$ und $\widehat{a}(\xi) = 0$ für alle $\xi \in K$.

Bildet man $\widetilde{K} := \operatorname{supp} \chi_K(e^{i\cdot}) \subset \mathbb{R}$ und betrachtet man $t \in \mathbb{R}$ mit $e^{it} = \xi_0$, so ist $\widetilde{K}$ abgeschlossen mit $t \notin \widetilde{K}$. Sei $0 < \delta < \pi$ mit $\delta < \frac{1}{2}\mathrm{d}(t, \widetilde{K})$. Nach Satz 4.3 existiert dann eine 2π-periodische, stetige Funktion $g \in \mathfrak{F}_\varrho^{2\pi}(\mathbb{R})$ mit $g(t) = 1$ und $g(x) = 0$ für alle $x \in \widetilde{K}$ (genauer: $\operatorname{supp} g \subset \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [t-\delta+2\pi n, t+\delta+2\pi n]$). Es leistet dann $\varphi^{-1}(g)$ das Verlangte. $\triangleleft$

Die bis zu dieser Stelle dargebotenen Ausführungen erlauben es uns von den *regulären Beurling-Algebren* $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ und $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ als von denen zu reden, deren Gewichte der Bedingung von Beurling-Domar genügen, und umgekehrt. Vom Beginn von §3 an bis jetzt haben wir gerade

$$\left.\begin{array}{c} \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma), \mathfrak{F}_w(\mathbb{R}) \text{ regulär} \\ \text{als Funktionenalgebren} \\ \Updownarrow \\ \varrho, w \text{ vom Typ } \mathfrak{BD} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma), \mathfrak{F}_w(\mathbb{R}) \text{ regulär} \\ \text{als Banachalgebren} \end{array}$$

gezeigt.

C. Funktionen $\widehat{f} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger

Wir haben in Proposition 1.10 gesehen, daß die stetigen Funktionen $f \in L_w^1(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger bzgl. der $L_w^1(\mathbb{R})$-Norm dicht in $L_w^1(\mathbb{R})$ liegen. In diesem Abschnitt wenden wir uns der Frage zu, ob für die Funktionen $\widehat{f} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger bzgl. der $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$-Norm diesselbe Dichtheitsaussage gilt. In Proposition 4.9 wird diese Frage positiv beantwortet werden. Bis dahin müsse wir in Form einiger Lemmata Vorbereitungen treffen.

Mit $L^1_w(\mathbb{R})_c$ bezeichnen wir die Menge der stetigen Funktionen in $L^1_w(\mathbb{R})$, die kompakten Träger haben. Ebenso stehe $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})_c$ für die Menge der (stetigen) Funktionen $\widehat{f} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$, die kompakten Träger haben.

4.5 Lemma: *Sei w vom Typ $\mathfrak{BD}$ auf $\mathbb{R}$ und V eine Umgebung der 0 in $\mathbb{R}$. Dann existiert eine nicht-negative Funktion $\widehat{f} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$, $\widehat{f} \not\equiv 0$, mit $\operatorname{supp}\widehat{f} \subset V$.*

$\triangleright$ **Beweis :** Ohne Einschränkung können wir w symmetrisch annehmen (vgl. mit dem Beginn des Beweises von Proposition 4.2).

Aufgrund der Regularität von $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ als Funktionenalgebra (Proposition 4.2) existiert eine Funktion $\widehat{g} \not\equiv 0$ in $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}\widehat{g} \subset V$. Da w symmetrisch ist, liegt mit g auch $\overline{g^{-}}$ in $L^1_w(\mathbb{R})$. Ein leichte Rechnung zeigt $\widehat{\overline{g^{-}}} = \overline{\widehat{g}}$. Somit können wir $\widehat{f} := \widehat{g}\overline{\widehat{g}} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ betrachten und feststellen, daß $\widehat{f} \not\equiv 0$ und nicht-negative mit $\operatorname{supp}\widehat{f} \subset V$ ist. $\triangleleft$

4.6 Sei K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, und sei für $x \in \mathbb{R}$ die Funktion $\phi_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $\phi(t) := \left|1 + e^{ixt}\right|^2$. Dann ist ϕ_x für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig und damit $O_x := \phi_x^{-1}(-2, 2)$ offen mit $0 \notin O_x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $t \neq 0$ existiert $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\left|1 + e^{ix_0t}\right|^2 < 2$ (z.B. $x_0 = \frac{\pi}{t}$). Daher ist $t \in O_{x_0}$ und $\{O_x\}_{x\in\mathbb{R}}$ eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Wegen $K \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$ kompakt ist $\{O_x\}_{x\in\mathbb{R}}$ eine offene Überdeckung von K; es existieren somit endlich viele $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $K \subset \bigcup_{k=1}^n O_{x_k}$. Wir definieren hiermit eine Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto \frac{1}{2^{2n}} \prod_{k=1}^{n} \left|1 + e^{ix_kt}\right|^2.$$

Offenbar ist g stetig mit $0 \leq g(t) \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $g(0) = 1$. Für $t \in K$ existiert $j \in \{1, ..., n\}$ mit $t \in O_{x_j}$, d.h. $\left|1 + e^{ix_jt}\right|^2 < 2$. Da für $k \in \{1, ..., n\}$, $k \neq j$, die Beziehung $\frac{1}{2^2}\left|1 + e^{ix_kt}\right|^2 < 1$ besteht, gilt $0 \leq g(t) \leq \frac{1}{2}$ für alle $t \in K$. Wir werden diese Funktion g, die in Abhängigkeit der kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$ konstruiert wurde, im Beweis des nachfolgenden Lemmas benötigen.

4.7 Lemma: *Sei w von Typ $\mathfrak{BD}$ auf $\mathbb{R}$ und V eine Umgebung der 0 in $\mathbb{R}$. Dann existiert eine stetige Funktion $f \in L^1_w(\mathbb{R})$ mit $0 \leq f(t) \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$, $0 \leq f(t) \leq \frac{1}{2}$ für alle $t \in \mathbb{R}\backslash V$ sowie $\widehat{f} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})_c$.*

$\triangleright$ **Beweis :** Ohne Einschränkung können wir w symmetrisch annehmen (vgl. mit dem Beginn des Beweises von Proposition 4.2).

Nach Lemma 4.5 existiert zu gegebener, relativ-kompakter Umgebung $U \subset V$ der 0 eine nicht-negative Funktion $\widehat{h} \not\equiv 0$ in $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$, deren Träger in U liegt. Aus der Kompaktheit von $\operatorname{supp}\widehat{h}$ folgern wir $\widehat{h} \in L^1(\mathbb{R})$. Die Inversionsformel 3.3 liefert für alle $t \in \mathbb{R}$ (bei passender Wahl von h in der entsprechenden Restklasse):

$$\begin{aligned} |h(t)| &= \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(x)e^{ixt}\,dx\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(x)\,dx \\ &= h(0). \end{aligned}$$

Es ist dann $h(0) \neq 0$ sowie $h \in C_0(\mathbb{R}) \cap L^1_w(\mathbb{R})$. Da w symmetrisch ist, ist auch $\overline{h} \in C_0(\mathbb{R}) \cap L^1_w(\mathbb{R})$, und wir können eine Abildung $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieren durch

$$r(t) := \frac{h(t)\overline{h(t)}}{h(0)^2}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Offensichtlich ist r stetig mit $0 \leq r(t) \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $r(0) = 1$. Wegen $\sup_{t\in\mathbb{R}} |\overline{h(t)}| < +\infty$ und $h \in L^1_w(\mathbb{R})$ gilt $r \in L^1_w(\mathbb{R})$. Wir zeigen, daß $\widehat{r}$ kompakten Träger hat. Wegen $\widehat{h^{\vee}} = \widehat{h}^{\vee}$ und $\overline{\widehat{h}} = \widehat{\overline{h}^{\vee}}$ haben $\widehat{h}^{\vee}$, $\widehat{\overline{h}^{\vee}}$ und $\widehat{h}^{\vee} * \widehat{\overline{h}^{\vee}}$ kompakten Träger. Es ist

$$\left(\widehat{h}^{\vee} * \overline{\widehat{h}^{\vee}}\right)^{\wedge} = h\overline{h}$$

und wegen $\widehat{r} = \dfrac{1}{h(0)^2}\left(\widehat{h}^{\vee} * \overline{\widehat{h}^{\vee}}\right)^{\vee}$ hat $\widehat{r}$ damit kompakten Träger.

Wegen $r \in C_0(\mathbb{R})$ existiert eine kompakte Menge F, so daß für alle $t \in \mathbb{R}\backslash F$ gilt: $0 \leq r(t) \leq \frac{1}{2}$.

Sei $K := F\backslash V$. Dann ist K kompakt und enthält nicht die 0. Sei g eine gemäß unseren Überlegungen in 4.6 konstruierte Funktion mit $0 \leq g(t) \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$, $g(0) = 1$ und $0 \leq g(t) \leq \frac{1}{2}$ für alle $t \in K$. Wir definieren dann die gesuchte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch $f(t) := r(t)g(t)$. Da g stetig und beschränkt und $r \in C_0(\mathbb{R}) \cap L^1_w(\mathbb{R})$ ist, ist $f \in C_0(\mathbb{R}) \cap L^1_w(\mathbb{R})$. Außerdem sieht man leicht $0 \leq f(t) \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$, $f(0) = r(0)g(0) = 1$ und $0 \leq f(t) \leq \frac{1}{2}$ für alle $t \in \mathbb{R}\backslash V$ (man unterscheide die beiden Fälle $t \in \mathbb{R}\backslash F$ und $t \in K$). Da g eine endliche Linearkombination von Ausdrücken der Form e^{ixt} mit $x \in \mathbb{R}$ ist, ist $\widehat{f}$ eine endliche Linearkombination von Translationen von $\widehat{r}$; somit ist der Träger von $\widehat{f}$ kompakt. $\lhd$

4.8 Lemma: *Sei w ein Gewicht vom Typ $\mathfrak{BD}$ auf $\mathbb{R}$, sei V eine Umgebung der 0 in $\mathbb{R}$ und sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert eine Funktion $\widehat{g} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})_c$, die folgende Darstellung als Summer zweier Funktionen in $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ besitzt:*

$$\widehat{g} = \widehat{g}_1 + \widehat{g}_2,$$

wobei $\|\widehat{g}_1\|_w < \varepsilon$ und g_2 stetig, nicht-negativ mit $\operatorname{supp} g_2 \subset V$ *und* $\int_V g_2(x)\,dx = 1$.

$\rhd$ **Beweis :** Wir nehmen ohne Einschränkung an, daß V relativ-kompakt ist.

Gemäß Lemma 4.7 wählen wir eine stetige Funktion $f \in L^1_w(\mathbb{R})$ mit $0 \leq f \leq 1$, $f(0) = 1$, $0 \leq f(t) \leq \frac{1}{2}$ für alle $t \in \mathbb{R}\backslash V$ und $\widehat{f} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})_c$. Sei $K := \{t \in \mathbb{R} : f(t) \geq \frac{2}{3}\} \subset V$. Dann ist K kompakt und wir können eine Funktion $k \in C_0(\mathbb{R})$ mit $0 \leq k \leq 1$, $k|_K \equiv 1$ und $k|_{\mathbb{R}\backslash V} \equiv 0$ wählen. Offensichtlich ist $0 < \int_{\mathbb{R}} k(t)f(t)^n\,dt \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und wir können ein $d_n \in \mathbb{R}$ bestimmen mit

$$d_n \int_V k(t)f(t)^n\,dt = 1.$$

Es ist $d_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $0 < \delta < \frac{1}{2}$ beliebig und $r = \frac{1}{1+\delta}$ folgt $\frac{2}{3} < r < 1$ und

$$1 = d_n \int_V k(t)f(t)^n\,dt \geq d_n \int_{\{t:f(t)\geq r\}} f(t)^n\,dt \geq d_n r^n \lambda(t : f(t) \geq r),$$

d.h.
$$1 \leq \sqrt[n]{d_n} \leq \frac{1}{r\sqrt[n]{\lambda(t : f(t) \geq r)}} \to 1+\delta \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Da $0 < \delta < \frac{1}{2}$ beliebig war, folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{d_n} = 1$.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei nun $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto d_n(1-k(t))f(t)^n$. Es gilt:
$$\begin{aligned} \|h_n\|_{1,w} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} d_n(1-k(t))f(t)^n w(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{V\setminus K} d_n(1-k(t))f(t)^n w(t)\,dt \\ &\leq \frac{C\lambda(V\setminus K)}{\sqrt{2\pi}} d_n \left(\frac{2}{3}\right)^n, \end{aligned}$$

wobei $C > 0$ eine obere Schranke für w auf $\overline{V}\setminus K$ ist. Man bestimme ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $\|h_{n_0}\|_{1,w} < \varepsilon$ ist und setze $g_1 := h_{n_0}$ sowie $g_2 := d_{n_0} k f^{n_0}$. Offensichtlich ist g_2 nicht-negativ mit $\operatorname{supp} g_2 \subset V$ und $\int_V g_2(t)\,dt = d_n \int_V k(t) f(t)^n\,dt = 1$.

Die Kompaktheit des Trägers von $\widehat{g}$ mit $g := g_1 + g_2 = d_n f^n$ beweisen wir so: Da $\widehat{f}$ kompakten Träger hat und da $\widehat{\check{f}} = \check{\widehat{f}}$ ist, hat auch $\widehat{\check{f}}$ kompakten Träger (und liegt in $L^1(\mathbb{R})$). Dasselbe gilt dann auch für $\widehat{\check{f}}^{*n}$. Als Folgerung ergibt sich $\widehat{\left(\widehat{\check{f}}^{*n}\right)} = f^n$. Wegen
$$\widehat{f^n} = \check{\left(\widehat{\check{f}}^{*n}\right)} = \widehat{f}^n$$
ist damit die Kompaktheit von $\operatorname{supp}\widehat{g}$ nachgewiesen [10]. ◁

4.9 Proposition: $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})_c$ *liegt bzgl. der* $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$*-Norm dicht in* $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$.

▷ **Beweis :** Wir zeigen, daß für alle $f \in L^1_w(\mathbb{R})_c$ und alle $\varepsilon > 0$ eine Funktion $\widehat{h} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})_c$ existiert, so daß $\|\widehat{f} - \widehat{h}\|_w < \varepsilon$ gilt. Da $L^1_w(\mathbb{R})_c$ bzgl. $\|\cdot\|_{1,w}$ dicht in $L^1_w(\mathbb{R})$ liegt, und damit $\left\{\widehat{f} : f \in L^1_w(\mathbb{R})_c\right\}$ dicht in $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$, folgt hieraus die Behauptung.

Ohne Einschränkung sei $\|\widehat{f}\|_w \neq 0$. Aufgrund der Stetigkeit von $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $s \mapsto \|f - \tau_s f\|_{1,w}$ (Proposition 1.12), ist die Menge $V := \varphi^{-1}\left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ eine offene Umgebung der 0. Zu V und $\frac{\varepsilon}{2\|\widehat{f}\|_w}$ wählen wir nun eine gemäß Lemma 4.8 existierende Funktion $\widehat{g} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})_c$ mit $\widehat{g} = \widehat{g}_1 + \widehat{g}_2$, $\|\widehat{g}_1\|_w < \frac{\varepsilon}{2\|\widehat{f}\|_w}$, g_2 nicht-negativ, $\operatorname{supp} g_2 \subset V$ und $\int_V g_2(x)\,dx = 1$. Dann gilt:
$$\|\widehat{f} - \widehat{f}\widehat{g}\|_w \leq \|\widehat{f} - \widehat{f}\widehat{g}_2\|_w + \|\widehat{f}\widehat{g}_1\|_w < \|\widehat{f} - \widehat{f}\widehat{g}_2\|_w + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wir sind fertig, wenn wir noch $\|\widehat{f} - \widehat{f}\widehat{g}_2\|_w < \frac{\varepsilon}{2}$ gezeigt haben und dann $\widehat{h} := \widehat{f}\widehat{g}$ setzen.

Für die Norm $\|\widehat{f} - \widehat{f}\widehat{g}_2\|_w$ ergibt sich:
$$\begin{aligned} \|\widehat{f} - \widehat{f}\widehat{g}_2\|_w &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f - f * g_2| w\,d\lambda \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_V f(t) g_2(s)\,ds - \int_V f(t-s) g_2(s)\,ds \right| w(t)\,dt \\ &\leq \int_V g_2(s) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(t) - f(t-s)| w(t)\,dt\,ds \qquad \text{(Fubini)} \\ &= \int_V g_2(s) \|f - \tau_s f\|_{1,w}\,ds < \frac{\varepsilon}{2} \int_V g_2(s)\,ds = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

[10] Bei der letzten Gleichheit wurde $\check{(f * g)} = \check{f} * \check{g}$ benutzt.

◁

§5
Eigenschaften regulärer Beurling-Algebren

In §3 und §4 haben wir in aller Ausführlichkeit die Regularität derjenigen Beurling-Algebren nachgewiesen, deren Gewichte der Bedingung von Beurling-Domar genügen. Wir haben außerdem festgestellt, daß in diesem Fall die Gelfandtransformation mit der (eingeschränkten) Fouriertransformation übereinstimmt. Auf diese Art und Weise ist es uns nunmehr möglich, sämtliche Ergebnisse aus §2 auf die Situation der Beurling-Algebren zu übertragen. Diesem Unterfangen ist §5 gewidmet. Dabei orientieren wir uns an denjenigen Aussagen, die im weiteren Verlauf dieser Arbeit von Bedeutung sein werden.

Wir erinnern daran, daß durch die Definition von $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ und $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ die Gelfandtransformation als Identität

$$(\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma), \|\cdot\|_\varrho) \to (\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma), \|\cdot\|_\infty),$$
$$(\mathfrak{F}_w(\mathbb{R}), \|\cdot\|_w) \to (\mathfrak{F}_w(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty),$$

augefaßt werden kann. Die Elemente von $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ und $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ werden als Bilder von Elementen aus $\ell^1_\varrho(\mathbb{Z})$ und $L^1_w(\mathbb{R})$ unter der jeweiligen Fouriertransformation geschrieben.

Im folgenden seien ϱ und w Gewichte vom Typ $\mathfrak{BD}$ auf $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{R}$; die Beurling-Algebren $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ und $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ sind dann reguläre Banachalgebren. Wir übertragen die Begriffe *Hülle* und *Kern* aus §2. Die Bildung der Hülle ist eine Abbildung h, die jedem abgeschlossenen Ideal I in einer kommutativen Banachalgebra $\mathcal{A}$ eine Teilmenge von $\mathcal{M}_\mathcal{A}$ zuordnet. Da wir $\mathcal{M}_{\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)}$ mit Γ und $\mathcal{M}_{\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})}$ mit $\mathbb{R}$ identifiziert haben, wollen wir die Hülle eines abgeschlossenen Ideals I in $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ oder $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ als eine Teilmenge von Γ oder $\mathbb{R}$ auffassen[11]:

$$h(I) = \{\xi \in \Gamma : I \subset \ker \phi_\xi\} = \{\xi \in \Gamma : \widehat{a}(\xi) = 0 \text{ für alle } \widehat{a} \in I\}, \qquad I \subset \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma), \quad (17)$$
$$h(I) = \{t \in \mathbb{R} : I \subset \ker \phi_t\} = \{t \in \mathbb{R} : \widehat{f}(t) = 0 \text{ für alle } \widehat{f} \in I\}, \qquad I \subset \mathfrak{F}_w(\mathbb{R}). \quad (18)$$

Beim Kern wollen wir ganz ähnlich verfahren. Er soll als Abbildung auf Teilmengen von Γ und $\mathbb{R}$ aufgefaßt werden, und nicht als Abbildung auf Teilmengen multiplikativer Linearformen:

$$k(F) = \bigcap_{\xi \in F} \ker \phi_\xi = \{\widehat{a} \in \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) : \widehat{a}(\xi) = 0 \text{ für alle } \xi \in F\}, \qquad F \subset \Gamma,$$
$$k(F) = \bigcap_{t \in F} \ker \phi_t = \{\widehat{f} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R}) : \widehat{f}(t) = 0 \text{ für alle } t \in F\}, \qquad F \subset \mathbb{R}.$$

5.1 Proposition: *Sei ϱ ein Gewicht vom Typ $\mathfrak{BD}$ auf $\mathbb{Z}$ und I ein abgeschlossenes Ideal in $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$. Es gilt:*

a) Aus $h(I) = \emptyset$ folgt $I = \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$.

b) Aus $h(I) = \{\lambda\}$ für ein $\lambda \in \Gamma$ folgt $\mathcal{M}_{\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)/I} = \{\widetilde{\lambda}\}$ mit $\widetilde{\lambda} : \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)/I \to \mathbb{C}$, $\widetilde{\lambda}([\widehat{a}]) = \widehat{a}(\lambda)$.

[11] Wir wollen in diesem Zusammenhang allerdings keine neuen Bezeichnungen einführen.

Sei w ein Gewicht vom Typ $\mathfrak{BD}$ auf $\mathbb{R}$ und I ein abgeschlossenes Ideal in $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$. Es gilt:

c) Aus $h(I) = \emptyset$ folgt $I = \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$.

d) Aus $h(I) = \{t\}$ für ein $t \in \mathbb{R}$ folgt $\mathcal{M}_{\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})/I} = \{\widetilde{t}\}$ mit $\widetilde{t} : \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})/I \to \mathbb{C}$, $\widetilde{t}([\widehat{f}]) = \widehat{f}(t)$.

▷ **Beweis :** Die Aussagen a) und b) folgen direkt aus Proposition 2.5. Zum Nachweis von c) und d) sei I ein abgeschlossenes Ideal in $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$. Sei $h(I) = \emptyset$. Dann existiert zu jedem $\widehat{f} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})_c$ nach Propostion 2.7 ein $\widehat{g} \in I$ mit $\widehat{g}|_{\operatorname{supp} \widehat{f}} \equiv 1$. Dann ist $\widehat{f} = \widehat{g}\widehat{f} \in I$, und wegen der Dichtheit von $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})_c$ in $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ (Proposition 4.9) folgt hieraus $I = \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$. Damit ist c) gezeigt. Sei nun $h(I) = \{t\}$ für ein $t \in \mathbb{R}$. Für $\widehat{f} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ mit $t \notin \operatorname{supp} \widehat{f}$ und eine gemäß 1.18 gewählte approximative Eins $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^1_w(\mathbb{R})$ gilt $\widehat{f} = \lim_{n\to\infty} \widehat{f}\widehat{u_n}$ in $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$. Nach Proposition 4.9 gibt es Funktionen $\widehat{v_n} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})_c$ mit $\|\widehat{u_n} - \widehat{v_n}\|_w < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\widehat{f}_n := \widehat{f}\widehat{v}_n \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})_c$ mit $t \notin \operatorname{supp} \widehat{f}_n$. Wegen

$$\|\widehat{f} - \widehat{f}_n\|_w \leq \|\widehat{f} - \widehat{f}\widehat{u}_n\|_w + \frac{1}{n}\|\widehat{f}\|_w$$

folgt $\widehat{f} = \lim_{n\to\infty} \widehat{f}_n$ in $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$. Nach Proposition 2.7 existieren Funktionen $\widehat{h}_n \in I$ mit $\widehat{h}_n|_{\operatorname{supp} \widehat{f}_n} \equiv 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es ist dann $\widehat{f} = \lim_{n\to\infty} \widehat{f}_n = \lim_{n\to\infty} \widehat{f}_n\widehat{h}_n \in I$. Damit ist d) gezeigt. ◁

Beim Beweis von d) in Proposition 5.1 haben wir die folgende Aussage gezeigt:

5.2 Korollar: *Sei w ein Gewicht vom Typ $\mathfrak{BD}$ auf $\mathbb{R}$ und I ein abgeschlossenes Ideal in $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ mit $h(I) = \{t\}$ für ein $t \in \mathbb{R}$. Für alle $\widehat{f} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ mit $t \notin \operatorname{supp} \widehat{f}$ gilt dann $\widehat{f} \in I$.*

Korollar 5.2 wird an späterer Stelle noch von Nutzen sein.

5.3 Proposition: *Seien ϱ und w Gewichte vom Typ $\mathfrak{BD}$ auf $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{R}$.*

a) Sei $F \subset \Gamma$ kompakt. Ist $\widehat{a} \in \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ mit $\widehat{a}(\xi) \neq 0$ für alle $\xi \in F$, so existiert ein $\widehat{b} \in \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ mit $\widehat{b}(\xi) = \dfrac{1}{\widehat{a}(\xi)}$ für alle $\xi \in F$.

b) Sei $F \subset \mathbb{R}$ kompakt. Dann existiert eine Funktion $\widehat{e} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ mit $\widehat{e}|_F \equiv 1$. Ist $\widehat{f} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ mit $\widehat{f}(t) \neq 0$ für alle $t \in F$, so existiert eine Funktion $\widehat{g} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ mit $\widehat{g}(t) = \dfrac{1}{\widehat{f}(t)}$ für alle $t \in F$.

▷ **Beweis :**

a) Mit $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ enthält auch die Banachalgebra $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)/k(F)$ eine Eins. Da $\mathcal{M}_{\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)/k(F)} \cong F$ im Sinne von Proposition 2.6 ist, folgt aus $\widetilde{\phi_\xi}([\widehat{a}]) = \phi_\xi(\widehat{a}) = \widehat{a}(\xi) \neq 0$ für alle $\xi \in F$, daß $[\widehat{a}]$ in $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)/k(F)$ invertierbar ist. Setzen wir $[\widehat{b}] := [\widehat{a}]^{-1}$, so gilt $\widehat{b}(\xi)\widehat{a}(\xi) = 1$ für alle $\xi \in F$.

b) Wegen der Kompaktheit von F gibt es nach Proposition 2.7 mit $I = \mathcal{A} = \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ ein $\widehat{e} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ mit $\widehat{e}|_F \equiv 1$. Dann ist $[\widehat{e}]$ Einselement in $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})/k(F)$, und man kann wie in a) argumentieren. ◁

Wir führen für eine abgeschlossene Menge $F \subset \Gamma$ bzw. $F \subset \mathbb{R}$ die Mengen $\mathfrak{F}_\varrho(F)$ bzw. $\mathfrak{F}_w(F)$ ein:

$$\mathfrak{F}_\varrho(F) := \{\widehat{a} \in \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) : \operatorname{supp}\widehat{a} \subset F\}, \qquad F = \overline{F} \subset \Gamma$$
$$\mathfrak{F}_w(F) := \{\widehat{f} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R}) : \operatorname{supp}\widehat{f} \subset F\}, \qquad F = \overline{F} \subset \mathbb{R}$$

5.4 Lemma:

a) $\mathfrak{F}_\varrho(F)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$.

b) $\mathfrak{F}_w(F)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$.

$\triangleright$ **Beweis :** a) Für eine Folge $(\widehat{a}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{F}_\varrho(F)$ mit $\widehat{a}^{(n)} \to \widehat{a}$ für $n \to \infty$, $\widehat{a} \in \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$, gilt aufgrund der Stetigkeit der Gelfandtransformation

$$|(\widehat{a}^{(n)} - \widehat{a})(\xi)| \leq \|\widehat{a}^{(n)} - \widehat{a}\|_\infty \leq \|\widehat{a}^{(n)} - \widehat{a}\|_\varrho.$$

Für $\xi \notin F$ ist $\widehat{a}(\xi) = 0$ wegen $|\widehat{a}(\xi)| \leq \|\widehat{a}^{(n)} - \widehat{a}\|_\varrho \to 0$ für $n \to \infty$.

b) analog $\triangleleft$

Zum Abschluß geben wir noch eine Klasse von Abbildungen auf $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ an. Es handelt sich hierbei um Multiplikationsoperatoren. Sei für $\widehat{a} \in \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ die Abbildung $M_{\widehat{a}}$ definiert durch

$$M_{\widehat{a}} : \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \to \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma), \qquad \widehat{b} \mapsto \widehat{a}\widehat{b}.$$

Dann ist $M_{\widehat{a}}$ offensichtlich wohldefiniert und stetig linear mit $\|M_{\widehat{a}}\| = \|\widehat{a}\|_\varrho$.

Ist e insbesondere die Folge mit $e_n = 1$ für $n = 1$, $e_n = 0$ für $n \neq 1$, so ist $M_{\widehat{e}}\widehat{b}(\xi) = \xi\widehat{b}(\xi)$ für alle $\xi \in \Gamma$. Da die Abbildung $M_{\widehat{e}}$ in Kapitel II oft benötigt werden wird, wollen wir sie einfach nur mit M bezeichnen. Es gilt $\|M\| = 1$.

Für alle $\widehat{a} \in \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ und jede abgeschlossene Menge $F \subset \Gamma$ ist $\mathfrak{F}_\varrho(F)$ invariant unter $M_{\widehat{a}}$, d.h. daß $M_{\widehat{a}}\mathfrak{F}_\varrho(F) \subset \mathfrak{F}_\varrho(F)$ ist. Vor allem macht es Sinn, die Abbildung

$$M_{\widehat{a}}|\mathfrak{F}_\varrho(F) : \mathfrak{F}_\varrho(F) \to \mathfrak{F}_\varrho(F), \qquad \widehat{b} \mapsto M_{\widehat{a}}\widehat{b}$$

zu definieren.

5.5 Proposition: *Für Gewichte ϱ vom Typ $\mathfrak{BD}$ auf $\mathbb{Z}$ und $F \subset \Gamma$ abgeschlossen gilt:*

$$\sigma(M|\mathfrak{F}_\varrho(F)) \subset F.$$

$\triangleright$ **Beweis :** Für $\lambda \notin F$ existiert nach Proposition 5.3 eine Funktion $\widehat{b} \in \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ mit $\widehat{b}(\xi) = \frac{1}{\lambda-\xi}$ für alle $\xi \in F$. Dann ist $M_{\widehat{b}}|\mathfrak{F}_\varrho(F)$ die inverse, lineare Abbildung zu $\lambda - M|\mathfrak{F}_\varrho(F)$ und damit $\lambda \notin \sigma(M|\mathfrak{F}_\varrho(F))$. Das ist die Behauptung. $\triangleleft$

Im Fall $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ können wir ganz ähnlich vorgehen. Für jedes $\widehat{f} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ definiert

$$M_{\widehat{f}} : \mathfrak{F}_w(\mathbb{R}) \to \mathfrak{F}_w(\mathbb{R}), \qquad \widehat{g} \mapsto \widehat{f}\widehat{g}$$

einen stetigen linearen Operator auf $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ mit $\|M_{\widehat{f}}\| = \|\widehat{f}\|_w$. Analog zu oben sind für $F = \overline{F} \subset \mathbb{R}$ die Unterräume $\mathfrak{F}_w(F)$ invariant unter diesen Multiplikationsoperatoren.

Ein Problem ergibt sich bei dem Versuch, einen Operator M so zu definieren, daß $(M\widehat{f})(t) = -it\widehat{f}(t)$ gilt für alle $t \in \mathbb{R}$, denn i.a. liegt $\left(t \mapsto -it\widehat{f}(t)\right)$ nicht mehr in $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$. Der Operator M ist allerdings immerhin noch abgeschlossen und hat dichtes Bild; wir werden dies in Kapitel III zeigen. Trotzdem sei an dieser Stelle schon erwähnt, daß für den eingeschränkten Operator $M|\mathfrak{F}_w(F) : \mathfrak{F}_w(F) \to \mathfrak{F}_w(F)$ eine zu Proposition 5.5 analoge Aussage gilt: für alle kompakten $F \subset \mathbb{R}$ ist $\sigma(M|\mathfrak{F}_w(F)) \subset -iF$, wo $\sigma(M|\mathfrak{F}_w(F))$ für das Spektrum des unbeschränkten Operators $M|\mathfrak{F}_w(F)$ steht (§10, Abschnitt A).

Kapitel II
Asymptotisches Verhalten diskreter Operatorhalbgruppen

Zum Inhalt dieses Kapitels

Auf das asymptotische Verhalten einer diskreten Operatorhalbgruppe läßt sich aus dem Erfülltsein geeigneter Bedingungen für den die Halbgruppe erzeugenden Operator schließen. Wir wollen in diesem Kapitel eine solche Bedingung herleiten. Von zentraler Bedeutung ist dabei der Begriff des *Intertwining-Operator* für diskrete Operatorhalbgruppen. In §6 und §7 wollen wir solche Operatoren einführen und ihre Eigenschaften diskutieren. Die in Kapitel I behandelten Beurling-Algebren $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ spielen hierbei ein wichtige Rolle.

Als entscheidend wird sich die Existenz eines solchen (nicht-trivialen) Intertwining-Operators erweisen. Das in diesem Zusammenhang wichtige Ergebnis formulieren wir in §8.

Sätze über das asymptotische Verhalten diskreter Operatorhalbgruppe sind in ähnlicher Form bereits an anderer Stelle bewiesen worden. In §9 werden wir – neben unserem eigenen Ergebnis – diesen Resultaten Rechnung tragen und auf Unterschiede eingehen.

Für die Dauer dieses Kapitels stehe X für einen beliebigen Banachraum und X' für dessen topologischen Dualraum. Zu $T \in \mathcal{L}(X)$ ist der *adjungierte Operator* $T' : X' \to X'$ erklärt durch

$$T'\alpha = \alpha \circ T \qquad \text{für alle } \alpha \in X'.$$

Es gilt $\sigma(T') = \sigma(T)$ und $\|T'\| = \|T\|$.

§6
Diskrete Intertwining-Operatoren, grundlegende Eigenschaften

In diesem Paragraphen führen wir Intertwining-Operatoren für diskrete Operatorhalbgruppen ein, die wir der Kürze wegen als *diskrete Intertwining-Operatoren* bezeichnen werden.

6.1 Definitionen:

1) *Eine Abbildung* $\mathcal{T} : \mathbb{N} \to \mathcal{L}(X)$, *für die es einen beschränkten linearen Operator* T *auf* X *gibt mit* $\mathcal{T}(n) = T^n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$, *nennen wir eine* diskrete Operatorhalbgruppe. *Der Operator* T *heißt* Erzeuger *der Halbgruppe.*

2) *Sei* ϱ *ein Beurling-Domar-Gewicht auf* $\mathbb{Z}$, $j : \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \to X'$ *eine beschränkte lineare Abbildung und* $\mathcal{T}$ *eine diskrete Operatorhalbgruppe mit Erzeuger* T. *Falls für alle* $\widehat{a} \in \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$

$$j(M\widehat{a}) = T'j(\widehat{a}) \tag{19}$$

gilt[1], *nennen wir* j *einen* diskreten Intertwining-Operator *für die Operatorhalbgruppe* $\mathcal{T}$.

Die obige Definition einer diskreten Operatorhalbgruppe hat weniger den Sinn, einen fundamental neuen Begriff einzuführen, als vielmehr die Parallelität zu den später noch zu definierenden, stark-stetigen Operatorhalbgruppen aufzuzeigen (siehe §11). Wir werden in der Folge vereinfachend von diskreten Intertwining-Operatoren $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \to X'$ sprechen, ohne das hierzu notwendige Beurling-Domar-Gewicht ϱ auf $\mathbb{Z}$ und die zugehörige, diskrete Operatorhalbgruppe jedesmal zu präzisieren; diese beiden Objekte sollen in diesem Fall automatisch gegeben sein und mit ϱ bzw. $\mathcal{T}$ bezeichnet werden. Den Erzeuger von $\mathcal{T}$ nennen wir stets T.

Um Eigenschaften diskreter Intertwining-Operatoren besprechen zu können, führen wir zwei Hilfsmittel ein. Das eine Hilfsmittel ist ein Ideal $I = I(j)$, welches wir jedem diskreten Intertwining-Operator j zuordnen können, das andere ist der sogenannte *Träger* von j.

6.2 Lemma: *Sei* $j : \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \to X'$ *ein diskreter Intertwining-Operator. Dann existert ein größtes, abgeschlossenes Ideal* $I(j)$ *in* $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$, *welches noch vollständig in* $\ker j$ *enthalten ist.*

$\triangleright$ **Beweis :** Wir betrachten das System Λ, welches aus allen Idealen I in $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ besteht, für die $I \subset \ker\, j$ gilt. Da mit I und J auch $I + J$ und $\overline{I}$ zu Λ gehören, ist $I(j) = \bigcup_{I\in\Lambda} I$ das größte abgeschlossene Ideal in $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$, welches ganz in $\ker\, j$ enthalten ist. $\triangleleft$

Das zweite Hilfsmittel ist der *Träger* von j. Er ist erklärt durch

$$\operatorname{supp}(j) := h(I(j)) = \bigcap_{\widehat{a}\in I(j)} N(\widehat{a}),$$

wobei h die Hüllenabbildung aus §5 und $N(\widehat{a})$ die Nullstellenmenge von $\widehat{a}$ in Γ ist.

6.3 Proposition: *Sei* $j : \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \to X'$ *ein diskreter Intertwining-Operator. Dann gilt:*

$$\operatorname{supp}(j) = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad j \equiv 0$$

[1] Die Abbildung $M : \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \to \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ wurde in §5 auf Seite 38 definiert.

▷ **Beweis :** Ist $j \equiv 0$, so folgt $\ker j = \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ und damit $I(j) = \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ trivialerweise. Da $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ kommutativ und unital ist, schließen wir $\operatorname{supp}(j) = h(I(j)) = \emptyset$.

Umgekehrt folgt aus $\operatorname{supp}(j) = h(I(j)) = \emptyset$ mit Proposition 5.1, daß $I(j) = \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ und damit $j \equiv 0$ ist. ◁

Ist $j : \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \to X'$ ein diskreter Intertwining-Operator, so erhält man durch Komposition mit Multiplikationsoperatoren weitere Operatoren dieser Art.

6.4 Proposition: *Sei $j : \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \to X'$ ein diskreter Intertwining-Operator. Dann ist für alle $\widehat{a} \in \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ auch $j \circ M_{\widehat{a}} : \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \to X'$ ein diskreter Intertwining-Operator*[2].

▷ **Beweis :** Die Stetigkeit von $j \circ M_{\widehat{a}}$ ist klar. Es muß nur die definierende Eigenschaft (19) nachgeprüft werden. Es ist

$$j \circ M_{\widehat{a}}(M\widehat{b}) = j(\widehat{a}(M\widehat{b})) = j(M(\widehat{a}\widehat{b})) = T'j(\widehat{a}\widehat{b}) = T'j \circ M_{\widehat{a}}(\widehat{b})$$

für alle $\widehat{b} \in \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$. ◁

Daß vermöge Proposition 6.4 aus nicht-trivialen tatsächlich auch nicht-triviale Intertwining-Operatoren konstruiert werden können, ist Gegenstand von Proposition 6.6. Wir bereiten die Beweise der nachfolgenden Aussagen durch folgende einfache Überlegung vor.

6.5 Für jede Funktion $\widehat{a} \in \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ ist $\widehat{a}\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) = \{\widehat{a}\widehat{b} : \widehat{b} \in \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)\}$ ein Ideal in $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$. Aufgrund der Stetigkeit der Multiplikation auf $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ ist $\overline{\widehat{a}\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)}$ ein abgeschlossenes Ideal in $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$. Gilt insbesondere $\widehat{a}\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \subset \ker j$, so muß wegen der Abgeschlossenheit von $\ker j$ und der Definition von $I(j)$ auch $\widehat{a}\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \subset I(j)$ sein. Wegen $1 \in \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ folgt hieraus $\widehat{a} \in I(j)$.

6.6 Proposition: *Sei $j : \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \to X'$ ein diskreter Intertwining-Operator. Seien $\lambda \in \operatorname{supp}(j)$ und $\widehat{a} \in \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ mit $\widehat{a}(\lambda) \neq 0$. Dann ist $j \circ M_{\widehat{a}} \not\equiv 0$.*

▷ **Beweis :** Wäre $j \circ M_{\widehat{a}} \equiv 0$, so würde $\widehat{a}\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \subset \ker j$ und damit $\widehat{a} \in I(j)$ folgen (Aussage 6.5). Wegen $\lambda \in \operatorname{supp}(j)$ erhielte man $\widehat{a}(\lambda) = 0$, ein Widerspruch. ◁

Die nachfolgende Proposition macht wegen Proposition 6.4 Sinn.

6.7 Proposition: *Sei $j : \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \to X'$ ein diskreter Intertwining-Operator. Für alle $\widehat{a} \in \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ ist $I(j) \subset I(j \circ M_{\widehat{a}})$ und $\operatorname{supp}(j \circ M_{\widehat{a}}) \subset \operatorname{supp}(\widehat{a}) \cap \operatorname{supp}(j)$.*

▷ **Beweis :** Seien $\widehat{b} \in I(j)$ und $\widehat{c} \in \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ beliebig. Es gilt: $j \circ M_{\widehat{a}}(\widehat{b}\widehat{c}) = j(\widehat{a}\widehat{b}\widehat{c}) = 0$, da wegen $\widehat{b} \in I(j)$ auch $\widehat{a}\widehat{b}\widehat{c} \in I(j)$ und $I(j) \subset \ker j$ ist. Infolgedessen haben wir $\widehat{b}\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \subset \ker(j \circ M_{\widehat{a}})$ und Aussage 6.5 liefert $\widehat{b} \in I(j \circ M_{\widehat{a}})$. Damit ist $I(j) \subset I(j \circ M_{\widehat{a}})$.

Die Beziehung $\operatorname{supp}(j \circ M_{\widehat{a}}) \subset \operatorname{supp}(j)$ folgt direkt aus dem soeben gezeigten Teil der Proposition; es muß nur noch $\operatorname{supp}(j \circ M_{\widehat{a}}) \subset \operatorname{supp}(\widehat{a})$ nachgewiesen werden. Der Fall $\operatorname{supp}(\widehat{a}) = \Gamma$ ist trivial; wir wollen deshalb annehmen, daß es ein $\lambda \in \Gamma\backslash\operatorname{supp}(\widehat{a})$ gibt. Da $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ regulär ist, existiert $\widehat{b} \in \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ mit $\widehat{b}(\lambda) \neq 0$ und $\operatorname{supp}(\widehat{b}) \subset U$ für eine offene Umgebung U von λ

[2] j und $j \circ M_{\widehat{a}}$ beziehen sich natürlich auf dieselbe Operatorhalbgruppe.

mit $U \cap \operatorname{supp}(\widehat{a}) = \emptyset$. Wegen $\operatorname{supp}(\widehat{a}) \cap \operatorname{supp}(\widehat{b}) = \emptyset$ ist $\widehat{a}\widehat{b} \equiv 0$, und für alle $\widehat{c} \in \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ gilt daher $j \circ M_{\widehat{a}}(\widehat{b}\widehat{c}) = j(\widehat{a}\widehat{b}\widehat{c}) = 0$. Folglich ist $\widehat{b}\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \subset \ker(j \circ M_{\widehat{a}})$ und also (Aussage 6.5) $\widehat{b} \in I(j \circ M_{\widehat{a}})$. Wegen $\widehat{b}(\lambda) \neq 0$ ist $\lambda \in \Gamma \backslash \operatorname{supp}(j \circ M_{\widehat{a}})$. Daher ist $\Gamma \backslash \operatorname{supp}(\widehat{a}) \subset \Gamma \backslash \operatorname{supp}(j \circ M_{\widehat{a}})$ oder $\operatorname{supp}(j \circ M_{\widehat{a}}) \subset \operatorname{supp}(\widehat{a})$. ◁

6.8 Korollar: *Sei $j : \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \to X'$ ein diskreter Intertwining-Operator, dessen Träger* $\operatorname{supp}(j)$ *einen isolierten Punkt $\lambda \in \Gamma$ enthält*[3]. *Dann gibt es einen diskreten Intertwining-Operator $\widetilde{j} : \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \to X'$ mit* $\operatorname{supp}(\widetilde{j}) = \{\lambda\}$.

▷ **Beweis :** Aufgrund der Regularität von $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ und λ isoliert in $\operatorname{supp}(j)$ existiert ein $\widehat{a} \in \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ mit $\widehat{a}(\lambda) \neq 0$ und $\operatorname{supp}(\widehat{a}) \cap \operatorname{supp}(j) = \{\lambda\}$. Offensichtlich leistet $\widetilde{j} := j \circ M_{\widehat{a}}$ wegen Proposition 6.3, Proposition 6.6 und Proposition 6.7 das Verlangte. ◁

Bei den in diesem Paragraphen nachgewiesenen Eigenschaften diskreter Intertwining-Operatoren hat die Operatorhalbgruppe $\mathcal{T}$, bzgl. der der Operator definiert ist, keine allzu große Rolle gespielt. Im nächsten Paragraphen werden wir sehen, daß eine nützliche Beziehung besteht zwischen dem Träger von j und dem Spektrum von T, dem Erzeuger der Halbgruppe $\mathcal{T}$.

§7
Weiterführende Eigenschaften diskreter Intertwining-Operatoren

Bevor wir auf weitere Eigenschaften diskreter Intertwining-Operatoren eingehen, führen wir ein Hilfsmittel ein.

Für eine abgeschlossene Teilmenge F von $\mathbb{C}$ und einen beschränkten linearen Operator T auf X definieren wir den *Spektralraum* von T zu F als

$$\begin{aligned} X_T(F) := \{ & x \in X : \text{es existiert eine analytische Funktion } f : \mathbb{C}\backslash F \to X \text{ mit} \\ & (z-T)f(z) = x \text{ für alle } z \in \mathbb{C}\backslash F\}. \end{aligned}$$

7.1 Proposition: *Sei T ein beschränkter linearer Operator auf X und $\lambda \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann gilt:*

$$X_T(\{\lambda\}) = \{x \in X : \limsup_{n\to\infty} \|(\lambda - T)^n x\|^{\frac{1}{n}} = 0\}$$

▷ **Beweis :** Wir können uns auf den Fall $\lambda = 0$ beschränken, denn die allgemeine Aussage folgt hieraus durch Verschiebung um λ.

„$\supset$“: Sei $x \in X$ mit $\limsup_{n\to\infty} \|T^n x\|^{\frac{1}{n}} = 0$ und betrachte $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to X$, $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (T^n x) z^{-n-1}$. Wegen $\limsup_{n\to\infty} \|T^n x\|^{\frac{1}{n}} = 0$ ist f auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ wohldefiniert und analytisch. Es ist

$$(z-T)f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (T^n x) z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} (T^{n+1} x) z^{-n-1} = T^0 x = x,$$

d.h. $x \in X_T(\{0\})$.

[3]D.h. es existiert eine Umgebung U von λ in Γ, die keine weiteren Punkte des Trägers enthält.

„$\subset$“: Sei $x \in X_T(\{0\})$ und $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to X$ analytisch mit $(z-T)f(z) = x$. Da für hinreichend große z die Abbildung $z - T$ bijektiv ist, ist $f(z) = R(z,T)x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(T^n x)z^{-n-1}$ für solche z, wobei $R(z,T)(z-T) = (z-T)R(z,T) = \mathrm{id}_X$. Da f aber analytisch auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ ist, muß sich f für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ in der Form $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(T^n x)z^{-n-1}$ darstellen lassen. Dies erzwingt $\limsup\limits_{n\to\infty} \|T^n x\|^{\frac{1}{n}} = 0$. $\triangleleft$

7.2 Korollar: *Sei T ein beschränkter linearer Operator auf dem Banachraum X. Es gilt:*

$$\ker(\lambda - T)^n \subset X_T(\{\lambda\})$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

$\triangleright$ **Beweis :** Aus $x \in \ker(\lambda - T)^n$ folgt $\limsup\limits_{k\to\infty} \|(\lambda - T)^k x\|^{\frac{1}{k}} = 0$ und damit $x \in X_T(\{\lambda\})$. $\triangleleft$

Wir wenden uns nun weiteren Eigenschaften diskreter Intertwining-Operatoren zu.

Es sei $j : \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \to X'$ ein diskreter Intertwining-Operator für die diskrete Operatorhalbgruppe $\mathcal{T}$ mit Erzeuger T. Es bezeichne $\mathrm{Lat}_\varrho(M)$ die Menge der abgeschlossenen Unterräume von $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$, die invariant sind unter M. Weiter bezeichne $M|Y$ für $Y \in \mathrm{Lat}_\varrho(M)$ den wohldefinierten Operator $M|Y : Y \to Y$, $\widehat{a} \mapsto M\widehat{a}$. Wie zuvor stehe $R(\cdot,T) : \rho(T) \to \mathcal{L}(X)$ für die Resolvente von T. Wir erinnern, daß für einen beschränkten linearen Operator T und seinen adjungierten Operator die Beziehung $\sigma(T) = \sigma(T')$ besteht.

7.3 Lemma: *Sei $j : \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \to X'$ ein diskreter Intertwining-Operator. Für alle $Y \in \mathrm{Lat}_\varrho(M)$ gilt:*

$$\sigma(M|Y) \cap \sigma(T) = \emptyset \qquad \Rightarrow \qquad Y \subset \ker j$$

$\triangleright$ **Beweis :** Sei $\widehat{a} \in Y$ beliebig und $F : \mathbb{C} \to X$ definiert durch

$$F(z) = \begin{cases} j(R(z, M|Y)\widehat{a}) & \text{falls } z \notin \sigma(M|Y) \\ R(z,T')j(\widehat{a}) & \text{falls } z \notin \sigma(T') = \sigma(T). \end{cases}$$

Dann ist F eine wohldefinierte Funktion: Wegen $\sigma(M|Y) \cap \sigma(T) = \emptyset$ ist $\rho(M|Y) \cup \rho(T) = \mathbb{C}$ und F auf ganz $\mathbb{C}$ definiert; für $z \in \rho(M|Y) \cap \rho(T)$ gilt

$$(z - T')j(R(z, M|Y)\widehat{a}) = j((z - M)R(z, M|Y)\widehat{a}) = j(\widehat{a}),$$

d.h. $j(R(z,M|Y)\widehat{a}) = R(z,T')j(\widehat{a})$. Da sowohl $R(\cdot, M|Y)$ auf $\rho(M|Y)$ als auch $R(\cdot,T')$ auf $\rho(T') = \rho(T)$ analytisch sind, folgt die Analytizität von F auf $\mathbb{C}$. Da aber $\|F(z)\| \to 0$ für $|z| \to \infty$ (etwa wegen $\|R(z,T')\| \to 0$ für $|z| \to \infty$), folgt $F \equiv 0$ (Liouville). Da für große z die Resolvente $R(z,T')$ existiert und bijektiv ist, folgt insbesondere $j(\widehat{a}) = 0$. Da $\widehat{a} \in Y$ beliebig war, folgt $Y \subset \ker j$. $\triangleleft$

7.4 Satz: *Sei $\mathcal{T}$ eine diskrete Operatorhalbgruppe auf X mit Erzeuger T und sei $j : \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \to X'$ ein diskreter Intertwining-Operator für $\mathcal{T}$. Dann gilt:*

$$\mathrm{supp}(j) \subset \sigma(T).$$

$\triangleright$ **Beweis :** Im Falle $\text{supp}(j) = \emptyset$ ist nichts zu beweisen. Sei also $t \in \text{supp}(j)$. Wir wollen annehmen, daß $t \notin \sigma(T)$ ist. Da $\Gamma\backslash\sigma(T)$ offen ist, würde ein Umgebung U von t existieren mit $U \subset \overline{U} \subset \Gamma\backslash\sigma(T) = \rho(T)$. Mit Proposition 5.4 sieht man leicht, daß $\mathfrak{F}_\varrho(\overline{U}) \in \text{Lat}_\varrho(M)$ ist, und Proposition 5.5 liefert $\sigma(M|\mathfrak{F}_\varrho(\overline{U})) \subset \overline{U}$. Nach Wahl von U wäre $\sigma(M|\mathfrak{F}_\varrho(\overline{U})) \cap \sigma(T) \subset \overline{U} \cap \sigma(T) = \emptyset$. Nach Lemma 7.3 ergäbe sich $\mathfrak{F}_\varrho(\overline{U}) \subset \ker j$. Da $\mathfrak{F}_\varrho(\overline{U})$ ein abgeschlossenes Ideal ist, erhielte man $\mathfrak{F}_\varrho(\overline{U}) \subset I(j)$. Dies aber wäre ein Widerspruch, denn wegen $t \in \text{supp}(j)$ müßte $\widehat{a}(t) = 0$ für alle $\widehat{a} \in \mathfrak{F}_\varrho(\overline{U})$ gelten, was wegen der Regularität von $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ sicherlich nicht der Fall ist. Da die Annahme also falsch ist, kann nur $\text{supp}(j) \subset \sigma(T)$ sein. $\triangleleft$

Sei M der Multiplikationsoperator aus §5. Da $I(j)$ als Ideal trivialerweise unter jedem Multiplikationsoperator invariant ist, bereitet es keine Probleme, die Abbildung $\widetilde{M} : \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)/I(j) \to \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)/I(j)$ durch

$$\widetilde{M}[\widehat{a}] := [M\widehat{a}]$$

zu definieren.

7.5 Proposition: *Sei* $j : \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \to X'$ *ein diskreter Intertwining-Operator mit* $\text{supp}(j) = \{\lambda\}$ *für ein* $\lambda \in \Gamma$. *Auf* $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)/I(j)$ *existiert dann einzig die multiplikative Linearform* $\phi : [\widehat{a}] \mapsto \widehat{a}(\lambda)$. *Es ist* $\sigma\left(\widetilde{M}\right) = \{\lambda\}$.

$\triangleright$ **Beweis :** Der erste Teil der Aussage ist b) in Proposition 5.1. Bezeichnen wir mit $\widehat{e}$ die Funktion $\xi \mapsto \xi$, so ist $\widetilde{M}[\widehat{a}] = [\widehat{e}\widehat{a}]$. Nach Aussage 2.4 ist für ein $\mu \in \mathbb{C}$ das Element $\mu - [\widehat{e}] \in \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)/I(j)$ genau dann invertierbar, wenn $\phi(\mu - [\widehat{e}]) = \mu - \widehat{e}(\lambda) = \mu - \lambda \neq 0$ ist. Das ist die Aussage bzgl. des Spektrums. $\triangleleft$

7.6 Korollar: *Sei* $j : \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \to X'$ *ein diskreter Intertwining-Operator mit* $\text{supp}(j) = \{\lambda\}$ *für ein* $\lambda \in \Gamma$. *Dann ist*

$$(\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)/I(j))_{\widetilde{M}}(\{\lambda\}) = \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)/I(j)$$

$\triangleright$ **Beweis :** „$\subset$“: Diese Inklusion ist in der Definiton von $(\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)/I(j))_{\widetilde{M}}(\{\lambda\})$ enthalten (vgl. mit dem Anfang dieses Paragraphen).

„$\supset$“: $R(\cdot, \widetilde{M})$ ist auf $\rho(\widetilde{M}) = \mathbb{C}\backslash\sigma(\widetilde{M}) = \mathbb{C}\backslash\{\lambda\}$ analytisch. Für $[\widehat{a}] \in \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)/I(j)$ definiere man $f : \mathbb{C}\backslash\{\lambda\} \to \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)/I(j)$ durch $f(z) := R(z, \widetilde{M})[\widehat{a}]$. Dann ist f analytisch mit $(z - \widetilde{M})f(z) = [\widehat{a}]$. $\triangleleft$

7.7 Proposition: *Sei* $j : \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \to X'$ *ein diskreter Intertwining-Operator mit* $\text{supp}(j) = \{\lambda\}$ *für ein* $\lambda \in \Gamma$. *Dann ist die Abbildung*

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{\jmath}: & \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)/I(j) & \to & X' \\ & [\widehat{a}] & \mapsto & \widetilde{\jmath}([\widehat{a}]) := j(\widehat{a}) \end{array}$$

wohldefiniert mit $\widetilde{\jmath}(\widetilde{M}[\widehat{a}]) = T'\widetilde{\jmath}([\widehat{a}])$ *für alle* $\widehat{a} \in \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ *und* Bild $\widetilde{\jmath} \subset X'_{T'}(\{\lambda\})$.

$\triangleright$ **Beweis :** Der erste Teil der Proposition ist wegen $I(j) \subset \ker j$ klar, und die Aussage bezüglich der „Vertauschung“ von $\widetilde{M}$ und T' rechnet man leicht nach. Sei $[\widehat{a}] \in \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)/I(j)$

beliebig. Nach Korollar 7.6 existiert eine analytische Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{\lambda\} \to \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)/I(j)$ mit $(z - \widetilde{M})f(z) = [\widehat{a}]$. Anwenden von $\widetilde{\jmath}$ ergibt:

$$\widetilde{\jmath}((z - \widetilde{M})f(z)) = (z - T')\widetilde{\jmath}(f(z)).$$

Für $g : \mathbb{C}\backslash\{\lambda\} \to X'$, $g(z) := \widetilde{\jmath}(f(z))$, ist g analytisch mit $(z - T')g(z) = \widetilde{\jmath}([\widehat{a}])$. Es folgt: $\widetilde{\jmath}([\widehat{a}]) \in X'_{T'}(\{\lambda\})$. Das ist die Behauptung. $\lhd$

7.8 Korollar: *Sei* $j : \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \to X'$ *ein diskreter Intertwining-Operator. Ist* $\lambda \in \Gamma$ *mit* $X'_{T'}(\{\lambda\}) = \{0\}$, *so ist* $\operatorname{supp}(j) \neq \{\lambda\}$.

$\rhd$ **Beweis :** Wäre $\operatorname{supp}(j) = \{\lambda\}$, so würde nach Proposition 7.7 die dort definierten Abbildung $\widetilde{\jmath}$ wegen Bild $\widetilde{\jmath} \subset X'_{T'}(\{\lambda\}) = \{0\}$ identisch verschwinden. Dann verschwindet aber auch j, was aufgrund von Proposition 6.3 nicht sein kann. $\lhd$

Der entscheidende Satz läßt sich nun folgendermaßen formulieren:

7.9 Satz: *Sei* $j : \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \to X'$ *ein diskreter Intertwining-Operator für die diskrete Operatorhalbgruppe* $\mathcal{T}$. *Für den Erzeuger* T *dieser Halbgruppe sei* $\sigma(T) \cap \Gamma$ *abzählbar und* $X'_{T'}(\{\lambda\}) = \{0\}$ *für alle* $\lambda \in \sigma(T) \cap \Gamma$. *Dann ist* $j \equiv 0$.

$\rhd$ **Beweis :** Wäre $j \not\equiv 0$, so ergäbe sich nach Proposition 6.3 $\operatorname{supp}(j) \neq \emptyset$. Da $\sigma(T) \cap \Gamma$ abzählbar und abgeschlossen ist, und da $\operatorname{supp}(j)$ nach Satz 7.4 eine Teilmenge hiervon ist, enthielte $\operatorname{supp}(j)$ einen isolierten Punkt $\mu \in \Gamma$. Sei U ein offene Umgebung dieses μ mit $U \cap \operatorname{supp}(j) = \{\mu\}$ und $\widehat{a} \in \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ eine Funktion mit $\widehat{a}(\mu) \neq 0$ und $\operatorname{supp}\widehat{a} \subset U$ (wir erinnern: $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ ist regulär). Wir könnten nach Proposition 6.4 und Proposition 6.6 einen nicht-verschwindenden, diskreten Intertwining-Operator $\widetilde{\jmath} : \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \to \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ definieren durch $\widetilde{\jmath} := j \circ M_{\widehat{a}}$ mit – Proposition 6.7 – $\operatorname{supp}(\widetilde{\jmath}) \subset \operatorname{supp}(\widehat{a}) \cap \operatorname{supp}(j) = \{\mu\}$. Wegen $\widetilde{\jmath} \not\equiv 0$ wäre $\operatorname{supp}(\widetilde{\jmath}) = \{\mu\}$. Mit Korollar 7.8 kann dies aber aufgrund von $X'_{T'}(\{\mu\}) = \{0\}$ nicht sein. Unsere Annahme muß von daher falsch sein, und j tatsächlich identisch verschwinden. $\lhd$

Im nächsten Paragraphen wenden wir uns der Frage zu, unter welchen Voraussetzungen man die Existenz eines nicht-trivialen, diskreten Intertwining-Operators für eine diskrete Operatorhalbgruppe garantieren kann.

§8
Existenz diskreter Intertwining-Operatoren

A. Vorbereitung

Wir geben in diesem Paragraphen eine Bedingung an, unter der man die Existenz eines diskreten Intertwining-Operators zeigen kann. Bevor wir dies jedoch in Angriff nehmen können, müssen wir uns mit der nicht-trivialen Konstruktion dieses Intertwining-Operators auseinandersetzen.

Wir erinnern, daß X ein beliebiger Banachraum ist, X' dessen topologischer Dual, und daß wir mit T' den zu $T \in \mathcal{L}(X)$ gehörenden adjungierten Operator bezeichnen.

Es sei η eine beliebige, reellwertige Folge über $\mathbb{N}$ mit $\eta_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten den linearen Raum

$$\ell_\eta^\infty(\mathbb{N}, X') := \left\{ \alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X' : \left(\frac{\|\alpha_n\|}{\eta_n} \right)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \right\}$$

und versehen ihn mit der Norm $\|\alpha\|_{\infty,\eta} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\|\alpha_n\|}{\eta_n}$, $\alpha \in \ell_\eta^\infty(\mathbb{N}, X')$.

Sei

$$c_\eta(\mathbb{N}, X') := \left\{ \alpha \in \ell_\eta^\infty(\mathbb{N}, X') : \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n(x)}{\eta_n} \text{ existiert für alle } x \in X \right\}.$$

Offensichtlich ist $c_\eta(\mathbb{N}, X')$ ein linearer Teilraum von $\ell_\eta^\infty(\mathbb{N}, X')$. Die Abbildung

$$\lim : c_\eta(\mathbb{N}, X') \to X', \qquad \lim(\alpha)x = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n(x)}{\eta_n},$$

ist wohldefiniert, denn die Linearität von $\lim(\alpha)$ ist klar, und die Stetigkeit folgt aus

$$\| \lim(\alpha) \| = \sup_{\|x\|=1} \left| \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n(x)}{\eta_n} \right| \leq \|\alpha\|_{\infty,\eta}.$$

Als Abbildung ist lim selber stetig linear mit $\| \lim \| \leq 1$.

Wir werden nun zeigen, daß es eine Fortsetzung Lim von lim auf $\ell_\eta^\infty(\mathbb{N}, X')$ gibt, die die folgende Eigenschaft hat: Lim hat höchstens Norm 1 und für alle $\alpha \in \ell_\eta^\infty(\mathbb{N}, X')$ und alle $x \in X$, für die $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_n(x)}{\eta_n}$ existiert, ist $\operatorname{Lim}(\alpha)x = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_n(x)}{\eta_n}$. Es ist klar, daß ein solches Lim die Linearform lim fortsetzt. Es genügt jedoch nicht, Lim vermöge Hahn-Banach zu konstruieren.

Zum Zwecke der Definition von Lim betrachten wir die Räume

$$\begin{aligned} \ell_\eta^\infty(\mathbb{N}) &= \left\{ z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \left(\frac{z_n}{\eta_n} \right)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \right\}, \\ c_\eta(\mathbb{N}) &= \left\{ z \in \ell_\eta^\infty(\mathbb{N}) : \lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{\eta_n} \text{ existiert} \right\} \end{aligned}$$

und versehen sie mit der Norm $\|z\|_{\infty,\eta} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{|z_n|}{\eta_n}$, $z \in \ell_\eta^\infty(\mathbb{N})$.

Es ist klar, daß $c_\eta(\mathbb{N})$ ein linearer Teilraum von $\ell_\eta^\infty(\mathbb{N})$ ist. Die Abbildung

$$\ell : c_\eta(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto \lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{\eta_n}$$

ist offenbar linear und stetig mit $\|\ell\| \leq 1$. Aufgrund des Satzes von Hahn-Banach läßt sich ℓ normerhaltend auf $\ell_\eta^\infty(\mathbb{N})$ fortsetzen. Man erhält eine Linearform $\mathrm{L} : \ell_\eta^\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$ mit $\|\mathrm{L}\| \leq 1$ und $\mathrm{L}|_{c_\eta(\mathbb{N})} = \ell$.

Die gesuchte Abbildung $\operatorname{Lim} : \ell_\eta^\infty(\mathbb{N}, X') \to \mathbb{C}$ definieren wir so: für $\alpha \in \ell_\eta^\infty(\mathbb{N}, X')$ und $x \in X$ ist

$$\operatorname{Lim}(\alpha)x := \mathrm{L}\,(\alpha_n(x))_{n\in\mathbb{N}}. \tag{20}$$

Wegen $\dfrac{|\alpha_n(x)|}{\eta_n} \leq \|x\| \dfrac{\|\alpha_n\|}{\eta_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $(\alpha_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\eta^\infty(\mathbb{N})$, ist $\mathrm{L}\,(\alpha_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ein wohlbestimmter Ausdruck. Die Linearität von $\operatorname{Lim}(\alpha)$ folgt aus der Linearität von L. Man rechnet leicht $\|\mathrm{Lim}\,(\alpha)\| \leq \|\alpha\|_{\infty,\eta}$ nach. Schließlich ist Lim selber stetig linear mit $\|\mathrm{Lim}\,\| \leq 1$, wie gewünscht. Mit diesen Ausführungen ist dargelegt, daß die nachfolgend definierte Menge nicht leer ist.

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_\eta \;:=\; & \{\mathrm{Lim} : \ell^\infty_\eta(\mathbb{N}, X') \to X' \text{ stetig linear mit Lim ist gemäß (20) definiert} \\ & \text{mit einer (normerhaltenden) Fortsetzung L} : \ell^\infty_\eta(\mathbb{N}) \to \mathbb{C} \text{ von } \ell.\} \end{aligned}$$

Für einen beliebigen Operator $T \in \mathcal{L}(X)$, $\mathrm{Lim} \in \mathfrak{L}_\eta$, $\alpha \in \ell^\infty_\eta(\mathbb{N}, X')$ und $x \in X$ gilt

$$\mathrm{Lim}\,(T'\alpha)(x) = L((T'\alpha_n)x)_{n\in\mathbb{N}} = \mathrm{Lim}\,(\alpha)(Tx) = (T'\mathrm{Lim}\,(\alpha))(x),$$

also $\mathrm{Lim}\,(T'\alpha) = T'\mathrm{Lim}\,(\alpha)$.

B. Konstruktion eines diskreten Intertwining-Operators

Wir haben bereits angedeutet, daß nicht für jede diskrete Operatorhalbgruppe ein nicht-trivialer, diskreter Intertwining-Operator existieren muß, schon gar nicht für jedes beliebige Beurling-Domar-Gewicht ϱ auf $\mathbb{Z}$. Tatsächlich werden wir die Existenz eines Intertwining-Operators in irgendeiner Form mit diesem Gewicht ϱ in Verbindung bringen müssen. Dies geschieht unter der Annahme, daß für den Erzeuger T einer diskreten Operatorhalbgruppe $\mathcal{T}$ die Beziehung

$$\|T^n\| = O(\varrho_n) \qquad \text{für } n \to \infty$$

gelte[4]. Wir werden im folgenden zeigen, daß unter einer solchen Bedingung ein Intertwining-Operator konstruiert werden kann, von dem man dann unter weiteren Voraussetzungen beweisen kann, daß er nicht identisch verschwindet.

Bei den nun folgenden Ausführungen denken wir uns ein Beurling-Domar-Gewicht ϱ auf $\mathbb{Z}$ sowie eine Operatorhalbgruppe $\mathcal{T}$ mit Erzeuger $T \in \mathcal{L}(X)$ und $\|T^n\| = O(\varrho_n)$ für $n \to \infty$ gegeben.

Die Abbildung

$$\Phi : \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \to \mathcal{L}(X'), \qquad \widehat{a} \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}_0} a_i {T'}^i$$

ist unter den gemachten Voraussetzungen wohldefiniert, denn es ist $\|{T'}^i\| = \|T^i\|$; deshalb haben wir

$$\sum_{i\in\mathbb{N}_0} \|a_i {T'}^i\| \leq \sum_{i\in\mathbb{N}_0} |a_i| K \varrho_i < +\infty.$$

Die Linearität von Φ ist klar, und die Stetigkeit ist eine Folge von

$$\|\Phi(\widehat{a})\| \leq K \|\widehat{a}\|_\varrho.$$

Für $k \in \mathbb{Z}$ führen wir eine weitere Abbildung ein. Es handelt sich um

$$P_k = M^k : \begin{array}{ccc} \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) & \to & \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \\ \widehat{a} & \mapsto & \widehat{a_{\cdot-k}}. \end{array}$$

[4]D.h. es existiert eine Konstante $K > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\|T^n\| \leq K\varrho_n$ gilt für alle $n \geq n_0$. Wegen $\varrho_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ können wir ohne Einschränkung ein $K > 0$ annehmen mit $\|T^n\| \leq K\varrho_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

P_k ist eine beschränkte lineare Abbildung mit $\|P_k\| \leq \varrho_k$. Letzteres zeigt die einfache Rechnung

$$\|P_k(\widehat{a})\| = \sum_{i\in\mathbb{Z}} |a_{i-k}|\varrho_i \leq \sum_{i\in\mathbb{Z}} |a_{i-k}|\varrho_{i-k}\varrho_k \leq \varrho_k\|\widehat{a}\|_\varrho.$$

Wir stellen einen Zusammenhang zwischen M und T' vermöge der Abbildungen Φ und P_k her ($k \in \mathbb{Z}$). Sei hierzu $\widehat{a} \in \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ beliebig. Es ist

$$(\Phi P_k)(M\widehat{a}) = \Phi(P_k(\widehat{a_{.-1}})) = \Phi(\widehat{a_{.-k-1}}) = \sum_{i\in\mathbb{N}_0} a_{i-k-1}T'^i \text{ und}$$

$$T'(\Phi P_k)(\widehat{a}) = T'\Phi(\widehat{a_{.-k}}) = T'\sum_{i\in\mathbb{N}_0} a_{i-k}T'^i = \sum_{i\in\mathbb{N}_0} a_{i-k}T'^{i+1} = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_{i-k-1}T'^i.$$

Diese beiden Formel zusammen ergeben

$$(\Phi P_k)(M\widehat{a}) = T'(\Phi P_k)(\widehat{a}) + a_{-k-1}, \tag{21}$$

was unseren gewünschten Zusammenhang darstellt.

Als technische Hilfsmittel definieren wir die nachfolgenden Mengen:

$\langle\mathbb{N}\rangle$:= $\{(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : n_{k+1} > n_k$ für alle $k \in \mathbb{N}\}$, Menge der streng monoton wachsenden Folgen natürlicher Zahlen,

$\langle x\rangle$:= $\{\alpha \in X'^{\mathbb{N}} : \alpha_k(T^k x) = \|T^k x\|$ mit $\|\alpha_k\| = 1$ falls $T^k x \neq 0$, $\alpha_k = 0$ falls $T^k x = 0\}$, $x \in X$,

Λ := $\{(x, (n_k)_{k\in\mathbb{N}}, \alpha, l) \in X \times \langle\mathbb{N}\rangle \times X'^{\mathbb{N}} \times \mathbb{C}^{(X'^{\mathbb{N}})} : \alpha \in \langle x\rangle, l \in \mathfrak{L}_\eta$, wobei $\eta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ durch die Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vermöge $\eta_k := \varrho_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, festgelegt ist.$\}$

Da X, T und ϱ teil unserer Voraussetzungen sind, sollen diese Bezeichner nicht in die Notationen mit aufgenommen werden. Aufgrund des Satzes von Hahn-Banach ist die Menge $\langle x\rangle$ nicht leer.

Bevor wir fortfahren, wollen wir die Elemente von Λ, die 4-Tupel $(x, (n_k)_{k\in\mathbb{N}}, \alpha, l)$, interpretieren. Frei ist man zunächst in der Wahl von $x \in X$ und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ als Folge streng monoton wachsender, natürlicher Zahlen. $\alpha \in X'^{\mathbb{N}}$ wird durch x und T gemäß der Definition von $\langle x\rangle$ eingeschränkt; α ist nicht eindeutig bestimmt. Schließlich hängt l von $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und ϱ ab und ist von der Form $l = \mathrm{Lim}$ im Sinne der Ausführen im Abschnitt A.

Mit diesen Vorbereitungen können wir formal einen Intertwining-Operatoren konstruieren, der zwar noch trivial sein mag, aus dem heraus wir aber schon bald auch einen nicht-trivialen herleiten können. Wir betrachten hierzu ein $\widehat{a} \in \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ und ein 4-Tupel $(x, (n_k)_{k\in\mathbb{N}}, \alpha, \mathrm{Lim}) \in \Lambda$ und setzen $\eta = (\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\eta_k = \varrho_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$. Es gilt mit den Komponenten dieses Tupels für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\|(\Phi P_{n_k}(\widehat{a}))\alpha_{n_k}\| &\leq \|\Phi P_{n_k}(\widehat{a})\|\,\|\alpha_{n_k}\| \leq \|\Phi\|\,\|P_{n_k}(\widehat{a})\|\,\|\alpha_{n_k}\| \\ &\leq \|\Phi\|\varrho_{n_k}\|\widehat{a}\|_\varrho\|\alpha_{n_k}\|\end{aligned}$$

und damit

$$\frac{\|(\Phi P_{n_k}(\widehat{a}))\alpha_{n_k}\|}{\varrho_{n_k}} \leq \|\Phi\| \underbrace{\|\alpha_{n_k}\|}_{=0 \text{ oder } =1} \|\widehat{a}\|_\varrho \leq \|\Phi\|\,\|\widehat{a}\|_\varrho. \tag{22}$$

Da also

$$((\Phi P_{n_k}(\widehat{a}))\alpha_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty_\eta(\mathbb{N}, X')$$

ist, ist die nachfolgende Abbildung für $(x, (n_k)_{k\in\mathbb{N}}, \alpha, \mathrm{Lim}\,) \in \Lambda$ wohldefiniert:

$$j(x, (n_k)_{k\in\mathbb{N}}, \alpha, \mathrm{Lim}\,) : \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \to X', \qquad \widehat{a} \mapsto \ \mathrm{Lim}\,(((\Phi P_{n_k}(\widehat{a}))\alpha_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}). \tag{23}$$

Wir schicken dem Nachweis, daß $j(\lambda)$ für $\lambda \in \Lambda$ ein diskreter Intertwining-Operator ist, die Bemerkung voraus, daß selbst die Mächtigkeit der Menge Λ nicht garantiert, daß einer der $j(\lambda)$ nicht verschwindet. Tatsächlich besteht die entscheidende Aufgabe darin, unter geeigneten Voraussetzungen ein passendes $x_0 \in X$ und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \langle\mathbb{N}\rangle$ zu finden, auf daß für ein $(x_0, (n_k)_{k\in\mathbb{N}}, ...) \in \Lambda$ der Operator $j(x_0, (n_k)_{k\in\mathbb{N}}, ...)$ von 0 verschieden ist.

8.1 Satz: *Sei $\mathcal{T}$ eine diskrete Operatorhalbgruppe mit Erzeuger T und sei ϱ ein Beurling-Domar-Gewicht auf $\mathbb{Z}$. Für T gelte $\|T^n\| = O(\varrho_n)$ für $n \to \infty$. Dann ist für jedes $(x, (n_k)_{k\in\mathbb{N}}, \alpha, \mathrm{Lim}\,) \in \Lambda$ der gemäß (23) definierte Operator $j = j(x, (n_k)_{k\in\mathbb{N}}, \alpha, \mathrm{Lim}\,)$: $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \to X'$ eine beschränkte lineare Abbildung mit*

$$j \circ M = T' \circ j. \tag{24}$$

$\triangleright$ **Beweis :** Die Linearität von j ist klar. Aus (22) und der Definition von j folgt, daß j stetig ist mit $\|j\| \le \|\Phi\|$. Es bleibt nur noch (24) nachzuweisen. Wir bemerken zuerst, daß wegen $\sum_{i\in\mathbb{Z}} |a_i|\varrho_i < +\infty$ gilt: $a_{-k-1} \to 0$ für $k \to \infty$, und daß damit auch $\frac{|a_{-n_k-1}|}{\varrho_{n_k}}\|\alpha_{n_k}\| \to 0$ für $k \to \infty$ ($\varrho_{n_k} \ge 1$, $\|\alpha_{n_k}\| \le 1$). Da Lim als Fortsetzung von $\lim : c_\eta(\mathbb{N}, X') \to \mathbb{C}$ definiert ist, ergibt sich also

$$\mathrm{Lim}\,((a_{-n_k-1}\alpha_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}) = 0.$$

Hiermit erhält man den gewünschten Zusammenhang (24):

$$\begin{aligned} j(M\widehat{a}) &= \mathrm{Lim}\,(((\Phi P_{n_k}(M\widehat{a}))\alpha_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}) \\ &\overset{(21)}{=} \mathrm{Lim}\,((T'(\Phi P_{n_k}(\widehat{a}))\alpha_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} + (a_{-n_k-1}\alpha_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}) \\ &= T'\mathrm{Lim}\,(((\Phi P_{n_k}(\widehat{a}))\alpha_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}) \\ &= T'j(\widehat{a}) \end{aligned}$$

$\triangleleft$

C. Ein Existenzsatz für diskrete Intertwining-Operatoren

8.2 Satz: *Sei $\mathcal{T}$ eine diskrete Operatorhalbgruppe mit Erzeuger $T \in \mathcal{L}(X)$ und sei ϱ ein Beurling-Domar-Gewicht auf $\mathbb{Z}$. Für T gelte $\|T^n\| = O(\varrho_n)$ für $n \to \infty$ und $\left(\frac{T^n}{\varrho_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere in der starken Operatortopologie <u>nicht</u> gegen 0. Dann existiert ein nicht-trivialer Intertwining-Operator $j : \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \to X'$ für $\mathcal{T}$ und ϱ.*

▷ **Beweis :** Wenn $\left(\frac{T^n}{\varrho_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in der starken Operatortopologie nicht gegen 0 konvergiert, existieren $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$ und eine monoton wachsende Folge $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit

$$\frac{\|T^{m_k}x_0\|}{\varrho_{m_k}} \geq \varepsilon.$$

Da $\dfrac{\|T^{m_k}x_0\|}{\varrho_{m_k}} \leq \dfrac{\|T^{m_k}\|\,\|x_0\|}{\varrho_{m_k}} \leq \dfrac{K\varrho_{m_k}\|x_0\|}{\varrho_{m_k}} \leq K\|x_0\|$ für alle k mit einer geeigneten Konstante $K > 0$ gilt, existiert wegen

$$\varepsilon \leq \frac{\|T^{m_k}x_0\|}{\varrho_{m_k}} \leq K\|x_0\|$$

eine Teilfolge $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$, für die $\dfrac{\|T^{n_i}x_0\|}{\varrho_{n_i}}$ für $i \to \infty$ konvergiert mit

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\|T^{n_i}x_0\|}{\varrho_{n_i}} \geq \varepsilon.$$

Einen Intertwining-Operator $j : \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \to X'$ können wir nun gemäß Abschnitt B erklären durch $j = j(x_0, (n_i)_{i\in\mathbb{N}}, \alpha, \mathrm{Lim})$ (Proposition 8.1). Wir müssen nur noch zeigen, daß j nicht verschwindet. Dies folgt aus

$$\begin{aligned} j(1)x_0 &= \mathrm{Lim}\,(((\Phi P_{n_k}(1))\alpha_{n_k})_{k\in\mathbb{N}})x_0 = \mathrm{Lim}\,((T'^{n_k}\alpha_{n_k})_{k\in\mathbb{N}})x_0 = \lim_{k\to\infty} \frac{\|T^{n_k}x_0\|}{\varrho_{n_k}} \\ &\geq \varepsilon. \end{aligned}$$

◁

§9
Asymptotisches Verhalten diskreter Operatorhalbgruppen

9.1 Satz: *Sei $\mathcal{T}$ eine diskrete Operatorhalbgruppe mit Erzeuger $T \in \mathcal{L}(X)$ und sei ϱ ein Beurling-Domar-Gewicht auf $\mathbb{Z}$. Für T gelte $\|T^n\| = O(\varrho_n)$ für $n \to \infty$. Sei $\sigma(T) \cap \Gamma$ abzählbar und für alle $\lambda \in \sigma(T) \cap \Gamma$ gelte $X'_{T'}(\{\lambda\}) = \{0\}$. Dann konvergiert $\left(\dfrac{T^n}{\varrho_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in der starken Operatortopologie gegen 0.*

▷ **Beweis :** Würde $\left(\dfrac{T^n}{\varrho_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht in der starken Operatortopologie gegen 0 konvergieren, so existierte nach Satz 8.2 ein nicht-trivialer Intertwining-Operator $j : \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \to X'$, was mit den gemachten Voraussetzungen nach Satz 7.9 nicht möglich ist. ◁

Wir führen die Anwendung von Satz 9.1 an einem einfachen Beispiel vor.

9.2 Beispiel: Sei $X = X' = \mathbb{C}$ und $T = T' : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $Tx = ax$ für ein $a \in \mathbb{C}$ und alle $x \in \mathbb{C}$. T erzeugt eine diskrete Operatorhalbgruppe $\mathcal{T}$ mit $T(n)x = a^n x$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{C}$. Da wir uns in endlicher Dimension befinden, ist $\sigma(T) \cap \Gamma$ endlich, insbesondere also abzählbar. Damit $\|T^n\| = O(\varrho_n)$ für $n \to \infty$ für ein Beurling-Domar-Gewicht auf $\mathbb{Z}$ gewährleistet ist, muß $|a| \leq 1$ gefordert werden; in diesem Fall kann $\varrho \equiv 1$ genommen werden.

Ist $|a| < 1$ und $\lambda \in \Gamma$ beliebig, so ist

$$\mathbb{C}_{T'}(\{\lambda\}) = \{x \in \mathbb{C} : \text{es existiert } f : \mathbb{C}\backslash\{\lambda\} \to \mathbb{C} : (z-a)f(z) = x \text{ für alle } z \in \mathbb{C}\backslash\{\lambda\}\}.$$

Für $z = a \neq \lambda$ ergibt sich $0 = (z-z)f(z) = x$ für alle $x \in \mathbb{C}_{T'}(\{\lambda\})$, d.h. $\mathbb{C}_{T'}(\{\lambda\}) = \{0\}$. Wie erwartet konvergiert $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Satz 9.1 in der starken Operatortopologie gegen 0.

Für $|a| = 1$ und $\lambda = a \in \Gamma$ ergibt sich $\mathbb{C}_{T'}(\{a\}) = \mathbb{C}$ und Satz 9.1 macht keine Aussage über das Konvergenzverhalten von $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der starken Operatortopologie. Man sieht allerdings leicht, daß $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der starken Operatortopologie nicht gegen 0 konvergiert.

Unseres Wissens nach ist Satz 9.1 über das asymptotische Verhalten diskreter Operatorhalbgruppen neu, die Idee jedoch, dieses Verhalten aus Eigenschaften des Spektrums abzuleiten, nicht. Arendt und Batty sowie Lyubich und Phong haben unabhängig voneinander einen ähnlichen Satz formuliert:

9.3 Satz: (Arendt, Batty [1], Lyubich, Phong [20])

Sei T ein potenzbeschränkter linearer Operator auf dem Banachraum X, und sei $\sigma(T) \cap \Gamma$ abzählbar sowie $\sigma_p(T') \cap \Gamma$ leer. Dann konvergiert $(T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der starken Operatortopologie für $n \to \infty$ gegen 0.

Die Potenzbeschränktheit des Operators T, $\|T^n\| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und eine Konstante $C > 0$, wird dabei von den Voraussetzungen unseres Satzes 9.1 erfaßt ($\varrho \equiv C$). Der Unterschied liegt in der Voraussetzung $\sigma_p(T') \cap \Gamma = \emptyset$, die wir ersetzt haben durch $X'_{T'}(\{\lambda\}) = \{0\}$ für $\lambda \in \sigma(T) \cap \Gamma$. Letztere Bedingung ist etwas stärker, erlaubt aber mehr als nur potenzbeschränkte Opertoren zuzulassen.

Eine Verallgemeinerung von Satz 9.3 wurde von Phong formuliert:

9.4 Satz: (Phong [19])

Sei T ein beschränkter linearer Operator auf dem Banachraum X. Für ein $k \in \mathbb{N}$ gelte $\|T^n\| \leq \varrho_n$ für eine Gewichtsfunktion ϱ auf $\mathbb{N}$ mit $\widetilde{\varrho}_n := \limsup\limits_{m\to\infty} \dfrac{\varrho_{n+m}}{\varrho_m} = O(n^k)$ für $n \to \infty$. Ist dann $\sigma(T) \cap \Gamma$ abzählbar und $\sigma_p(T') \cap \Gamma$ leer, dann konvergiert $\dfrac{T^n}{\varrho_n}$ in der starken Operatortopologie für $n \to \infty$ gegen 0.

Der Unterschied zu unserem Ergebnis liegt im zugelassenen Gewicht. Satz 9.4 enthält den Spezialfall eines höchstens polynomiell wachsenden Gewichts: Ist $\varrho_n = O(n^k)$ für $n \to \infty$, $k \geq 0$, so ist $\widetilde{\varrho}_n = O(1)$ für $n \to \infty$, und es läßt sich folgendes Korollar formulieren:

9.5 Korollar: *Ist T ein beschränkter linearer Operator auf dem Banachraum X mit $\|T^n\| \leq \varrho_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ϱ ein Gewicht auf $\mathbb{N}$ mit $\varrho_n = O(n^k)$, $k \geq 0$, $\sigma(T)\cap\Gamma$ abzählbar und $\sigma_p(T')\cap\Gamma$ leer, so konvergiert $\dfrac{T^n}{\varrho_n}$ in der starken Operatortopologie für $n \to \infty$ gegen 0.*

In dieser Form wird die Ähnlichkeit zu Satz 9.1 deutlich: wir lassen ein allgemeineres Gewicht zu, müssen dafür aber „mehr" als $\sigma_p(T') \cap \Gamma = \emptyset$ fordern, um dasselbe Ergebnis zu erlangen.

Ein weiterer Unterschied zwischen Satz 9.1 und Satz 9.4 besteht in der Beweismethode dieser beiden Aussagen. Während wir die Operatorhalbgruppe vermöge Intertwining-Operatoren mit Beurling-Algebren in Verbindung bringen, hängt der Beweis von Phong an einem Lemma, in dem ein Banachraum E, ein stetiger Homomorphismus $\pi : X \to E$ mit dichtem Bild und eine neue Operatorhalbgruppe $V : [0, +\infty) \to \mathcal{L}(E)$ konstruiert werden, die gewissen Bedingungen genügen. Details findet man in der bereits zitierten Arbeit von Phong.

Die oben benutzte Idee, Intertwining-Operatoren mit Hilfe von verallgemeinerten Limiten zu definieren, wurde in einer Arbeit von Eschmeier[10] benutzt, um invariante Teilräume für geeignete Systeme vertauschender Operatoren auf Hilberträumen zu konstruieren.

Zum Abschluß dieses Paragraphen zeigen wir noch, wie man Korollar 9.5 aus dem Resultat von Phong auch mit unserer Beweismethode gewinnen kann. Hierzu definieren wir die Abbildung

$$\Phi : \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \to \mathcal{L}(\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)/I(j)), \qquad \widehat{a} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \widetilde{M}^n,$$

wobei $\widetilde{M}$ die in §7 auf Seite 46 definierte Abbildung ist[5]. Wegen $\|\widetilde{M}^n\| \leq \|M^n\| \leq \varrho_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ zeigt man wie in §8, Abschnitt B, daß Φ wohldefiniert und stetig linear ist mit $\Phi(1_\Gamma) = \mathrm{id}_{\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)/I(j)}$ und $\Phi(\widehat{e}) = \widetilde{M}$, falls 1_Γ die konstante Funktion mit dem Wert 1 und $\widehat{e} : \Gamma \to \mathbb{C}$ die Identität auf Γ bezeichnen. Φ ist sogar ein Algebrenhomomorphismus: Für alle $\widehat{a}, \widehat{b} \in \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ gilt

$$\begin{aligned} \Phi(\widehat{a}\widehat{b}) &= \Phi(\widehat{a * b}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{n-k} b_k \widetilde{M}^n \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k \widetilde{M}^k \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{n-k} \widetilde{M}^{n-k} = \Phi(\widehat{a})\Phi(\widehat{b}). \end{aligned}$$

9.6 Ist $k \in \mathbb{N}$ und ϱ ein Gewicht vom Typ $\mathfrak{BD}$ auf $\mathbb{Z}$ mit $\varrho_n = O(|n|^k)$ für $|n| \to \infty$, so ist $C^\infty(\Gamma) \subset \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$, wie wir nun zeigen werden.

Sei hierzu $f \in C^\infty(\Gamma)$, d.h. $f(e^{i\cdot}) \in C^\infty(\mathbb{R})$ eine 2π-periodische Funktion, und seien $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $g(t) := f(e^{it})$ und $a_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-int}\,dt$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Dann lassen sich die a_n für $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-int}\,dt\right| = \left|\frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} g'(t)e^{-int}\,dt\right| \\ &= \ldots = \left|\frac{1}{2\pi n^{k+2}}\int_{-\pi}^{\pi} g^{(k+2)}(t)e^{-int}\,dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{1}{|n|^{k+2}} \max_{t\in[-\pi,\pi]} \left|g^{(k+2)}(t)\right|. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich mit einer geeigneten Konstanten $K > 0$ die Ungleichungskette

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|\varrho_n \leq \frac{1}{2\pi} \max_{t\in[-\pi,\pi]} \left|g^{(k+2)}(t)\right| K \sum_{n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}} \frac{1}{|n|^{k+2}}|n|^k + |a_0|\varrho_0 < +\infty. \tag{25}$$

Da also $a \in \ell^1_\varrho(\mathbb{Z})$ und $f(e^{it}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{int}$ ist, folgt $f \in \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$.

[5]Ist M der Multiplikationsoperator mit der Identität auf $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$, so ist M^{-1} der Multiplikationsoperator mit der konjugierten Identität auf $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$. Für alle $\widehat{a} \in \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ ist dann $\widetilde{M}^{-1}[\widehat{a}] = [M^{-1}\widehat{a}]$.

Versehen wir $C^\infty(\mathbb{C})$ und $C^\infty(\Gamma)$ mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen und ihrer Ableitungen auf Kompakta in $\mathbb{C}$ bzw. Γ, so sind die Abbildungen $r : C^\infty(\mathbb{C}) \to C^\infty(\Gamma)$, $f \mapsto f|_\Gamma$ und $i : C^\infty(\Gamma) \to \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$, $\widehat{a} \mapsto \widehat{a}$ stetig linear. Für die erste der beiden Abbildungen ist das klar, und für die zweitgenannte folgt dies für $\widehat{a} \in C^\infty(\Gamma)$ mit $\widehat{a} \not\equiv 0$, ein geeignetes $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|\varrho_n \leq \sum\limits_{|n|\leq n_0} |a_n|\varrho_n + 1$ und geeigneten Konstanten $K, K' > 0$ aus

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|\varrho_n &\leq \frac{K}{2\pi}\left(\sum_{0<|n|\leq n_0} \frac{1}{|n|^2}\right) \max_{t\in[-\pi,\pi]} \left|\varphi(\widehat{a})^{(k+2)}(t)\right| + |a_0|\varrho_0 + 1 \\ &\leq K' \max_{t\in[-\pi,\pi]} \left|\varphi(\widehat{a})^{(n)}(t)\right|,\end{aligned}$$

wobei $K' \geq \frac{K}{2\pi}\left(\sum\limits_{0<|n|\leq n_0} \frac{1}{|n|^2}\right) + d$ ist mit $d \cdot \max\limits_{t\in[-\pi,\pi]} \left|\varphi(\widehat{a})^{(k+2)}(t)\right| \geq 1 + |a_0|\varrho_0$. (Man vergleiche mit (25).)

Aus diesen Überlegungen folgt, daß die Abbildung

$$\Psi : C^\infty(\mathbb{C}) \to \mathcal{L}(\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)/I(j)), \qquad \Psi = \Phi \circ i \circ r$$

ein stetiger Algebrenhomomorphismus ist mit $\Psi(1_\mathbb{C}) = \mathrm{id}_{\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)/I(j)}$ und $\Psi(\mathrm{id}_\mathbb{C}) = \widetilde{M}$, wobei $1_\mathbb{C}$ die Konstante Funktion mit dem Wert 1 und $\mathrm{id}_\mathbb{C}$ die Identität auf $\mathbb{C}$ ist.

Für $\lambda \in \Gamma$ betrachten wir die Abbildung

$$\Psi_\lambda : C^\infty(\mathbb{C}) \to \mathcal{L}(\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)/I(j)), \qquad f \mapsto \Psi(f \circ (1_\mathbb{C} - \mathrm{id}_\mathbb{C})).$$

Offensichtlich ist Ψ_λ ein stetiger Algebrenhomomorphismus mit $\Psi_\lambda(1_\mathbb{C}) = \mathrm{id}_{\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)/I(j)}$ und $\Psi_\lambda(\mathrm{id}_\mathbb{C}) = \lambda - \widetilde{M}$. Wir haben es bei dem Operator $\lambda - \widetilde{M}$ $(\lambda \in \Gamma)$ also vermöge Ψ_λ mit einem *verallgemeinerten skalaren Operator* im Sinne von Colojoara-Foias[5] zu tun. Wir zitieren:

9.7 *Ist Q ein quasinilpotenter*[6] *Operator, der zudem noch verallgemeinert skalar ist, so ist Q nilpotent.* (Colojoara-Foias[5], Lemma 4.3.5).

9.8 Satz: *Sei $k \in \mathbb{N}$ und ϱ ein Gewicht vom Typ $\mathfrak{BD}$ auf $\mathbb{Z}$ mit $\varrho_n = O(|n|^k)$ für $|n| \to \infty$. Sei $j : \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \to X'$ ein nicht-trivialer, diskreter Intertwining-Operator für die diskrete Operatorhalbgruppe $\mathcal{T}$. Für den Erzeuger T dieser Halbgruppe sei $\sigma(T) \cap \Gamma$ abzählbar. Dann ist $\sigma_p(T) \cap \Gamma \neq \emptyset$.*

▷ **Beweis :** Wir haben im Beweis von Satz 7.9 aus j einen nicht-trivialen Intertwining-Operator $\widetilde{\jmath}$ konstruiert mit $\operatorname{supp} \widetilde{\jmath} = \{\lambda\}$, wobei $\lambda \in \sigma(T) \cap \Gamma$ ein isolierter Punkt in $\sigma(T) \cap \Gamma$ ist. Nach Proposition 7.5 ist für $\widetilde{M}$ das Spektrum gegeben durch $\sigma\left(\widetilde{M}\right) = \{\lambda\}$. Dann ist aber $\lambda - \widetilde{M}$ quasinilpotent. Da $\lambda - \widetilde{M}$ nach unseren Vorüberlegungen verallgemeinert skalar ist, folgt aus Aussage 9.7, daß $\lambda - \widetilde{M}$ nilpotent ist; es existiert also ein $m \in \mathbb{N}$ mit $(\lambda - \widetilde{M})^m \equiv 0$. Für die in Proposition 7.7 definierte Abbildung $\widetilde{\jmath}$ ergibt sich somit

$$0 = \widetilde{\jmath}((\lambda - \widetilde{M})^m[\widehat{a}]) = (\lambda - T')^m \widetilde{\jmath}([\widehat{a}]) = (\lambda - T')^m j(\widehat{a})$$

für alle $\widehat{a} \in \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$. Da $j \not\equiv 0$ ist, muß daher $\lambda \in \sigma_p(T') \cap \Gamma$ sein. ◁

[6] Ein Operator Q heißt *quasinilpotent*, falls $\sigma(Q) = \{0\}$ ist, und *nilpotent*, falls ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $Q^n \equiv 0$.

$\triangleright$ **Beweis von Korollar 9.5:** Würde $\left(\dfrac{T^n}{\varrho_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht in der starken Operatortopologie gegen 0 konvergieren, so existierte nach Satz 8.2 ein nicht-trivialer Intertwining-Operator $j : \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) \to X'$, was mit den gemachten Voraussetzungen nach Satz 9.8 nicht möglich ist. $\triangleleft$

Anmerkung: Man beachte, daß der Beweis von Korollar 9.5 bis auf das Zitat von Satz 9.8 anstelle von Satz 7.9 mit dem Beweis von Satz 9.1 übereinstimmt.

Kapitel III
Stark-stetige Operatorhalbgruppen

Zum Inhalt dieses Kapitels

Wir wollen in Kaptel IV das asymptotische Verhalten stark-stetiger Operatorhalbgruppen untersuchen. Um eine möglichst vollständige Darstellung der Ergebnisse zu erhalten, beschäftigen wir uns in diesem Kapitel mit den grundlegenden Eigenschaften solcher Halbgruppen; wir führen sie in §11 ein. Da man ohne unbeschränkte Operatoren und vektorwertige Integration die Theorie stark-stetiger Operatorhalbgruppen nicht zufriedenstellend darstellen kann, haben wir in §10 diesbezüglich die wichtigsten Ergebnisse zusammengetragen. In §12 schließlich besprechen wir Beispiele, die im nächsten Kapitel von Bedeutung sein werden. Insbesondere findet man ein wichtiges Beispiel einer stark-stetigen Operatorgruppe.

§10
Unbeschränkte Operatoren und vektorwertige Integration über $\mathbb{R}$

A. Unbeschränkte Operatoren

Bei der Untersuchnung stark-stetiger Operatorhalbgruppen treten unbeschränkte Operatoren auf. Sind X und Y Banachräume, so nennt man bekanntlich eine Abbildung $A : \mathfrak{D}(A) \to Y$, die auf dem linearen Teilraum $\mathfrak{D}(A)$ von X definiert und dort linear ist, einen *unbeschränkten Operator*. $\mathfrak{D}(A)$ heißt der *Definitionsbereich* von A. Der Kern eines unbeschränkten Operators A wird erklärt durch

$$\ker A := \{x \in \mathfrak{D}(A) : Ax = 0\}.$$

Unter den unbeschränkten Operatoren spielen diejenigen, deren Graph, d.h. die Menge $\{(x, Ax) : x \in \mathfrak{D}(A)\}$, abgeschlossen bzgl. der Produkttopologie auf $X \times Y$ ist, eine wichtige Rolle. Man nennt sie *abgeschlossene Operatoren* und faßt sie gewöhnlich zur Menge $\mathcal{C}(X,Y)$ oder, falls $Y = X$, $\mathcal{C}(X)$ zusammen. Die abgeschlossenen Operatoren zeichnen sich dadurch aus, daß viele der Aussagen, die man für beschränkte Operatoren kennt, zum Teil auch noch für diese Klasse gültig sind.

Gibt es für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ und einen abgeschlossenen Operator $A : \mathfrak{D}(A) \subset X \to X$ eine Abbildung $R(\lambda, A) \in \mathcal{L}(X)$ mit

$$R(\lambda, A)(\lambda - A) = \mathrm{id}_{\mathfrak{D}(A)} \quad \text{und} \quad (\lambda - A)R(\lambda, A) = \mathrm{id}_X,$$

so sagt man, $\lambda - A$ besitze eine beschränkte Inverse. Dabei ist $\lambda - A$ abgeschlossen mit $\mathfrak{D}(\lambda - A) = \mathfrak{D}(A)$ und $R(\lambda, A)(\lambda - A)$ unbeschränkt mit $\mathfrak{D}(R(\lambda, A)(\lambda - A)) = \mathfrak{D}(\lambda - A)$. Die Menge

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A \text{ besitzt eine beschränkte Inverse}\}$$

heißt die *Resolventenmenge* von A. Die Abbildung $R(\cdot, A) : \rho(A) \to \mathcal{L}(X)$ wird die *Resolvente* genannt. Das *Spektrum* von A ist die Menge

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A).$$

Im Gegensatz zu beschränkten Operatoren muß das Spektrum $\sigma(A)$ eines Operators $A \in \mathcal{C}(X)$ nicht kompakt sein. Für abgeschlossene Operatoren $A : \mathfrak{D}(A) \subset X \to X$ läßt sich jedoch zeigen, daß das Spektrum $\sigma(A)$ abgeschlossen ist. In diesem Fall ist $\rho(A)$ offen und $R(\cdot, A)$ analytisch auf $\rho(A)$ (Yosida[25], Chapter VIII.2, Theorem 1).

Besitzt ein $A \in \mathcal{C}(X)$ dichten Definitionsbereich, $\overline{\mathfrak{D}(A)} = X$, so läßt sich ein *adjungierter Operator* A' erklären. Man definiert $\mathfrak{D}(A')$ als Teilmenge von X' durch

$\alpha \in \mathfrak{D}(A') \quad :\Leftrightarrow \quad$ das lineare Funktional $\alpha \circ A : \mathfrak{D}(A) \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \alpha(Ax)$ läßt sich zu einem beschränkten, linearen Funktional $\overline{\alpha \circ A}$ auf X fortsetzen.

Man beachte, daß diese Fortsetzung eindeutig bestimmt ist. Offensichtlich ist $\mathfrak{D}(A')$ ein linearer Teilraum von X'. Man definiert $A' : \mathfrak{D}(A') \to X'$ durch

$$A'\alpha := \overline{\alpha \circ A}.$$

Der Operator A' ist seinerseits wieder abgeschlossen; für sein Spektrum $\sigma(A')$ gilt:

$$\sigma(A') = \sigma(A)$$

(Goldberg[11], Corollary II.5.3). Man rechnet leicht $R(\lambda, A') = R(\lambda, A)'$ für $\lambda \in \rho(A)$ nach.

Anmerkung: Wir haben in unseren Ausführungen lediglich die Spektraltheorie abgeschlossener Operatoren angesprochen. Für die Spektraltheorie beliebiger unbeschränkter Operatoren verweisen wir auf Yosida[25], Chapter VIII.

B. Vektorwertige Integration über $\mathbb{R}$

Für die Analyse von Operatorhalbgruppen ist die vektorwertige Integration über $\mathbb{R}$ ein wichtiges Hilfsmittel. In diesem Paragraphen geben wir deshalb einen kurzen Abriß dieser Theorie. Wir orientieren uns dabei an Hille-Phillips[9] und Dunford-Schwartz[13], die man für die Beweise der hier zitierten Ergebnisse und gegebenenfalls für weiterreichende Ergebnisse zu Rate ziehe.

Im folgenden sei X ein beliebiger Banachraum und λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$.

Man nennt eine Funktion $f : \mathbb{R} \to X$ eine *(X-wertige) Elementarfunktion*, wenn f nur endlich viele Werte $x_1, ..., x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, annimmt, und wenn für jeden dieser Werte $f^{-1}(\{x_i\})$ λ-meßbar ist. Eine solche Elementarfunktion f wird *einfach* genannt, wenn für die endlich vielen Funktionswerte $x_1, ..., x_n \in X$ mit Ausnahme der 0 gilt: $\lambda(f^{-1}(\{x_i\})) < +\infty$. Zu einer einfachen Elementarfunktion f erklärt man ein Element $S(f)$ in X durch

$$S(f) := \sum_{x \in f(\mathbb{R})} x\lambda(f^{-1}(\{x\}))$$

(die Summe ist endlich). Hierbei sei $0 \cdot \infty = 0$. Offensichtlich gilt

$$\|S(f)\| \leq \sum_{x \in f(\mathbb{R})} \|x\|\lambda(f^{-1}(\{x\})),$$

und da $\|f(\cdot)\|$ eine $\mathbb{R}$-wertige Elementarfunktion im Sinne der klassischen Theorie ist, folgt

$$\|S(f)\| \leq \int_{\mathbb{R}} \|f(\cdot)\| \, d\lambda,$$

wobei rechts das Lebesgue-Integral der (offenbar λ-meßbaren und integrierbaren) Funktion $\|f(\cdot)\|$ steht.

Die X-wertigen Elementarfunktionen und X-wertigen einfachen Elementarfunktionen bilden die Grundbausteine dessen, was man X-wertige λ-meßbare und X-wertige integrierbare Funktionen nennt.

10.1 Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to X$ nennt man *λ-meßbar*, wenn es eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von X-wertiger Elementarfunktionen gibt, die fast überall gegen f konvergiert[1].

Eine unmittelbare Folgerung aus 10.1 ist, daß eine λ-meßbare X-wertige Funktion f wesentlich separables Bild in X hat, d.h. daß es eine Nullmenge N in $\mathbb{R}$ gibt, so daß $f(\mathbb{R} \backslash N)$ separabel[2] ist. Genauer kann man folgende Aussage machen:

10.2 *Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to X$ sind äquivalent:*

a) *f λ-meßbar*

b) *i) es existiert eine Nullmenge N in $\mathbb{R}$ mit $f(\mathbb{R} \backslash N)$ separabel (d.h. f ist wesentlich separabel)*

ii) zu jeder offenen Menge G in X existiert eine λ-meßbare Menge M_G in $\mathbb{R}$ mit $f^{-1}(G) \backslash N = M_G \backslash N$ (d.h. $f^{-1}(G)$ ist bis auf eine Nullmenge λ-meßbar für offenes $G \subset X$)

---

[1] „Fast überall" heißt wie üblich, daß es eine λ-Nullmenge N in $\mathbb{R}$ gibt, so daß für alle $s \in \mathbb{R} \backslash N$ gilt: $f_n(s) \to f(s)$ für $n \to \infty$.

[2] separabel = besitzt abzählbare, dichte Teilmenge

10.3 Für eine λ-meßbare Funktion $f : \mathbb{R} \to X$ gilt weiter, daß auch $\|f(\cdot)\|$ (im Sinne einer Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) λ-meßbar ist. Man muß nur feststellen, daß $\|f_n(\cdot)\|$ für eine Elementarfunktion $f_n : \mathbb{R} \to X$ λ-meßbar ist, und daß im Falle $f_n \to f$ fast überall für $n \to \infty$ auch $\|f_n(\cdot)\| \to \|f(\cdot)\|$ fast überall für $n \to \infty$ gilt.

Integrierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \to X$ definiert man folgendermaßen:

10.4 Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to X$ nennt man *integrierbar*, wenn es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einfacher X-wertiger Elementarfunktionen gibt, die punktweise fast überall gegen f konvergiert und für die

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \|f - f_n\| \, d\lambda = 0 \tag{26}$$

gilt. Das *Integral* einer integrierbaren Funktion f ist erklärt durch

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda := \lim_{n\to\infty} S(f_n). \tag{27}$$

Mit 10.3 zeigt man, daß (26) ein wohldefinierter Ausdruck ist; $(S(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in X, (27) macht deshalb Sinn.

Offensichtlich sind die Elementarfunktionen im Sinne von 10.1 λ-meßbar und die einfachen Elementarfunktionen im Sinne von 10.4 integrierbar. Es gilt für eine einfache Elementarfunktion f:

$$S(f) = \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda.$$

Damit schreibt sich (27) auch in der Form

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda.$$

Ein nützliches Kriterium für die Integrierbarkeit einer Funktion $f : \mathbb{R} \to X$ wird gegeben durch

10.5 *Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to X$ ist genau dann integrierbar, wenn f λ-meßbar und $\int_{\mathbb{R}} \|f\| \, d\lambda < +\infty$ ist.*

Eine Abschätzung für die Norm des Integrals einer integrierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to X$ wird gegeben durch

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda \right\| \leq \int_{\mathbb{R}} \|f\| \, d\lambda.$$

Erwartungsgemäß bilden die integrierbaren X-wertigen Funktionen einen Vektorraum, auf dem das Integral eine lineare Abbildung ist.

10.6 Sind $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und $f : \mathbb{R} \to X$ zwei λ-meßbare Funktionen, so ist auch das punktweise Produkt gf λ-meßbar. Ist eine der beiden Funktionen g oder f integrierbar, während die andere immerhin noch beschränkt und λ-meßbar ist, so ist auch gf integrierbar.

Insbesondere für eine λ-meßbare Menge $E \subset \mathbb{R}$ mit $\lambda(E) < +\infty$ und eine auf E beschränkte, λ-meßbare Funktion f macht der Ausdruck

$$\int_E f \, d\lambda := \int_{\mathbb{R}} \chi_E f \, d\lambda$$

Sinn, wo $\chi_E : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die charakteristische Funktion von E ist.

Als Beispiel λ-meßbarer Funktionen $f : \mathbb{R} \to X$ kann man die stetigen nennen. Für offenes $G \subset X$ ist $f^{-1}(G)$ offen und damit λ-meßbar, und da $\mathbb{R}$ separabel ist und f stetig, ist $f(\mathbb{R})$ separabel. Das Kriterium 10.2 impliziert dann die λ-Meßbarkeit. Da stetige Funktionen auf kompakten Intervallen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) beschränkt sind und $\lambda([a, b]) = b - a < +\infty$ ist, steht

$$\int_a^b f \, d\lambda$$

wegen Aussage 10.5 für ein wohlbestimmtes Element in X.

Ist $A \in \mathcal{C}(X, Y)$ und $f : \mathbb{R} \to X$ integrierbar mit $f(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{D}(A)$, so läßt sich über $A \circ f : \mathbb{R} \to Y$ folgende Aussage machen:

10.7 *Sei $A \in \mathcal{C}(X, Y)$ mit Definitionsbereich $\mathfrak{D}(A)$ und sei $f : \mathbb{R} \to X$ eine Funktion mit $f(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{D}(A)$. Sind $f : \mathbb{R} \to X$ und $A \circ f : \mathbb{R} \to Y$ integrierbar, so gilt*

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda \in \mathfrak{D}(A) \quad \textit{und} \quad \int_{\mathbb{R}} A \circ f \, d\lambda = A \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda.$$

Insbesondere für $Y = \mathbb{C}$ und $A \in X'$ wird uns 10.7 im nächsten Paragraphen begegnen.

Abschließend halten wir fest:

10.8 *Ist $f : \mathbb{R} \to X$ integrierbar, so gilt für fast alle $t \in \mathbb{R}$:*

$$f(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f \, d\lambda = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{t-h}^{t} f \, d\lambda. \tag{28}$$

Ist f stetig in $t \in \mathbb{R}$, so gilt (28) für dieses t auf jeden Fall.

§11
Stark-stetige Operatorhalbgruppen

In diesem Paragraphen definieren wir und zeigen wir Eigenschaften stark-stetiger Operatorhalbgruppen. Wie vorher stehe X für einen beliebigen Banachraum. Wir folgen Dunford-Schwartz[9].

11.1 Definition: *Eine Abbildung $\mathcal{T} : [0, +\infty) \to \mathcal{L}(X)$ heißt* stark-stetige Operatorhalbgruppe, *wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(i) $\mathcal{T}(0) = \mathrm{id}_X$,

(ii) $\mathcal{T}(s + t) = \mathcal{T}(s)\mathcal{T}(t) \qquad (s, t \geq 0)$,

(iii) für alle $x \in X$ ist $\mathcal{T}(\cdot)x : [0, +\infty) \to X$ stetig.

Die Bedingungen (i)-(iii) erinnern an die Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x)f(y)$ der Exponentialfunktion. Fordert man $f(0) = 1$ und die Stetigkeit von f, so wird sie bekanntlich für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ gelößt durch $f(x) = e^{\lambda x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (vgl. Lemma 3.6). Es stellt sich die Frage, ob in Analogie hierzu ein beschränkter linearer Operator A existiert, vermöge dem $\mathcal{T}$ sich darstellen läßt in der Form

$$\mathcal{T}(t) = e^{tA}, \tag{29}$$

wenn wir e^{tA} für $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^k A^k}{k!}$ schreiben (die Reihe konvergiert absolut). Leider ist die Stetigkeitsbedingung (iii) zu schwach, um dies zu erreichen. Man kann allerdings zeigen ([9], Theorem VIII.1.2), daß im Falle der Stetigkeit von $\mathcal{T} : [0, +\infty) \to \mathcal{L}(X)$ tatsächlich ein solcher Operator $A \in \mathcal{L}(X)$ existiert.

Da wir nun aber mit Bedingung (iii) weniger vorausgesetzt haben, können wir auch nur weniger erwarten. Dieser Paragraph ist aus diesem Grund der Aufgabe gewidmet, zu zeigen, daß immerhin noch ein abgeschlossener Operator A auf X mit dichtem Definitionsbereich $\mathfrak{D}(A)$ existiert, so daß $\mathcal{T}$ eine im Vergleich zu (29) zumindest ähnlich Darstellung besitzt.

Wir wollen mit einer Aussage über das asymptotische Verhalten von $\|\mathcal{T}(t)\|$ für $t \to \infty$ beginnen. Nachfolgendes Lemma bereitet diese vor.

11.2 Lemma: *Ist ω eine auf $[0, +\infty)$ reellwertige, subadditive Funktion, die auf jedem kompakten Intervall beschränkt ist, und definiert man*

$$\omega_0 := \inf_{t>0} \frac{\omega(t)}{t} \in [-\infty, +\infty),$$

so ist

$$\omega_0 = \lim_{t\to\infty} \frac{\omega(t)}{t}.$$

▷ **Beweis :** Es ist klar, daß ω_0 in $[-\infty, +\infty)$ liegt und daß zu $\delta > \omega_0$ ein t_0 in $(0, +\infty)$ existiert mit $\dfrac{\omega(t_0)}{t_0} < \delta$. Jedes beliebige $t \in [t_0, +\infty)$ schreibt sich in der Form $t = n(t)t_0 + r$ mit $n(t) \in \mathbb{N}$ und $r \in [0, t_0)$ eindeutig. Es gilt dann

$$\frac{\omega(t)}{t} \leq \frac{\omega(n(t)t_0)}{t} + \frac{\omega(r)}{t} \leq \frac{n(t)\omega(t_0)}{t} + \frac{\omega(r)}{t} = \frac{\omega(t_0)}{t_0 + \frac{r}{n(t)}} + \frac{\omega(r)}{t}.$$

Daraus ergibt sich

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\omega(t)}{t} \leq \frac{\omega(t_0)}{t_0} < \delta,$$

wobei die Beschränktheit von ω auf kompakten Intervallen, hier $[0, t_0]$, ausgenutzt wurde.

Da $\delta > \omega_0$ beliebig war, folgt daraus $\limsup\limits_{t\to\infty} \dfrac{\omega(t)}{t} \leq \omega_0$. Wegen $\omega_0 = \inf\limits_{t>0} \dfrac{\omega(t)}{t}$ ist aber auch $\omega_0 \leq \liminf\limits_{t\to\infty} \dfrac{\omega(t)}{t}$ und deshalb existiert $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\omega(t)}{t}$ mit $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\omega(t)}{t} = \omega_0$. ◁

11.3 Proposition: *Für eine stark-stetige Operatorhalbgruppe $\mathcal{T}$ gilt:*

a) $\omega_0 := \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\log \|\mathcal{T}(t)\|}{t}$ *existiert*

b) für alle $\delta > \omega_0$ existiert eine Konstante M_δ mit $\|\mathcal{T}(t)\| \leq M_\delta e^{\delta t}$ für alle $t \geq 0$.

▷ **Beweis :** Wir dürfen annehmen, daß $\mathcal{T}(t) \neq 0$ für alle $t \geq 0$ ist. Da $\omega(t) = \log \|\mathcal{T}(t)\|$ reellwertig und subadditiv ist, folgt a) aus Lemma 11.2. Wegen $\delta > \omega_0$ existiert $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $\dfrac{\log \|\mathcal{T}(t)\|}{t} \leq \delta$ für alle $t \geq t_0$. Wir bemühen den Satz über die gleichmäßigen Beschränktheit. Für alle $x \in X$ ist nämlich $\|\mathcal{T}(\cdot)x\| : [0, t_0] \to \mathbb{R}$ als stetige Funktion auf dem Kompaktum $[0, t_0]$ beschränkt, und damit auch $\|\mathcal{T}(\cdot)\|$. Hieraus folgt b). ◁

Für jedes $h > 0$ bezeichnen wir mit A_h den beschränkten linearen Operator

$$A_h : X \to X, \qquad A_h x := \frac{\mathcal{T}(h)x - x}{h},$$

und mit A den unbeschränkten linearen Operator $\mathfrak{D}(A) \to X$ mit

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(A) &:= \{x \in X : \lim_{h\to 0^+} A_h x \text{ existiert}\} \text{ und} \\ Ax &:= \lim_{h\to 0^+} A_h x. \end{aligned}$$

$\mathfrak{D}(A)$ ist offenbar ein linearer Teilraum von X, auf dem A linear ist.

11.4 Definition: *Ist $\mathcal{T}$ eine stark-stetige Operatorhalbgruppe, so nennen wir den zu $\mathcal{T}$ gehörenden und soeben definierten (i.a. unbeschränkten) Operator A den* infinitesimalen Erzeuger *der Halbgruppe.*

Es wird in der Folge darum gehen, nachzuweisen, daß A abgeschlossen ist mit dichtem Definitionsbereich $\mathfrak{D}(A)$. Hierzu ist das nachfolgende Lemma nützlich.

11.5 Lemma: *Seien $\mathcal{T}$, A und $\mathfrak{D}(A)$ wie oben eingeführt.*

a) Für alle $x \in \mathfrak{D}(A)$ und $t \geq 0$ ist $\mathcal{T}(t)x \in \mathfrak{D}(A)$ und

$$\frac{d}{dt}\mathcal{T}(t)x = A\mathcal{T}(t)x = \mathcal{T}(t)Ax.$$

b) Für alle $x \in \mathfrak{D}(A)$ und $0 \leq s < t < +\infty$ ist $\mathcal{T}(t)x - \mathcal{T}(s)x = \int_s^t \mathcal{T}(u)Ax\, du$.

▷ **Beweis :** Wir beginnen mit a). Für $h > 0$, $t \geq 0$ und $x \in X$ ist

$$\begin{aligned} A_h\mathcal{T}(t)x &= \frac{\mathcal{T}(h)\mathcal{T}(t)x - \mathcal{T}(t)x}{h} = \frac{\mathcal{T}(h+t)x - \mathcal{T}(t)x}{h} = \frac{\mathcal{T}(t)(\mathcal{T}(h)x - x)}{h} \\ &= \mathcal{T}(t)A_h x. \end{aligned}$$

Es folgt für $x \in \mathfrak{D}(A)$ und $t \geq 0$:

$$\lim_{h\to 0^+} A_h\mathcal{T}(t)x = \lim_{h\to 0^+} \mathcal{T}(t)A_h x = \mathcal{T}(t)Ax,$$

d.h. $\mathcal{T}(t)x \in \mathfrak{D}(A)$ und $A\mathcal{T}(t)x = \mathcal{T}(t)Ax$. Also haben wir

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\mathcal{T}(t+h)x - \mathcal{T}(t)x}{h} = \mathcal{T}(t)Ax \qquad \text{(rechtsseitige Differenzierbarkeit).}$$

Für $t > 0$, $0 < h < t$ und $x \in \mathfrak{D}(A)$ berechnet man

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{T}(t)x - \mathcal{T}(t-h)x}{h} &= \mathcal{T}(t-h)\frac{\mathcal{T}(h)x - x}{h} = \mathcal{T}(t-h)A_hx - \mathcal{T}(t-h)Ax + \mathcal{T}(t-h)Ax \\ &= \mathcal{T}(t-h)(A_hx - Ax) + \mathcal{T}(t-h)Ax. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\mathcal{T}(t-h)x - \mathcal{T}(t)x}{h} = \lim_{h\to 0^+} \mathcal{T}(t-h)(Ax - A_hx) - \mathcal{T}(t)Ax = -\mathcal{T}(t)Ax,$$

da $\mathcal{T}(t-h)$ für $0 < h < t$, wie bereits gesagt, beschränkt ist und $A_hx \to Ax$ für $h \to 0^+$. Es folgt

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\mathcal{T}(t+h)x - \mathcal{T}(t)x}{h} = \mathcal{T}(t)Ax.$$

Insgesamt erhält man also

$$\frac{d}{dt}\mathcal{T}(t)x = \mathcal{T}(t)Ax = A\mathcal{T}(t)x.$$

Wir wenden uns b) zu. Für $0 \leq s < t < +\infty$ und $\phi \in X'$ sind $\frac{d}{du}\mathcal{T}(\cdot)x = \mathcal{T}(\cdot)Ax$ und $\phi(\frac{d}{du}\mathcal{T}(\cdot)x) = \frac{d}{du}\phi(\mathcal{T}(\cdot)x)$ als stetige Funktionen auf dem Kompaktum $[s,t]$ integriebar (vgl. 10.5) und damit

$$\phi\left(\int_s^t \mathcal{T}(u)Ax\,du\right) = \int_s^t \frac{d}{du}\phi((\mathcal{T}(u)x)\,du = \phi(\mathcal{T}(t)x) - \phi(\mathcal{T}(s)x) = \phi(\mathcal{T}(t)x - \mathcal{T}(s)x)$$

(Aussage 10.7). Da letzteres für alle $\phi \in X'$ richtig ist, folgt b). $\triangleleft$

11.6 Satz: *Seien $\mathcal{T}$, A und $\mathfrak{D}(A)$ wie bisher. Dann liegt $\mathfrak{D}(A)$ dicht in X und A ist abgeschlossen.*

$\triangleright$ **Beweis :** Sei x ein beliebiges Element in X und seien $t, h > 0$. Es macht Sinn, den Ausdruck $\int_0^t \mathcal{T}(s)x\,ds$ zu betrachten (vgl. 10.6). Es gilt

$$\begin{aligned} A_h \int_0^t \mathcal{T}(s)x\,ds &= \frac{\mathcal{T}(h)\int_0^t \mathcal{T}(s)x\,ds - \int_0^t \mathcal{T}(s)x\,ds}{h} = \int_0^t \frac{\mathcal{T}(s+h)x - \mathcal{T}(s)x}{h}\,ds \\ &= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} \mathcal{T}(s)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^t \mathcal{T}(s)x\,ds = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \mathcal{T}(s)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^h \mathcal{T}(s)x\,ds \\ &\to \mathcal{T}(t)x - x \text{ für } h \to 0^+ \qquad \text{(Aussage 10.8).} \end{aligned}$$

Da also $A_h \int_0^t \mathcal{T}(s)x\,ds$ für $h \to 0^+$ konvergiert, ist $\int_0^t \mathcal{T}(s)x\,ds \in \mathfrak{D}(A)$ für alle $t \geq 0$. Damit ist auch $\frac{1}{t}\int_0^t \mathcal{T}(s)x\,ds \in \mathfrak{D}(A)$ und wegen 10.8 ergibt sich $\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\int_0^t \mathcal{T}(s)x\,ds = \mathcal{T}(0)x = x$, d.h. $\mathfrak{D}(A)$ liegt dicht in X.

Wir kommen zur Abgeschlossenheit des unbeschränkten Operators A.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathfrak{D}(A)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = y$. Es ist $x \in \mathfrak{D}(A)$ mit $y = Ax$ zu zeigen. Lemma 11.5.b) liefert für $h > 0$:

$$\mathcal{T}(h)x - x = \lim_{n\to\infty} (\mathcal{T}(h)x_n - x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^h \mathcal{T}(s)Ax_n\,ds = \int_0^h \mathcal{T}(s)y\,ds,$$

da $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{T}(s)Ax_n = \mathcal{T}(s)y$ auf $[0,h]$ und $\mathcal{T}(\cdot)Ax_n$ also Folge stetiger Funktionen auf dem Kompaktum $[0,h]$ gleichmäßig gegen $\mathcal{T}(\cdot)y$ konvergiert. Es ist also

$$\lim_{h\to 0^+} A_h x = \lim_{h\to 0^+} \frac{\mathcal{T}(h)x - x}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h \mathcal{T}(s)y\,ds = y,$$

somit $x \in \mathfrak{D}(A)$ und $Ax = y$. ◁

Wir beschließen diesen Paragraphen mit der Darstellung einer stark-stetigen Operatorhalbgruppe $\mathcal{T}$ durch die Operatoren A_h und einer Aussage über das Spektrum von A.

11.7 Satz: *Seien $\mathcal{T}$, A_h und A wie oben. Dann gilt:*

$$\mathcal{T}(t)x = \lim_{h\to 0^+} e^{tA_h}x \textit{ für } x \in X,$$

wobei die Konvergenz auf jedem beschränkten Intervall gleichmäßig ist.

▷ **Beweis :** Wir haben zu Beginn dieses Paragraphen gesehen (Proposition 11.3), daß für jedes $\delta > \omega_0$ mit

$$\omega_0 = \lim_{t\to\infty} \frac{\log \|\mathcal{T}(t)\|}{t}$$

eine Konstante M_δ existiert mit $\|\mathcal{T}(t)\| \le M_\delta e^{t\delta}$ für alle $t \ge 0$. Da $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^n e^{nh\delta}}{n!h^n} = \exp\left(t\dfrac{e^{h\delta}}{h}\right) < +\infty$ ist, ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^n \mathcal{T}(nh)}{n!h^n}$ absolut konvergent und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^n \mathcal{T}(nh)}{n!h^n} \in \mathcal{L}(X)$. Beachtet man, daß $e^{tA_h} = e^{-\frac{t}{h}} e^{\frac{t}{h}\mathcal{T}(h)} = e^{-\frac{t}{h}} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^n \mathcal{T}(nh)}{n!h^n}$ ist, ergibt sich

$$\left\|e^{tA_h}\right\| \le M_\delta \exp\left(t\left(\frac{e^{\delta h} - 1}{h}\right)\right).$$

Es existiert somit für jedes $t > 0$ eine Konstante $K_t > 0$, so daß für alle $0 \le s \le t$ und $0 < h \le 1$ gilt: $\|e^{sA_h}\| \le K_t$.

Sei nun $x \in \mathfrak{D}(A)$, $0 \le t \le t_0$ und $0 < h \le 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} \left\|\mathcal{T}(t)x - e^{tA_h}x\right\| &= \left\|\int_0^t \frac{d}{ds}\left(e^{(t-s)A_h}\mathcal{T}(s)x\right)ds\right\| = \left\|\int_0^t e^{(t-s)A_h}\mathcal{T}(s)(Ax - A_h x)\,ds\right\| \\ &\le t_0 K_{t_0} M_\delta e^{\delta t_0} \|Ax - A_h x\|. \end{aligned}$$

Da $\lim\limits_{h\to 0^+}(Ax - A_h x) = 0$ auf der dichten Teilmenge $\mathfrak{D}(A)$, und da $\|\mathcal{T}(t) - e^{tA_h}\|$ für $(t,h) \in [0,t_0] \times [0,1]$ beschränkt ist, konvergiert $\mathcal{T}(\cdot)x - e^{\cdot A_h}x$ für jedes $x \in X$ gleichmäßig auf $[0,t_0]$ gegen 0 für $h \to 0^+$. ◁

11.8 Satz: *Seien $\mathcal{T}$ und A wie oben und seien*

$$\omega_0 = \lim_{t\to\infty} \frac{\log \|\mathcal{T}(t)\|}{t}$$

und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\,(\lambda) > \omega_0$. Dann ist $\lambda \in \rho(A)$, und für jedes $x \in X$ gilt

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathcal{T}(t)x\,dt. \tag{30}$$

$\triangleright$ **Beweis :** Proposition 11.3 liefert die Wohldefiniertheit des Integrals in (30): Für jedes δ mit $\omega_0 < \delta < \mathrm{Re}\ \lambda$ existiert nämlich eine Konstante M_δ mit $\|\mathcal{T}(t)\| \le M_\delta e^{\delta t}$ für alle $t \ge 0$. Insbesondere ist

$$\|e^{-\lambda t}\mathcal{T}(t)x\| \le M_\delta \|x\| e^{(\delta - \mathrm{Re}\ \lambda)t} \qquad (t \ge 0, x \in X)$$

mit $\delta - \mathrm{Re}\ \lambda < 0$ und damit $\int\limits_0^\infty \|e^{-\lambda t}\mathcal{T}(t)x\|\,dt < +\infty$. Nach Aussage 10.5 existiert somit $\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\mathcal{T}(t)x\,dt$ und

$$R : X \to X, \qquad Rx := \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathcal{T}(t)x\,dt$$

definiert eine beschränkte lineare Abbildung mit

$$\|Rx\| = \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathcal{T}(t)x\,dt \right\| \le M_\delta \|x\| \int_0^\infty e^{(\delta - \mathrm{Re}\ \lambda)t}\,dt,$$

d.h.

$$\|R\| \le \frac{M_\delta}{\mathrm{Re}\ \lambda - \delta}.$$

Man berechnet:

$$\begin{aligned}
A_h R x &= A_h \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathcal{T}(t)x\,dt = \frac{1}{h}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathcal{T}(t+h)x\,dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathcal{T}(t)x\,dt\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_h^\infty e^{-\lambda(t-h)}\mathcal{T}(t)x\,dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathcal{T}(t)x\,dt\right) \\
&= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda t}\mathcal{T}(t)x\,dt - \frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}\mathcal{T}(t)x\,dt \\
&= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathcal{T}(t)x\,dt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}\mathcal{T}(t)x\,dt \\
&\to \lambda R x - x \qquad\qquad \text{(Aussage 10.8)}.
\end{aligned}$$

Also gilt $Rx \in \mathfrak{D}(A)$ und $ARx = \lambda Rx - x$ für alle $x \in X$, d.h. $(\lambda - A)Rx = x$.

Wegen $ARx = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}A\mathcal{T}(t)x\,dt = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\mathcal{T}(t)Ax\,dt = RAx$ für $x \in \mathfrak{D}(A)$ folgt also

$$R \cdot (\lambda - A) = \mathrm{id}_{\mathfrak{D}(A)} \quad \text{und} \quad (\lambda - A)R = \mathrm{id}_X.$$

Also ist $\lambda \in \rho(A)$ und $R(\lambda, A) = R$. $\triangleleft$

§12
Beispiele stark-stetiger Operatorhalbgruppen

Wir wollen in diesem Paragraphen zwei für diese Arbeit relevante Beispiele besprechen. Hierzu erinnern wir an zwei klassische Ergebnisse von Lebesgue. Das erste ist in Aussage 10.8 enthalten.

12.1 *Für eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ gilt für fast alle $x \in \mathbb{R}$:*

$$f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x} f(t)\,dt.$$

Darüberhinaus ist

$$F(x) := \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \qquad x \in \mathbb{R},$$

absolut stetig mit $F'(x) = f(x)$ fast überall.
Man vergleiche dies Aussage beispielsweise mit Rudin[23], Theorem 7.10 und Theorem 7.11.

12.2 Im Zusammenhang mit absoluter Stetigkeit wird sich die folgende Produktregel als nützlich erweisen (Hewitt-Stromberg[12], Corollary 18.20).

Sind f und g absolut stetige Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$, so gilt:

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt + \int_a^b f'(t)g(t)\,dt = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

Sei $X = L^1_w(\mathbb{R})$ für ein Beurling-Domar-Gewicht w auf $\mathbb{R}$, und sei $\mathcal{T} : [0, +\infty) \to \mathcal{L}(L^1_w(\mathbb{R}))$ definiert durch

$$\mathcal{T}(t)f := \tau_t f,$$

wobei τ_t in §1 auf Seite 8 definiert wurde. Wir wollen zeigen, daß $\mathcal{T}$ eine stark-stetige Operatorhalbgruppe ist und außerdem den infinitesimalen Erzeuger von $\mathcal{T}$ berechnen, insbesondere dessen Definitionsbereich. Da offensichtlich $\mathcal{T}(0) = \mathrm{id}_{L^1_w(\mathbb{R})}$, $\mathcal{T}(s+t) = \mathcal{T}(s)\mathcal{T}(t)$ für $s, t \geq 0$ und wegen Proposition 1.12 die Abbildung $\mathcal{T}$ auch stark-stetig ist, ist $\mathcal{T}$ tatsächlich eine stark-stetige Operatorhalbgruppe, und wir können gleich mit der Berechnung des infinitesimalen Erzeugers beginnen, den wir mit A bezeichnen wollen. Wir werden sehen, daß A bis aufs Vorzeichen gegeben wird durch den Differentialoperator D im Sinne von Lebesgue. Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine absolut stetige Funktion, so ist f fast überall differenziebar, und D ordnet diesem f die Abbildung f' zu, die fast überall durch den Differenzenquotient von f definiert ist. Der Operator D ist in diesem Sinn auch auf allen $f \in L^1(\mathbb{R})$ erklärt, die einen absolut stetigen Repräsentanten besitzen. Der Definitionsbereich von A ist gegeben durch

$$\mathfrak{D}(A) = \{f \in L^1_w(\mathbb{R}) : f \text{ absolut stetig mit } Df \in L^1_w(\mathbb{R})\},$$

wie wir nun zeigen werden.

Wir beginnen mit der Inklusion „$\subset$“:

Ist $f \in \mathfrak{D}(A)$, so konvergiert nach Definition $A_h f$ für $h \to 0$ gegen eine Funktion $g \in L^1_w(\mathbb{R})$. Wir zeigen, daß hieraus die absolute Stetigkeit von f folgt und daß $g = Df$ ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x} (A_h f)(t)\, dt &= \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t-h) - f(t)}{h}\, dt = \frac{1}{h} \left(\int_{-\infty}^{x} f(t-h)\, dt - \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_{-\infty}^{x-h} f(t)\, dt - \int_{-\infty}^{x} f(t) dt \right) = -\frac{1}{h} \int_{x-h}^{x} f(t)\, dt. \end{aligned}$$

Aufgrund von 12.1 gilt fast überall

$$\lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{x} (A_h f)(t)\, dt = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{h} \int_{x-h}^{x} f(t)\, dt = -f(x)$$

Da $\int_{\mathbb{R}} |A_h f - g| w\, d\lambda \to 0$ für $h \to 0$ und deshalb $\int_{\mathbb{R}} |A_h f - g|\, d\lambda \to 0$ für $h \to 0$, gilt also

$$\lim_{h \to 0} \int_{-\infty}^{x} (A_h f - g)\, d\lambda = 0, \qquad x \in \mathbb{R},$$

d.h. $f(x) = -\displaystyle\int_{-\infty}^{x} g(t)\, dt$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$. Nach 12.1 ist f somit absolut stetig mit $Df = -g$.

Wir kommen zu „$\supset$":

Für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \in \rho(A)$ (Proposition 11.8). Wir fixieren ein solches n und setzen $R := nR(n, A)$. Es ist dann $AR = n(R - I)$ und $R \in \mathcal{L}(L^1_w(\mathbb{R}))$ mit Bild $R = \mathfrak{D}(A)$. Sei $f \in L^1_w(\mathbb{R})$ absolut stetig mit $f' \in L^1_w(\mathbb{R})$. Dann ist $g := \frac{1}{n}(f' + nf) \in L^1_w(\mathbb{R})$ und $\widetilde{f} := Rg \in \mathfrak{D}(A)$. Aus dem ersten Teil des Beweises folgt

$$\widetilde{f}' = -A\widetilde{f} = -ARg = n(I - R)g = ng - n\widetilde{f}.$$

Nach Definition von g gilt $f' = ng - nf$, und deshalb ist $u := f - \widetilde{f} \in L^1_w(\mathbb{R})$ absolut stetig mit $u' = -nu$. Bezeichnen wir mit $\exp_n$ die Abbildung $t \mapsto e^{nt}$ für $t \in \mathbb{R}$, so gilt auf allen kompakten Intervallen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ nach Aussage 12.2 die Beziehung $(u \exp_n)' = 0$. Dann ist auf jedem kompakten Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ die Funktion $u \exp_n$ konstant (vgl. Rudin[23], Theorem 7.18). Es folgt, daß $u \exp_n$ auf ganz $\mathbb{R}$ konstant sein muß. Es existiert also eine Konstante $C > 0$ mit $u = C \exp_n$. Da aber $u \in L^1(\mathbb{R})$, muß $C = 0$ sein. Daher ist $f = \widetilde{f} \in \mathfrak{D}(A)$.

Anmerkung: Den Beweis von „$\supset$" findet man in Yosida[25], Seite 242/243.

Das obige Beispiel kann man zu einem Beispiel für eine stark-stetige Operatorgruppe ausbauen.

12.3 Definition: *Eine Abbildung $\mathcal{T} : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(X)$ heißt* stark-stetige Operatorgruppe, *wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(i) $\mathcal{T}(0) = \mathrm{id}_X$,

(ii) $\mathcal{T}(s + t) = \mathcal{T}(s)\mathcal{T}(t) \qquad (s, t \in \mathbb{R})$,

(iii) für alle $x \in X$ ist $\mathcal{T}(\cdot)x : \mathbb{R} \to X$ stetig.

Die Sätze 11.3, 11.5 und 11.6 lassen sich mit nur geringfügigen Modifikationen auf Operatorgruppen übertragen. Insbesondere existiert ein abgeschlossener Operator A mit dichtem Definitonsbereich $\mathfrak{D}(A)$, der die Operatorgruppe im Sinne von Satz 11.7 darstellt.

Man sieht sofort, daß für ein Gewicht w auf $\mathbb{R}$ durch $X = L^1_w(\mathbb{R})$ und $\mathcal{T} : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(L^1_w(\mathbb{R}))$, $h \mapsto \tau_h$, eine stark-stetige Operatorgruppe gegeben wird, deren infinitesimaler Erzeuger der Differentaloperator $-D$ ist. Die Menge $\mathfrak{D}(D) = \{f \in L^1_w(\mathbb{R}) : f$ absolut stetig mit $Df \in L^1_w(\mathbb{R})\}$ liegt dicht in $L^1_w(\mathbb{R})$, ein Ergebnis, das auch für sich von Interesse ist.

Ist w vom Typ $\mathfrak{BD}$ auf $\mathbb{R}$, so ist $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\log w(t)}{t} = 0$, denn andernfalls existierte $\epsilon > 0$ mit $\log w(t) \geq \epsilon t$ für $t \geq t_0$ und t_0 hinreichend groß. Damit wäre

$$\infty = \int_{t_0}^{\infty} \frac{\epsilon t}{1+t^2}\, dt \leq \int_{t_0}^{\infty} \frac{\log w(t)}{1+t^2}\, dt \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{\log w(t)}{1+t^2}\, dt,$$

im Widerspruch zu der Annahme, daß w vom Typ $\mathfrak{BD}$ auf $\mathbb{R}$ ist. Damit ergibt sich für die stark-stetige Operatorhalbgruppe $\mathcal{T}_+ : [0, +\infty) \to \mathcal{L}(L^1_w(\mathbb{R}))$, $\mathcal{T}_+(t) := \mathcal{T}(t)$, $t \geq 0$:

$$0 \leq \omega_0 = \lim_{t\to\infty} \frac{\log \|\mathcal{T}_+(t)\|}{t} \leq \lim_{t\to\infty} \frac{\log w(t)}{t} = 0,$$

d.h. $\omega_0 = 0$ und $\sigma(-D) \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0\}$ (Proposition 11.8), wobei $-D$ natürlich auch der infinitesimale Erzeuger der Halbgruppe $\mathcal{T}_+$ ist.

Mit denselben Überlegungen wie oben sieht man $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\log w(-t)}{t} = 0$ ein. Für die stark-stetige Operatorhalbgruppe $\mathcal{T}_- : [0, +\infty) \to \mathcal{L}(L^1_w(\mathbb{R}))$, $\mathcal{T}_-(t) := \mathcal{T}(-t)$, $t \geq 0$, erhält man

$$0 \leq \omega_1 := \lim_{t\to\infty} \frac{\log \|\mathcal{T}_-(t)\|}{t} \leq \lim_{t\to\infty} \frac{\log w(-t)}{t} = 0,$$

d.h. $\omega_1 = 0$ und $\sigma(D) \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0\}$, wobei D der infinitesimale Erzeuger von $\mathcal{T}_-$ ist.

Zusammen ergibt sich für das Spektrum von D:

$$\sigma(D) \subset i\mathbb{R}.$$

Wir werden in kürze zeigen, daß $\sigma(D) = i\mathbb{R}$ ist. Zuerst diskutieren wir ein weiteres Beispiel.

Wir betrachten die Abbildung

$$\mathcal{S} : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})), \qquad \mathcal{S}(t)\widehat{f} := \widehat{\mathcal{T}(t)f}.$$

Vermöge des isometrischen Isomorphismus

$$\psi : L^1_w(\mathbb{R}) \to \mathfrak{F}_w(\mathbb{R}), \qquad f \mapsto \widehat{f}$$

ist $\mathcal{S}$ ähnlich zu $\mathcal{T}$, d.h. $\psi \circ \mathcal{T} = \mathcal{S} \circ \psi$. Also ist auch $\mathcal{S}$ eine stark-stetige Operatorhalbgruppe, und für ihren Erzeuger $M : \mathfrak{D}(M) \to \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ gilt dieselbe Ähnlichkeitsrelation, d.h. $\mathfrak{D}(M) = \psi(\mathfrak{D}(D))$ und $\psi \circ (-D) = M \circ \psi$ auf $\mathfrak{D}(D)$.

Konkretes Ausrechnen von $\widehat{Df}$ für $f \in \mathfrak{D}(D)$ liefert:

$$\begin{aligned}
\widehat{Df}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (Df)(x) e^{-ix\xi}\, dx = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} f'(x) e^{-ix\xi}\, dx \\
&\overset{12.2}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\lim_{R\to\infty} f(R) e^{-iR\xi} - \lim_{R\to\infty} f(-R) e^{iR\xi} - \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)(-i\xi) e^{-ix\xi}\, dx \right) \\
&= i\xi \widehat{f}(\xi) = -(M\widehat{f})(\xi),
\end{aligned}$$

wobei M für die Abbildung

$$M : \widehat{\mathfrak{D}(D)} \to \mathfrak{F}_w(\mathbb{R}), \qquad (M\widehat{f}\,)(x) := -ix\widehat{f}(x)$$

steht.

Gemäß der Konstruktion dieses Beispiels ist $\sigma(M) = \sigma(-D)$. Ein einfaches Argument zeigt $\sigma(-D) = \sigma(M) = i\mathbb{R}$: Angenommen, es existierte $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $i\lambda \notin \sigma(M)$. Es sei $\widehat{f} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ eine Abbildung mit $\widehat{f} \equiv 1$ auf einer kompakten Umgebung $F \subset \mathbb{R}$ von $-\lambda$ ($\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ ist regulär). Dann ist $R(i\lambda, M)\widehat{f} \in \mathfrak{D}(M)$ und $(i\lambda - M)R(i\lambda, M)\widehat{f} = \widehat{f}$. Für $t \in F$ ergäbe sich insbesondere $(i\lambda + it)(R(i\lambda, M)\widehat{f})(t) = 1$. Für $t = -\lambda \in F$ erhielte man einen Widerspruch.

Wir greifen an dieser Stelle das Ende von §5 wieder auf und beweisen die dort offen gelassene Frage bzgl. des Spektrums von $M|\mathfrak{F}_w(F)$.

12.4 Proposition: *Für w vom Typ $\mathfrak{BD}$ auf $\mathbb{R}$ und kompaktes $F \subset \mathbb{R}$ gilt:*

$$\sigma(M|\mathfrak{F}_w(F)) \subset -iF$$

$\triangleright$ **Beweis :** Wir konstruieren zunächst zu $\mu \in \mathbb{C}$ eine Funktion $\widehat{f_\mu} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ mit $\widehat{f_\mu}(t) = \mu + it$ für alle $t \in F$. Sei hierzu $\lambda \in \mathbb{C}\backslash(i\mathbb{R})$. Dann existiert $R(\lambda, M) \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}_w(\mathbb{R}))$ mit $(\lambda - M)R(\lambda, M) = \mathrm{id}_{\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})}$. Sei $\widehat{g} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ mit $\widehat{g} \equiv 1$ auf F (Proposition 5.3). Für $t \in F$ gilt dann $(\lambda + it)(R(\lambda, M)\widehat{g})(t) = 1$ mit $(R(\lambda, M)\widehat{g})(t) \neq 0$ für alle $t \in F$. Nach Proposition 5.3 existiert ein $\widehat{h} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ mit $\widehat{h} = \frac{1}{R(\lambda,M)\widehat{g}}$ auf F, d.h. $\widehat{h}(t) = \lambda + it$ für alle $t \in F$. Wir definieren $\widehat{f_\mu} := \widehat{h} + (\mu - \lambda)\widehat{g}$. Für $t \in F$ gilt dann $\widehat{f_\mu}(t) = \mu + it$, wie gewünscht.

Wir haben bereits in Lemma 5.4 gezeigt, daß $\mathfrak{F}_w(F)$ für $F \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ ist. Daß $\mathfrak{F}_w(F)$ invariant ist unter M, $M(\mathfrak{D}(M) \cap \mathfrak{F}_w(F)) \subset \mathfrak{F}_w(F)$, ist klar. Außerdem ist $M|\mathfrak{F}_w(F)$ wieder abgeschlossen. Wir können von daher eine Aussage über das Spektrum von $M|\mathfrak{F}_w(F)$ im Sinne von §10 machen.

Sei $\lambda \notin -iF$ und $\widehat{f_\lambda}$ wie soeben konstruiert mit $\widehat{f_\lambda}(t) = \lambda + it$ für alle $t \in F$. Da $\widehat{f_\lambda}$ auf F nicht verschwindet, garantiert Proposition 5.3 die Existenz eines $\widehat{h} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ mit $\widehat{h}(t) = \frac{1}{\lambda + it}$ für $t \in F$. Die Abbildung $M_{\widehat{h}}|\mathfrak{F}_w(F) : \mathfrak{F}_w(F) \to \mathfrak{F}_w(F)$ ist stetig und hat die Eigenschaften

$$(\lambda - M|\mathfrak{F}_w(F))M_{\widehat{h}}|\mathfrak{F}_w(F) = \mathrm{id}_{\mathfrak{F}_w(F)} \quad \text{und} \quad M_{\widehat{h}}|\mathfrak{F}_w(F)(\lambda - M|\mathfrak{F}_w(F)) = \mathrm{id}_{\mathfrak{D}(M|\mathfrak{F}_w(F))}.$$

Für $\lambda \notin -iF$ ist somit $\lambda \in \varrho(M|\mathfrak{F}_w(F)$, d.h.

$$\sigma(M|\mathfrak{F}_w(F)) \subset -iF.$$

$\triangleleft$

Kapitel IV
Asymptotisches Verhalten stark-stetiger Operatorhalbgruppen

Zum Inhalt dieses Kapitels

Wir haben in Kapitel II gezeigt, wie man auf das asymptotische Verhalten einer diskreten Operatorhalbgruppe schließen kann, wenn für den Erzeuger gewisse Voraussetzungen erfüllt sind. Wir wollen die dort gefundenen Ergebnisse in diesem Kapitel auf stark-stetige Operatorhalbgruppen übertragen. In §13 erklären wir, was wir unter kontinuierlichen Intertwining-Operatoren verstehen wollen, und beweisen einige Eigenschaften derselben. Im §14 setzen wir uns mit der Existenz kontinuierlicher Intertwining-Operatoren auseinander. Ähnlich wie in Kapitel II spielen in diesem Zusammenhang die Beurling-Algebren $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ mit Beurling-Domar-Gewicht w auf $\mathbb{R}$ eine wichtige Rolle. Den Satz über das asymptotische Verhalten stark-stetiger Operatorhalbgruppen formulieren wir im §15. Dort vergleichen wir auch unser Ergebnis mit denen aus der Literatur.

§13
Kontinuierliche Intertwining-Operatoren, Eigenschaften

In diesem Paragraphen führen wir Intertwining-Operatoren für stark-stetige Operatorhalbgruppen ein, die wir der Kürze wegen als *kontinuierliche Intertwining-Operatoren* bezeichnen wollen. Viele der Konzepte und Aussagen, die wir im diskreten Fall vorgestellt haben, lassen sich ohne größere Schwierigkeiten auf die neue Situation übertragen. Definiert wurden stark-stetige Operatorhalbgruppen in Kapitel III. Dort wurde auch die Abbildung

$$M : \mathfrak{D}(M) \to \mathfrak{F}_w(\mathbb{R}) \qquad \widehat{f} \mapsto (x \mapsto -ix\widehat{f}(x))$$

mit $\mathfrak{D}(M) = \widehat{\mathfrak{D}(D)}$ eingeführt (§12). Daraus ergibt sich sofort $\mathfrak{D}(M) \subset \{\widehat{f} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})(\mathbb{R}) : \mathrm{id}_{\mathbb{R}}\widehat{f} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})(\mathbb{R})\}$. Bevor wir im Text fortfahren, wollen wir uns davon überzeugen, daß die letzte Inklusion in Wirklichkeit eine Gleichheit ist.

„$\supset$“: Da M der Erzeuger einer stark-stetigen Operatorgruppe ist, könne wir ein $\alpha > 0$ wählen mit $\alpha \in \rho(M)$ (Proposition 11.8). Dann ist $R := \alpha R(\alpha, M) \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}_w(\mathbb{R}))$ ein Operator mit *Abbildung4.1* $R = \mathfrak{D}(M)$ und $MR = \alpha(R - I)$. Sei $\widehat{f} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ mit $-i\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\widehat{f} = \widehat{u}$ für ein $\widehat{u} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$. Dann ist $\widehat{g} := \frac{1}{\alpha}(-\widehat{u} + \alpha\widehat{f}) \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ und daher $\widehat{h} := R\widehat{g} \in \mathfrak{D}(M)$. Aus $-i\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\widehat{h} = M\widehat{h} = MR\widehat{g} = \alpha\widehat{h} - \alpha\widehat{g}$ und $-\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\widehat{f} = \widehat{u} = \alpha\widehat{f} - \alpha\widehat{g}$ schließlich folgt, daß $-i\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(\widehat{f} - \widehat{h}) = \alpha(\widehat{f} - \widehat{h})$ ist. Daher ist $\widehat{f} = \widehat{h} \in \mathfrak{D}(M)$.

Die Darstellung $\mathfrak{D}(M) = \{\widehat{f} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R}) : \mathrm{id}_{\mathbb{R}}\widehat{f} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})\}$ zeigt insbesondere, daß $\mathfrak{D}(M) \subset \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ ein Ideal ist.

Im folgenden stehe wie üblich X für einen beliebigen Banachraum, X' für dessen topologischen Dual.

13.1 Definition: *Sei w ein Beurling-Domar-Gewicht auf $\mathbb{R}$, $j : \mathfrak{F}_w(\mathbb{R}) \to X'$ eine beschränkte lineare Abbildung und $\mathcal{T}$ eine stark-stetige Operatorhalbgruppe mit infinitesimalen Erzeuger A. Falls $j(\mathfrak{D}(M)) \subset \mathfrak{D}(A')$ und*

$$j \circ M = A' \circ j \qquad \text{auf } \mathfrak{D}(M)$$

gilt, nennen wir j einen kontinuierlichen Intertwining-Operator *für die Halbgruppe $\mathcal{T}$.*

Wir werden in der Folge vereinfachend von kontinuierlichen Intertwining-Operatoren $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R}) \to X'$ sprechen, ohne das hierzu notwendige Beurling-Domar-Gewicht w auf $\mathbb{R}$ und die zugehörige stark-stetige Operatorhalbgruppe jedesmal zu präzisieren; diese beiden Objekte sollen immer gegeben sein und mit w bzw. $\mathcal{T}$ bezeichnet werden.

Die Hilfsmittel, die wir bereits im diskreten Fall eingeführt haben, finden auch hier Verwendung.

13.2 Lemma: *Sei $j : \mathfrak{F}_w(\mathbb{R}) \to X'$ ein kontinuierlicher Intertwining-Operator. Dann existiert ein größtes abgeschlossenes Ideal $I(j)$ in $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$, welches noch vollständig in* $\ker j$ *enthalten ist.*

$\triangleright$ **Beweis :** Der Beweis dieses Lemmas ergbibt sich wie im Beweis von Lemma 6.2. $\triangleleft$

Der Träger von j ist definiert durch

$$\mathrm{supp}(j) := h(I(j)) = \bigcap_{\widehat{f} \in I(j)} N(\widehat{f}),$$

wobei $N(\widehat{f})$ für die Nullstellenmenge von $\widehat{f}$ in $\mathbb{R}$ steht und h die Hüllenabbildung aus §5 ist.

13.3 In Analogie zu Aussage 6.5 definiert jede Funktion $\widehat{f} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ vermöge $\widehat{f}\mathfrak{F}_w(\mathbb{R}) = \{\widehat{f}\widehat{g} : \widehat{g} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})\}$ ein Ideal in $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$. Die Stetigkeit der Multiplikation in $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ sorgt dafür, daß $\overline{\widehat{f}\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})}$ ein abgeschlossenes Ideal in $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ ist. Gilt insbesondere $\widehat{f}\mathfrak{F}_w(\mathbb{R}) \subset \ker j$, so muß wegen der Abgeschlossenheit von $\ker j$ und der Definition von $I(j)$ $\overline{\widehat{f}\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})} \subset I(j)$ sein. Da $L^1_w(\mathbb{R})$ nach 1.18 eine approximative Eins enthält, sagen wir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gilt $\widehat{f f_n} \to \widehat{f}$ für $n \to \infty$ in $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$, und wegen $\widehat{f f_n} \in \widehat{f}\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ somit $\widehat{f} \in \overline{\widehat{f}\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})} \subset I(j)$.

In Proposition 13.4 sammeln wir die grundlegenden Eigenschaften kontinuierlicher Intertwining-Operatoren. Abgesehen von geringfügigen Abweichungen können viele der Beweise aus dem diskreten Fall übernommen werden.

13.4 Proposition: *Für einen kontinuierlichen Intertwining-Operator j gilt:*

a) $\operatorname{supp}(j) = \emptyset$ *genau dann, wenn* $j \equiv 0$.

b) Für $\widehat{f} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ *gilt:* $j \circ M_{\widehat{f}}$ *ist ein Intertwining-Operator*[1].

c) Für $\widehat{f} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ *mit* $\widehat{f}(\lambda) \neq 0$ *für ein* $\lambda \in \operatorname{supp}(j)$ *gilt:* $j \circ M_{\widehat{f}} \not\equiv 0$.

d) Für $\widehat{f} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ *gilt:* $I(j) \subset I(j \circ M_{\widehat{f}})$.

e) Für $\widehat{f} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ *gilt:* $\operatorname{supp}(j \circ M_{\widehat{f}}) \subset \operatorname{supp}(\widehat{f}) \cap \operatorname{supp}(j)$.

f) Ist $\lambda \in \operatorname{supp}(j)$ *isoliert, so existiert ein Intertwining-Operator* $\widetilde{j}$ *mit* $\operatorname{supp}(\widetilde{j}) = \{\lambda\}$.

$\triangleright$ **Beweis :** a) beweist man entsprechend dem Beweis von Proposition 6.3. Zum Beweis von b) vergleiche man mit Proposition 6.4; statt $\widehat{b} \in \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ ist $\widehat{g} \in \mathfrak{D}(M)$ zu nehmen, unter Berücksichtigung, daß $\mathfrak{D}(M)$ ein Ideal in $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ ist. Der Beweis von Proposition 6.6 überträgt sich leicht auf c); statt Aussage 6.5 ist Aussage 13.3 heranzuziehen. d) und e) entspricht Proposition 6.7; natürlich ist auch hier Aussage 13.3 anstelle von Aussage 6.5 zu nehmen. An entsprechender Stelle muß sinngemäß Γ durch $\mathbb{R}$ und die offene Menge $U \subset \Gamma$ durch eine relativ-kompakte, offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ ersetzt werden. f) schließlich ist Korollar 6.8. $\triangleleft$

Mit $\operatorname{Lat}_w(M)$ wollen wir die Menge der abgeschlossen Unterräume von $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ bezeichnen, die invariant sind unter M. Für $Y \in \operatorname{Lat}_w(M)$ bezeichne $M|Y$ den abgeschlossenen Operator $M|Y : \mathfrak{D}(M) \cap Y \to Y$, $\widehat{f} \mapsto M\widehat{f}$. $R(\cdot, A) : \varrho(A) \to \mathcal{L}(X)$ stehe für die Resolvente von A. Im §10 haben wir $\sigma(A) = \sigma(A')$ zitiert.

13.5 Lemma: *Sei* $j : \mathfrak{F}_w(\mathbb{R}) \to X'$ *ein kontinuierlicher Intertwining-Operator. Für alle* $Y \in \operatorname{Lat}_w(M)$ *gilt:*

$$\sigma(M|Y) \cap \sigma(A) = \emptyset \quad \Rightarrow \quad Y \subset \ker j$$

$\triangleright$ **Beweis :** (vgl. mit dem Beweis von Lemma 7.3)

Sei $\widehat{f} \in Y$ beliebig und $F : C \to X'$ definiert durch

$$F(z) = \begin{cases} j(R(z, M|Y)\widehat{f}) & \text{falls } z \notin \sigma(M|Y) \\ R(z, A')j(\widehat{f}) & \text{falls } z \notin \sigma(A') = \sigma(A). \end{cases}$$

Dann ist F eine wohldefinierte Funktion: Wegen $\sigma(M|Y) \cap \sigma(A) = \emptyset$ ist $\rho(M|Y) \cup \rho(A) = \mathbb{C}$ und F auf ganz $\mathbb{C}$ definiert; für $z \in \rho(M|Y) \cap \rho(A)$ gilt:

$$(z - A')j(R(z, M|Y)\widehat{f}) = j((z - M)R(z, M|Y)\widehat{f}) = j(\widehat{f}),$$

[1] für dasselbe Gewicht und dieselbe Operatorhalbgruppe wie j

d.h. $j(R(z,M|Y)\widehat{f}) = R(z,A')j(\widehat{f})$. Da sowohl $R(\cdot,M|Y)$ auf $\rho(M|Y)$ als auch $R(\cdot,A')$ auf $\rho(A') = \rho(A)$ analytisch sind, folgt die Analytizität von F auf $\mathbb{C}$. Da aber $\|F(t)\| \to 0$ für $t \to \infty$ (Satz 11.8), folgt $F \equiv 0$ (Liouville). Da $R(z,A')$ für große $\operatorname{Re} z$ existiert und injektiv ist, folgt insbesondere $j(\widehat{f}) = 0$. Da $\widehat{f} \in Y$ beliebig war, folgt $Y \subset \ker j$. ◁

13.6 Satz: *Sei $\mathcal{T} : [0,+\infty) \to \mathcal{L}(X)$ eine stark-stetige Operatorhalbgruppe mit infinitesimalen Erzeuger A, und sei $j : \mathfrak{F}_w(\mathbb{R}) \to X'$ ein kontinuierlicher Intertwining-Operator für $\mathcal{T}$. Dann gilt:*

$$\operatorname{supp}(j) \subset i\sigma(A)$$

▷ **Beweis :** (vgl. mit dem Beweis von Satz 7.4)

Im Falle $\operatorname{supp}(j) = \emptyset$ ist nichts zu beweisen. Sei also $t \in \operatorname{supp}(j)$. Wir wollen annehmen, daß $t \notin i\sigma(A)$ ist. Da $\mathbb{R}\backslash\sigma(iA)$ offen ist, würde eine kompakte Umgebung F von t existieren mit $F \subset \mathbb{R}\backslash\sigma(iA) = \rho(iA)$. Mit Lemma 5.4 sieht man leicht, daß $\mathfrak{F}_w(F) \in \operatorname{Lat}_w(M)$ ist, und Proposition 12.4 liefert $\sigma(M|\mathfrak{F}_w(F)) \subset -iF$. Nach Wahl von F wäre $\sigma(M|\mathfrak{F}_w(F)) \cap \sigma(A) \subset -iF \cap \sigma(A) = \emptyset$. Nach Lemma 13.5 ergäbe sich $\mathfrak{F}_w(F) \subset \ker j$. Da $\mathfrak{F}_w(F)$ ein abgeschlossenes Ideal ist, erhielte man $\mathfrak{F}_w(F) \subset I(j)$. Dies aber wäre ein Widerspruch, denn wegen $t \in \operatorname{supp}(j)$ müßte für alle $\widehat{f} \in \mathfrak{F}_w(F)$ $\widehat{f}(t) = 0$ gelten, was wegen der Regularität von $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ sicherlich nicht der Fall ist. Da die Annahme also falsch ist, kann nur $\operatorname{supp}(j) \subset \sigma(iA)$ sein. ◁

Bevor wir mit weiteren Eigenschaften fortfahren können, müssen wir vorbereitend die Proposition 7.1 und das Korollar 7.2 auf die Situation abgeschlossener Operatoren übertragen.

Für ein $A \in \mathcal{C}(X)$ sind Potenzen induktiv definiert durch

- $\mathfrak{D}(A^0) = X$ mit $A^0 = \mathrm{id}_X$
- $\mathfrak{D}(A^1) = \mathfrak{D}(A)$ mit $A^1 = A$
- $\mathfrak{D}(A^n) = \{x \in X : x \in \mathfrak{D}(A^{n-1})$ und $A^{n-1}x \in \mathfrak{D}(A)\}$ mit $A^n := A \circ A^{n-1}$ für alle $n \geq 1$.

Offenbar ist $\mathfrak{D}(A^n) \subset \mathfrak{D}(A^{n-1})$ für alle $n \geq 1$.

Für eine kompakte Teilmenge F von $\mathbb{C}$ und einen abgeschlossen Operator $A : \mathfrak{D}(A) \subset X \to X$ definieren wir den Spektralraum von A zu F durch

$$\begin{aligned} X_A(F) \quad = \quad & \{x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{D}(A^n) \text{: es existiert eine im Unendlichen verschwindende, analy-} \\ & \text{tische Funktion } f : \mathbb{C}\backslash F \to X \text{ mit } f(\mathbb{C}\backslash F) \subset \mathfrak{D}(A) \text{ und } (z-A)f(z) = x \\ & \text{für alle } z \in \mathbb{C}\backslash F\}. \end{aligned}$$

13.7 Proposition: *Sei A ein abgeschlossener Operator auf X und $\lambda \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann gilt*[2]

$$X_A(\{\lambda\}) = \{x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{D}(A^n) : \limsup_{n\to\infty} \|(\lambda - A)^n x\|^{\frac{1}{n}} = 0\}$$

[2]Man zeigt induktiv, daß $\mathfrak{D}((\lambda - A)^n) = \mathfrak{D}(A^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

▷ **Beweis :** Wir können uns auf den Fall $\lambda = 0$ zurückziehen, denn die allgemeine Aussage folgt hieraus durch Verschiebung um λ.

„$\supset$“: Sei $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{D}(A^n)$ mit $\limsup_{n\to\infty} \|A^n x\|^{\frac{1}{n}} = 0$, und betrachte $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to X$ mit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(A^n x)z^{-n-1}$. Wegen $\limsup_{n\to\infty} \|A^n x\|^{\frac{1}{n}} = 0$ ist f auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ analytisch und verschwindet im Unendlichen. Wir müssen zeigen, daß $f(z) \in \mathfrak{D}(A)$ und daß $(z-A)f(z) = x$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ist.

Sei $f_k : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to X$ definiert durch $f_k(z) = \sum_{n=0}^{k}(A^n x)z^{-n-1}$, $k \in \mathbb{N}$. Aus $x \in \mathfrak{D}(A^{n+1})$ folgt $x \in \mathfrak{D}(A^n)$ und $A^n x \in \mathfrak{D}(A)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt $f_k(z) \in \mathfrak{D}(A)$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Wegen $f_k(z) \to f(z)$, $Af_k(z) = A\sum_{n=0}^{k}(A^n x)z^{-n-1} = z\sum_{n=0}^{k+1}(A^n x)z^{-n-1} - x \to zf(z) - x$ und A abgeschlossen, ergibt sich $f(z) \in \mathfrak{D}(A)$ und $Af_k(z) \to Af(z) = zf(z) - x$, d.h. $(z-A)f(z) = x$. Das ist $x \in X_A(\{0\})$.

„$\subset$“: Zu $x \in X_A(\{0\})$ existiert $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to X$ analytisch und im Unendlichen verschwindend mit $f(\mathbb{C}\backslash\{0\}) \subset \mathfrak{D}(A)$ und $(z-A)f(z) = x$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Da f im Unendlichen verschwindet, ist $\lim_{|z|\to\infty} \|f(z)\| = 0$. Damit definiert $g(z) := \begin{cases} f(\frac{1}{z}) & : z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \\ 0 & : z = 0 \end{cases}$ eine holomorphe Funktion $g : \mathbb{C} \to X$. Diese läßt sich in eine Potenzreihe $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ entwickeln. f besitzt demzufolge die Darstellung $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k}$. Aus $x = (z-A)f(z)$ folgt $Af(z) = zf(z) - x$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Wegen $\mathfrak{D}(A) \ni f(t) \to 0$ und $tf(t) \to a_1$ für $t \to \infty$ sowie der Abgeschlossenhait von A, folgt

$$Af(t) = tf(t) - x \to a_1 - x \stackrel{!}{=} 0 \qquad (t \to \infty),$$

d.h. $a_1 = x$. Hat man für ein $n > 0$ bereits $a_1, ..., a_{n-1} \in \mathfrak{D}(A)$ mit $a_{k+1} = Aa_k$ für $k = 1, ..., n-1$ nachgewiesen, so gilt $\mathfrak{D}(A) \ni t^n f(t) - \sum_{k=1}^{n-1} a_k t^{n-k} = \sum_{k=n}^{\infty} a_k t^{n-k} \to a_n$ für $t \to \infty$ und $t^{n+1}f(t) - \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}t^{n-k} = a_1 t^n + \sum_{k=n}^{\infty} a_{k+1}t^{n-k}$. Es ist

$$\begin{aligned} A\left(t^n f(t) - \sum_{k=1}^{n-1} a_k t^{n-k}\right) &= t^n Af(t) - \sum_{k=1}^{n-1} Aa_k t^{n-k} \\ &= t^{n+1}f(t) - t^n x - \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}t^{n-k} = \sum_{k=n}^{\infty} a_{k+1}t^{n-k}, \end{aligned}$$

und wegen $\sum_{k=n}^{\infty} a_{k+1}t^{n-k} \to a_{n+1}$ für $t \to \infty$ und der Abgeschlossenheit von A folgt $a_n \in \mathfrak{D}(A)$ mit $Aa_n = a_{n+1}$. Hieraus ergibt sich induktiv $a_{n+1} = A^n x$ für $n \geq 0$.

Wir folgern $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(A^n x)z^{-n-1}$. Da der Konvergenzbereich von f ganz $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ ist, ergibt sich

$$\limsup_{n\to\infty} \|A^n x\|^{\frac{1}{n}} = 0$$

und es folgt die Behauptung. ◁

13.8 Korollar: *Sei A ein abgeschlossener Operator auf X. Dann gilt:*

$$\ker(\lambda - A)^n \subset X_A(\{\lambda\})$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei $j : \mathfrak{F}_w(\mathbb{R}) \to X'$ ein kontinuierlicher Intertwining-Operator wie zuvor. Da $I = M(\mathfrak{D}(M) \cap I(j)) \subset \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ ein Ideal ist mit $j|_I \equiv 0$, gilt $I \subset I(j)$. Wir definieren einen unbeschränkten Operator $\widetilde{M} : \mathfrak{D}(\widetilde{M}) \subset \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})/I(j) \to \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})/I(j)$ durch $\mathfrak{D}(\widetilde{M}) = \{\widehat{f} + I(j) : \widehat{f} \in \mathfrak{D}(M)\}$ und

$$\widetilde{M}(\widehat{f} + I(j)) = (M\widehat{f}) + I(j) \qquad \text{für } \widehat{f} \in \mathfrak{D}(M).$$

Wir wenden uns weiteren Eigenschaften kontinuierlicher Intertwining-Operatoren zu.

13.9 Proposition: *Sei $j : \mathfrak{F}_w(\mathbb{R}) \to X'$ ein kontinuierlicher Intertwining-Operator, für dessen Träger* $\operatorname{supp}(j) = \{\lambda\}$ *für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gelte. Dann ist $\widetilde{M}$ überall definiert und stetig linear mit $\sigma\left(\widetilde{M}\right) = \{-i\lambda\}$.*

▷ **Beweis :** Nach Proposition 2.7 existiert eine Funktion $\widehat{e} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger und $\lambda \notin \operatorname{supp}(1 - \widehat{e})$. Dann gilt für alle $\widehat{f} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$

$$\lambda \notin \operatorname{supp}(\widehat{f} - \widehat{e}\widehat{f}.$$

Nach Korollar 5.2 ist dann $\widehat{f} - \widehat{e}\widehat{f} \in I(j)$ für alle $\widehat{f} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$. Also ist $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})/I(j)$ eine unitale Banachalgebra mit Einselement $[\widehat{e}]$. Nach dem ersten Teil des Beweises von Proposition 12.4 gibt es ein $h \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ mit $\widehat{h} = -it$ für alle $t \in \operatorname{supp}\widehat{e}$. Dann ist wieder nach Korollar 5.2

$$M(\widehat{e}\widehat{f}) - \widehat{h}\widehat{e}\widehat{f} \in I(j)$$

für alle $\widehat{f} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$. Da jedes Element $\widehat{f} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})/I(j)$ einen Repräsentanten mit kompakten Träger hat, ist $\widetilde{M}$ überall definiert, und es gilt

$$\widetilde{M}([\widehat{f}]) = \widetilde{M}([\widehat{e}\widehat{f}]) = [M(\widehat{e}\widehat{f})] = [\widehat{h}\widehat{e}\widehat{f}] = [\widehat{h}\widehat{f}]$$

für alle $\widehat{f} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$. Damit haben wir gezeigt, daß $\widetilde{M}$ der Multiplikationsoperator mit $[\widehat{h}]$ in der kommutativen unitalen Banachalgebra $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})/I(j)$ ist. Also ist $\widetilde{M}$ stetig linear mit

$$\sigma\left(\widetilde{M}\right) = \sigma_{\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})/I(j)}([\widehat{h}]) = \{\widehat{h}(\lambda).$$

Das ist die Behauptung. ◁

13.10 Korollar: *Sei $j : \mathfrak{F}_w(\mathbb{R}) \to X'$ ein kontinuierlicher Intertwining-Operator mit* $\operatorname{supp}(j) = \{\lambda\}$ *für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist*

$$(\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})/I(j))_{\widetilde{M}}(\{\lambda\}) = \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})/I(j).$$

13.11 Proposition: *Sei $j : \mathfrak{F}_w(\mathbb{R}) \to X'$ ein kontinuierlicher Intertwining-Operator, für dessen Träger* $\operatorname{supp}(j) = \{\lambda\}$ *für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gelte. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{\jmath}: & \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})/I(j) & \to & X' \\ & [\widehat{f}] & \mapsto & \widetilde{\jmath}([\widehat{f}]) := j(\widehat{f}) \end{array}$$

wohldefiniert mit $\widetilde{\jmath}(\widetilde{M}[\widehat{f}]) = A'\widetilde{\jmath}([\widehat{f}])$ für alle $\widehat{f} \in \mathfrak{D}(M)$ und $\operatorname{Bild} \widetilde{\jmath} \subset X'_{A'}(\{\lambda\})$.

▷ **Beweis :** Der erste Teil der Proposition ist wegen $I(j) \subset \ker j$ klar, und die Aussage bezüglich der „Vertauschung“ von $\widetilde{M}$ und A' rechnet man leicht nach. Sei $[\widehat{g}] \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})/I(j)$ beliebig. Nach Korollar 13.10 existiert eine analytische Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{\lambda\} \to \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})/I(j)$ mit $(z - \widetilde{M})f(z) = [\widehat{g}]$. Anwenden von $\widetilde{\jmath}$ ergibt:

$$\widetilde{\jmath}((z - \widetilde{M})f(z)) = (z - A')\widetilde{\jmath}(f(z)).$$

Für $h : \mathbb{C}\backslash\{\lambda\} \to X'$, $h(z) := \widetilde{\jmath}(f(z))$, ist h analytisch mit $(z - A')h(z) = \widetilde{\jmath}([\widehat{g}])$. Es folgt: $\widetilde{\jmath}([\widehat{g}]) \in X'_{A'}(\{\lambda\})$. Das ist die Behauptung. ◁

13.12 Korollar: *Sei $j : \mathfrak{F}_w(\mathbb{R}) \to X'$ ein kontinuierlicher Intertwining-Operator. Gilt für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ $X'_{A'}(\{\lambda\}) = \{0\}$, so ist* $\operatorname{supp}(j) \neq \{\lambda\}$.

▷ **Beweis :** Wäre $\operatorname{supp}(j) = \{\lambda\}$, so würde nach Proposition 13.11 die dort definierten Abbildung $\widetilde{\jmath}$ wegen $\operatorname{Bild} \widetilde{\jmath} \subset X'_{A'}(\{\lambda\}) = \{0\}$ identisch verschwinden. Dann verschwindet aber auch j, was aufgrund von Proposition 13.4.a) nicht sein kann. ◁

Das entscheidende Ergebnis lautet:

13.13 Satz: *Sei $j : \mathfrak{F}_w(\mathbb{R}) \to X'$ ein kontinuierlicher Intertwining-Operator für die stark-stetige Operatorhalbgruppe $\mathcal{T}$. Für den infinitesimalen Erzeuger A dieser Halbgruppe sei $\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ abzählbar und $X'_{A'}(\{\lambda\}) = \{0\}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $j \equiv 0$.*

▷ **Beweis :** Wäre $j \not\equiv 0$, so ergäbe sich nach Proposition 13.4.a) $\operatorname{supp}(j) \neq \emptyset$. Da $\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ abzählbar und abgeschlossen ist, und da $\operatorname{supp}(j)$ nach Satz 13.6 eine Teilmenge hiervon ist, enthielte $\operatorname{supp}(j)$ einen isolierten Punkt $\mu \in \mathbb{R}$. Sei U ein relativ-kompakte, offene Umgebung dieses μ mit $U \cap \operatorname{supp}(j) = \{\mu\}$ und $\widehat{f} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ eine Funktion mit $\widehat{f}(\mu) \neq 0$ und $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset U$ (wir erinnern: $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ ist regulär). Wir könnten nach Proposition 13.4.b) und Proposition 13.4.c) einen nicht-verschwindenden, kontinuierlichen Intertwining-Operator $\widetilde{\jmath} : \mathfrak{F}_w(\mathbb{R}) \to \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ definieren durch $\widetilde{\jmath} := j \circ M_{\widehat{f}}$ mit – Proposition 13.4.e) – $\operatorname{supp}(\widetilde{\jmath}) \subset \operatorname{supp}(\widehat{f}) \cap \operatorname{supp}(j) = \{\mu\}$. Wegen $\widetilde{\jmath} \not\equiv 0$ wäre $\operatorname{supp}(\widetilde{\jmath}) = \{\mu\}$. Mit Korollar 13.12 kann dies aber aufgrund von $X'_{A'}(\{\mu\}) = \{0\}$ nicht sein. Unsere Annahme muß von daher falsch sein und j muß tatsächlich identisch verschwinden. ◁

Im nächsten Paragraphen wenden wir uns der Frage zu, unter welchen Voraussetzungen man die Existenz eines nicht-trivialen, kontinuierlichen Intertwining-Operators für eine stark-stetige Operatorhalbgruppe gararantieren kann.

§14
Existenz kontinuierlicher Intertwining-Operatoren

Beim Existenznachweis kontinuierlicher Intertwining-Operatoren stößt man prinzipiell auf dieselben Schwierigkeiten wie im Fall diskreter Intertwining-Operatoren. Wir wollen deshalb für die nachfolgenden Ausführungen eine stark-stetige Operatorhalbgruppe $\mathcal{T} : [0, +\infty) \to \mathcal{L}(X')$ gegeben wissen, deren infinitesimaler Erzeuger mit A bezeichnet wird und für die

$$\|\mathcal{T}(t)\| = O(w(t)) \qquad \text{für } t \to +\infty$$

gilt, wobei w ein Beurling-Domar-Gewicht auf $\mathbb{R}$ ist. Wie gewöhnlich stehe X für einen Banachraum und X' für dessen topologischen Dualraum.

A. Konstruktion eines kontinuierlichen Intertwining-Operators

Wir definieren als erstes die Abbildung

$$S : \mathfrak{F}_w(\mathbb{R}) \times X' \times X \to \mathbb{C}, \qquad (\widehat{f}, \alpha, x) \mapsto \int_0^\infty f(t)\alpha(\mathcal{T}(t)x)\, dt,$$

die von unserer vorgegebenen, stark-stetigen Operatorhalbgruppe $\mathcal{T}$ abhängt, die wir jedoch nicht in die Notation von S aufnehmen wollen. Wir müssen klären, ob S wohldefiniert ist. Nach Voraussetzung sind $\mathcal{T}(\cdot)x$ und damit $\alpha(\mathcal{T}(\cdot)x)$ stetig für alle $x \in X$; $f\alpha(\mathcal{T}(\cdot)x)$ ist somit meßbar. Es ist $|f(t)\alpha(\mathcal{T}(t)x)| \leq |f(t)|\,\|\alpha\|\,\|\mathcal{T}(t)\|\,\|x\|$. Da für eine geeignete Konstante $C > 0$ die Beziehung $\|\mathcal{T}(t)\| \leq Cw(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt[3], folgt

$$\int_0^\infty |f(t)\alpha(\mathcal{T}(t)x)|\, dt \leq C\|\alpha\|\,\|x\|\,\|\widehat{f}\|_w. \tag{31}$$

Man sieht leicht, daß für $\widehat{f} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ und $\alpha \in X'$

$$S(\widehat{f}, \alpha, \cdot) : X \to \mathbb{C}, \qquad x \mapsto S(\widehat{f}, \alpha, x)$$

eine beschränkte lineare Abbildung ist mit

$$\|S(\widehat{f}, \alpha, \cdot)\| \leq \left(\sup_{t \in [0, t_0]} \|\mathcal{T}(t)\| + C \right) \|\alpha\|\,\|\widehat{f}\|_w.$$

Hiermit definieren wir

$$\Phi : \mathfrak{F}_w(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(X')$$

mit

$$\Phi(\widehat{f}) : X' \to X', \qquad \Phi(\widehat{f})\alpha := S(\widehat{f}, \alpha, \cdot)$$

[3]Hierbei wird ausgenutzt, daß $\sup_{t \in [0, t_0]} \|\mathcal{T}(t)\| < +\infty$ für alle $t_0 > 0$ (Proposition 11.3).

Offenbar ist $\Phi(\widehat{f})$ für $\widehat{f} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ linear und stetig mit

$$\|\Phi(\widehat{f})\| \leq C\|\widehat{f}\|_w,$$

und Φ somit wohldefiniert. Schließlich ist Φ selber linear und stetig mit

$$\|\Phi\| \leq C.$$

Wir wollen uns davon überzeugen, daß für alle $\widehat{f} \in \mathfrak{D}(M)$ und alle $\alpha \in X'$ gilt: $\Phi(\widehat{f})\alpha \in \mathfrak{D}(A')$.

Dazu müssen wir zeigen, daß sich die lineare Abbildung

$$\mathfrak{D}(A) \to \mathbb{C}, \qquad x \mapsto (\Phi(\widehat{f})\alpha)(Ax)$$

zu einem beschränkten linearen Funktional auf X fortsetzen läßt (§10, Abschnitt A). Hierzu ist die Produktregel 12.2 nützlich. Da nämlich für $\widehat{f} \in \mathfrak{D}(M)$ die Funktion f absolut stetig ist und ebenso $\alpha(\mathcal{T}(\cdot)x) = \int\limits_0^{\cdot} \frac{d}{ds}\alpha(\mathcal{T}(s)x)\,ds + \alpha(x)$, ergibt sich

$$\int_0^s f(t)\frac{d}{dt}\alpha(\mathcal{T}(t)x)\,dt = f(s)\alpha(\mathcal{T}(s)x) - f(0)\alpha(x) - \int_0^s (Df)(t)\alpha(\mathcal{T}(t)x)\,dt. \tag{32}$$

Für $x \in \mathfrak{D}(A)$ ist nach Lemma 11.5 und (31)

$$\int_0^\infty f(t)\alpha(\mathcal{T}(t)Ax)\,dt = \int_0^\infty f(t)\frac{d}{dt}\alpha(\mathcal{T}(t)x)\,dt.$$

Da wieder nach (31) das Integral $\int_0^\infty (Df)(t)\alpha(\mathcal{T}(t)x)\,dt$ existiert ($Df \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$!), folgt mit (32) die Konvergenz von $(s \mapsto f(s)\alpha(\mathcal{T}(s)x))$ für $s \to \infty$. Der Grenzwert muß Null sein, denn andernfalls existierte $\epsilon > 0$ mit

$$\epsilon \leq |f(s)\alpha(\mathcal{T}(s)x)| \leq \|\alpha\|\,\|x\|\,|f(s)|w(s)$$

für hinreichend großes s, im Widerspruch zu $f \in L^1_w(\mathbb{R})$. Wir erhalten damit

$$\int_0^\infty f(t)\frac{d}{dt}\alpha(\mathcal{T}(t)x)\,dt = -\int_0^\infty (Df)(t)\alpha(\mathcal{T}(t)x)\,dt - f(0)\alpha(x) \tag{33}$$

Für alle $\widehat{f} \in \mathfrak{D}(M)$, $\alpha \in X'$ und $x \in \mathfrak{D}(A)$ ergibt sich somit

$$\begin{aligned}(\Phi(\widehat{f})\alpha)(Ax) &= \int_0^\infty f(t)\alpha(\mathcal{T}(t)Ax)\,dt = \int_0^\infty f(t)\frac{d}{dt}\alpha(\mathcal{T}(t)x)\,dt \quad \text{(Lemma 11.5)}\\ &\overset{(33)}{=} -\int_0^\infty (Df)(t)\alpha(\mathcal{T}(t)x)\,dt - f(0)\alpha(x) \end{aligned}\tag{34}$$

und

$$\|(\Phi(\widehat{f})\alpha)(Ax)\| \leq (C\|Df\|_w + |f(0)|)\,\|x\|\,\|\alpha\|.$$

Damit läßt sich $\Phi(\widehat{f})\alpha \circ A : \mathfrak{D}(A) \to \mathbb{C}$ stetig auf ganz X fortsetzen. Für alle $\widehat{f} \in \mathfrak{D}(M)$ und $\alpha \in X'$ ist also $\Phi(\widehat{f})\alpha \in \mathfrak{D}(A')$, und für die Abbildung $A'\Phi(\widehat{f}) : X' \to X'$ gilt $\mathfrak{D}(A'\Phi(\widehat{f})) = X'$.

Eine weitere Familie von Abbildungen ist von Nöten. Für $t \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$P_t : \mathfrak{F}_w(\mathbb{R}) \to \mathfrak{F}_w(\mathbb{R}), \qquad \widehat{f} \mapsto \widehat{\tau_t f}$$

Wir haben bereits in Proposition 1.12 gesehen, daß $\|P_t\| \leq w(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist.

Wir stellen einen Zusammenhang zwischen M und A' her. Für $\widehat{f} \in \mathfrak{D}(M)$ ist

$$\Phi P_t(M\widehat{f}) = -\Phi P_t(\widehat{Df}) = -\Phi(\widehat{\tau_t Df}).$$

Für $\alpha \in X'$ und $x \in X$ ergibt sich

$$((\Phi P_t(M\widehat{f}))\alpha)x \;=\; -S(\widehat{\tau_t Df}, \alpha, x) = -\int_0^\infty (\tau_t Df)(s)\alpha(\mathcal{T}(s)x)\, ds. \tag{35}$$

Führt man dieselbe Rechnung mit $\widehat{f}$ anstelle von $M\widehat{f}$ aus, erhält man

$$((\Phi P_t(\widehat{f}))\alpha)x = \int_0^\infty (\tau_t f)(s)\alpha(\mathcal{T}(s)x)\, ds.$$

Mit (34) folgt für $\widehat{f} \in \mathfrak{D}(M)$, $\alpha \in X'$ und $x \in \mathfrak{D}(A)$

$$\begin{aligned}(\Phi P_t(\widehat{f})\alpha)(Ax) &= -\int_0^\infty D(\tau_t f)(s)\alpha(\mathcal{T}(s)x) - (\tau_t f)(0)\alpha(x)\\ &= -\int_0^\infty (\tau_t Df)(s)\alpha(\mathcal{T}(s)x)\, ds - f(-t)\alpha(x),\end{aligned}$$

wobei es natürlich Sinn macht, von $f(-t)$ zu sprechen, da f stetig ist.

Zusammen mit (35) erhält man für $\widehat{f} \in \mathfrak{D}(M)$, $\alpha \in X'$ und $x \in \mathfrak{D}(A)$

$$((\Phi P_t(M\widehat{f}))\alpha)x = (\Phi P_t(\widehat{f})\alpha)(Ax) + f(-t)\alpha(x)$$

d.h.

$$\Phi P_t(M\widehat{f}) = A'\Phi P_t(\widehat{f}) + f(-t). \tag{36}$$

Als Hilfsmittel erklären wir

$$\begin{aligned}\langle\mathbb{R}\rangle &:= \{r. \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : r_1 \geq 0, r_{k+1} > r_k \text{ für alle } k \in \mathbb{N},\ r_k \to +\infty\}, \text{ Menge der}\\ &\ \text{unbeschränkt monoton wachsenden Folgen positiver, reeller Zahlen},\\ \langle x\rangle &:= \{\alpha. : \mathbb{R} \to X' : \alpha_t(\mathcal{T}(t)x) = \|\mathcal{T}(t)x\| \text{ mit } \|\alpha_t\| = 1 \text{ falls } \mathcal{T}(t)x \neq 0,\\ &\ \alpha_t \equiv 0 \text{ falls } \mathcal{T}(t)x = 0\},\ x \in X,\\ \Lambda &:= \{(x, r., \eta., \alpha., l.) \in X \times \langle\mathbb{R}\rangle \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times X'^{\mathbb{R}} \times \mathbb{C}^{(X'^{\mathbb{N}})} : \eta_k = w(r_k) \text{ für alle}\\ &\ k \in \mathbb{N}, \alpha. \in \langle x\rangle, l. \in \mathrm{Li}_{\eta.}\}.\end{aligned}$$

Da X, $\mathcal{T}$ und w Teil unserer Voraussetzungen sind, sollen diese Bezeichner nicht in die Notation mit aufgenommen werden. Aufgrund des Satzes von Hahn-Banach ist die Menge $\langle x\rangle$ nicht leer. Die Menge $\mathrm{Li}_{\eta.}$ wurde bereits in Kapitel §8, Abschnitt A eingeführt.

Mit diesen Vorbereitungen können wir formal einen Intertwining-Operatoren konstruieren, der zwar noch trivial sein mag, aus dem heraus wir aber schon bald einen nicht-trivialen herleiten können. Wir betrachten hierzu ein $\widehat{f} \in \mathfrak{D}(M)$ und ein 5-Tupel $(x, r., w(r.), \alpha., \mathrm{li}_{w(r.)}) \in \Lambda$. Es gilt mit den Komponenten dieses Tupels

$$\begin{aligned} \|(\Phi P_{r_k}(\widehat{f}))\alpha_{r_k}\| &\leq \|\Phi P_{r_k}(\widehat{f})\| \, \|\alpha_{r_k}\| \leq \|\Phi\| \, \|P_{r_k}(\widehat{f})\| \, \|\alpha_{r_k}\| \\ &\leq \|\Phi\| w(r_k) \|\widehat{f}\|_w \|\alpha_{r_k}\| \end{aligned}$$

und damit

$$\frac{\|(\Phi P_{r_k}(\widehat{f}))\alpha_{r_k}\|}{w(r_k)} \leq \|\Phi\| \underbrace{\|\alpha_{r_k}\|}_{=0 \text{ oder } =1} \|\widehat{f}\|_w \leq \|\Phi\| \, \|\widehat{f}\|_w. \tag{37}$$

Da also

$$((\Phi P_{r_k}(\widehat{f}))\alpha_{r_k})_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty_{w(r.)}(\mathbb{N}, X'),$$

ist die nachfolgende Abbildung für $(x, r., w(r.), \alpha., \mathrm{li}_{w(r.)}) \in \Lambda$ wohldefiniert.

$$\begin{array}{rccl} j(x, r., w(r.), \alpha., \mathrm{li}_{w(r.)}): & \mathfrak{F}_w(\mathbb{R}) & \to & X' \\ & \widehat{f} & \mapsto & \mathrm{li}_{w(r.)}(((\Phi P_{r_k}(\widehat{f}))\alpha_{r_k})_{k\in\mathbb{N}}). \end{array} \tag{38}$$

14.1 Satz: *Sei $\mathcal{T}$ eine stark-stetige Operatorhalbgruppe mit infinitesimalen Erzeuger A uns sei w ein Beurling-Domar-Gewicht auf $\mathbb{R}$. $\mathcal{T}$ erfülle $\|\mathcal{T}(t)\| = O(w(t))$ für $t \to +\infty$. Dann definiert für jedes $(x, r., w(r.), \alpha., \mathrm{li}_{w(r.)}) \in \Lambda$ der gemäß (38) definierte Operator $j(x, r., w(r.), \alpha., \mathrm{li}_{w(r.)}) : \mathfrak{F}_w(\mathbb{R}) \to X'$ eine beschränkte, lineare Abbildung mit*

$$j(x, r., w(r.), \alpha., \mathrm{li}_{w(r.)})(M\widehat{f}) = -A' j(x, r., w(r.), \alpha., \mathrm{li}_{w(r.)})(\widehat{f}) \tag{39}$$

für alle $\widehat{f} \in \mathfrak{D}(M)$.

$\triangleright$ **Beweis :** Sei $j = j(x, r., w(r.), \alpha., \mathrm{li}_{w(r.)})$. Die Linearität von j ist klar.

$$\begin{aligned} \|j(\widehat{f})\| &= \|\mathrm{li}_{w(r.)}(((\Phi P_{r_k}(\widehat{f}))\alpha_{r_k})_{k\in\mathbb{N}})\| \\ &\leq \|((\Phi P_{r_k}(\widehat{f}))\alpha_{r_k})_{k\in\mathbb{N}}\|_{\infty, w(r.)} = \left\| \left(\frac{\|(\Phi P_{r_k}(\widehat{f}))\alpha_{r_k}\|}{w(r_k)} \right)_{k\in\mathbb{N}} \right\|_\infty \\ &\overset{(37)}{\leq} \|\Phi\| \, \|\widehat{f}\|_w, \end{aligned}$$

also ist j stetig. Um die Intertwining-Eigenschaft (39) für $\widehat{f} \in \mathfrak{D}(M)$ nachzuweisen, bemerken wir, daß wegen f stetig und $f(t) \to 0$ für $|t| \to +\infty$ auch $f(-r_k) \to 0$ für $k \to +\infty$. Wegen $w \geq 1$ konvergiert dann aber auch $\dfrac{f(-r_k)}{w(r_k)}$ für $k \to +\infty$ gegen 0. Da $\mathrm{li}_{w(r.)}$ eine Fortsetzung von $\lim_{w(r.)} : c_{w(r.)}(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ ist, ergibt sich also

$$\mathrm{li}_{w(r.)}((f(-r_k)\alpha_{r_k})_{k\in\mathbb{N}}) = 0.$$

Hiermit erhält man den gewünschten Zusammenhang (39):

$$\begin{aligned} j(M\widehat{f}) &= \mathrm{li}_{w(r.)}(((\Phi P_{r_k}(\widehat{f}))\alpha_{r_k})_{k\in\mathbb{N}}) \\ &\overset{(36)}{=} \mathrm{li}_{w(r.)}((-A'((\Phi P_{r_k}(\widehat{f}))\alpha_{r_k})_{k\in\mathbb{N}} - (f(-r_k)\alpha_{r_k})_{k\in\mathbb{N}}) \\ &= -A' \mathrm{li}_{w(r.)}(((\Phi P_{r_k}(\widehat{f}))\alpha_{r_k})_{k\in\mathbb{N}}) \\ &= -A' j(\widehat{f}) \end{aligned}$$

für $\widehat{f} \in \mathfrak{D}(M)$. $\lhd$

B. Ein Existenzsatz für kontinuierliche Intertwining-Operatoren

14.2 Satz: *Sei $\mathcal{T}$ ein stark-stetige Operatorhalbgruppe mit infinitesimalen Erzeuger $A \in \mathcal{C}(X)$ und sei w ein Beurling-Domar-Gewicht auf $\mathbb{R}$. $\mathcal{T}$ erfülle $\|\mathcal{T}(t)\| = O(w(t))$ für $t \to \infty$, und $\left(\frac{\mathcal{T}(t)}{w(t)}\right)_{t\in[0,\infty)}$ konvergiere in der starken Operatornorm für $t \to \infty$ nicht gegen 0. Dann existiert ein nicht-trivialer Intertwining-Operator $j : \mathfrak{F}_w(\mathbb{R}) \to X'$ für $\mathcal{T}$ und w.*

$\rhd$ **Beweis :** Wenn $\left(\frac{\mathcal{T}(t)}{w(t)}\right)_{t\in[0,\infty)}$ in der starken Operatortopologie für $t \to \infty$ nicht gegen 0 konvergiert, existieren $x_0 \in X$, $\epsilon > 0$ und eine monoton wachsende Folge $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ positiver, reeler Zahlen mit $p_k \to \infty$ für $k \to \infty$ und

$$\frac{\|\mathcal{T}(p_k)x_0\|}{w(p_k)} \geq \epsilon \tag{40}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Aufgrund der Stetigkeit von $\mathcal{T}(\cdot)x_0$ existiert ein $0 < \delta < 1$, so daß für alle $0 \leq r < \delta$ gilt:

$$\|\mathcal{T}(r)x_0 - \mathcal{T}(0)x_0\| = \|\mathcal{T}(r)x_0 - x_0\| \leq \frac{\epsilon}{2C},$$

wobei C eine Konstante mit $\|\mathcal{T}(t)\| \leq Cw(t)$ für hinreichend großes t ist. In der Folge $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ können wir ohne Einschränkung p_1 so groß wählen, daß für alle $k \in \mathbb{N}$ $\|\mathcal{T}(p_k)\| \leq Cw(p_k)$ gilt. Für $s \in [p_k, p_k + \delta]$ erhält man dann ($s = p_k + r$, $0 \leq r < \delta$):

$$\|\mathcal{T}(s)x_0 - \mathcal{T}(p_k)x_0\| \leq \|\mathcal{T}(p_k)\|\,\|\mathcal{T}(r)x_0 - x_0\| \leq Cw(p_k)\frac{\epsilon}{2C} = \frac{\epsilon}{2}w(p_k). \tag{41}$$

Mit $f = \chi_{[0,\delta]}$ und $\alpha. \in \langle x_0\rangle$ ist nun:

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^\infty (\tau_{p_k} f)(s)\alpha_{p_k}(\mathcal{T}(s)x_0)\,ds\right| &= \left|\int_{p_k}^{p_k+\delta} \alpha_{p_k}(\mathcal{T}(s)x_0)\,ds\right| \\
&\leq \int_{p_k}^{p_k+\delta} \|\mathcal{T}(s)x_0\|\,ds \leq C\|x_0\| \int_{p_k}^{p_k+\delta} w(s)\,ds \\
&\leq C\|x_0\|w(p_k)\int_0^\delta w(s)\,ds \leq Kw(p_k)
\end{aligned}$$

mit einer Konstanten $K \geq C\|x_0\| \int_0^\delta w(s)\,ds$ (w ist auf $[0,\delta]$ beschränkt; siehe 1.18). Insbesondere ist für

$$a_k := \int_{p_k}^{p_k+\delta} \alpha_{p_k}(\mathcal{T}(s)x_0)\,ds$$

$\dfrac{a.}{w(p.)} \in \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{C})$.

Wegen letzterem existiert eine streng monoton wachsende Folge $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen mit

$$\lim_{i\to\infty} \frac{a_{k_i}}{w(p_{k_i})} \text{ existiert.}$$

Einen Intertwining-Operator $j : \mathfrak{F}_w(\mathbb{R}) \to X'$ können wir nun, wenn wir zwei Folge $r.$ und $r.$ definieren durch $r_i := p_{k_i}$ und $q_i := a_{k_i}$, $i \in \mathbb{N}$, gemäß Abschnitt A erklären durch $j = j(x_0, r., w(r.), \alpha., \mathrm{li}_{w(r.)})$ (Proposition 14.1). Wir müssen nur noch zeigen, daß j nicht verschwindet.

Sei $f = \chi_{[0,\delta]}$ wie oben.

$$\begin{aligned} j(\widehat{f})x_0 &= \mathrm{li}_{w(r.)}(((\Phi P_{r_i}(\widehat{f}))\alpha_{r_i})_{i\in\mathbb{N}})x_0 \\ &= \mathrm{li}_{w(r.)}\left(\left(\int_{r_i}^{r_i+\delta} \alpha_{r_i}(\mathcal{T}(s)x_0)\right)_{i\in\mathbb{N}}\right) = \mathrm{li}_{w(r.)}(q.) = \lim_{i\to\infty} \frac{q_i}{w(r_i)} \end{aligned}$$

Es muß also nur noch $\lim\limits_{i\to\infty} \dfrac{q_i}{w(r_i)} \neq 0$ nachgewiesen werden.

Es ist

$$\left|\int_{r_i}^{r_i+\delta} \alpha_{r_i}(\mathcal{T}(s)x_0 - \mathcal{T}(r_i)x_0)\, ds\right| \leq \int_{r_i}^{r_i+\delta} \|\mathcal{T}(s)x_0 - \mathcal{T}(r_i)x_0\|\, ds \overset{(41)}{\leq} \frac{\delta\epsilon}{2} w(r_i) \tag{42}$$

und

$$\int_{r_i}^{r_i+\delta} \alpha_{r_i}(\mathcal{T}(r_i)x_0)\, ds \leq \delta\|\mathcal{T}(r_i)x_0\| \overset{(40)}{\leq} \delta\epsilon w(r_i).$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta\epsilon w(r_i) &\leq \int_{r_i}^{r_i+\delta} \alpha_{r_i}(\mathcal{T}(r_i)x_0)\, ds \\ &\leq \left|\int_{r_i}^{r_i+\delta} \alpha_{r_i}(\mathcal{T}(r_i)x_0 - \mathcal{T}(s)x_0)\, ds\right| + \left|\int_{r_i}^{r_i+\delta} \alpha_{r_i}(\mathcal{T}(s)x_0)\, ds\right| \\ &\overset{(42)}{\leq} \frac{\delta\epsilon}{2} w(r_i) + |q_i|. \end{aligned}$$

Folglich ist $|q_i| \geq \frac{\delta\epsilon}{2} w(r_i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

$$\left|\lim_{i\to\infty} \frac{q_i}{w(r_i)}\right| = \lim_{i\to\infty} \frac{|q_i|}{w(r_i)} \geq \frac{\delta\epsilon}{2},$$

insbesondere ist $j(\widehat{f}) \not\equiv 0$ und damit $j \not\equiv 0$. ◁

§15
Asymptotisches Verhalten stark-stetiger Operatorhalbgruppen

15.1 Satz: *Sei $\mathcal{T}$ eine stark-stetige Operatorhalbgruppe mit infinitesimalem Erzeuger $A \in \mathcal{C}(X)$ und sei w ein Beurling-Domar-Gewicht auf $\mathbb{R}$. $\mathcal{T}$ erfülle $\|\mathcal{T}(t)\| = O(w(t))$ für $t \to \infty$. Sei $\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ abzählbar und für alle $\lambda \in \sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ gelte ${X'}_{-A'}(\{\lambda\}) = \{0\}$. Dann konvergiert $\left(\dfrac{\mathcal{T}(t)}{w(t)}\right)_{t\in[0,+\infty)}$ in der starken Operatortopologie gegen 0.*

$\triangleright$ **Beweis :** Würde $\left(\frac{\mathcal{T}(t)}{w(t)}\right)_{t\in[0,+\infty)}$ in der starke Operatortopologie nicht gegen 0 konvergieren, so existierte nach Satz 14.2 ein nicht-trivialer Intertwining-Operator $j : \mathfrak{F}_w(\mathbb{R}) \to X'$, was mit den gemachten Voraussetzungen nach Satz 13.13 nicht möglich ist. $\triangleleft$

Wir führen die Anwendung von Satz 15.1 an einem einfachen Beispiel vor.

15.2 Beispiel: Sei $X = X' = \mathbb{C}$ und $T : [0, +\infty) \to \mathbb{C} = \mathcal{L}(\mathbb{C})$, $\mathcal{T}(t) = e^{at}$, $a \in \mathbb{C}$ fest. Dann ist offensichtlich $\mathcal{T}(0) = 1$, $\mathcal{T}(s + t) = \mathcal{T}(s)\mathcal{T}(t)$ für $s, t \geq 0$ und $\mathcal{T}(\cdot)x$ stetig für alle $x \in \mathbb{C}$. Der infinitesimaler Erzeuger von $\mathcal{T}$ berechnet sich zu $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto ax$, mit $\mathfrak{D}(A) = \mathbb{C}$. Es gilt $\|\mathcal{T}(t)\| = |e^{at}| = e^{t\operatorname{Re} a}$. Um $\|\mathcal{T}(t)\| = O(w(t))$ für $t \to \infty$ zu haben, etwa mit $w \equiv 1$, muß $\operatorname{Re} a \leq 0$ sein. $\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ ist höchstens einpunktig und damit abzählbar. Da $A' = A$ ist, schreibt sich $\mathbb{C}_{-A'}(\{\lambda\})$ folgendermaßen:

$$\mathbb{C}_{-A'}(\{\lambda\}) = \{x \in \mathbb{C} : \text{es existiert } f : \mathbb{C}\backslash\{\lambda\} \to \mathbb{C} \text{ analytisch mit } (z + a)f(z) = x,\ f \text{ verschwindet im Unendlichen}\}$$

Ist $\operatorname{Re} a < 0$, $\lambda \in i\mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{C}_{-A'}(\{\lambda\})$, so ist mit $-a \neq \lambda$: $0 = (-a + a)f(-a) = x$, d.h. $\mathbb{C}_{-A'}(\{\lambda\}) = \{0\}$. Satz 15.1 impliziert somit die Konvergenz von $(\mathcal{T}(t))_{t\in[0,+\infty)}$ in der starken Operatortopologie (wie erwartet).

Ist $\operatorname{Re} a = 0$ und $\lambda = -a$, so ergibt sich $\mathbb{C}_{-A'}(\{-a\}) = \mathbb{C}$ und Satz 15.1 macht keine Aussage. Wir wissen natürlich, daß in diesem Fall $(\mathcal{T}(t))_{t\in[0,+\infty)}$ in der starken Operatortopologie nicht gegen 0 konvergiert.

Unseres Wissens nach ist Satz 15.1 über das asymptotische Verhalten stark-stetiger Operatorhalbgruppen neu, wie aber schon im diskreten Fall sind es die Ideen einer solchen Formulierung nicht. Auch hier sind als Vorreiter Arendt und Batty sowie Lyubich und Phong zu nennen. Ihre kontinuierlische Version von Satz 9.3 lautet:

15.3 Satz: (Arendt, Batty [1], Lyubich, Phong [20])

Sei $\mathcal{T} : [0, +\infty) \to \mathcal{L}(X)$, X Banachraum, eine stark-stetige Operatorhalbgruppe mit infinitesimalem Erzeuger A. Es gelte $\|\mathcal{T}(t)\| \leq C$ für alle $t \geq 0$ und eine Konstante $C > 0$. Ist dann $\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ abzählbar und $\sigma_p(A) \cap i\mathbb{R}$ leer, dann konvergiert $\mathcal{T}(t)$ in der starken Operatortopologie für $t \to \infty$ gegen 0.

Wir wollen uns nicht wiederholen und verweisen deshalb auf die Bemerkung, die wir bereits im Anschluß zu Satz 9.3 gemacht haben.

Phong liefert wieder die Verallgemeinerung.

15.4 Satz: (Phong [19])

Sei $\mathcal{T} : [0, +\infty) \to \mathcal{L}(X)$, X Banachraum, eine stark-stetige Operatorhalbgruppe mit infinitesimalem Erzeuger A. Es gelte

$$\|\mathcal{T}(t)\| \leq w(t)$$

für eine Gewichtsfunktion w auf $\mathbb{R}$ und $\widetilde{w}(t) := \limsup_{s\to\infty} \frac{w(t+s)}{w(s)} = O(t^k)$, $k \geq 0$. Ist dann

$\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ abzählbar und $\sigma_p(A') \cap i\mathbb{R}$ leer, dann konvergiert $\frac{\mathcal{T}(t)}{w(t)}$ in der starken Operatortopologie für $t \to \infty$ gegen 0.

Wie im diskreten Fall leitet man hieraus leicht das nachfolgende Korollar ab.

15.5 Korollar: *Sei $\mathcal{T} : [0, +\infty) \to \mathcal{L}(X)$, X Banachraum, eine stark-stetige Operatorhalbgruppe mit infinitesimalem Erzeuger A. Für ein Gewicht w auf $\mathbb{R}$ mit $w(t) = O(t^k)$, $k \geq 0$, gelte $\|\mathcal{T}(t)\| \leq w(t)$, $\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ abzählbar und $\sigma(A') \cap i\mathbb{R}$ leer. Dann konvergiert $\frac{\mathcal{T}(t)}{w(t)}$ in der starken Operatortopologie für $t \to \infty$ gegen 0.*

In dieser Form wird die Ähnlichkeit zu Satz 15.1 am deutlichsten: ein allgemeineres Gewicht für eine stärkere Voraussetzung als $\sigma_p(A') \cap i\mathbb{R} = \emptyset$.

Abschließend zeigen wir, wie man Korollar 15.5 aus dem Resultat von Phong mit unserer Beweismethode zeigen kann. Für den Rest dieses Paragraphen nehmen wir deshalb an, daß k eine fest vorgegebene natürliche Zahl und daß w ein Beuerling-Domar-Gewicht auf $\mathbb{R}$ mit $w(t) = O(|t|^k)$ für $|t| \to \infty$ ist; es existiert dann eine Konstante $K > 0$ mit $w(t) \leq K|t|^k$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Abbildung $j : \mathfrak{F}_w(\mathbb{R}) \to X'$ bezeichne wie bisher einen kontinuierlichen Intertwining-Operator, für dessen Träger wie $\operatorname{supp} j = \{\lambda\}$ annehmen mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$. Mit $\widetilde{M}$ bezeichnen wir die in §13 auf Seite 76 definierten Operator.

Die Aussage 9.7 angewandt auf den Operator $\lambda - \widetilde{M}$ wird wie im diskreten Fall eine wichtige Rolle spielen. Wir müssen deshalb zunächst zeigen, daß $\lambda - \widetilde{M}$ ein verallgemeinert skalarer Operator ist.

Wir beginnen mit dem Nachweis, daß sich (unter den Voraussetzungen für das Gewicht w) der Schwartzraum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ der schnell fallenden C^∞-Funktionen auf $\mathbb{R}$ topologisch in $L^1_w(\mathbb{R})$ einbetten läßt. Hierbei bezeichnen wir mit $q_{n,m}$ für $n, m \in \mathbb{N}_0$ die die Topologie von $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ erzeugende Halbnormenfamilie; es ist

$$q_{n,m}(f) = sup_{x \in \mathbb{R}} \left(1 + |x|^m\right) \left| f^{(n)}(x) \right|$$

für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Ist nun $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, so existiert für $m = k + 2$ und $n = 0$ eine Konstante $C > 0$ mit

$$\left(1 + |x|^{k+2}\right) |f(x)| \leq C$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Eine direkte Rechnung zeigt

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| w(x)\, dx \leq C \int_{\mathbb{R}} \frac{w(x)}{1 + |x|^{k+2}}\, dx \leq CK \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|^k}{1 + |x|^{k+2}}\, dx < +\infty. \tag{43}$$

Also ist $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1_w(\mathbb{R})$.

Ist $(f_l)_{l \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit $f_l \to 0$ für $l \to \infty$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, so existiert zu beliebigem $\epsilon > 0$ ein $l_0 \in \mathbb{N}$ mit $q_{0,k+2}(f_l) < \epsilon$ für alle $l \geq l_0$. Wie in (43) ergibt sich mit ϵ anstelle von C die

Beziehung

$$\int_{\mathbb{R}} |f_l(x)| w(x)\, dx \leq \epsilon K \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|^k}{1+|x|^{k+2}}\, dx$$

für alle $l \geq l_0$. Da ϵ beliebig gewählt werden kann und die rechte Seite unabhängig von l ist, folgt $f_l \to 0$ für $l \to \infty$ in $L^1_w(\mathbb{R})$. Die Einbettung $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^1_w(\mathbb{R})$ ist damit stetig.

Da die Fouriertransformation bzgl. der Topologie auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ein Homöomorphismus $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist und da die Fouriertransformation auch ein Homöomorphismus $L^1_w(\mathbb{R}) \to \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ ist (Definiton!), läßt sich $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ auch in $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})(\mathbb{R})$ topologisch einbetten. Diese Einbettung bezeichnen wir mit i.

Wegen $C^\infty_c(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ können wir eine C^∞-Funktionen $\widehat{e} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger und $\lambda \notin \operatorname{supp}(1\widehat{e})$ wählen. $[\widehat{e}]$ ist dann ein Einselement in $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})/I(j)$ (vgl. **??**). Man überprüft leicht, daß die Abbildung $\kappa : C^\infty(\mathbb{C}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $f \mapsto f(\lambda + i\cdot)|_{\mathbb{R}}\widehat{e}$ stetig ist mit $\kappa(C^\infty(\mathbb{C})) \subset C^\infty_c(\mathbb{R})$. Jede Banachalgebra $\mathcal{A}$ läßt sich vermöge $a \overset{\theta}{\mapsto} M_a$ $(a \in \mathcal{A})$ mit $M_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $b \mapsto ab$, isometrisch in $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ einbetten. Wenden wir dies auf $\mathcal{A} = \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})/I(j)$ an und beachten wir noch die Stetigkeit der Quotientenabbildung $\pi : \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})(\mathbb{R}) \to \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})/I(j)$, so können wir eine stetige Abbildung

$$C^\infty(\mathbb{C}) \to \mathcal{L}(\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})/I(j))$$

definieren durch

$$\Phi := \theta \circ \pi \circ i \circ \kappa.$$

Konkreter ist also für alle $f \in C^\infty(\mathbb{C})$ und alle $[\widehat{g}] \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})/I(j)$

$$\Phi(f)[\widehat{g}] = [f(\lambda + i\cdot)|_{\mathbb{R}}\widehat{e}\widehat{g}].$$

Für $f = 1_{\mathbb{C}}$ und $f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ sowie $[\widehat{g}] \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R})/I(j)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\Phi(1_{\mathbb{C}})[\widehat{g}] &= [\widehat{e}\widehat{g}] = [\widehat{g}], \text{ d.h. } \Phi(1_{\mathbb{C}}) = \mathrm{id}_{\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})/I(j)}, \text{ und} \\
\Phi(\mathrm{id}_{\mathbb{C}})[\widehat{g}] &= [\widehat{h}\widehat{e}\widehat{g}] = (\lambda - \widetilde{M})[\widehat{g}], \text{ d.h. } \Phi(\mathrm{id}_{\mathbb{C}}) = \lambda - \widetilde{M},
\end{aligned}$$

wobei $\widehat{h}$**??** ist.

Anhang A
Das Lemma von Fatou und harmonische Analysis

Beim Beweis der Regularität von Beurling-Algebren spielt das Lemma von Fatou neben einem Satz von Paley und Wiener, den wir im Anhang B angeben und beweisen werden, eine wichtige Rolle. Das Lemma läßt sich in zwei Versionen formulieren: zum einen für die Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$, und zum anderen für die obere Halbebene von $\mathbb{C}$. In der ersten Version findet man das Lemma von Fatou in zahlreichen Büchern formuliert und bewiesen – etwa in [14], Seite 34ff, und [7], Seite 108ff –, so daß wir uns an dieser Stelle darauf beschränken wollen, letzteres in einer für uns relevanten Form anzugeben. Eigentlich wichtig für uns ist das Lemma allerdings in der zweiten Version. Da wir davon ausgehen, daß diese weniger geläufig ist, wollen wir sie, auch wegen ihrer Wichtigkeit für diese Arbeit, beweisen.

Hier und indirekt auch im Anhang B werden das Vokabular und einige grundlegende Aussagen aus der harmonischen Analysis benötigt. Die harmonische Analysis ist ein in vielen Büchern in ihren Grundzügen gut und ausführlich dargestellte Theorie, so daß wir es an dieser Stelle darauf bewenden lassen wollen, für die im folgenden anzutreffenden Begriffe und Aussagen auf die bereits weiter oben genannte Literatur zu verweisen.

Im folgenden sei $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ und $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Wir schreiben die Elemente von Γ bzw. $\mathbb{D}$ frei in der Form $z = e^{i\theta}$ bzw. $z = re^{i\theta}$ mit $r \in [0, 1)$ und $\theta \in [-\pi, \pi)$ eindeutig bestimmt.

Ist $f \in L^1(\Gamma)$, so definiert

$$\begin{array}{rccl} u: & \mathbb{D} & \to & \mathbb{C} \\ & re^{i\theta} & \mapsto & \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\tau}+re^{i\theta}}{e^{i\tau}-re^{i\theta}}\right) f(e^{i\tau})\, d\tau \end{array} \tag{44}$$

eine auf $\mathbb{D}$ harmonische Funktion. Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{D} & \to & \mathbb{R} \\ re^{i\theta} & \mapsto & |u(re^{i\theta})|^2 \end{array}$$

ist subharmonisch und

$$\begin{array}{rcl} [0,1) & \to & \mathbb{R} \\ r & \mapsto & \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\tau})|^2\, d\tau \end{array}$$

monoton wachsend. Ist für $f \in L^2(\Gamma) \subset L^1(\Gamma)$ die gemäß (44) definierte Funktion u nicht nur harmonisch, sondern sogar analytisch – man kann zeigen, daß dies genau dann der Fall ist, wenn die negativen Fourierkoeffizienten von f verschwinden; $\widehat{f}(n) = 0$ für alle $n < 0$ –, so gilt sogar

$$\sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\tau})|^2 \, d\tau = \lim_{r \to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\tau})|^2 \, d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\tau})|^2 \, d\tau. \tag{45}$$

Von einer Folge $r.e^{i\theta.} \subset \mathbb{D}$ sagt man, sie konvergiere *nicht-tangential* gegen ein $e^{i\theta_*} \in \Gamma$, $\theta_* \in [-\pi, \pi)$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

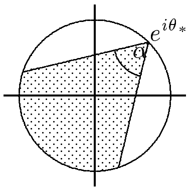

Abb. 1

(i) $r_n \to 1$ für $n \to +\infty$;

(ii) $e^{i\theta_n} \to e^{i\theta_*}$ für $n \to +\infty$;

(iii) es existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $\left\{ \frac{|\theta_n - \theta_*|}{1 - r_n} \right\}_{n \geq m}$ ist beschränkt.

Die geometrische Interpretation des nicht-tangentialen Limes wird in Abb. A.1 verdeutlicht: eine Folge, die nicht-tangential gegen $e^{i\theta_*}$ konvergiert, muß mit einem Folgenrest ganz in der schattierten Fläche liegen; der Öffnungswinkel α dieser Fläche hängt von Bedingung (iii) ab.

Das Lemma von Fatou lautet:

A.1 Lemma von Fatou: *Für eine Funktion $f \in L^1(\Gamma)$ gilt für die gemäß (44) definierte harmonische Funktion $u : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ und für fast alle $\theta_* \in [-\pi, \pi)$ die folgende Konvergenzaussage:*

Ist $r.e^{i\theta.} \subset \mathbb{D}$ eine Folge, die nicht-tangential gegen $e^{i\theta_*}$ konvergiert, so ist

$$\lim_{n \to +\infty} u(r_n e^{i\theta_n}) = 2\pi f(e^{i\theta_*}).$$

Wir haben bereits erwähnt, daß sich das Lemma von Fatou noch etwas allgemeiner formuliert läßt, wir wollen hierauf aber nicht weiter eingehen und verweisen auf die Literatur.

Bezeichnen wir mit $\mathbb{H}^o$ die obere Halbebene von $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}^o = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, und schreiben wir die Elemente von $\mathbb{H}^o$ frei in der Form $z = x + iy$ mit $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$, so lautet das Lemma von Fatou für die obere Halbebene in einer etwas abgeschwächten Form:

A.2 Lemma von Fatou: *Für eine meßbare Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\left(t \mapsto \frac{F(t)}{1+t^2}\right) \in L^1(\mathbb{R})$ und*

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{H}^o & \to & \mathbb{C} \\ & x+iy & \mapsto & \displaystyle\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{F(s)y}{(x-s)^2 + y^2} \, ds \end{array}$$

gilt: g ist auf $\mathbb{H}^o$ harmonisch und für fast alle $x \in \mathbb{R}$ hat man

$$\lim_{y \to 0^+} g(x + iy) = F(x).$$

(Allgemeiner genügt es im letzten Grenzübergang, $\widetilde{x} + i\widetilde{y}$ nicht-tangential gegen x zu haben; vgl. [14], Seite 123.)

Bevor wir den Beweis von Lemma A.2 führen, erinnern wir an die *Cayleytransformation* $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{H}^o$, die einen Homöomorphismus zwischen $\mathbb{D}$ und $\mathbb{H}^o$ darstellt:

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{D} & \to & \mathbb{H}^o \\ & z & \mapsto & i\dfrac{1+z}{1-z} \end{array} \qquad \text{mit} \qquad \begin{array}{rccc} \varphi^{-1} : & \mathbb{H}^o & \to & \mathbb{D} \\ & w & \mapsto & \dfrac{iw+1}{iw-1}. \end{array}$$

Die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \Gamma\backslash\{1\} & \to & \mathbb{R} \\ & z & \mapsto & i\dfrac{1+z}{1-z} \end{array} \qquad \text{mit} \qquad \begin{array}{rccc} \psi^{-1} : & \mathbb{R} & \to & \Gamma\backslash\{1\} \\ & w & \mapsto & \dfrac{iw+1}{iw-1} \end{array}$$

stellt einen Homöomorphismus zwischen $\Gamma\backslash\{1\}$ und $\mathbb{R}$ dar.

$\triangleright$ **Beweis** von Lemma A.2: Für $s = \psi(e^{i\tau})$, $\tau \in [-\pi, \pi)\backslash\{0\}$, und $w = \varphi(re^{i\theta}) = x + iy$, $r \in [0, 1)$, $\theta \in [-\pi, \pi)$, $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$, ergibt sich:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\tau} + re^{i\theta}}{e^{i\tau} - re^{i\theta}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\psi^{-1}(s) + \varphi^{-1}(w)}{\psi^{-1}(s) - \varphi^{-1}(w)}\right) = \mathrm{Re}\left(i\frac{sw+1}{w-s}\right) = \frac{y(1+s^2)}{(x-s)^2 + y^2}.$$

Es ist $e^{i\tau} = \dfrac{is+1}{is-1}$ und man erhält

$$\frac{1}{2\pi}\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+s^2}.$$

Definiert man

$$\begin{array}{rccc} f : & \Gamma & \to & \mathbb{C} \\ & e^{i\tau} & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cll} F(\psi(e^{i\tau})) & \text{falls} & \tau \neq 0 \\ 0 & \text{falls} & \tau = 0 \end{array} \right. \end{array},$$

so ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\tau})|\, d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(\psi(e^{i\tau}))|\, d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{|F(s)|}{1+s^2}\, ds < +\infty \tag{46}$$

(Variablentransformation $s = \psi(e^{i\tau})$), d.h. $f \in L^1(\Gamma)$.

Wir haben weiter oben bereits angemerkt, daß

$$re^{i\theta} \mapsto u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\tau} + re^{i\theta}}{e^{i\tau} - re^{i\theta}}\right) f(e^{i\tau})\, d\tau$$

eine harmonische Funktion ist. Ist wieder $s = \psi(e^{i\tau})$ und $w = \varphi(re^{i\theta}) = x + iy$, so berechnet man ($s = s(\tau)$)

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\tau} + re^{i\theta}}{e^{i\tau} - re^{i\theta}}\right) f(e^{i\tau})\, d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}\left(i\frac{sw+1}{w-s}\right) F(\psi(e^{i\tau}))\, d\tau \quad (47) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{F(s)y(1+s^2)}{(x-s)^2+y^2}\frac{ds}{1+s^2} = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{F(s)y}{(x-s)^2+y^2}\, ds = g(w). \end{aligned}$$

Also ist $g(w) = u(\varphi^{-1}(w))$ und g als Zusammensetzung einer analytischen und einer harmonischen Funktion harmonisch.

Die Aussage bezüglich des Grenzwertes,

$$\lim_{y\to 0^+} g(x+iy) = F(x) \qquad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R},$$

kommt wegen $F(x) = f(\psi^{-1}(x))$ und $g(x+iy) = u(\varphi^{-1}(x+iy))$ der Aussage

$$\lim_{y\to 0^+} u(\varphi^{-1}(x+iy)) = f(\psi^{-1}(x)) \qquad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}$$

gleich. Man ist fertig, wenn für $r_y e^{i\theta_y} := \varphi^{-1}(x+iy)$, $y > 0$, gezeigt werden kann, daß $\{r_y e^{i\theta_y}\}_{y>0}$ nicht-tangential gegen $\psi^{-1}(x)$ für $y \to 0^+$ konvergiert (Lemma A.1).

Offensichtlich konvergiert $r_y = |\varphi^{-1}(x+iy)| = \dfrac{x^2+(y-1)^2}{x^2+(y+1)^2}$ für $y \to 0^+$ gegen 1 und $e^{i\theta_y} = \dfrac{\varphi^{-1}(x+iy)}{r_y}$ gegen $\frac{ix+1}{ix-1} = e^{i\theta_*} = \psi^{-1}(x)$ $(\theta_* \in [-\pi,\pi))$. Man berechnet leicht $\theta_y = \arctan \frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}$ und $\theta_* = \arctan \frac{-2x}{x^2+1}$. Es bleibt also nur

$$\left\{ \frac{|\theta_y - \theta_*|}{1-r_y} \right\}_{0<y<\delta} \quad \text{beschränkt} \tag{48}$$

für hinreichend kleines $\delta > 0$ zu zeigen. Dabei können wir uns ohne Beschränkung mit $\theta_* \in (-\pi,\pi)$ begnügen, denn auf einen Punkt kommt es bei unserer Konvergenzaussage nicht an.

Der Mittelwertsatz und $0 < y < 1$ liefern die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \arctan \frac{-2x}{x^2+(y+1)^2} - \arctan \frac{-2x}{x^2+1} \right| &\le \frac{1}{1+\left(\frac{-2x}{x^2+4}\right)^2} \left| \frac{-2x}{x^2+(y+1)^2} - \frac{-2x}{x^2+1} \right| && (49) \\ &\le \frac{4|x|(x^2+4)}{(x^2+1)(5x^2+4)}, && (50) \end{aligned}$$

wobei die rechte Seite gleichmäßig beschränkt in x ist. Mit der oben angegebenen Darstellung von r_y läßt sich das gesuchte δ im Sinne von (48) leicht finden. $\triangleleft$

Anhang B
Ein Satz von Paley und Wiener

Paley und Wiener haben in ihrem im Jahre 1934 erschienen Buch „Fourier-Transform of the complex domain“[18] einen Satz bewiesen, der sich zwischenzeitlich als äußerst wichtig herausgestellt hat. Eine seiner Anwendungen ist der Regularitätsnachweis gewisser Beurling-Algebren (siehe §1). Da den regulären Beurling-Algebren in dieser Arbeit eine Schlüsselrolle zukommt, und da der Regularitätsbeweis für bestimmte Beurling-Algebren so entscheidend ist, haben wir uns dazu entschieden, einen Beweis dieses Sates im Anhang B zu geben. Wir richten uns dabei nach der bereits zitierte Originalarbeit [18] der beiden Autoren, erlauben uns aber, eine etwas modernere Sprechweise zu verwenden.

Im folgenden bezeichne $\mathfrak{F}$ die Plancherel-Transformation $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ (vgl. Abschnitt B in §3).

B.1 Satz von Paley und Wiener: *Zwischen den beiden Mengen*

$$L^2_\star(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{ es existiert } x_0 \in \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = 0 \text{ für fast alle } x \geq x_0\} \text{ und}$$
$$L^2_\dagger(\mathbb{R}) = \left\{F \in L^2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} \frac{|\log|\mathfrak{F}F(s)||}{1+s^2}\, ds < +\infty\right\}$$

besteht der folgende Zusammenhang:

a) $L^2_\star(\mathbb{R}) \subseteq L^2_\dagger(\mathbb{R})$

b) für alle $F \in L^2_\dagger(\mathbb{R})$ *existiert ein* $f \in L^2_\star(\mathbb{R})$ *mit* $|\mathfrak{F}f| = |\mathfrak{F}F|$.

Hilfreich für den Beweis der Teilaussage a) (Behauptung B.3) wird der *Satz von Jensen* sein, den wir sogleich zitieren wollen ([6], chapter XI, Theorem 1.2). Außerdem werden die im Anhang A angegebenen Ergebnisse aus der harmonischen Analysis benutzt werden. $\mathbb{D}$ bezeichnet im folgenden die Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$ und Γ den Einheitskreisrand.

B.2 Jensen: *Für eine auf* $\mathbb{D}$ *analytische Funktion* f *mit* $f(0) \neq 0$ *und den gemäß ihrer Vielfachheit gezählten Nullstellen* $a_1, ..., a_n \in \mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ *von* f, $n \in \mathbb{N}$, $0 < r < 1$, *ist*

$$\log|f(0)| = -\sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{r}{|a_k|}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\tau})|\, d\tau$$

bzw.

$$\log|f(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\tau})|\, d\tau. \tag{51}$$

B.3 Behauptung: *Mit den Bezeichnungen aus Satz B.1 gilt:*

$$L^2_\star(\mathbb{R}) \subseteq L^2_\dagger(\mathbb{R})$$

$\triangleright$ **Beweis :** Sei $F \in L^2_\star(\mathbb{R})$ und sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig mit $F(x) = 0$ für fast alle $x \geq x_0$. Seien φ und ψ die bereits im Anhang A angegeben Homöomorphismen zwischen $\mathbb{D}$ und $\mathbb{H}^o$, $\mathbb{H}^o$ die obere Halbebene von $\mathbb{C}$, bzw. $\Gamma\backslash\{1\}$ und $\mathbb{R}$. Sei f definiert durch

$$\begin{array}{rccl} f: & \Gamma & \to & \mathbb{C} \\ & e^{i\tau} & \mapsto & \begin{cases} \mathfrak{F}F(\psi(e^{i\tau})) & \text{falls } e^{i\tau} \neq 1 \\ 0 & \text{falls } e^{i\tau} = 1 \end{cases} \end{array}$$

Die bereits in (46) benutzte Variablentransformation $s = \psi(e^{i\tau})$ bringt

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\tau})|^2 \, d\tau = 2 \int_{\mathbb{R}} \frac{|\mathfrak{F}F(s)|^2}{1+s^2} \, ds \leq 2 \int_{\mathbb{R}} |\mathfrak{F}F(s)|^2 \, ds = 2\|F\|_2^2 < +\infty.$$

Damit ist $f \in L^2(\Gamma) \subset L^1(\Gamma)$ und wegen (44)

$$\begin{array}{rccl} u: & \mathbb{D} & \to & \mathbb{C} \\ & re^{i\theta} & \mapsto & \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\tau}+re^{i\theta}}{e^{i\tau}-re^{i\theta}}\right) f(e^{i\tau}) \, d\tau \end{array}$$

harmonisch. Wir werden zeigen, daß u sogar analytisch ist. An dieser Stelle kommt die Bedingung $F(x) = 0$ für fast alle $x \geq x_0$ ins Spiel.

Im folgenden bezeichne χ_{x_0} die charakteristische Funktion des Intervalls $(-\infty, x_0]$. Zunächst ist anzumerken, daß für $w \in \mathbb{H}^o$ wegen $F \in L^2(\mathbb{R})$ und $\chi_{x_0} e^{-iw\cdot} \in L^2(\mathbb{R})$ aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung $Fe^{-iw\cdot} \in L^1(\mathbb{R})$ folgt. Da darüberhinaus auch noch $\chi_{x_0} e^{-iw\cdot}$ beschränkt ist, ist $Fe^{-iw\cdot} \in L^2(\mathbb{R})$ und somit

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{H}^o & \to & \mathbb{C} \\ & \begin{array}{c} w = x+iy \\ (x \in \mathbb{R}, y > 0) \end{array} & \mapsto & \displaystyle\mathfrak{F}(Fe^{y\cdot})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} F(t) e^{-i(x+iy)t} \, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} F(t) e^{-iwt} \, dt \end{array}$$

eine wohldefinierte Abbildung ($Fe^{-iw\cdot} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$). Man sieht leicht, daß g eine analytische Funktion auf $\mathbb{H}^o$ ist. (Vertauschen von Integration und Differentiation bereitet keine Schwierigkeiten; alle hierfür notwendigen Voraussetzungen sind erfüllt.) Wir zeigen jetzt, daß sich u schreiben läßt in der Form $u = g \circ \varphi$, so daß also u als Zusammensetzung zweier analytischer Funktionen selbst analytisch sein muß.

Wegen $\left(s \mapsto \dfrac{y}{(x-s)^2+y^2}\right) \in L^2(\mathbb{R})$ für $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$ fest, der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und der Definition der Planchereltransformation ist

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(x-s)^2+y^2} \left(\mathfrak{F}F(s) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{x_0} F(t) e^{-ist} \, dt \right) ds \right|^2$$
$$\leq \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{y^2}{((x-s)^2+y^2)^2} \, ds}_{= \text{const}} \; \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \left| \mathfrak{F}F(s) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{x_0} F(t) e^{-ist} \, dt \right|^2 ds}_{\to 0 \text{ für } n \to \infty \text{ in } L^2(\mathbb{R})}.$$

Damit ist für $w = x + iy \in \mathbb{H}^o$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathfrak{F}F(s)y}{(x-s)^2+y^2}\,ds = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{-n}^{x_0} \frac{yF(t)e^{-ist}}{(x-s)^2+y^2}\,dt\,ds \qquad (L^2 - \text{Grenzwert}).$$

Fubini liefert

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{-n}^{x_0} \frac{yF(t)e^{-ist}}{(x-s)^2+y^2}\,dt\,ds &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{x_0} F(t) \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{ye^{-ist}}{(x-s)^2+y^2}\,ds \right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{x_0} F(t)e^{-i(x+iy)t}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{x_0} F(t)e^{-iwt}\,dt. \end{aligned}$$

Beachtet man noch

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{x_0} F(t)e^{-iwt}\,dt - g(w) \right| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-n} |F(t)|e^{yt}\,dt \le \frac{\|F\|_2}{\sqrt{2\pi y}} e^{-fracyn2},$$

d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-n}^{x_0} F(t)e^{-iwt}\,dt = g(w)$, so folgt mit $s = \psi(e^{i\tau})$ und $w = \varphi(re^{i\tau}) = x + iy$ (vgl. (47)):

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re} \left(\frac{e^{i\tau} + re^{i\theta}}{e^{i\tau} - re^{i\theta}} \right) f(e^{i\tau})\,d\tau = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathfrak{F}F(s)y}{(x-s)^2+y^2}\,ds = g(w) = g(\varphi(re^{i\tau})).$$

u ist also analytisch auf $\mathbb{D}$.

Bezeichnen wir mit $\log^+ : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ die Abbildung $t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le t < 1 \\ \log t & \text{für } t \ge 1 \end{cases}$ und mit $\log^-$: $\mathbb{R}^+_{\setminus\{0\}} \to \mathbb{R}$ die Abbildung $t \mapsto \begin{cases} \log t & \text{für } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{für } t \ge 1 \end{cases}$, so gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |u(re^{i\tau})|\,d\tau \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\tau})|^2\,d\tau \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\tau})|^2\,d\tau, \tag{52}$$

wobei die letzte Ungleichung eine Folge von (45) ist.

Es macht also Sinn,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |u(re^{i\tau})|\,d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |u(re^{i\tau})|\,d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^- |u(re^{i\tau})|\,d\tau \tag{53}$$

zu schreiben, wobei eventuell $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^- |u(re^{i\tau})|\,d\tau = -\infty$ sein kann. Daß dem letztlich nicht so ist, ergibt sich aus dem Satz von Jensen (Aussage B.2).

Zwei Fälle müssen unterschieden werden:

Im Falle $u(0) \ne 0$ besagt (51), daß das in (53) links stehende Integral durch $\log |u(0)|$ nach unten beschränkt ist. Man erhält folglich mit (52) und (53):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\log |u(re^{i\tau})||\,d\tau &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |u(re^{i\tau})|\,d\tau - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^- |u(re^{i\tau})|\,d\tau \\ &\le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\tau})|^2\,d\tau - \log |u(0)|. \end{aligned} \tag{54}$$

Im Falle $u(0) = 0$ sei $m \in \mathbb{N}$ die Vielfachheit der Nullstelle 0 von u. Setzen wir $\widetilde{u} : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $\widetilde{u}(re^{i\theta}) = \dfrac{u(re^{i\theta})}{r^m e^{im\theta}}$ in die 0 holomorph fort, so ist $\widetilde{u}$ harmonisch mit $\widetilde{u}(0) \neq 0$. Der Satz von Jensen liefert wieder

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|\widetilde{u}(re^{i\tau})|\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\left|\frac{u(re^{i\tau})}{r^m e^{im\tau}}\right| d\tau \geq \log|\widetilde{u}(0)| \tag{55}$$

Man berechnet leicht

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+\left|\frac{u(re^{i\tau})}{r^m e^{im\tau}}\right| d\tau \quad &\leq \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log^+|u(re^{i\tau})|\,d\tau - m\log r \\ &\overset{(52)}{\leq} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\tau})|^2\,d\tau - m\log r. \end{aligned} \tag{56}$$

Wie in (54) ergibt sich für $\frac{1}{2} < r < 1$ mit (56) anstelle von (52):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\log\left|\frac{u(re^{i\tau})}{r^m e^{im\tau}}\right|\right| d\tau \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\tau})|^2\,d\tau + 2m\log 2 - \log|\widetilde{u}(0)|. \tag{57}$$

Für $\frac{1}{2} < r < 1$ ist somit

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\log|u(re^{i\tau})||\,d\tau \quad &\leq \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\log\left|\frac{u(re^{i\tau})}{r^m e^{im\tau}}\right|\right| d\tau - m\log r \qquad \text{(Dreiecksungleichung)} \\ &\overset{(57)}{\leq} \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\tau})|^2\,d\tau + 3m\log 2 - \log|\widetilde{u}(0)|. \end{aligned} \tag{58}$$

(54) und (58) zusammen zeigen, daß gleichmäßig für $\frac{1}{2} < r < 1$ gilt:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\log|u(re^{i\tau})||\,d\tau \leq C$$

für eine Konstante $C > 0$. Daraus gewinnt man wegen $\log|u(re^{i\theta})| \to \log|f(e^{i\theta})|$ für $r \to 1$ für fast alle $\theta \in [-\pi, \pi)$ (Lemma A.1 von Fatou für u und f) aufgrund eines anderen Lemmas von Fatou[1]

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\log|f(e^{i\tau})|\,d\tau \quad &= \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \liminf_{r\to 1} |\log|u(re^{i\tau})||\,d\tau \\ &\leq \quad \liminf_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\log|u(re^{i\tau})||\,d\tau \leq C.\end{aligned}$$

Rücktransformation auf die Ebene ergibt schließlich (vgl. (46))

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\log|f(e^{i\tau})||\,d\tau = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\log|\mathfrak{F}F(s)||}{1+s^2}\,ds < +\infty.$$

$\triangleleft$

[1] *Ist $f_n : X \to [0, +\infty]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine auf dem Maßraum (X, μ) meßbare Funktion, so gilt:*

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$$

(vgl. [23], Seite 23)

Bevor wir Teilaussage b) des Satzes B.1 von Paley und Wiener beweisen, müssen wir ein paar Vorbereitungen in Form zweier Hilfssätze treffen.

B.4 Im Hilfssatz B.5 spielt der Cauchysche Integralsatz eine gewisse Rolle: *Für eine auf einer offenen Menge U analytische Funktion f und einen einfach geschlossenen Integrationsweg γ in U, der keinen Punkt des Komplementes von U umläuft, gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

B.5 Hilfssatz: *Ist $F : \mathbb{H}^r \to \mathbb{C}$ eine auf der rechten Halbebene $\mathbb{H}^r = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ analytische Funktion, die für alle $x > 0$ der Bedingung*

$$\int_{\mathbb{R}} |F(x+it)|\,dt \leq C$$

für eine Konstante $C > 0$ genügt, so ist für $w \in \mathbb{H}^r$ und $0 < \mu < \operatorname{Re} w$:

$$F(w) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{F(\mu+it)}{\mu+it-w}\,dt.$$

$\triangleright$ **Beweis :** Wir beginnen mit dem Cauchyschen Integralsatz für den Integrationsweg

$$\Gamma(A) := \Gamma_1(A) + \Gamma_2(A) + \Gamma_3(A) + \Gamma_4(A),$$

wobei $A > 0$ und $\Gamma_1(A), ..., \Gamma_4(A)$ in Abb. B.1 auf Seite 98 dargestellt sind. Für $0 < \mu < \nu$ und $w \in \mathbb{C}$ mit $\mu < \operatorname{Re} w < \nu$ und $-A < \operatorname{Im} w < A$ ist dann

$$F(w) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\Gamma_1(A)} + \cdots + \int_{\Gamma_4(A)}\right)\frac{F(z)}{z-w}\,dz.$$

Die Abbildung $\mathbb{R}^+_{\setminus\{0\}} \to \mathbb{C}$,

$$A \mapsto \int_{\Gamma_1(A)} \frac{F(z)}{z-w}\,dz = \int_\mu^\nu \frac{F(t-iA)}{t-iA-w}\,dt$$

ist als Folgerung aus dem Konvergenzsatz von Lebesgue (der Integrand ist stetig in t und A) stetig und damit insbesondere integrierbar über jedem Intervall $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$.

In einem ersten Schritt zeigen wir, daß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_n^{n+1}\left(\int_{\Gamma_1(A)} \frac{F(z)}{z-w}\,dz\right)dA = 0 \text{ ist.} \tag{59}$$

Ebenso ergibt sich dann

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_n^{n+1}\left(\int_{\Gamma_3(A)} \frac{F(z)}{z-w}\,dz\right)dA = 0. \tag{60}$$

Nach dem Satz von Fubini und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ist

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{2\pi i} \int_n^{n+1} \left(\int_{\Gamma_1(A)} \frac{F(z)}{z-w}\, dz \right) dA \right| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_\mu^\nu \left(\int_n^{n+1} \frac{F(t-iA)}{t-iA-w}\, dA \right) dt \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_\mu^\nu \left(\int_n^{n+1} |F(t-iA)|^2\, dA \int_n^{n+1} \frac{1}{|t-iA-w|^2}\, dA \right)^{\frac{1}{2}} dt \\
&\leq \int_\mu^\nu \left(\int_n^{n+1} |F(t-iA)|^2\, dA \right)^{\frac{1}{2}} dt,
\end{aligned}$$

wenn in der letzten Ungleichung n so groß angenommen wird, daß für $\mu \leq t \leq \nu$ und $n \leq A \leq n+1$ gilt: $|t - iA - w|^2 \geq |n - \operatorname{Im} w| \geq \frac{1}{4\pi^2}$ (vgl. Abb. B.2 auf Seite 98); damit ist nämlich

$$\frac{1}{2\pi} \left(\int_n^{n+1} \frac{1}{|t-iA-w|^2}\, dA \right)^{\frac{1}{2}} \leq 1.$$

Wegen $\int_{\mathbb{R}} |F(x+iA)|^2\, dA \leq C$, $x > 0$, ist

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_n^{n+1} |F(x+iA)|^2\, dA \right)^{\frac{1}{2}} = 0, \tag{61}$$

und deshalb (Konvergenzsatz von Lebesgue)

$$\lim_{n\to\infty} \int_\mu^\nu \left(\int_n^{n+1} |F(t-iA)|^2\, dA \right)^{\frac{1}{2}} dt = 0.$$

Hiermit ist (59) gezeigt; analog ergibt sich (60).

Im nächsten Schritt überzeugen wir uns von

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_n^{n+1} \left(\int_{\Gamma_2(A)} \frac{F(z)}{z-w}\, dz \right) dA = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{F(\nu+it)}{\nu+it-w}\, dt. \tag{62}$$

Auf dieselbe Art und Weise ergibt sich dann auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_n^{n+1} \left(\int_{\Gamma_4(A)} \frac{F(z)}{z-w}\, dz \right) dA = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{F(\mu+it)}{\mu+it-w}\, dt. \tag{63}$$

Zunächst ist anzumerken, daß die Abbildung $A \mapsto \int_{-A}^{A} \frac{F(\nu+it)}{\nu+it-w}\, dt$ eine stetige Funktion ist, und daß deshalb

$$\int_n^{n+1} \left(\int_{-A}^{A} \frac{F(\nu+it)}{\nu+it-w}\, dt \right) dA, \qquad n > |\operatorname{Im} w|, \tag{64}$$

gebildet werden kann. Abb. B.3 auf Seite 98 zeigt das Integrationsgebiet des letzten Integrals. Der Integrand selber ist auf jeder horizontalen Strecke innerhalb dieses Gebiets konstant. Man kann das Integral (64) in 3 Teile zerlegen:

$$\int_n^{n+1} \left(\int_{-A}^{A} \frac{F(\nu+it)}{\nu+it-w}\, dt \right) dA = I_1^{(n)} + I_2^{(n)} + I_3^{(n)}, \tag{65}$$

wobei

$$
\begin{aligned}
I_1^{(n)} &= \int_n^{n+1} \left(\int_{-n}^{n} \frac{F(\nu+it)}{\nu+it-w}\, dt \right) dA = \int_{-n}^{n} \frac{F(\nu+it)}{\nu+it-w}\, dt, \\
I_2^{(n)} &= \int_n^{n+1} \left(\int_{n}^{A} \frac{F(\nu+it)}{\nu+it-w}\, dt \right) dA = \int_n^{n+1} \left(\int_{t}^{n+1} \frac{F(\nu+it)}{\nu+it-w}\, dA \right) dt \qquad \text{(Fubini)} \\
&= \int_n^{n+1} (n+1-t) \frac{F(\nu+it)}{\nu+it-w}\, dt, \\
I_3^{(n)} &= \int_{-n-1}^{-n} \left(\int_{-A}^{-n} \frac{F(\nu+it)}{\nu+it-w}\, dt \right) dA = \int_{-n-1}^{-n} (n+1+t) \frac{F(\nu+it)}{\nu+it-w}\, dt.
\end{aligned}
$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ist

$$
\left| I_2^{(n)} \right| = \left| \int_n^{n+1} (n+1-t) \frac{F(\nu+it)}{\nu+it-w}\, dt \right| \le \left(\int_n^{n+1} \left| \frac{n+1-t}{\nu+it-w} \right|^2 dt \int_n^{n+1} |F(\nu+it)|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}},
$$

wobei wegen $|n+1-t| \le 1$ für alle $t \in [n, n+1]$ und $|\nu+it-w| \ge |n - \operatorname{Im} w| \ge 1$ für n hinreichend groß (ähnlich wie in Abb. B.2)

$$
\left(\int_n^{n+1} \left| \frac{n+1-t}{\nu+it-w} \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \le 1
$$

ist. Also ist für hinreichend großes n

$$
\left| I_2^{(n)} \right| \le \left(\int_n^{n+1} |F(\nu+it)|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}}
$$

und damit

$$
\lim_{n\to\infty} I_2^{(n)} = 0
$$

(vgl. (61)). Ebenso erhält man

$$
\lim_{n\to\infty} I_3^{(n)} = 0.
$$

Wenden wir auf beiden Seiten von (65) den Grenzwertoperator für $n \to \infty$ an, so ergibt sich (62). Analog verhält es sich mit (63).

Als Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse ergibt sich

$$
\begin{aligned}
F(w) &= \lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} F(w)\, dA \\
&= \frac{1}{2\pi i} \lim_{n\to\infty} \int_n^{n+1} \left(\int_{\Gamma_1(A)} + \cdots + \int_{\Gamma_4(A)} \right) \frac{F(z)}{z-w}\, dz \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{F(\nu+it)}{\nu+it-w}\, dt - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{F(\mu+it)}{\mu+it-w}\, dt.
\end{aligned}
$$

Im letzten Schritt brauchen wir nur noch $\nu \to \infty$ zu betrachten, und erhalten, wiederum wegen der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung,

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}} \frac{F(\nu+it)}{\nu+it-w}\, dt \right| &\le \left(\int_{\mathbb{R}} |F(\nu+it)|^2\, dt \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|\nu+it-w|^2}\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \sqrt{C} \frac{\pi}{\nu + \operatorname{Re} w} \to 0 \qquad \text{für } \nu \to +\infty.
\end{aligned}
$$

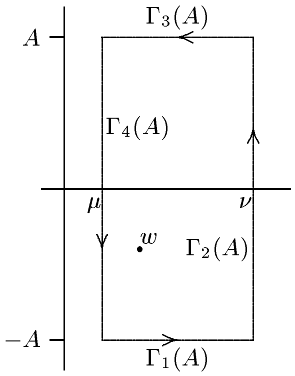

Abb. 1

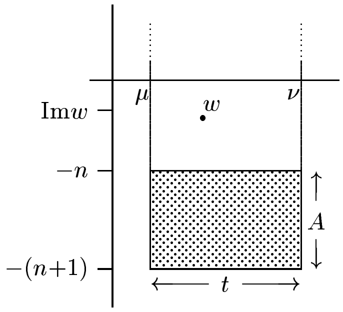

Abb. 2

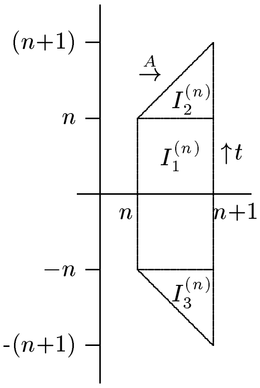

Abb. 3

◁

B.6 Hilfssatz: *Ist $F : \mathbb{H}^r \to \mathbb{C}$ eine auf der rechten Halbebene analytische Funktion, die für alle $x > 0$ der Bedingung*

$$\int_{\mathbb{R}} |F(x+it)|^2\, dt \leq C$$

für eine Konstante $C > 0$ genügt, so existiert eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$, die für fast alle $x \geq 0$ verschwindet und für die für $w \in \mathbb{H}^r$

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(s) e^{ws}\, ds$$

gilt.

▷ **Beweis :** Für ein beliebiges $x > 0$ sei

$$g(x,\cdot) := \mathfrak{F}(F(x+i\cdot)) \in L^2(\mathbb{R}).$$

Nach Voraussetzung ist $\|g(x,\cdot)\|_2 \leq C$ für alle $x > 0$. Der Satz von Plancherel impliziert

$$\mathfrak{F}^{-1} g(x,\cdot) = F(x+i\cdot). \tag{66}$$

Wir definieren

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & s & \mapsto & g(1,s)e^{-s}, \end{array}$$

und zeigen, daß f die gesuchte Funktion darstellt.

Dazu betrachten wir zunächst für $\alpha < 0$ und $y \in \mathbb{R}$ die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} \phi_{\alpha,y}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & s & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} e^{-\alpha s - iys} & \text{falls } s < 0 \\ 0 & \text{falls } s \geq 0. \end{array} \right. \end{array}$$

Man sieht leicht, daß $\phi_{\alpha,y}$, $\overline{\phi_{\alpha,y}}$ und $\left|\overline{\phi_{\alpha,y}}\right|$ in $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ liegen. Deshalb ist

$$(\mathfrak{F}^{-1}\phi_{\alpha,y})(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \phi_{\alpha,y}(\tau) e^{it\tau}\, d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha\tau - iy\tau + it\tau}\, d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{-\alpha - iy + it}$$

und

$$\phi_{\alpha,y} = \mathfrak{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{-\alpha - iy + i\cdot}\right).$$

Der Satz von Parseval impliziert für $\mu > 0$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} g(\mu,s)\overline{\phi_{\alpha,y}(s)}\,ds &= \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}(F(\mu+i\cdot))(s)\overline{\mathfrak{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{-\alpha - iy + i\cdot}\right)(s)}\,ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \frac{F(\mu+i\tau)}{-\alpha+iy-i\tau}\,d\tau.
\end{aligned}$$

Speziell für $0 < \mu < x$ und $\alpha = \mu - x$ ergibt sich mit Hilfssatz B.5

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} g(\mu,s)\overline{\phi_{\mu-x,y}(s)}\,ds &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \frac{F(\mu+i\tau)}{\mu+i\tau-x-iy}\,d\tau \\
&= \sqrt{2\pi}F(x+iy) \overset{(66)}{=} \sqrt{2\pi}\mathfrak{F}^{-1}g(x,\cdot)(y).
\end{aligned} \tag{67}$$

Nun ist aber auch noch

$$\int_{\mathbb{R}} g(\mu,s)\overline{\phi_{\mu-x,y}(s)}\,ds = \int_{-\infty}^{0} g(\mu,s)e^{(x-\mu)s}e^{iys}\,ds = \sqrt{2\pi}\mathfrak{F}^{-1}\left(g(\mu,\cdot)\chi_{\mathbb{R}_-}e^{(x-\mu)\cdot}\right)(y). \tag{68}$$

Wegen der Injektivität von $\mathfrak{F}^{-1}$ folgt von daher

$$g(x,\cdot) = g(\mu,\cdot)\chi_{\mathbb{R}_-}e^{(x-\mu)\cdot} \tag{69}$$

bzw.

$$g(x,s)e^{-xs} = g(\mu,s)e^{-\mu s} \qquad \text{für alle } s < 0 \tag{70}$$

und

$$g(x,s) = 0 \qquad \text{für alle } s \geq 0.$$

Auch für f hat man dann $f(s) = 0$ für fast alle $s \geq 0$, und f genügt somit einer der Anforderungen des Satzes.

(67), (68) und (70) lehren für $0 < \mu < 1$ darüberhinaus

$$F(x+iy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} g(\mu,s)e^{(x-\mu)s}e^{iys}\,ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(s)e^{(x+iy)s}\,ds,$$

womit eine weitere Anforderung an f nachgewiesen ist. Bleibt noch $f \in L^2(\mathbb{R})$ zu zeigen. Wegen (70) ist

$$g(x,s) = f(s)e^{xs} \qquad (s \in \mathbb{R}).$$

Wäre $\int_{\mathbb{R}} |f(s)|^2\,ds = +\infty$, so existierte ein $n > 0$ mit $\int_{-n}^{0} |f(s)|^2\,ds > 3C$. Für $\mu := \frac{\log \frac{3}{2}}{n}$ erhielte man wegen $e^{-\mu s} \leq \frac{3}{2}$ für alle $s \in [-n, 0]$:

$$3C < \int_{-n}^{0} |f(s)|^2\,ds = \int_{-n}^{0} |g(\mu,s)e^{-\mu s}|^2\,ds \leq \frac{9}{4}\int_{\mathbb{R}} |g(\mu,s)|^2\,ds \leq \frac{9}{4}C,$$

was wegen $C > 0$ nicht möglich ist. $\triangleleft$

B.7 Behauptung: *Mit den Bezeichnungen aus Satz B.1 gilt:*

Für alle $F \in L^2_\dagger(\mathbb{R})$ *existiert ein* $f \in L^2_\star(\mathbb{R})$ *mit* $|\mathfrak{F}f| = |\mathfrak{F}F|$.

$\triangleright$ **Beweis :** Die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $s \mapsto \log|\mathfrak{F}F(s)|$ erfüllt wegen $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{|\log|\mathfrak{F}F(s)||}{1+s^2}\,ds < +\infty$ die Anforderung des Lemmas von Fatou (Lemma A.2).

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{H}^o & \to & \mathbb{R} \\ & x+iy & \mapsto & \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\log|\mathfrak{F}F(s)|\,y}{(x-s)^2+y^2}\,ds \end{array}$$

ist somit eine harmonische Funktion (die Elemente von $\mathbb{H}^o$ schreiben wir frei in der Form $x+iy$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $y > 0$). Es bezeichne $\widetilde{g}$ die zu g konjugierte harmonische Funktion. Wir definieren $\widetilde{h} : \mathbb{H}^o \to \mathbb{C}$ durch

$$\widetilde{h} := \exp \circ (g + i\widetilde{g}).$$

$\widetilde{h}$ ist dann eine in der oberen Halbebene harmonische Funktion. Nach dem Lemma von Fatou gilt für fast alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{y\to 0^+} |\widetilde{h}(x+iy)| = \lim_{y\to 0^+} \exp(g(x+iy)) = |\mathfrak{F}F(x)|.$$

Wir „drehen“ nun die harmonische Funktion $\widetilde{h}$ in die rechte Halbebene $\mathbb{H}^r = \{x+iy \in \mathbb{C} : x > 0, y \in \mathbb{R}\}$. Sei

$$\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{H}^r & \to & \mathbb{C} \\ & x+iy & \mapsto & \widetilde{h}(i(x+iy)) = \widetilde{h}(-y+ix). \end{array}$$

Dann ist h harmonisch auf der rechten Halbebene und

$$\lim_{x\to 0^+} |h(x+iy)| = \lim_{x\to 0^+} |\widetilde{h}(-y+ix)| = |\mathfrak{F}F(-y)|. \tag{71}$$

Wir zeigen jetzt, daß h den Voraussetzungen von Hilfssatz B.6 genügt, daß also eine Konstante $C > 0$ existiert mit

$$\int_{\mathbb{R}} |h(x+iy)|^2\,dy \le C.$$

Es wird sich herausstellen, daß $C = \|\mathfrak{F}F\|_2^2$ genommen werden kann. Es ist

$$|h(x+iy)| = |\widetilde{h}(-y+ix)| = \exp(g(-y+ix)) \le \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{|\mathfrak{F}F(s)|x}{(-y-s)^2+x^2}\,ds \qquad (x>0),$$

wobei die letzte Ungleichung eine Folge der *Jensenschen Ungleichung* [2] ist, und somit unter Zuhilfenahme der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\int_{\mathbb{R}} |h(x+iy)|^2\,dy \quad \le \quad \frac{1}{\pi^2}\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|\mathfrak{F}F(s)|^2 x}{(-y-s)^2+x^2}\,ds \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{(-y-s)^2+x^2}\,ds \right) dy$$

[2] Jensensche Ungleichung: *Ist* (X,μ) *ein Maßraum mit* $\mu(X) = 1$, *ist* $f \in L^1(X,\mu)$ *reellwertig mit* $a < f(x) < b$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ $(a, b \in \overline{\mathbb{R}})$ *und ist* φ *in* (a,b) *konvex, so gilt:*

$$\varphi\left(\int_X f\,d\mu\right) \le \int_X \varphi \circ f\,d\mu.$$

(vgl. Rudin [23], Theorem 3.3) Hier ist $X = \mathbb{R}$ und $\mu = \frac{1}{\pi}\frac{y}{(x-\cdot)^2+y^2}\lambda$.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{|\mathfrak{F}F(s)|^2 x}{(-y-s)^2+x^2}\,ds\right)\,dy \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{|\mathfrak{F}F(s)|^2 x}{(-y-s)^2+x^2}\,dy\right)\,ds \\
&= \int_{\mathbb{R}}|\mathfrak{F}F(s)|^2\,ds = \|\mathfrak{F}F\|_2^2.
\end{aligned}
$$

Hilfssatz B.6 impliziert nun die Existenz einer Fuktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ mit

$$
h(x+iy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{(x+iy)t}\,dt
$$

und $f(x) = 0$ für fast alle $x \geq 0$.

Mit (71) folgt somit $|(\mathfrak{F}F)(-y)| = |(\mathfrak{F}f)(-y)|$ bzw. $|\mathfrak{F}F| = |\mathfrak{F}f|$, und die Behauptung ist bewiesen. $\triangleleft$

Die Behauptungen B.3 und B.7 zusammen ergeben den Satz B.1 von Paley und Wiener.

Symbole

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$	natürliche, ganze, reelle und komplexe Zahlen
$\mathbb{R}^+$	$= \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$
$\mathbb{H}^o$	$= \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$
$\mathbb{H}^r$	$= \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0\}$
Γ	$= \{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert = 1\}$
$\mathbb{D}$	$= \{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert < 1\}$
$\mathbb{D}_r$	$= \{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert < r\}$
X, $\mathcal{A}$	Banachraum, Banachalgebra
$\mathcal{L}(X)$	beschränkte, lineare Abbildung auf X
$\mathcal{C}(X)$	abgeschlossene, lineare Abbildungen auf X
$\mathfrak{D}(A)$	Definitionsbereich des unbeschränkten Operators A
X',$\mathcal{A}'$	beschränkten Linearformen auf X bzw. $\mathcal{A}$
$\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$	multiplikativen Linearformen auf $\mathcal{A}$
h	Hüllenabbildung
k	Kern
$\mathcal{A}_F$	$= \mathcal{A}/k(F)$
ϱ	Gewicht bzw. Beuerling-Domar-Gewicht auf $\mathbb{Z}$
w	Gewicht bzw. Beuerling-Domar-Gewicht-Gewicht auf $\mathbb{R}$
$\ell^1(\Gamma)$, $L^1(\mathbb{R})$	Lebesgue-Räume der integrierbaren Funktionen über Γ bzw. $\mathbb{R}$.
$\ell^1_\varrho(\Gamma)$	$= \{a. \in \ell^1(\Gamma) : \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lvert a_n\rvert \varrho_n < +\infty\}$
$L^1_w(\mathbb{R})$	$= \{f \in L^1(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} \lvert f\rvert w\, d\lambda < +\infty\}$
$\widehat{\ }$	Fourier- bzw. Gelfandtransformation
$\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$	$= \widehat{\ell^1_\varrho(\Gamma)}$ (versehen mit kontexabhängiger Norm)
$\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$	$= \widehat{L^1_w(\mathbb{R})}$ (versehen mit kontextabhängiger Norm)
$\widehat{a}.$, $\widehat{b}.$,...	Elemente aus $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$ mit $a.$, $b.$,...$\in \ell^1_\varrho(\Gamma)$
$\widehat{f}$, $\widehat{g}$,...	Elemente aus $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$ mit f, g,...$\in L^1_w(\mathbb{R})$
$N(\widehat{a}.)$	$= \{\xi \in \Gamma : \widehat{a}.(\xi) = 0\}$
$N(\widehat{f})$	$= \{t \in \mathbb{R} : \widehat{f}(t) = 0\}$
$\mathrm{supp}\, \widehat{a}.)$	$= \overline{\{\xi \in \Gamma : \widehat{a}.(\xi) \neq 0\}}$
$\mathrm{supp}\, \widehat{f}$	$= \overline{\{t \in \mathbb{R} : widehatf(t) \neq 0\}}$
M	entweder der Multiplikationsoperator mit der Identität auf $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$
	oder der abgeschlossene Operator mit $M\widehat{f}(t) = it\widehat{f}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, $\widehat{f} \in \mathfrak{D}(M)$
$\mathrm{Lat}_\varrho(M)$	M-invarianten, abgeschlossenen Unterräume von $\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma)$

$\mathrm{Lat}_w(M)$	M-invarianten, abgeschlossenen Unterräume von $\mathfrak{F}_w(\mathbb{R})$
$\mathfrak{F}_\varrho(\overline{U})$	$= \{\widehat{a}. \in \mathfrak{F}_\varrho(\Gamma) : \operatorname{supp}\widehat{a}. \subseteq \overline{U}\}$, $U \subseteq \Gamma$
$\mathfrak{F}_w(\overline{U})$	$= \{\widehat{f} \in \mathfrak{F}_w(\mathbb{R}) : \operatorname{supp}\widehat{f} \subseteq \overline{U}\}$, $U \subseteq \mathbb{R}$
$M\|\mathfrak{F}_\varrho(\overline{U})$	Einschränkung von $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}_\varrho(\Gamma))$ auf $\mathfrak{F}_\varrho(\overline{U})$
$M\|\mathfrak{F}_w(\overline{U})$	Einschränkung von $M \in \mathcal{C}(\mathfrak{F}_w(\mathbb{R}))$ auf $\mathfrak{F}_w(\overline{U})$
$j, \widetilde{j}$	Intertwining-Operatoren, diskret oder kontinuierlisch
$I(j)$	größtes, abgeschlossenes Ideal in $\ker j$
$\operatorname{supp} j$	$= h(I(j))$
$\ell^\infty_{\eta.}(\mathbb{N},\mathbb{C})$	$= \left\{z. \in \mathbb{C}^\mathbb{N} : \frac{\|z.\|}{\eta.} \in \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{C})\right\}$
$c_{\eta.}(\mathbb{N},\mathbb{C})$	$= \left\{z. \in \ell^\infty_{\eta.}(\mathbb{N},\mathbb{C}) : \lim\limits_{n\to\infty} \frac{z_n}{\eta_n} \text{ existiert}\right\}$
$\ell^\infty_{\eta.}(\mathbb{N},X')$	$= \left\{\alpha. \in X'^\mathbb{N} : \frac{\\|\alpha.\\|}{\eta.} \in \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{C})\right\}$
$c_{\eta.}(\mathbb{N},X')$	$= \left\{\alpha. \in \ell^\infty_{\eta.}(\mathbb{N},X') : \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n(x)}{\eta_n} \text{ existiert für alle } x \in X\right\}$
$\mathrm{Li}_{\eta.}$	$= \{l : \ell^\infty_{\eta.}(\mathbb{N},X') \to X'$ stetig, linear mit $\\|l\\| \le 1$ und $l(\alpha.)(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_n(x)}{\eta_n}$ für alle $x \in X$, für die der Grenzwert existiert$\}$
$X_T(F)$	$= \{x \in X :$ es existiert eine analytische Funktion $f : \mathbb{C}\backslash F \to X$ mit $(z-T)f(z) = x$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash F\}$, $F \subseteq \Gamma$
$X_A(F)$	$= \{x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{D}(A^n)$: es existiert eine im Unendlichen verschwindende, analytische Funktion $f : \mathbb{C}\backslash F \to \mathfrak{D}(A)$ mit $(z-A)f(z) = x$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash F\}$, $F \subseteq \mathbb{R}$
$\langle\mathbb{N}\rangle$	Menge der streng monoton wachsenden Folgen natürlicher Zahlen
$\langle\mathbb{R}\rangle$	Menge der positiven, streng monoton wachsenden Folgen reeller Zahlen
$\langle x\rangle$	entweder $= \{\alpha. \in X'^\mathbb{N} : \alpha_k(T^kx) = \\|T^kx\\|$ mit $\\|\alpha_k\\| = 1$ falls $T^kx \neq 0$, $\alpha_k \equiv 0$ falls $T^kx = 0\}$, $x \in X$, oder $= \{\alpha. : \mathbb{R} \to X' : \alpha_t(\mathcal{T}(t)x) = \\|\mathcal{T}(t)x\\|$ mit $\\|\alpha_t\\| = 1$ falls $\mathcal{T}(t)x \neq 0$, $\alpha_t \equiv 0$ falls $\mathcal{T}(t)x = 0\}$, $x \in X$,
Λ	entweder $= \{(x, n., \eta., \alpha., l.) \in X \times \langle\mathbb{N}\rangle \times \mathbb{R}^\mathbb{N} \times X'^\mathbb{N} \times \mathbb{C}^{(X'^\mathbb{N})} : \eta_k = \varrho_{n_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $\alpha. \in \langle x\rangle, l. \in \mathrm{Li}_{\eta.}\}$ oder $= \{(x, r., \eta., \alpha., l.) \in X \times \langle\mathbb{R}\rangle \times \mathbb{R}^\mathbb{N} \times X'^\mathbb{R} \times \mathbb{C}^{(X'^\mathbb{N})} : \eta_k = w(r_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $\alpha. \in \langle x\rangle, l. \in \mathrm{Li}_{\eta.}\}$

Literaturverzeichnis

[1] C. J. K. Batty and W. Arendt. Tauberian theorems and stability of one-parameter semigroups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 306:837–852, 1988.

[2] H. Bauer. *Maß- und Integrationstheorie.* de Gruyter, zweite edition, 1992.

[3] A. Beurling. Sur les intégrals de fourier absolument convergentes. In *IX^e Congrès Math. Scand., Helsinki*, pages 345–366, 1938.

[4] D. L. Cohn. *Measure Theory.* Birkhäser, 1980.

[5] I. Colojoara and C. Foas. *Theory of Generalized Spectral Operators.* Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., 1968.

[6] J. B. Conway. *Functions of One Complex Variable.* Springer-Verlag, 1973.

[7] J. B. Conway. *The Theory of Subnormal Operators.* American Mathematical Society, 1991.

[8] Y. Domar. Harmonic analysis based on certain commutative banach algebras. *Acta Math.*, 96:1–66, 1956.

[9] N. Dunford and J. T. Schwartz. *Linear Operators Part I.* Interscience Publishers, Inc., 1957.

[10] J. Eschmeier. Invariant subspaces for spherical contractions. *Proc. London Math Soc.*, 3:157–176, 1997.

[11] S. Goldberg. *Unbounded linear operators.* Dover Publications, Inc., 1966.

[12] E. Hewitt and K. Stromberg. *Real and Abstract Analysis.* Springer-Verlag, 1965.

[13] E. Hille and R. S. Phillips. *Functional analysis and semi-groups.* American Mathematical Society, 1957.

[14] K. Hoffman. *Banach Spaces of analytic functions.* Prentice-Hall, Inc., 1962.

[15] Y. Katznelson. *An introduction to Harmonic Analysis.* John Wiley & Sons, Inc., 1968.

[16] M. A. Naimark. *Normed Rings.* Wolters-Noordhoff Publishing, 1970.

[17] J. van Neerven. *The Asymptotic Behaviour of Semigroups of Linear Operators.* Birkhäuser Verlag.

[18] R. E. A. C. Paley and N. Wiener. *Fourier transforms in the complex domain.* American Mathematical Society, 1934.

[19] V. Q. Phong. Semigroups with nonquasianalytic growth. *Studia Math.*, 104:229–241, 1993.

[20] V. Q. Phong and Y. I. Lyubich. Asymptotic stability of linear differential equations on banach spaces. *Studia Math.*, 88:37–42, 1988.

[21] H. Reiter. *Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups.* Oxford University Press, 1968.

[22] W. Rudin. *Fourier Analysis on groups.* Interscience Publisher, 1962.

[23] W. Rudin. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill, Inc., third edition, 1966.

[24] D. Werner. *Funktionalanalysis.* Springer Lehrbuch, 1995.

[25] K. Yosida. *Functional analysis.* Springer-Verlag, 1965.

Stichwortverzeichnis