UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Maximal invariante Teilräume für Operatoren auf Hilberträumen

Bachelorarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science
im Studiengang Mathematik
der Fakultät 6
- Mathematik und Informatik -
der Universität des Saarlandes

vorgelegt von

Maurice Markus Fuchs

nach einem Thema von

Prof. Dr. Jörg Eschmeier

Saarbrücken, 2016

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich die Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Die mit der vorliegenden Arbeit eingereichte elektronische Version stimmt mit der schriftlichen überein.

Saarbrücken, den 21. Dezember 2016

Maurice Markus Fuchs

Danksagung

Ich bedanke mich bei all den Menschen und Institutionen, die mich während meines Bachelorstudiums begleitet, ermutigt und gefördert haben. Darunter insbesondere meinen Kommilitonen und Freunden, mit denen ich eine so wunderbare Zeit erlebt habe.

Einen großen Dank möchte ich an meine Familie aussprechen, die immer an mich glaubt, und ohne die ich nicht der Mensch geworden wäre, der ich heute bin. An dieser Stelle möchte ich meiner Oma Zita und meiner Mutter ganz besonderen Dank schenken.

Großen Dank schulde ich Sebastian Langendörfer, ohne dessen Rat, Zeit und Hilfe die Bewerkstelligung dieser Arbeit wohl kaum möglich gewesen wäre.

Schließlich bedanke ich mich herzlich bei Prof. Dr. Eschmeier für die ausgezeichnete Betreuung und das spannende Thema, dem ich meine Arbeit widmen durfte.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Sei H ein komplexer Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$ ein stetig linearer Operator. Es bezeichne

$$\operatorname{Lat} T = \{M;\ M \subset H \text{ abgeschlossener Teilraum mit } TM \subset M\}$$

die Menge der abgeschlossenen invarianten Teilräume für T. Eine berühmte offene Frage in der Operatorentheorie ist das sogenannte

Invariante-Teilraum-Problem. *Besitzt jeder stetige Operator $T \in \mathcal{L}(H)$ auf einem unendlich dimensionalen Hilbertraum H einen nichttrivialen abgeschlossenen invarianten Teilraum, das heißt, gibt es einen Raum $M \in \operatorname{Lat} T$ mit $\{0\} \neq M \neq H$?*

Ist $H \neq \{0\}$ endlich dimensional, so hat jeder Operator $T \in \mathcal{L}(H)$ mindestens einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Ist T kein skalares Vielfaches der Identität, so ist $\operatorname{Ker}(\lambda - T) \in \operatorname{Lat} T$ ein nichttrivialer abgeschlossener Teilraum von H, der sogar invariant unter allen Operatoren A ist, die mit T kommutieren. Einen solchen Raum nennt man auch hyperinvariant.

Beispiele von Ch. Read ([11]) und P. Enflo ([5]) zeigen, dass es auf gewissen unendlich dimensionalen Banachräumen X sehr wohl stetig lineare Operatoren $T \in \mathcal{L}(X)$ gibt mit $\operatorname{Lat} T = \{\{0\}, X\}$. Positive Lösungen des Invarianten-Teilraum-Problems sind nur für relativ wenige Klassen von Operatoren bekannt.

V. Lomonosov hat 1973 gezeigt, dass jeder Operator $T \in \mathcal{L}(X) \setminus \mathbb{C}1_X$ der mit einem kompakten Operator $K \in \mathcal{K}(X) \setminus \{0\}$ vertauscht, einen nichttrivialen abgeschlossenen hyperinvarianten Teilraum besitzt. Insbesondere ist für solche Operatoren die Menge $\operatorname{Lat} T$ nichttrivial.

Man kann zeigen (siehe etwa [1] und [9]), dass das Invariante-Teilraum-Problem äquivalent ist zu einer ganz einfachen Frage für einen ganz konkreten Operator. Sei

$$\mathcal{L}_a^2(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{D});\ \|f\|^2 = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \ d\lambda(z) < \infty \right\}$$

der Bergman-Raum der quadrat integrierbaren holomorphen Funktionen auf dem offenen Einheitskreis $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ und sei

$$M_z \colon \mathcal{L}_a^2(\mathbb{D}) \to \mathcal{L}_a^2(\mathbb{D}), \quad f \mapsto zf$$

der Bergman-Shift.

Man kann zeigen, dass das Invariante-Teilraum-Problem auf Hilberträumen eine positive Lösung besitzt genau dann, wenn für je zwei Räume $M, N \in \operatorname{Lat} M_z$ mit $N \subset M$ und

$\dim M/N \geq 2$ ein weiterer invarianter Teilraum $L \in \operatorname{Lat} M_z$ existiert mit $N \subsetneq L \subsetneq M$.

In einer Arbeit von 1998 hat Hedenmalm gezeigt, dass ein solcher Raum $L \in \operatorname{Lat} M_z$ immer existiert, wenn $M = \mathcal{L}_a^2(\mathbb{D})$ ist.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit einem Ergebnis von Kunyu Guo, Wei He und Shengzhao Hou aus dem Jahr 2010 ([8]). Wir präsentieren ihren Beweis, eines wesentlich allgemeineren Resultats, welches zeigt, dass obige Aussage richtig ist für jeden Raum $M \in \operatorname{Lat} M_z$ mit $\dim(M/zM) < \infty$. Wegen $\mathcal{L}_a^2(\mathbb{D})/z\mathcal{L}_a^2(\mathbb{D}) = 1$ ist das Resultat von Hedenmalm ein Spezialfall dieses Ergebnisses.

Das Resultat von Guo, He und Hou ist jedoch wesentlich allgemeiner formuliert und lässt sich nicht nur auf den Operator $M_z \in \mathcal{L}(\mathcal{L}_a^2(\mathbb{D}))$ anwenden.

Im ersten Kapitel dieser Arbeit stellen wir wichtige Hilfsmittel zur Verfügung, formulieren grundlegende Existenzaussagen für invariante Teilräume und stellen Ergebnisse über Schatten-p-Klasse Operatoren vor.
Das zweite Kapitel dient dem Beweis einer zentralen Existenzaussage. Dabei stützen wir uns auf die Ergebnisse aus einer Monographie von I. Colojoara und C. Foias. Das dritte Kapitel widmet sich dem Beweis des Resultats aus [8]. Dazu führen wir im ersten Abschnitt die Ergebnisse aus der Arbeit von Guo, He und Hou an und formulieren das Hauptresultat. Im zweiten Abschnitt zeigen wir zentrale Aussagen über die Existenz von nichttrivialen abgeschlossenen hyperinvarianten Teilräumen für stetige Operatoren $T \in \mathcal{L}(H)$, deren Spektrum im Einheitskreisrand enthalten ist, und können so einen Beweis des Hauptresultats liefern.

1 Grundlagen

Im Folgenden Kapitel werden wir wichtige Werkzeuge bereitstellen.

1.1 Summierbare Familien

Sei E ein normierter Vektorraum über $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Definition 1.1.1. Sei $(x_i)_{i\in I}$ eine Familie in E und sei $x \in E$. Wir nennen $(x_i)_{i\in I}$ summierbar zu x, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge $F_0 \subset I$ gibt so, dass

$$\left\| \sum_{i\in F} x_i - x \right\| < \varepsilon$$

für alle endlichen Mengen $F \subset I$ mit $F_0 \subset F$ gilt. In diesem Fall schreiben wir abkürzend $\sum\limits_{i\in I} x_i = x$.

Sei $(x_i)_{i\in I}$ eine Familie in E und sei $x \in E$. Wir bemerken, dass die Menge $\mathcal{F} = \{F \subset I;\ F \text{ endlich}\}$ mit der üblichen Mengeninklusion zu einer nach oben gerichteten, partiell geordneten Menge wird. Dann ist $(x_i)_{i\in I}$ genau dann summierbar zu x, wenn das Netz $\left(\sum_{\alpha\in F} x_\alpha\right)_{F\in\mathcal{F}}$ gegen x konvergiert.

Damit folgt für summierbare Familien $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}$ in E, $\lambda \in \Bbbk$ und $T\colon E \to F$ stetig linear (wobei F ein weiterer normierter $\Bbbk$-Vektorraum ist), dass auch $(x_i + y_i)_{i\in I}$, $(\lambda x_i)_{i\in I}$ und $(Tx_i)_{i\in I}$ summierbar sind mit

$$\sum_{i\in I}(x_i + y_i) = \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i, \qquad \sum_{i\in I}(\lambda x_i) = \lambda \sum_{i\in I} x_i, \qquad \sum_{i\in I} Tx_i = T\left(\sum_{i\in I} x_i\right).$$

Lemma 1.1.2. *Eine Familie $(x_i)_{i\in I}$ in $[0,\infty[$ ist genau dann summierbar, wenn*

$$s = \sup\left\{\sum_{i\in F} x_i;\ F \subset I \text{ endlich}\right\} < \infty$$

gilt. In diesem Fall gilt $s = \sum\limits_{i\in I} x_i$.

Einen Beweis dieses Lemmas findet man etwa in [7, Bemerkung 11.20].
Man überlegt sich, dass eine summierbare Familie nicht überabzählbar viele von Null verschiedene Summanden haben kann.

Lemma 1.1.3. *Ist $(x_i)_{i\in I}$ eine summierbare Familie in E, so ist $I' = \{i \in I;\ x_i \neq 0\}$ höchstens abzählbar.*

Beweis: Sei $x = \sum\limits_{i \in I} x_i$. Zu $n \in \mathbb{N}$ gibt es $F_n \subset I$ endlich mit

$$\left\| x - \sum_{i \in F} x_i \right\| < \frac{1}{n}$$

für alle $F \subset I$ endlich mit $F_n \subset F$. Für $j \notin F_n$ gilt dann

$$\|x_j\| \leq \left\| x - \sum_{i \in F_n \cup \{j\}} x_i \right\| + \left\| \sum_{i \in F_n} x_i - x \right\| < \frac{2}{n},$$

also ist $I' \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Damit ist I' höchstens abzählbar. $\square$

Folgendes Resultat liefert uns eine nützliche Charakterisierung für summierbare Familien.

Satz 1.1.4. *Sei I eine Menge und $\mu\colon \mathscr{P}(I) \to [0, \infty],\ B \mapsto |B|$ das Zählmaß auf I. Ist $f\colon I \to [0, \infty[$ eine Funktion, so ist diese genau dann integrierbar bezüglich μ, wenn $(f(i))_{i \in I}$ summierbar ist. In diesem Fall gilt*

$$\int_I f \ d\mu = \sum_{i \in I} f(i).$$

Beweis: Sei zunächst f integrierbar bezüglich μ. Für $F \subset I$ endlich gilt dann

$$\int_I f \ d\mu \geq \int_F f \ d\mu = \sum_{i \in F} \int_{\{i\}} f \ d\mu = \sum_{i \in F} f(i)$$

und damit insbesondere

$$\sup \left\{ \sum_{i \in F} f(i);\ F \subset I \text{ endlich} \right\} \leq \int_I f \ d\mu < \infty.$$

Mit Lemma 1.1.2 folgt, dass $(f(i))_{i \in I}$ summierbar ist.

Sei $(f(i))_{i \in I}$ summierbar zu $x \in \mathbb{R}$. Wähle eine aufsteigende Folge $(F_n)_{n \geq 1}$ endlicher Mengen $F_n \subset I$ so, dass

$$\left| x - \sum_{i \in F} f(i) \right| < \frac{1}{n}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ und für alle endlichen Mengen $F \subset I$ mit $F_n \subset F$ gilt.
Wie im Beweis von Lemma 1.1.3 folgt, dass $f = 0$ ist auf $I \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Wegen

$$\int_I f \chi_{F_n} \ d\mu \leq x \qquad (n \geq 1)$$

folgt mit dem Satz von der monotonen Konvergenz, dass $(f \chi_{F_n})_{n \geq 1}$ punktweise μ-fast überall und in $\mathcal{L}^1(\mu)$ gegen eine μ-integrierbare Funktion $\tilde{f}\colon I \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist aber $f = \tilde{f}$ μ-integrierbar und es gilt

$$\int_I f \ d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_I f \chi_{F_n} \ d\mu = x.$$

$\square$

Folgendes Resultat erleichtert uns den Umgang mit Doppelsummen in Banachräumen.

Korollar 1.1.5. *Sei* $(x_i)_{i\in A}$ *eine summierbare Familie in einem Banachraum* E *mit* $x = \sum_{i\in A} x_i$ *und sei* $A = \bigcup_{j\in J} A_j$ *mit paarweise disjunkten Mengen* A_j *gegeben. Dann gilt*

$$x = \sum_{j\in J} \sum_{i\in A_j} x_i.$$

Beweis: Mit dem Cauchy-Kriterium folgt, dass $(x_i)_{i\in B}$ summierbar ist für jede Teilmenge $B \subset A$. Setze $x^j = \sum_{i\in A_j} x_i$ für $j \in J$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $I_\varepsilon \subset A$ endlich mit

$$\left\| x - \sum_{i\in I} x_i \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle endlichen Teilmengen $I \subset A$ mit $I_\varepsilon \subset I$. Zu I_ε gibt es eine endliche Menge $J_\varepsilon \subset J$ mit

$$I_\varepsilon = \bigcup_{j\in J_\varepsilon} A_j \cap I_\varepsilon.$$

Sei $J' \supset J_\varepsilon$ endlich. Dann gibt es für alle $j \in J'$ eine endliche Menge $I_j \subset A_j$ mit $I_j \supset A_j \cap I_\varepsilon$ und

$$\left\| x^j - \sum_{i\in I_j} x_i \right\| < \frac{\varepsilon}{2\,|J'|}.$$

Damit folgt

$$\left\| x - \sum_{J\in J'} x^j \right\| \leq \left\| x - \sum_{j\in J'} \sum_{i\in I_j} x_i \right\| + \left\| \sum_{j\in J'} \left(\left(\sum_{i\in I_j} x_i \right) - x^j \right) \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

□

Auch für beliebige Summen lässt sich eine Aussage über die Umordnung der Summanden treffen.

Lemma 1.1.6. *Seien* $(x_i)_{i\in I}$ *eine Familie in* E, J *eine Menge und* $\varphi\colon J \to I$ *eine Bijektion. Dann ist* $(x_i)_{i\in I}$ *summierbar genau dann, wenn* $\left(x_{\varphi(j)}\right)_{j\in J}$ *summierbar ist. In diesem Fall gilt*

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{j\in J} x_{\varphi(j)}.$$

Beweis: Da beide Implikationen durch Übergang zu $\varphi^{-1}\colon I \to J$ analog zu beweisen sind, werden wir nur eine Richtung betrachten. Sei dazu $(x_i)_{i\in I}$ summierbar und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $F_0 \subset I$ endlich mit

$$\left\| x - \sum_{i\in F} x_i \right\| < \varepsilon$$

für alle $I \supset F \supset F_0$ endlich. Mit $\tilde{F}_0 = \varphi^{-1}(F_0) \subset J$ gilt dann weiter

$$\left\| x - \sum_{j\in \tilde{F}} x_{\varphi(j)} \right\| = \left\| x - \sum_{i\in \varphi(\tilde{F})} x_i \right\| < \varepsilon$$

für alle $J \supset \tilde{F} \supset \tilde{F}_0$ endlich. Damit ist $(x_{\varphi(j)})_{j\in J}$ summierbar. □

Satz 1.1.7. *Sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Dann ist $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ genau dann summierbar, wenn die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ im üblichen Sinne absolut konvergiert. In diesem Fall gilt*

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i = \sum_{i=0}^{\infty} x_i$$

Zum Beweis dieses Satzes sei an dieser Stelle auf [2, Thm. 10.1] und [7, Satz 11.18] verwiesen.

Insbesondere folgt aus Lemma 1.1.3, Korollar 1.1.5 und Satz 1.1.7, dass sich viele, für klassische Reihen bekannte Ungleichungen auf summierbare Familien übertragen. Beispielsweise erhalten wir ein Analogon zur Hölderschen Ungleichung, welches direkt aus der Hölderschen Ungleichung für endliche Teilsummen folgt.

Korollar 1.1.8. *Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $(x_i)_{i\in I}$, $(y_i)_{i\in I}$ Familien in E so, dass $(\|x_i\|^p)_{i\in I}$ und $(\|y_i\|^q)_{i\in I}$ summierbar sind. Dann ist auch $(\|x_i\|\,\|y_i\|)_{i\in I}$ summierbar mit*

$$\sum_{i\in I} \|x_i\|\,\|y_i\| \leq \left(\sum_{i\in I} \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i\in I} \|y_i\|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Mit dem Cauchy-Kriterium für summierbare Familien kann man ein Analogon zum klassischen Majorantenkriterium für Reihen zeigen.

Lemma 1.1.9. *Seien $(a_i)_{i\in I}$, $(b_i)_{i\in I}$ Familien in einem Banachraum E beziehungsweise in $[0, \infty)$ mit $\|a_i\| \leq b_i$ für alle $i \in I$. Konvergiert $\sum_{i\in I} b_i$, so konvergiert auch $\sum_{i\in I} a_i$.*

Nun führen wir unendliche Produkte ein.

Definition 1.1.10. Sei $(u_k)_{k\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Man schreibt

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_k)$$

für die Folge $(p_K)_{K\geq 1}$ der Partialprodukte $p_K = \prod_{k=1}^{K} (1 + u_k)$ und nennt das Produkt

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_k)$$

konvergent mit Wert $p \in \mathbb{C}$, wenn $p = \lim_{K\to\infty} p_K$ gilt. Das Produkt $\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k)$ heißt absolut konvergent, wenn

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| < \infty$$

ist.

Wie etwa in [12] zeigt man folgendes Resultat.

Satz 1.1.11. *Sei $(u_k)_{k\geq 1}$ eine Folge beschränkter Funktionen auf $D \subset \mathbb{C}$ so, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k(z)|$ gleichmäßig auf D konvergiert. Dann gelten:*

(i) $f(z) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + u_k(z))$ *konvergiert gleichmäßig auf* D.

(ii) *Für* $z \in D$ *ist* $f(z) = 0$ *genau dann, wenn ein* $k \geq 1$ *existiert mit* $u_k(z) = -1$.

(iii) *Für jede Permutation* $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *gilt*

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + u_{\pi(k)}(z)),$$

wobei das Produkt wieder gleichmäßig auf D *konvergiert.*

Indem man $D = \{z\} \subset \mathbb{C}$ wählt, erhält man entsprechende Aussagen für unendliche Produkte komplexer Zahlen.

Zum Abschluss des Abschnittes stellen wir noch einige allgemeine Hilfsaussagen zur Verfügung, die wir später benötigen werden.

Lemma 1.1.12. *Sei* X *ein metrischer Raum und seien* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* X, *sowie* $x \in X$ *so, dass jede Teilfolge von* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine gegen* x *konvergente Teilfolge hat. Dann gilt* $x_n \xrightarrow{n} x$.

Beweis: Angenommen, $x_n \xrightarrow{n} x$ gilt nicht. Dann gäbe es ein $\varepsilon > 0$ derart, dass es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k > k$ mit $|x_{n_k} - x| \geq \varepsilon$ gibt. Rekursiv könnte man eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wählen mit $|x_{n_k} - x| \geq \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Diese Teilfolge hätte aber keine gegen x konvergente Teilfolge im Widerspruch zur Voraussetzung. $\square$

Ist X ein Banachraum, so bezeichnen wir mit

$$\mathcal{K}(X) = \{T \in \mathcal{L}(X);\ T \text{ kompakt}\}$$

die kompakten Operatoren auf X.

Lemma 1.1.13. *Sei* H *ein unendlich dimensionaler Hilbertraum.*

(i) *Ist* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine orthonormale Folge in* H, *so gilt* $x_n \xrightarrow[\tau_w]{n} 0$.

(ii) *Sei* $B \in \mathcal{K}(H)$ *und* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* H *mit* $x_n \xrightarrow[\tau_w]{n} x$. *Dann gilt* $Bx_n \xrightarrow[\|\cdot\|]{n} Bx$.

Beweis: (i) Für alle $y \in H$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n, y\rangle|^2 \leq \|y\|^2 < \infty$$

nach der Besselschen Ungleichung. Damit folgt direkt $\langle x_n, y\rangle \xrightarrow{n} 0$ für alle $y \in H$.

(ii) Sei $(Bx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(Bx_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Da B kompakt und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, gibt es eine normkonvergente Teilfolge $(Bx_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$, sei etwa $y = \lim_{l\to\infty} Bx_{n_{k_l}}$. Insbesondere

$$Bx_{n_{k_l}} \xrightarrow[\tau_w]{l} y \in H.$$

Da B schwach stetig ist, gilt auch$Bx_{n_{k_l}} \xrightarrow[\tau_w]{l} Bx$. Aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwertes folgt $y = Bx$ und damit

$$Bx_{n_{k_l}} \xrightarrow[\|\cdot\|]{l} Bx.$$

Aus Lemma 1.1.12 folgt $Bx_n \xrightarrow[\|\cdot\|]{n} Bx$.

$\square$

Lemma 1.1.14. *Seien E, F Banachräume und $T \in \mathcal{L}(E, F)$ injektiv. Dann ist* $\operatorname{Im} T$ *genau dann nicht abgeschlossen, wenn es eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in E mit $\|x_k\| = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $Tx_k \xrightarrow{k} 0$ gibt.*

Beweis: Eine Folge wie in der Voraussetzung gibt es genau dann, wenn

$$\inf_{\|x\|=1} \|Tx\| = 0$$

gilt. Laut Korollar 8.6 in [7] ist $\operatorname{Im} T \subset F$ genau dann abgeschlossen. $\square$

Lemma 1.1.15. *Seien X ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)$ so, dass Operatoren $S \in \mathcal{L}(X)$, $K \in \mathcal{K}(X)$ existieren mit $ST = 1 + K$. Dann ist* $\dim \operatorname{Ker} T < \infty$ *und* $\operatorname{Im} T \subset X$ *abgeschlossen.*

Beweis: Nach Lemma 9.1 in [7] ist $\operatorname{Ker} ST$ und damit $\operatorname{Ker} T \subset \operatorname{Ker} ST$ endlich dimensional. Angenommen, T hätte kein abgeschlossenes Bild. Dann gäbe es nach Lemma 1.1.14 eine Folge $(x_k + \operatorname{Ker} T)_{k\in\mathbb{N}}$ in $X/\operatorname{Ker} T$ mit $\|x_k + \operatorname{Ker} T\| = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $Tx_k \xrightarrow{k} 0$. Nach Definition der Quotientennorm kann man zusätzlich erreichen, dass $\|x_k\| < 2$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Aber dann gilt

$$x_k + Kx_k \xrightarrow{k} 0$$

und durch Übergang zu einer Teilfolge kann man zusätzlich erreichen, dass $(Kx_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Dann existiert

$$x = \lim_{k\to\infty} x_k$$

und es gilt

$$\|x + \operatorname{Ker} T\| = \lim_{k\to\infty} \|x_k + \operatorname{Ker} T\| = 1$$

und

$$Tx = \lim_{k\to\infty} Tx_k = 0.$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass $\operatorname{Im} T \subset X$ abgeschlossen ist. $\square$

Im Hilbertraum-Fall gilt auch die umgekehrte Implikation, dies folgt etwa aus dem Beweis von Satz 10.6 in [7].

Wir erinnern an die Definition banachraumwertiger holomorpher Funktionen.

Definition 1.1.16. Seien X ein Banachraum, $U \subset \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in U$. Eine Abbildung $\Phi\colon U \to X$ heißt holomorph in z_0, falls

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\Phi(z) - \Phi(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. Φ heißt holomorph auf U, falls sie holomorph in allen $z \in U$ ist.

Schließlich zeigen wir zwei Abschätzungen, die wir später benötigen werden.

Lemma 1.1.17. *Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha > 0$. Dann gibt es eine Konstante $C > 0$ mit*

$$\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^{n+1} \leq C \exp\left(n^{1-\alpha}\right) \qquad \textit{für } n \geq 1$$

und

$$\left(1 + \frac{1}{2n^\alpha - 1}\right)^{n-1} \leq \exp\left(n^{1-\alpha}\right) \qquad \textit{für } n \geq 1.$$

Beweis: Für $n \geq 1$ ist

$$(n+1)\log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) - n^{1-\alpha} \leq \frac{n+1}{n^\alpha} - n^{1-\alpha} = \frac{1}{n^\alpha} \leq 1.$$

Also gilt die erste Ungleichung mit $C = e$. Für $n \geq 1$ gilt

$$(n-1)\log\left(1 + \frac{1}{2n^\alpha - 1}\right) - n^{1-\alpha} \leq \frac{n}{2n^\alpha - 1} - n^{1-\alpha} = n^{1-\alpha}\left(\frac{1}{2 - \frac{1}{n^\alpha}} - 1\right) \leq 0.$$

Also gilt die zweite Ungleichung. □

1.2 Grundlegende Existenzaussagen für invariante Teilräume

In diesem Abschnitt stellen wir einige fundamentale Aussagen über die Existenz von invarianten Teilräumen bereit, die wir später benötigen werden. Sei H stets ein unendlich dimensionaler komplexer Hilbertraum.

Definition 1.2.1. Seien $M \subset H$ ein abgeschlossener Teilraum und $T \in \mathcal{L}(H)$.

(i) Wir nennen M invariant für T, wenn $TM \subset M$ gilt.

(ii) Wir bezeichnen mit

$$\operatorname{Lat} T = \{M;\ M \subset H \text{ abgeschlossener Teilraum mit } TM \subset M\}$$

die Menge der abgeschlossenen invarianten Teilräume für T.

(iii) Ist M invariant für T so nennen wir einen invarianten Teilraum $N \subset M$ für T maximal invariant in M, falls $N \subsetneq M$ gilt und es keinen weiteren invarianten Teilraum L für T gibt mit $N \subsetneq L \subsetneq M$.

Lemma 1.2.2. *Seien $P\colon H \to H$ eine stetige Projektion, $M = \operatorname{Im} P$, $N = \operatorname{Ker} P$ und $T \in \mathcal{L}(H)$. Dann gelten:*

(i) M ist genau dann invariant für T, wenn $PTP = TP$ gilt.

(ii) M und N sind genau dann invariant für T, wenn $TP = PT$ gilt.

Beweis: (i) Sei zunächst M invariant für T und $x \in H$. Dann gilt $Px \in M$, also auch $TPx \in M$ und somit $PTPx = TPx$.
Ist andererseits $PTP = TP$ und $x \in M$ beliebig, so gilt

$$Tx = TPx = PTPx \in M.$$

Also ist dann $TM \subset M$.

(ii) Nach (i) sind M und N genau dann invariant für T, wenn $PTP = TP$ und $(1-P)T(1-P) = T(1-P)$ gelten. Die zweite Gleichung berechnet sich zu

$$T - TP - PT + PTP = T - TP.$$

Also sind M und N invariant für T genau dann, wenn $PTP = TP$ und $-PT + PTP = 0$ gelten. Durch Gleichsetzen folgt daraus sofort $TP = PT$. Umgekehrt folgt aus $TP = PT$ wegen $P^2 = P$ sofort $PTP = PT$ und $TP = PTP$.

□

Ist $T \in \mathcal{L}(H)$ so bezeichnen

$$(T)' = \{S \in \mathcal{L}(H);\ ST = TS\}$$

und

$$(T)'' = \{S \in \mathcal{L}(H);\ SR = RS \text{ für alle } R \in (T)'\},$$

den Kommutanten beziehungsweise den Bikommutanten von T.

Satz 1.2.3. *Seien $P\colon H \to H$ eine Projektion, $M = \operatorname{Im} P$, $N = \operatorname{Ker} P$ und $T \in \mathcal{L}(H)$. Ist $P \in (T)''$, so sind M und N invariant für T.*

Beweis: Wegen $T \in (T)'$ gilt $TP = PT$. Nach Lemma 1.2.2 sind M und N invariant für T. □

Die Existenz von invarianten Teilräumen für einen Operator und seinen adjungierten Operator stehen in engem Zusammenhang. Präzise gilt das folgende Resultat.

Lemma 1.2.4. *Für $T \in \mathcal{L}(H)$ und einen abgeschlossenen Teilraum $M \subset H$ sind äquivalent:*

(i) M ist hyperinvariant für T.

(ii) $M^\perp$ ist hyperinvariant für T^*.

Beweis: Sei $T \in \mathcal{L}(H)$ und ohne Einschränkung gelte $\emptyset \neq M \neq H$. Sei M zunächst hyperinvariant für T. Ist weiter $S \in (T^*)'$ gegeben, so gilt sofort $S^* \in (T)'$. Es folgt

$$\langle Sx, y\rangle = \langle x, S^* y\rangle = 0,$$

für $x \in M^\perp$ und $y \in M$. Damit ist $SM^\perp \subset M^\perp$.
Die andere Implikation folgt direkt aus $M^{\perp\perp} = M$ und $(T^*)^* = T$. □

Ähnlich kann man für einen abgeschossenen Teilraum $M \subset H$ zeigen, dass M genau dann invariant für T ist, wenn $M^\perp$ invariant für T^* ist.

Wir erinnern nun an den analytischen Funktionalkalkül aus der Funktionalanalysis. Siehe etwa [7].

Satz 1.2.5. *Seien A eine unitale Banachalgebra, $x \in A$, $U \supset \sigma(x)$ offen und Γ ein Zyklus, der $\sigma(x)$ in U umrundet. Dann ist die Abbildung*

$$\Phi\colon \mathcal{O}(U) \to (x)'', \quad f \mapsto f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)R(\lambda, x)\ d\lambda,$$

wobei $R(\lambda, x)$ die Resolventenfunktion von x bezeichne, ein stetiger Algebrenhomomorphismus (unabhängig von der Wahl von Γ) mit $\Phi(1) = 1_A$ und $\Phi(z) = x$.

Wir betrachten im Folgenden die unitale Banachalgebra $\mathcal{L}(H)$.

Wir zeigen nun, dass Operatoren $A \in \mathcal{L}(H)$ mit unzusammenhängendem Spektrum nichttriviale invariante Teilräume haben. Genauer gilt sogar der folgende Satz.

Satz 1.2.6 (Rieszscher Zerlegungssatz)**.** *Sei $A \in \mathcal{L}(H)$ so, dass man $\sigma(A) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ in abgeschlossene, disjunkte Teilmengen $\sigma_1 \neq \emptyset \neq \sigma_2$ zerlegen kann. Dann hat A ein komplementäres Paar von nichttrivialen, invarianten Teilräumen M_1 und M_2 derart, dass*

$$\sigma(A|_{M_i}) = \sigma_i$$

für $i = 1, 2$ gilt.

Beweis: Da σ_1 und σ_2 disjunkt und kompakt sind, gibt es disjunkte, offene Mengen U_1 und U_2 mit $\sigma_1 \subset U_1$ und $\sigma_2 \subset U_2$. Seien Funktionen $f_1,\ f_2$ definiert durch

$$f_1\colon U_1 \cup U_2 \to \mathbb{C}, \qquad f_1(z) = \begin{cases} 1, & \text{für } z \in U_1 \\ 0, & \text{für } z \in U_2 \end{cases},$$

$$f_2\colon U_1 \cup U_2 \to \mathbb{C}, \qquad f_2(z) = \begin{cases} 0, & \text{für } z \in U_1 \\ 1, & \text{für } z \in U_2 \end{cases}.$$

Da $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ gilt, sind f_1 und f_2 holomorph. Mit dem analytischen Funktionalkalkül folgt dann

$$f_1(A) + f_2(A) = 1, \qquad [f_1(A)]^2 = f_1(A), \qquad [f_2(A)]^2 = f_2(A).$$

Damit sind $f_1(A)$ und $f_2(A)$ stetige Projektionen mit $\operatorname{Im} f_1(A) + \operatorname{Im} f_2(A) = H$.
Sei $i \in \{1, 2\}$. Dann folgt aus Satz 1.2.3, dass $M_i = \operatorname{Im} f_i(A)$ invariant unter A ist. Schreiben wir $A_i = A|_{M_i}$, so bleibt zu zeigen, dass $\sigma(A_i) = \sigma_i$ für $i = 1, 2$ gilt. Dass M_1 und M_2 nichttrivial sind, folgt dann automatisch.

Sei zunächst $\lambda \notin \sigma_1$. Die Räume $M_1, M_2 \subset H$ sind offensichtlich invariant unter allen Operatoren $f(A)$ für $f \in \mathcal{O}(\sigma(A))$. Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_1$ sei $g\colon (U_1 \cap \{\lambda\}^c) \cup U_2 \to \mathbb{C}$ die holomorphe Funktion mit

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f_1(z)}{\lambda - z}, & z \in U_1 \cap \{\lambda\}^c \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann gilt

$$(\lambda - A)g(A) = ((\lambda - z)g)(A) = f_1(A) = P_{M_1}$$

und genauso

$$g(A)(\lambda - A) = P_{M_1}.$$

Durch Einschränken auf M_1 erhält man

$$(\lambda - A_1)g(A)|_{M_1} = g(A)|_{M_1}(\lambda - A_1) = 1_{M_1}.$$

Damit ist $\lambda \notin \sigma(A_1)$ und es gilt $\sigma(A_1) \subset \sigma_1$. Genauso folgt $\sigma(A_2) \subset \sigma_2$. Die umgekehrten Inklusionen gelten wegen $\sigma_1 \cup \sigma_2 = \sigma(T) \subset \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$.

□

Korollar 1.2.7. *Sei $A \in \mathcal{L}(H)$. Ist $\sigma(A)$ nicht zusammenhängend, so hat A ein komplementäres Paar von nichttrivialen, hyperinvarianten Teilräumen.*

Beweis: Da $\sigma(A)$ nicht zusammenhängend und abgeschlossen ist, gibt es disjunkte, nichtleere, abgeschlossene Mengen σ_1, σ_2 mit $\sigma(A) = \sigma_1 \cup \sigma_2$. Seien $f_1(A), f_2(A)$ die Projektionen aus dem Beweis von Satz 1.2.6. Aus der Definition des analytischen Funktionalkalküls folgt

$$f_1(A), f_2(A) \in (A)''.$$

Damit sind $\operatorname{Im} f_1(A), \operatorname{Im} f_2(A)$ invariant unter jedem Operator aus $(A)'$ und nichttrivial nach dem Beweis von 1.2.6. □

Wir benötigen das in der Einleitung bereits erwähnte Resultat, dass kompakte Operatoren stets einen nichttrivialen abgeschlossenen invarianten Teilraum besitzen. Für einen Beweis, siehe etwa [10].

Satz 1.2.8 (Lomonosov)**.** *Ist $0 \neq K \in \mathcal{K}(H)$, so hat K einen nichttrivialen hyperinvarianten Teilraum.*

Das folgende Resultat liefert eine sehr nützliche Aussage über das Spektrum kompakter Störungen stetiger Operatoren.

Satz 1.2.9 (Weyl)**.** *Sind $A \in \mathcal{L}(H)$ und $K \in \mathcal{K}(H)$, so gilt*

$$\sigma(A + K) \subset \sigma(A) \cup \sigma_p(A + K).$$

Beweis: Sei $\lambda \in \sigma(A+K) \cap \sigma(A)^c$. Es gilt

$$(A+K) - \lambda = (A-\lambda)(1 + (A-\lambda)^{-1}K) \qquad (*).$$

Da $A-\lambda$ in $\mathcal{L}(H)$ invertierbar ist, kann $1 + (A-\lambda)^{-1}K$ nicht invertierbar sein. Daher folgt

$$-1 \in \sigma\left((A-\lambda)^{-1}K\right)$$

und wegen

$$(A-\lambda)^{-1}K \in \mathcal{K}(H),$$

gilt sogar $-1 \in \sigma_p\left((A-\lambda)^{-1}K\right)$. Mit $(*)$ folgt dann $\lambda \in \sigma_p(A+K)$, also die Behauptung. $\square$

Wir benötigen in späteren Kapiteln Abschätzungen für die Resolventen von speziellen Operatoren. Diese erhalten wir durch folgende Aussagen über holomorphe Funktionen.

Sei $R > 0$. Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{A}(D_R(0)) = \left\{ f \in C(\overline{D_R(0)});\ f|_{D_R(0)} \in \mathcal{O}(D_R(0)) \right\}$$

die stetigen Funktionen auf $\overline{D_R(0)}$, die holomorph auf $D_R(0)$ sind.

Lemma 1.2.10 (Ungleichung von Borel-Carathéodory). *Ist $f \in \mathcal{A}(D_R(0))$ so gilt*

$$|f(z)| \leq \frac{2\,|z|}{R-|z|} A(R) + \frac{R+|z|}{R-|z|}\,|f(0)|$$

für $0 \leq |z| < R$. Für $0 \leq r \leq R$ bezeichne

$$A(r) = \max_{|w| \leq r} \{\operatorname{Re} f(w)\}.$$

Beweis: Wir setzen zunächst $f(0) = 0$ voraus. In diesem Fall dürfen wir zusätzlich annehmen, dass f nicht konstant ist. Mit $a = A(R)$ gilt dann aufgrund des Maximumprinzips für harmonische Funktionen $a > A(0) = 0$. Damit ist die Funktion

$$g\colon D_1(0) \to \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} z < a\}, \quad z \mapsto f(Rz)$$

holomorph. Man rechnet leicht nach, dass die Abbildung

$$T\colon \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} z < a\} \to D_1(0), \quad z \mapsto \frac{z}{2a-z}$$

biholomorph ist mit Umkehrabbildung

$$T^{-1}\colon D_1(0) \to \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} z < a\}, \quad z \mapsto \frac{2az}{1+z}.$$

Für die holomorphe Verkettung

$$\varphi = T \circ g\colon D_1(0) \to D_1(0)$$

gilt dann $\varphi(0) = 0$. Aus dem Lemma von Schwarz folgt

$$|\varphi(z)| \leq z$$

für alle $z \in D_1(0)$. Mit $a > 0$ folgt

$$|g(z)| = \left|T^{-1}(\varphi(z))\right| = \left|\frac{2a\varphi(z)}{1+\varphi(z)}\right| \leq \frac{2a\,|z|}{1-|z|}$$

für alle $z \in D_1(0)$, und damit

$$|f(z)| = \left|g\left(\frac{z}{R}\right)\right| \leq \frac{2a\,|z|}{R-|z|}$$

für alle $z \in D_R(0)$. Für $z \in D_R(0)$ gilt also

$$|f(z)| \leq \frac{2\,|z|}{R-|z|}A(R).$$

Sei nun $f \in \mathcal{O}(\overline{D_R(0)})$ beliebig. Wendet man die oben gezeigte Ungleichung auf die holomorphe Funktion

$$h\colon \overline{D_R(0)} \to \mathbb{C}, \quad h(z) = f(z) - f(0)$$

die $h(0) = 0$ erfüllt, an, so erhält man

$$\begin{aligned} |h(z)| = &\leq \frac{2\,|z|}{R-|z|} \max_{|w|\leq R} \{\operatorname{Re}(f(w) - f(0)\} \\ &\leq \frac{2\,|z|}{R-|z|} \left(A(R) + |f(0)|\right) \end{aligned}$$

für alle $z \in D_R(0)$. Es folgt schließlich

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq |h(z)| + |f(0)| \\ &\leq \frac{2\,|z|}{R-|z|} \left(A(R) + f(0)\right) + |f(0)| \\ &= \frac{2\,|z|}{R-|z|}A(R) + \frac{R+|z|}{R-|z|} |f(0)| \end{aligned}$$

für alle $z \in D_R(0)$. □

Lemma 1.2.11. *Seien $p \geq 0$, $w \in \mathbb{C}$ und $f \in \mathcal{O}(D_r(w))$ mit*

$$\operatorname{Re} f(z) \leq (r - |z-w|)^{-p}$$

für alle $z \in D_r(w)$. Dann existiert $K > 0$ so, dass

$$|f(z)| \leq K\,(r - |z-w|)^{-p-1}$$

für alle $z \in D_r(w)$ gilt.

Beweis: Für $s \in (0,r)$ und mit Lemma 1.2.10 angewendet auf die holomorphe Funktion $f(\cdot + w) \in \mathcal{O}(\overline{D_s(0)})$ folgt

$$\begin{aligned} |f(z)| = |f(z-w+w)| &\leq \frac{2\,|z-w|}{s-|z-w|} \max_{|v-w|\leq s}\{\operatorname{Re} f(v)\} + \frac{s+|z-w|}{s-|z-w|}\,|f(w)| \\ &= \frac{s+|z-w|}{s-|z-w|}\left(\frac{2\,|z-w|}{s+|z-w|}\max_{|v-w|\leq s}\{\operatorname{Re} f(v)\} + |f(w)|\right) \end{aligned}$$

für $|z-w| < s$. Da $[0,\infty[\, \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{2t}{s+t}$ streng monoton wachsend ist, gilt

$$\frac{2\,|z-w|}{s+|z-w|} \leq \frac{2r}{\frac{r}{2}+r} = \frac{4}{3}$$

für $s \in [\frac{r}{2}, r)$ und $|z-w| < s$. Nach Voraussetzung ist

$$\max_{|v-w|\leq s}\{\operatorname{Re} f(v)\} \leq \frac{1}{(r-s)^p}$$

und für $s \in [\frac{r}{2}, r)$ und $|z-w| < s$ folgt damit weiter

$$|f(z)| \leq \frac{s+|z-w|}{s-|z-w|}\left(\frac{4}{3}(r-s)^{-p} + |f(w)|\right).$$

Da $2s - r < s$ ist für $s < r$ folgt für $s \in [\frac{r}{2}, r)$ und $|z-w| = 2s - r$ damit

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \frac{3\,|z-w| + r}{r - |z-w|}\left(\frac{4}{3}\left(\frac{r}{2} - \frac{|z-w|}{2}\right)^{-p} + |f(w)|\right) \\ &\leq 4r\left(2^{p+2}\,(r-|z-w|)^{-p-1} + \frac{|f(w)|}{r-|z-w|}\right) \\ &= 2^{p+4}r\left((r-|z-w|)^{-p-1} + \frac{|f(w)|}{2^{p+2}}(r-|z-w|)^{-1}\right) \\ &\leq \left(2^{p+4}r\,(1+|f(w)|\,(r-|z-w|)^p)\right)(r-|z-w|)^{-p-1} \\ &\leq \left(2^{p+4}r\,(1+|f(w)|)\,r^p\right)(r-|z-w|)^{-p-1}. \end{aligned}$$

Wegen $\left\{2s-r;\ s \in [\frac{r}{2}, r)\right\} = [0,r)$ folgt mit der Wahl

$$K = 2^{p+4}r\,(1+|f(w)|\,r^p)$$

die Behauptung. $\square$

1.3 Schatten-p-Klasse Operatoren

Seien H und K stets komplexe Hilberträume. Außerdem bezeichne

$$\mathcal{F}(H,K) = \{T \in \mathcal{L}(H,K);\ \dim \operatorname{Im} T < \infty\}$$

die Operatoren endlichen Ranges und

$$\mathcal{K}(H,K) = \{T \in \mathcal{L}(H,K);\ T \text{ kompakt}\}$$

die kompakten Operatoren zwischen H und K.

Seien $S \in \mathcal{L}(H)$ positiv und $(e_i)_{i\in I}$, $(f_j)_{j\in J}$ zwei Orthonormalbasen von H und $(\langle Se_i, e_i\rangle)_{i\in I}$ summierbar. Für jede endliche Menge $M \subset I \times J$ gilt dann

$$\sum_{(i,j)\in M} \left|\left\langle S^{\frac{1}{2}} e_i, f_j\right\rangle\right|^2 \leq \sum_{i\in\pi_I(M)} \sum_{j\in\pi_J(M)} \left|\left\langle S^{\frac{1}{2}} e_i, f_j\right\rangle\right|^2 \leq \sum_{i\in I} \langle Se_i, e_i\rangle < \infty,$$

also ist $\left(\left|\left\langle S^{\frac{1}{2}} e_i, f_j\right\rangle\right|^2\right)_{(i,j)\in I\times J}$ summierbar nach Lemma 1.1.2 und durch zweimaliges Anwenden von Korollar 1.1.5 folgt

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} \left|\left\langle S^{\frac{1}{2}} e_i, f_j\right\rangle\right|^2 = \sum_{(i,j)\in I\times J} \left|\left\langle S^{\frac{1}{2}} e_i, f_j\right\rangle\right|^2 = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} \left|\left\langle S^{\frac{1}{2}} e_i, f_j\right\rangle\right|^2.$$

Unter Anwendung der Parsevalschen Gleichung folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I} \langle Se_i, e_i\rangle &= \sum_{i\in I} \left\|S^{\frac{1}{2}} e_i\right\|^2 \\
&= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} \left|\left\langle S^{\frac{1}{2}} e_i, f_j\right\rangle\right|^2 \\
&= \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} \left|\left\langle S^{\frac{1}{2}} f_j, e_i\right\rangle\right|^2 \\
&= \sum_{j\in J} \langle Sf_j, f_j\rangle .
\end{aligned}$$

Damit ist sowohl die Summierbarkeit von $(\langle Se_i, e_i\rangle)_{i\in I}$ als auch der Wert der Summe $\sum_{i\in I} \langle Se_i, e_i\rangle$ unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis und wir können die Spur eines positiven Operators wie folgt definieren.

Definition 1.3.1. Seien $(e_i)_{i\in I}$ eine Orthonormalbasis von H und $S \in \mathcal{L}(H)$ positiv. Wir nennen S einen Operator mit endlicher Spur, falls $(\langle Se_i, e_i\rangle)_{i\in I}$ summierbar ist. In diesem Fall nennen wir

$$\operatorname{tr} S = \sum_{i\in I} \langle Se_i, e_i\rangle$$

die Spur von S.

Für $1 \leq p < \infty$ heißt die Menge

$$\mathscr{S}_p(H,K) = \{A \in \mathcal{L}(H,K); |A|^p \text{ hat endliche Spur}\}$$

die Schatten-p-Klasse von H nach K.

Wir zeigen nun wichtige Eigenschaften der Schatten-p-Klasse-Operatoren.

Satz 1.3.2. *Seien $1 \leq p < \infty,\ H_0,\ H,\ K_0$ und K Hilberträume. Dann gilt:*

(i) $\mathcal{F}(H,K) \subset \mathscr{S}_p(H,K) \subset \mathcal{K}(H,K)$,

(ii) $\mathscr{S}_p(H,K)$ *ist ein* $\mathbb{C}-$ *Vektorraum und durch*

$$\left\|\cdot\right\|_p = (\operatorname{tr}\left|\cdot\right|^p)^{\frac{1}{p}}$$

wird eine Norm auf $\mathscr{S}_p(H,K)$ *definiert.*

(iii) Ist $T \in \mathscr{S}_p(H,K)$, *so ist* $T^* \in \mathscr{S}_p(K,H)$,

(iv) Für $T \in \mathscr{S}_p(H,K),\ S \in \mathcal{L}(K,K_0)$ *und* $R \in \mathcal{L}(H_0,H)$ *gilt*

$$STR \in \mathscr{S}_p(H_0,K_0)$$

und

$$\left\|STR\right\|_p \leq \left\|S\right\| \left\|R\right\| \left\|T\right\|_p .$$

Beweis: Beginnen wir mit Teil (i). Wir rechnen zunächst eine alternative Darstellung für $\operatorname{tr}\left|T\right|^p$ nach. Sei dazu $T \in \mathcal{K}(H,K)$.
Da $T^*T \in \mathcal{K}(H)$ selbstadjungiert ist, können wir den Spektralsatz für kompakte, normale Operatoren anwenden.

Sei also $(e_i)_{i\in I}$ eine Orthonormalbasis von H zu den Eigenwerten $(a_i)_{i\in I}$ von T^*T, wobei $I' = \{i \in I;\ a_i \neq 0\}$ höchstens abzählbar ist. Dann gilt also

$$T^*Te_i = a_ie_i$$

für alle $i \in I$. Weiterhin sei $\alpha_i = \sqrt{a_i}$ für alle $i \in I$.
Mit den Eigenschaften des stetigen Funktionalkalküls folgt, dass

$$\sum_{i\in F} \langle \left|T\right|^p e_i, e_i\rangle = \sum_{i\in F} \alpha_i^p \langle e_i, e_i\rangle = \sum_{i\in F} \alpha_i^p$$

für alle $F \subset I$ endlich gilt. Insbesondere ist damit $(\langle \left|T\right|^p e_i, e_i\rangle)_{i\in I}$ genau dann summierbar, wenn $(\alpha_i^p)_{i\in I}$ summierbar ist, und in diesem Fall gilt

$$\sum_{i\in I} \langle \left|T\right|^p e_i, e_i\rangle = \sum_{i\in I} \alpha_i^p. \tag{1.1}$$

Ist $T \in \mathcal{F}(H,K)$, so ist I' sogar endlich. Damit gilt insbesondere $\mathcal{F}(H,K) \subset \mathscr{S}_p(H,K)$.

Wir zeigen als nächstes, dass $\mathscr{S}_2(H,K) \subset \mathcal{K}(H,K)$ gilt. Seien dazu $S \in \mathscr{S}_2(H,K)$ und eine Orthonormalbasis $(e_i)_{i\in I}$ von H gegeben. Da

$$\left(\left\langle \left|S\right|^2 e_i, e_i\right\rangle\right)_{i\in I} = \left(\left\|Se_i\right\|^2\right)_{i\in I}$$

summierbar ist, ist nach Lemma 1.1.3 die Menge $\tilde{I} = \{i \in I \colon Se_i \neq 0\} \subset I$ höchstens abzählbar. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $\left|\tilde{I}\right| = \infty$ gilt, da sonst

$S \in \mathcal{F}(H,K) \subset \mathcal{K}(H,K)$ folgt.

Wir können also eine Familie $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ endlicher Teilmengen von I mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n = \tilde{I}$ und $J_n \subsetneq J_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wählen. Wir definieren $S_n \in \mathcal{F}(H,K)$ durch

$$S_n = \sum_{j\in J_n} \langle \cdot, e_j \rangle \, Se_j.$$

Wegen

$$(S - S_n)\, e_i = Se_i - \sum_{j\in J_n} \langle e_i, e_j \rangle \, Se_j = \begin{cases} 0, & \text{für } i \in J_n \\ Se_i, & \text{für } i \notin J_n \end{cases}$$

für alle $i \in I$ gilt

$$\|S - S_n\|_2^2 = \sum_{i\in\tilde{I}\setminus J_n} \|Se_i\|^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Für alle $x \in H$ gilt unter Benutzung von Korollar 1.1.8 und der Parsevalschen Gleichung

$$\|Sx\|^2 \leq \left(\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2\right)\left(\sum_{i\in I} \|Se_i\|^2\right) = \|x\|^2 \, \|S\|_2^2 \, .$$

Daraus folgt $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_2$ und mit $\|S - S_n\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$ erhalten wir auch

$$\|S - S_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Als Grenzwert von Operatoren endlichen Ranges ist S damit kompakt.

Sei schließlich $T \in \mathscr{S}_p(H,K)$ gegeben. Es folgt

$$|T|^p \in \mathscr{S}_1(H),$$

und damit

$$|T|^{\frac{p}{2}} \in \mathscr{S}_2(H) \subset \mathcal{K}(H).$$

Da die kompakten Operatoren ein Ideal bilden folgt daraus

$$|T| \in \mathcal{K}(H).$$

Benutzt man die Polarzerlegung von T, so erhält man ein $U \in \mathcal{L}(H,K)$ mit

$$T = U\,|T| \in \mathcal{K}(H,K).$$

Als nächstes widmen wir uns den Teilen (iii) und (iv).

Sei dazu zunächst $T \in \mathscr{S}_p(H,K)$ gegeben und sei außerdem wie im Beweis von (i) durch $(e_i)_{i\in I}$ eine Orthonormalbasis von H aus Eigenvektoren zur Familie der Eigenwerte $(a_i)_{i\in I}$ von T^*T gegeben. Wir schreiben wieder $\alpha_i = \sqrt{a_i}$ für alle $i \in I$ und $I' = \{i \in I;\ \alpha_i \neq 0\}$.

Für alle $i \in I'$ sei weiter

$$f_i = \frac{1}{\alpha_i} Te_i \in K.$$

Für $i, j \in I'$ gilt dann

$$\langle f_i, f_j \rangle = \frac{1}{\alpha_i \alpha_j} \langle T^* T e_i, e_j \rangle = \frac{\alpha_i^2}{\alpha_i \alpha_j} \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij},$$

womit $(f_i)_{i \in I'}$ ein Orthonormalsystem in K ist. Wir ergänzen $(f_i)_{i \in I'}$ zu einer Orthonormalbasis $(f_j)_{j \in J}$ von K und erhalten mit (1.1), dass

$$\|T\|_p^p = \sum_{i \in I'} \alpha_i^p = \sum_{i \in I'} \left(\frac{1}{\alpha_i} \langle T^* T e_i, e_i \rangle \right)^p = \sum_{i \in I'} |\langle T e_i, f_i \rangle|^p$$

gilt. Damit folgt

$$\|T\|_p \leq \sup \left\{ \left(\sum_{l \in L} |\langle T g_l, h_l \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \tag{1.2}$$

wobei das Supremum auf der rechten Seite über alle Indexmengen $L \subset I$ und Orthonormalsysteme $(g_l)_{l \in L}$ von H und $(h_l)_{l \in L}$ von K gebildet wird.

Wir zeigen nun über eine allgemeinere Ungleichung, dass in (1.2) sogar Gleichheit gilt. Seien dazu $S \in \mathcal{L}(K, K_0)$ wie in (iv) und $(g_l)_{l \in L}$ beziehungsweise $(h_l)_{l \in L}$ Orthonormalsysteme in H beziehungsweise K_0.

Sei $U \colon H \to K$ eine partielle Isometrie mit $T = U\,|T|$. Für alle $l \in L$ gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{i \in I} |\langle U^* S^* h_l, e_i \rangle|\, |\langle e_i, g_l \rangle| \\
&\leq \left(\sum_{i \in I} |\langle U^* S^* h_l, e_i \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i \in I} |\langle e_i, g_l \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|U^* S^* h_l\|\, \|g_l\| \leq \|S^*\| = \|S\|,
\end{aligned}$$

wobei wir Korollar 1.1.8 und die Besselsche Ungleichung benutzt haben.
Eine erneute Anwendung von Korollar 1.1.8 liefert

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i \in I} \alpha_i\, |\langle U^* S^* h_l, e_i \rangle|\, |\langle e_i, g_l \rangle| \right)^p \\
&\leq \left(\sum_{i \in I} \alpha_i^p\, |\langle U^* S^* h_l, e_i \rangle|\, |\langle e_i, g_l \rangle| \right) \left(\sum_{i \in I} |\langle U^* S^* h_l, e_i \rangle|\, |\langle e_i, g_l \rangle| \right)^{\frac{p}{q}}
\end{aligned}$$

für alle $l \in L$, wobei q den konjugierten Exponenten zu p bezeichnet.
Aus der vorigen Rechnung folgern wir für den zweiten Faktor

$$\left(\sum_{i \in I} |\langle U^* S^* h_l, e_i \rangle|\, |\langle e_i, g_l \rangle| \right)^{\frac{p}{q}} \leq \|S\|^{\frac{p}{q}} \qquad (l \in L).$$

Damit folgt dann unter Beachtung von (1.1) weiter

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l\in L}\left(\sum_{i\in I}\alpha_i \left|\langle U^*S^*h_l,e_i\rangle\right|\left|\langle e_i,g_l\rangle\right|\right)^p\\
&\le \|S\|^{\frac{p}{q}}\left(\sum_{l\in L}\sum_{i\in I}\alpha_i^p \left|\langle U^*S^*h_l,e_i\rangle\right|\left|\langle e_i,g_l\rangle\right|\right)\\
&= \|S\|^{\frac{p}{q}}\left(\sum_{i\in I}\alpha_i^p \sum_{l\in L}\left|\langle U^*S^*h_l,e_i\rangle\right|\left|\langle e_i,g_l\rangle\right|\right)\\
&\le \|S\|^{\frac{p}{q}}\left(\sum_{i\in I}\alpha_i^p \left(\sum_{l\in L}\left|\langle SUe_i,h_l\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{l\in L}\left|\langle e_i,g_l\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\\
&\le \|S\|^{\frac{p}{q}}\sum_{i\in I}\alpha_i^p \left\|SUe_i\right\|\left\|e_i\right\|\\
&\le \|S\|^{\frac{p}{q}+1}\sum_{i\in I}\alpha_i^p = \|S\|^{\frac{p}{q}+1}\left\|T\right\|_p^p = \|S\|^p\left\|T\right\|_p^p.
\end{aligned}
$$

Es gilt außerdem

$$
\begin{aligned}
|T|\left(U^*S^*h_l\right) &= |T|\left(\sum_{i\in I}\langle U^*S^*h_l,e_i\rangle\, e_i\right)\\
&= \sum_{i\in I}\alpha_i\,\langle U^*S^*h_l,e_i\rangle\, e_i
\end{aligned}
$$

und damit

$$
\left|\langle |T|\,U^*S^*h_l,g_l\rangle\right| \le \sum_{i\in I}\alpha_i\left|\langle U^*S^*h_l,e_i\rangle\right|\left|\langle e_i,g_l\rangle\right|
$$

für alle $l\in L$. Dies liefert schließlich

$$
\sum_{l\in L}\left|\langle |T|\,U^*S^*h_l,g_l\rangle\right|^p \le \|S\|^p\left\|T\right\|_p^p.
$$

Wegen $\left|\langle STg_l,h_l\rangle\right| = \left|\langle T^*S^*h_l,g_l\rangle\right| = \left|\langle |T|\,U^*S^*h_l,g_l\rangle\right|$ für alle $l\in L$ folgt schlussendlich

$$
\left(\sum_{l\in L}\left|\langle STg_l,h_l\rangle\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \|S\|\left\|T\right\|_p. \tag{1.3}
$$

Wählt man nun speziell $K_0 = K$ und $S = 1_K$, so erhält man die Darstellung

$$
\left\|T\right\|_p = \sup\left\{\left(\sum_{l\in L}\left|\langle Tg_l,h_l\rangle\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\},
$$

wobei das Supremum über alle Orthonormalsysteme $(g_l)_{l\in L}$ in H und $(h_l)_{l\in L}$ in K gebildet wird.

Aus dieser Darstellung ergibt sich für $T, T_1, T_2 \in \mathscr{S}_p(H,K)$ sofort,

$$T_1 + T_2 \in \mathscr{S}_p(H,K).$$

Da das Supremum symmetrisch in H und K ist, folgt für $T \in \mathscr{S}_p(H,K)$ außerdem, dass $T^* \in \mathscr{S}_p(K,H)$ mit $\|T^*\|_p = \|T\|_p$ gilt. Außerdem erhalten wir mit Gleichung (1.3) für $T \in \mathscr{S}_p(H,K)$ und $S \in \mathcal{L}(K,K_0)$, dass

$$\|ST\|_p \leq \|S\| \, \|T\|_p$$

und insbesondere $ST \in \mathscr{S}_p(H,K_0)$ gelten. Für einen weiteren Operator $R \in \mathcal{L}(H_0,H)$ folgt schließlich

$$\|TR\|_p = \|R^*T^*\|_p \leq \|R^*\| \, \|T^*\|_p = \|R\| \, \|T\|_p$$

und damit insbesondere $TR \in \mathscr{S}_p(H_0,K)$.

Die Behauptungen aus (ii) folgen nun direkt aus (1.3). Zum Beweis der Definitheit von $\|\cdot\|_p$ beachte man (1.1). □

Aus dem obigen Beweis folgt insbesondere das folgende Korollar.

Korollar 1.3.3. *Seien H ein komplexer, seperabler Hilbertraum, $T \in \mathcal{K}(H)$ normal. Sei weiter $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H und $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit*

$$Te_n = \alpha_n e_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $T \in \mathscr{S}_p(H)$ genau dann, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^p < \infty$ gilt.

Sind H, K Hilberträume und $0 < p_1 \leq p_2$, so kann man zeigen, dass

$$\mathscr{S}_{p_1}(H,K) \subset \mathscr{S}_{p_2}(H,K)$$

gilt. Insbesondere gibt es zu $p > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq p$ und

$$\mathscr{S}_p(H,K) \subset \mathscr{S}_k(H,K).$$

Aus dem Beweis von Satz 1.3.2 entnimmt man, dass $\mathcal{F}_2(H,K) \subset \mathscr{S}_p(H,K)$ dicht bezüglich $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_p$ ist.

Allgemeiner kann man folgendes Resultat zeigen, siehe etwa [4].

Korollar 1.3.4. *Sind H, K Hilberträume und $T \in \mathscr{S}_p(H,K)$ für $1 \leq p < \infty$, so gibt es eine Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{F}(H,K)$ so, dass*

$$\|T - T_n\| \xrightarrow{n} 0, \qquad \|T - T_n\|_p \xrightarrow{n} 0$$

gelten.

Wir führen nun einen verallgemeinerten Determinantenbegriff auf dem Raum der Schatten-p-Klasse-Operatoren ein.

Definition 1.3.5. Seien $k \in \mathbb{N}^*$ und $T \in \mathscr{S}_k(H)$ und $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung der von Null verschiedenen Eigenwerte von T so, dass jeder Eigenwert $\lambda \neq 0$ entsprechend seiner Vielfachheit vorkommt und die Folge $(|\lambda_i|)_{i\in\mathbb{N}}$ monoton fällt. Gibt es nur N solcher Eigenwerte mit $N \in \mathbb{N}$, so sei $\lambda_i = 0$ für $i > N$. Dann definieren wir

$$\delta_k(T) = \prod_{i=1}^{\infty} \left[(1+\lambda_i) \exp\left(-\lambda_i + \frac{\lambda_i^2}{2} - \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{k-1} \lambda_i^{k-1} \right) \right].$$

Für $\sigma_p(T) = \{0\}$ oder $\sigma_p(T) = \emptyset$ sei $\delta_k(T) = 1$.

Lemma 1.3.6. *(i) Ist $T \in \mathscr{S}_k(H)$ für ein $k \in \mathbb{N}^*$, so ist $\delta_k(T)$ ein absolut konvergentes Produkt*

(ii) Die Abbildung

$$\mathscr{S}_k(H) \to \mathbb{C}, \quad T \mapsto \delta_k(T)$$

ist stetig. Hierbei sei $\mathscr{S}_k(H)$ mit der von $\|\cdot\|_k$ erzeugten Topologie versehen.

(iii) Es existiert eine Konstante $\Gamma_k > 0$ so, dass

$$|\delta_k(T)| \leq \exp\left(\Gamma_k \|T\|_k^k \right)$$

für alle $T \in \mathscr{S}_k(H)$ gilt.

(iv) Gilt darüberhinaus $-1 \notin \sigma(T)$, so existiert eine Konstante Δ_k so, dass

$$\left| \delta_k(T)(1+T)^{-1} \right| \leq \exp\left(\Delta_k \|T\|_k^k \right)$$

für alle $T \in \mathscr{S}_k(H)$ gilt.

Einen Beweis dieses Lemmas findet man etwa in [4].

Lemma 1.3.7. *Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $A\colon U \to \mathbb{C}^{n\times n}$ holomorph und $N, n \in \mathbb{N}^*$ fest. Dann ist die Abbildung*

$$U \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \delta_N(A(z))$$

holomorph.

Beweis: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $A\colon U \to \mathbb{C}^{n\times n} \cong \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ homomorph Dann ist die Abbildung

$$f\colon U \times \mathbb{C}, \quad f(z,\lambda) = \det(\lambda 1 - A(z))$$

holomorph, wobei $f(z,\cdot) \in \mathbb{C}[\lambda]$ für $z \in U$ ein normiertes Polynom n-ten Grades ist. Insbesondere ist f in jeder Nullstelle $(a,b) \in Z(f) = \{(z,\lambda) \in U \times \mathbb{C};\ f(z,\lambda) = 0\}$ λ-regulär mit der algebraischen Vielfachheit von b als Eigenwert von $A(a) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ als Ordnung.

Sei $(a,b) \in Z(f)$. Fixiere einen Eigenwert b von $A(a)$ der algebraischen Vielfachheit k. Nach Lemma 4.4 (a) in [6] gibt es eine Zahl $r_0 > 0$ so, dass es zu jedem $r \in (0, r_0)$ ein $\delta > 0$ mit

$$\overline{D_\delta(a)} \times \overline{D_r(b)} \subset U \times \mathbb{C}$$

gibt, und dass für alle $z \in D_\delta(a)$ die Funktion $f(z,\cdot)$ genau k Nullstellen (in Vielfachheiten) $\lambda_1(z),\dots,\lambda_k(z)$ in $D_r(b)$ hat und auf $\partial D_r(b)$ keine.
Man beachte, dass

$$f(z,\cdot) = \det(\cdot E_n - A(z))$$

das charakteristische Polynom der Matrix $A(z)$ ist. Also hat für $z \in D_\delta(a)$ die Matrix $A(z)$ in $D_r(b)$ genau die k Eigenwerte $\lambda_1(z),\dots,\lambda_k(z)$, wobei jeder dieser Eigenwerte entsprechend seiner algebraischen Vielfachheit als Nullstelle des charakteristischen Polynoms vorkommt.

Definiert man für gegebenes $N \in \mathbb{N}^*$ die Abbildung

$$g\colon U \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad g(z,\lambda) = (1+\lambda)\exp\left(\sum_{j=1}^{N-1}(-1)^j\frac{\lambda^j}{j}\right),$$

so ist diese holomorph und mit Lemma 4.4 (b) in [6] folgt, dass auch die Funktion

$$D_\delta(a) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \prod_{i=1}^{k} g(z,\lambda_i(z)) = \prod_{i=1}^{k}(1+\lambda_i(z))\exp\left(\sum_{j=1}^{N-1}(-1)^j\frac{(\lambda_i(z))^j}{j}\right)$$

holomorph ist.

Für $a \in U$ seien $b_1,\dots,b_r$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte der Matrix $A(a)$ mit algebraischen Vielfachheiten $k_1,\dots,k_r$.
Indem man obige Überlegung auf jeden der Eigenwerte b_l $(l = 1,\dots,r)$ anwendet, kann man Zahlen $\delta, r > 0$ wählen so, dass

$$\overline{D_r(b_l)} \cap \overline{D_r(b_m)} = \emptyset$$

für $l,m = 1,\dots,r$ mit $l \neq m$ gilt und so, dass für jedes $z \in D_\delta(a)$ und jedes $l = 1,\dots,r$ die Funktion

$$f(z,\cdot) = \det(\cdot E_n - A(z))$$

genau k_l Nullstellen $\lambda_1^{(l)},\dots,\lambda_{k_l}^{(l)}$ in $D_r(b_l)$ hat (in Vielfachheiten) und auf $\partial D_r(b_l)$ keine. Als Anwendung von Lemma 4.4 (b) in [6] erhält man wie oben gesehen, dass die Funktion

$$D_\delta(a) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \prod_{l=1}^{r}\prod_{i=1}^{k_l}(1+\lambda_i^{(l)}(z))\exp\left(\sum_{j=1}^{N-1}(-1)^j\frac{\lambda_i^{(l)}(z)}{j}\right) = \delta_N(A(z))$$

holomorph von ist. Man beachte dabei, dass die

$$\lambda_i^{(l)} \qquad (l = 1,\dots,r, \quad i = 1,\dots,k_l)$$

genau die paarweise verschiedenen Eigenwerte der Matrix $A(z)$ sind, wobei jeder entsprechend seiner Vielfachheit als Nullstelle des charakteristischen Polynoms von $A(z)$ wiederholt wird.

Da $a \in U$ beliebig war, folgt daraus die Holomorphie von

$$U \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \delta_N(A(z)).$$

$\square$

Zum Abschluss dieses Kapitels zeigen wir eine verbesserte Version der Polarzerlegung.

Lemma 1.3.8. *Sei* $T \in \mathcal{L}(H)$ *mit* $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^*$. *Dann gibt es eine unitäre Abbildung* $U \in \mathcal{L}(H)$ *mit* $T = U\,|T|$, *wobei wie üblich* $|T| = \sqrt{T^*T}$ *gelte.*

Beweis: Es gilt

$$\| |T|\, x\|^2 = \left\langle |T|^2\, x, x \right\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \|Tx\|^2$$

für alle $x \in H$. Damit ist die durch

$$\tilde{U} \colon \operatorname{Im} |T| \to \operatorname{Im} T, \quad |T|\, x \mapsto Tx$$

definierte lineare Abbildung wohldefiniert und isometrisch. Wir setzen $\tilde{U}$ stetig zu einer Isometrie

$$\hat{U} \colon \overline{\operatorname{Im} |T|} \to \overline{\operatorname{Im} T}$$

fort. Man rechnet nach, dass $\operatorname{Ker} T^*T = \operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^*$ und $\operatorname{Ker} T^*T = \operatorname{Ker}(T^*T)^{\frac{1}{2}}$ gelten, und erhält damit

$$\overline{\operatorname{Im} |T|} = (\operatorname{Ker} |T|)^{\perp} = (\operatorname{Ker} T^*)^{\perp} = \overline{\operatorname{Im} T}.$$

Wir setzen

$$U = \hat{U} P_{\overline{\operatorname{Im}|T|}} + P_{\overline{\operatorname{Im} T}^{\perp}}.$$

Man rechnet leicht nach, dass U eine surjektive Isometrie definiert und damit unitär ist.

$\square$

2 $\mathfrak{A}$-spektrale Funktionen

2.1 Zulässige $\mathfrak{A}$-Algebren und Zerlegbarkeit

Sei X ein Banachraum. In diesem Abschnitt bezeichnen wir mit $\mathrm{id} \in \mathcal{L}(X)$ die identische Abbildung auf X.

Definition 2.1.1. Seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ und $\mathfrak{A} \subset \{f;\ f\colon \Omega \to \mathbb{C} \text{ stetig}\}$ eine Algebra.

(i) $\mathfrak{A}$ heißt normal, falls für jede endliche offene Überdeckung $\overline{\Omega} \subset U_1 \cup \ldots \cup U_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) Funktionen $f_i \in \mathfrak{A}$ ($i = 1, \ldots, n$) mit

a) $f_i(\Omega) \subset [0,1] \quad (i = 1, \ldots, n)$,

b) $\operatorname{supp} f_i \subset U_i \quad (i = 1, \ldots, n)$,

c) $\sum_{i=1}^n f_i = 1$ auf Ω,

existieren.

(ii) $\mathfrak{A}$ heißt zulässig, falls sie die folgenden Eigenschaften hat:

a) $(\Omega \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto z) = z \in \Omega$.

b) $(\Omega \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto 1) = 1 \in \Omega$.

c) $\mathfrak{A}$ ist normal.

d) Für alle $f \in \mathfrak{A}$ und $\xi \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{supp}(f)$ ist die Funktion

$$f_\xi\colon \Omega \to \mathbb{C}, \quad f_\xi(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{\xi - z}, & z \in \Omega \setminus \{\xi\} \\ 0, & z \in \Omega \cap \{\xi\} \end{cases}$$

in $\mathfrak{A}$.

Definition 2.1.2. Sei $\mathfrak{A}$ eine zulässige Algebra. Eine Abbildung $U\colon \mathfrak{A} \to \mathcal{L}(X), \quad f \mapsto U_f$ heißt $\mathfrak{A}$-spektral, falls

(i) U ein Algebrenhomomorphismus mit $U_1 = \mathrm{id}$ ist und

(ii) die Abbildung $(\operatorname{supp}\{f\}^c \to \mathcal{L}(X), \quad \xi \mapsto U_{f_\xi})$ holomorph ist für alle $f \in \mathfrak{A}$.

Definition 2.1.3. Eine Algebra $(\mathfrak{A}, \tau)$ mit einer Topologie τ heißt topologisch zulässig, falls

(i) $\mathfrak{A}$ zulässig ist,

(ii) τ eine lokalkonvexe Topologie ist, so, dass für jede Cauchyfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{A}$ mit $f_n(z) \xrightarrow{n} 0$ für alle $z \in \Omega$ schon $f_n \xrightarrow{n} 0$ in τ gilt und

(iii) die Abbildung $(\operatorname{supp}\{f\}^c \to \mathfrak{A}, \quad \xi \mapsto f_\xi)$ stetig ist für alle $f \in \mathfrak{A}$.

Definition 2.1.4. Sei $(\mathfrak{A}, \tau)$ eine topologisch zulässige Algebra. Eine Abbildung $U\colon \mathfrak{A} \to \mathcal{L}(X)$ heißt stetig $\mathfrak{A}$-spektral, falls U ein stetiger Algebrenhomomorphismus mit $U_1 = \mathrm{id}$ ist.

Satz 2.1.5. *Seien $(\mathfrak{A}, \tau)$ eine topologisch zulässige Algebra und $U\colon \mathfrak{A} \to \mathcal{L}(X)$ eine stetig $\mathfrak{A}$-spektrale Abbildung. Dann ist U auch $\mathfrak{A}$-spektral.*

Einen Beweis dieses Satzes findet man etwa in [3, Thm. 3.5.4].

Definition 2.1.6. Sei $T \in \mathcal{L}(X)$. Ein abgeschlossener Teilraum $M \subset X$ heißt spektral maximaler Raum (SM-Raum) von T, falls

(i) $M \in \mathrm{Lat}(T)$ ist und

(ii) für $N \subset X$ mit $N \in \mathrm{Lat}(T)$ und $\sigma(T|_N) \subset \sigma(T|_M)$ schon $N \subset M$ gilt.

Lemma 2.1.7. *Seien $T \in \mathcal{L}(X)$ und $M \subset X$ ein SM-Raum von T. Dann ist M hyperinvariant für T.*

Einen Beweis findet man etwa in [3, Prop. 1.3.2].

Definition 2.1.8. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(X)$ heißt zerlegbar, falls für jede endliche offene Überdeckung $\sigma(T) \subset U_1 \cup \ldots \cup U_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ SM-Räume $M_1, \ldots, M_n$ von T mit

(i) $\sigma(T|_{M_i}) \subset U_i \quad (i = 1, \ldots, n)$ und

(ii) $X = M_1 + \cdots + M_n$

existieren.

Lemma 2.1.9. *Ist $T \in \mathcal{L}(X)$ mit $|\sigma(T)| > 1$, so hat T nichttriviale abgeschlossene hyperinvariante Teilräume.*

Beweis: Sei etwa $\{\lambda_1, \lambda_2\} \subset \sigma(T)$. Wir wählen eine offene Überdeckung $\sigma(T) \subset U_1 \cup U_2$ mit

$$\lambda_i \in U_i \setminus U_1 \cap U_2 \quad (i = 1, 2)$$

und SM-Räume M_1, M_2 für T mit $\sigma(T|_{M_i}) \subset U_i$ $(i = 1, 2)$ und $X = M_1 + M_2$. Diese sind abgeschlossen und nach Lemma 2.1.7 hyperinvariant.

Wäre $M_1 = \emptyset$ oder $M_2 = \emptyset$, so wäre $X = M_2$ oder $X = M_1$, also $\sigma(T) \subset U_1$ oder $\sigma(T) \subset U_2$. Wegen $\lambda_2 \in \sigma(T) \setminus U_1$ beziehungsweise $\lambda_1 \in \sigma(T) \setminus U_2$ ist das ein Widerspruch. Genauso $M_1 = X$ oder $M_2 = X$. $\square$

Satz 2.1.10. *Seien $\mathfrak{A}$ eine zulässige Algebra und $U\colon \mathfrak{A} \to \mathcal{L}(X)$ eine $\mathfrak{A}$-spektrale Abbildung. Dann ist U_z zerlegbar.*

Einen Beweis dieses Resultats findet man etwa in [3, Thm. 3.1.16].

2.2 Die Banachalgebra $\mathfrak{A}_\rho$

Sei X ein Banachraum. In diesem Abschnitt bezeichnen wir mit $\mathrm{id} \in \mathcal{L}(X)$ die identische Abbildung auf X.

Ist eine Folge $\rho = (\rho_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ in $[1,\infty)$ mit

(i) $\rho_{n+m} \leq \rho_n \rho_m \quad (n, m \in \mathbb{Z})$,

(ii) $\lim\limits_{|n|\to\infty} \sqrt[|n|]{\rho_n} = 1$

gegeben, so setzen wir

$$\mathfrak{A}_\rho = \mathfrak{A}_{(\rho_n)_{n\in\mathbb{Z}}} = \left\{ f \in C(\mathbb{T});\ \|f\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}(n)\right| \rho_n < \infty \right\}.$$

Hierbei bezeichne $\hat{f}(n)$ den n-ten Fourierkoeffizienten von f. Man rechnet leicht nach, vergleiche etwa [3, S. 140], dass für eine Folge ρ wie oben, $(\mathfrak{A}_\rho, \|\cdot\|)$ eine Banachalgebra ist.

Definition 2.2.1. Sei $(\rho_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Folge in $[1,\infty)$, welche die Bedingungen (i) und (ii) von oben erfüllt. Wir sagen, $\rho = (\rho_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ erfülle die Beurling-Bedingung, falls

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\log \rho_n}{1+n^2}$$

konvergiert.

Satz 2.2.2. *Erfüllt eine Folge $(\rho_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ die Bedingungen (i) und (ii) von oben und zusätzlich die Beurling-Bedingung, so ist die Banachalgebra $\mathfrak{A}_\rho$ topologisch zulässig.*

Einen Beweis dieses Satzes findet man etwa in [3, Thm. 5.2.12 und Thm. 5.2.7].

Sei $T \in \mathcal{L}(X)$ mit $\sigma(T) \subset \mathbb{T}$. Mit dem spektralen Abbildungssatz folgt

$$1 = \mathrm{r}(T^n) \leq \|T^n\|$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ und

$$\sqrt[n]{\|T^n\|} \xrightarrow{n} \mathrm{r}(T) = 1, \qquad \sqrt[n]{\|T^{-n}\|} \xrightarrow{n} \mathrm{r}(T^{-1}) = 1.$$

Also erfüllt die durch $\rho_n = \|T^n\|$ $(n \in \mathbb{Z})$ definierte Folge $\rho = (\rho_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ die Bedingungen (i) und (ii) von oben. Damit ist

$$\mathfrak{A}_T = \mathfrak{A}_{(\|T^n\|)_{n\in\mathbb{Z}}} \subset C(\mathbb{T})$$

eine Banachalgebra. Man rechnet leicht nach, dass die Abbildung

$$U\colon \mathfrak{A}_T \to \mathcal{L}(X), \quad f \mapsto U_f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) T^n$$

einen stetigen Algebrenhomomorphismus mit $U_1 = \mathrm{id}$ und $U_z = T$ definiert.

Satz 2.2.3. *Sei $T \in \mathcal{L}(X)$ mit $\sigma(T) \subset \mathbb{T}$. Erfüllt T die Beurling-Bedingung, so ist T zerlegbar. Gilt zusätzlich $|\sigma(T)| > 1$, so besitzt T nichttriviale abgeschlossene hyperinvariante Teilräume.*

Beweis: Die Behauptung folgt mit Satz 2.2.2, Satz 2.1.5, Satz 2.1.10, Lemma 2.1.9, und den Bemerkungen vor diesem Satz. □

2.3 Operatoren mit Wachstumsbedingung

In diesem Abschnitt zeigen wir ein hinreichendes Kriterium für die Erfüllung der Beurling-Bedingung. Sei X ein Banachraum.

Lemma 2.3.1. *Seien $T \in \mathcal{L}(X)$ mit $\sigma(T) \subset \mathbb{T}$. Gibt es Zahlen β, K, $M > 0$ so, dass*

$$\left\|(\lambda - T)^{-1}\right\| \leq M \exp\left(K \left||\lambda| - 1\right|^{-\beta}\right)$$

für alle $\lambda \in \overline{D_2(0)} \setminus \mathbb{T}$ gilt, so gibt es weitere Konstanten M_1, $K_1 > 0$ so, dass

$$\|T^n\| \leq M_1 \exp\left(K_1 |n|^{1-\frac{1}{1+\beta}}\right)$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt.

Beweis: Sei $\alpha = \frac{1}{1+\beta} \in (0, 1)$. Dann ist $\alpha\beta = 1 - \alpha = 1 - \frac{1}{1+\beta}$. Wir betrachten zunächst den Fall $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. In diesem Fall setzen wir $r = 1 + \frac{1}{n^\alpha}$. Dann gilt $1 < r \leq 2$ und mit dem analytischen Funktionalkalkül (Satz 1.2.5) folgt

$$T^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(0)} \lambda^n R(\lambda, T)\, d\lambda.$$

Mit der Standartabschätzung für Kurvenintegrale folgt

$$\begin{aligned}\|T^n\| &\leq r^{n+1} M \exp\left(K |r-1|^{-\beta}\right)\\ &= M \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^{n+1} \exp\left(K |r-1|^{-\beta}\right)\end{aligned}$$

für alle $n \geq 1$. Unter Verwendung von Lemma 1.1.17 folgt dann

$$\begin{aligned}\|T^n\| &\leq CM \exp\left(n^{1-\alpha} + K n^{\alpha\beta}\right)\\ &= CM \exp\left((1+K) n^{1-\frac{1}{1+\beta}}\right).\end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt den Fall negativer Exponenten. Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ und $r = 1 - \frac{1}{2n^\alpha}$. Dann gilt

$$T^{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{2\|T\|}(0)} \lambda^{-n} R(\lambda, T)\, d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(0)} \lambda^{-n} R(\lambda, T)\, d\lambda.$$

Das erste Integral berechnet sich zu

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{2\|T\|}(0)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^{k+n+1}}\, d\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\partial D_{2\|T\|}(0)} \frac{1}{\lambda^{k+n+1}}\, d\lambda\right) T^k = 0.$$

Das zweite Integral lässt sich abschätzen gegen

$$\frac{M}{r^{n-1}} \exp(K n^{\alpha\beta}) = M \left(1 + \frac{1}{2n^\alpha - 1}\right)^{n-1} \exp(K n^{\alpha\beta}).$$

Mit Lemma 1.1.17 folgt

$$\left\|T^{-n}\right\| \leq M \exp\left((1+K) n^{1-\frac{1}{1+\beta}}\right)$$

für alle $n \geq 1$. Also folgt die Behauptung mit $M_1 = \max\{CM, M, 1\}$ und $K_1 = 1 + K$. □

Satz 2.3.2. *Sei $T \in \mathcal{L}(X)$ mit $\sigma(T) \subset \mathbb{T}$. Gibt es Zahlen β, K, $M > 0$ mit*

$$\left\|(\lambda - T)^{-1}\right\| \leq M \exp\left(K \left||\lambda| - 1\right|^{-\beta}\right)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$, so erfüllt T die Beurling-Bedingung.

Beweis: Aus Lemma 2.3.1 folgt, dass es Konstanten M_1, $K_1 > 0$ gibt, so dass

$$\|T^n\| \leq M_1 \exp\left(K_1 |n|^{1 - \frac{1}{1+\beta}}\right)$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt. Damit folgt

$$\frac{\log \|T^n\|}{1 + n^2} \leq \frac{\log M_1}{1 + n^2} + \frac{K_1 |n|^{1 - \frac{1}{1+\beta}}}{1 + n^2}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Da $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1+n^2}$ konvergiert und da wegen $1 - \frac{1}{1+\beta} < 1$ auch $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|n|^\alpha}{1+n^2}$ konvergiert, konvergiert nach Lemma 1.1.9 auch

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\log \|T^n\|}{1 + n^2}.$$

Also ist die Beurling-Bedingung erfüllt. □

3 Maximal invariante Teilräume für Operatoren auf Hilberträumen

Dieses Kapitel widmet sich dem Beweis des Hauptresultats.

3.1 Existenz von invarianten Teilräumen für Operatoren spezieller Klassen

Sei H im folgenden stets ein komplexer unendlich dimensionaler seperabler Hilbertraum.

Lemma 3.1.1. *Sind $T \in \operatorname{Fred}(H)$ und $1 - T^*T \in \mathscr{S}_p(H)$ für ein $p \geq 1$, so ist $1 - TT^* \in \mathscr{S}_p(H)$.*

Beweis: Sei $T \in \operatorname{Fred}(H)$. Wir zeigen zunächst, dass Operatoren $Q \in \mathcal{L}(H)$ und $F \in \mathcal{F}(H)$ existieren so, dass $TQ = 1 + F$ gilt. Wir betrachten dazu die Abbildung

$$\tilde{T} \colon (\operatorname{Ker} T)^{\perp} \longrightarrow \operatorname{Im} T,\ \tilde{T}x = Tx$$

welche nach dem Prinzip der stetigen Inversen invertierbar ist. Damit folgt, dass

$$Q \colon H \xrightarrow{P_{\operatorname{Im} T}} \operatorname{Im} T \xrightarrow{\hat{T} = i \circ \tilde{T}^{-1}} H$$

stetig ist, wobei $i \colon (\operatorname{Ker} T)^{\perp} \hookrightarrow H$ die Inklusion bezeichnet. Dann hat der Operator

$$1 - TQ = 1 - T\hat{T}P_{\operatorname{Im} T}$$

als stetige Projektion auf $\operatorname{Im} T^{\perp}$ endlichen Rang. Somit können wir $F = -(1 - TQ)$ von endlichem Rang mit $TQ = 1 + F$ wählen. Sei nun zusätzlich $1 - T^*T \in \mathscr{S}_p(H)$. Nach Satz 1.3.2 gelten $(1 - TT^*)F \in \mathscr{S}_p(H)$ und $T(1 - T^*TQ) \in \mathscr{S}_p(H)$. Wegen

$$\begin{aligned} T(1 - T^*T)Q &= (1 - TT^*)TQ \\ &= (1 - TT^*)(1 + F) \\ &= 1 - TT^* + (1 - TT^*)F \end{aligned}$$

folgt $1 - TT^* \in \mathscr{S}_p(H)$. □

Satz 3.1.2. *Seien $T \in \mathcal{L}(H)$ und $1 - TT^* \in \mathscr{S}_p(H)$ für ein $p \geq 1$ gilt. Dann hat T einen nichttrivialen abgeschlossenen invarianten Teilraum.*

Dem Beweis von obigem Satz widmen wir uns erst in Kapitel 3.2, da dieser umfangreiche Vorarbeit benötigt.

Sind $N \subset M \subset H$ abgeschlossene Teilräume, so bezeichnen wir mit $M \ominus N = M \cap N^\perp$ das orthogonale Komplement von N in M. Dann gilt $(M \ominus N) \oplus N = M$.

Lemma 3.1.3. *Sei $T \in \operatorname{Fred}(H)$ so, dass $1 - TT^* \in \mathscr{S}_p(H)$ für ein $p \geq 1$ gilt. Sind M, $N \in \operatorname{Lat} T$ mit $N \subset M$, und gelten*

(i) $\dim(M \ominus N) \geq 2$,

(ii) $\dim(M \ominus TM) < \infty$,

dann existiert $L \in \operatorname{Lat} T$ so, dass $N \subsetneq L \subsetneq M$ gilt.

Beweis: Wir betrachten im Folgenden die Kompression

$$S\colon M \ominus N \longrightarrow M \ominus N, \ Sx = P_{M \ominus N} Tx.$$

Wir zeigen zunächst, dass es $L \in \operatorname{Lat} T$ mit $N \subsetneq L \subsetneq M$ genau dann gibt, wenn es $L_0 \in \operatorname{Lat} S$ mit $\{0\} \subsetneq L_0 \subsetneq M \ominus N$ gibt. Ist nämlich einerseits $L \in \operatorname{Lat}(T)$ mit $N \subsetneq L \subsetneq M$, so gilt

$$L_0 = L \ominus N \notin \{\{0\}, M \ominus N\}\,.$$

Dann folgt weiter

$$SL_0 = P_{M \ominus N} T|_{M \ominus N}(L \ominus N) \subset L \ominus N = L_0,$$

also ist L_0 invariant für S.
Ist andererseits $L_0 \in \operatorname{Lat}(S)$ mit $\{0\} \neq L_0 \subsetneq M \ominus N$ und setzen wir $L = L_0 + N$, so gilt

$$P_{M \ominus N} T|_{M \ominus N} L_0 \subset L_0,$$

und wegen $TL_0 \subset TM \subset M$ auch

$$P_{N^\perp} TL_0 \subset L_0.$$

Damit folgt zunächst

$$TL_0 = P_N TL_0 + P_{N^\perp} TL_0 \subset N + L_0 = L$$

und weiter

$$TL = TL_0 + TN \subset L.$$

Damit genügt es zu zeigen, dass S einen nichttrivialen invarianten Teilraum hat. Um dies zu zeigen wollen wir Satz 3.1.2 auf S anwenden. Es reicht also zu zeigen, dass

$$1_{M \ominus N} - SS^* \in \mathscr{S}_p(M \ominus N)$$

gilt. Wir betrachten nun

$$T|_M \colon M \longrightarrow M.$$

Zuerst zeigen wir, dass

$$1_M - T|_M (T|_M)^* \in \mathscr{S}_p(M)$$

gilt. Da $T \in \mathrm{Fred}(H)$ und $1 - TT^* \in \mathscr{S}_p(H)$ gelten, ist $1 - T^*T \in \mathscr{S}_p(H)$ nach Lemma 3.1.1. Für $R \in \mathscr{S}_p(H)$ und $M \in \mathrm{Lat}(R)$ gilt nach Satz 1.3.2 allgemein

$$R|_M = P_M \circ R \circ i \in \mathscr{S}_p(M),$$

wobei $i\colon M \hookrightarrow H$ die Inklusion bezeichnet. Damit gilt

$$\begin{aligned} 1_M - (T|_M)^*(T|_M) &= 1_M - P_M T^*|_M T|_M \\ &= (1 - P_M T^* T)\,|_M \\ &= \underbrace{(P_M (1 - T^*T) P_M)}_{\in \mathscr{S}_p(H)}|_M \in \mathscr{S}_p(M). \end{aligned}$$

Wegen $\mathrm{Ker}\, T|_M \subset \mathrm{Ker}\, T$ gilt $\dim \mathrm{Ker}\, T|_M < \infty$. Da $TM \subset H$ nach Lemma 1.1.15 abgeschlossen ist, sind M/TM und $M \ominus TM$ als Vektorräume isomorph und es gilt

$$\dim M/TM = \dim M \ominus TM < \infty,$$

also ist $T|_M \in \mathrm{Fred}(M)$. Mit obiger Rechnung folgt aus Satz 3.1.2 weiter, dass

$$1_M - T|_M \,(T|_M)^* \in \mathscr{S}_p(M)$$

gilt. Wegen $T^* N^\perp \subset N^\perp$ ist

$$\begin{aligned} SS^* &= (P_{M\ominus N} T|_{M\ominus N})\,(P_{M\ominus N} T|_{M\ominus N})^* \\ &= (P_{M\ominus N} T P_{M\ominus N} T^*)\,|_{M\ominus N} \\ &= (P_{M\ominus N} T\,(P_M - P_N)\,T^*)\,|_{M\ominus N} \\ &= P_{M\ominus N} T P_M T^*|_{M\ominus N} \end{aligned}$$

und damit folgt schließlich

$$\begin{aligned} 1_{M\ominus N} - SS^* &= (1 - P_{M\ominus N} T P_M T^*)\,|_{M\ominus N} \\ &= P_{M\ominus N}\underbrace{(1_M - (T|_M)\,(T|_M)^*)}_{\in \mathscr{S}_p(M)}|_{M\ominus N} \in \mathscr{S}_p(M \ominus N). \end{aligned}$$

□

Damit erhalten wir sofort das Hauptresultat dieser Arbeit.

Korollar 3.1.4. *Seien $T \in \mathrm{Fred}(H)$ und $1 - TT^* \in \mathscr{S}_p(H)$ für ein $p \geq 1$. Ist M ein invarianter Teilraum für T mit $\dim M \ominus TM < \infty$, dann gilt für jeden maximal invarianten Teilraum $N \subset M$ schon $\dim M/N = 1$.*

3.2 Schatten-p-Klasse Störungen von unitären Operatoren

In diesem Abschnitt werden wir das noch nicht bewiesene Theorem 3.1.2 beweisen. Sei H im Folgenden ein komplexer unendlich dimensionaler seperabler Hilbertraum, sowie $1 \le p < \infty$.

Wir erinnern an den in 1.3.5 eingeführten Determinantenbegriff für Operatoren der Schatten-p-Klasse.

Lemma 3.2.1. *Sind $B \in \mathscr{S}_p(H), k \in \mathbb{N}$ mit $k \ge p$ und $A \in \mathcal{L}(H)$, so ist die Funktion*

$$\rho(A) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \delta_k(B(z-A)^{-1})$$

holomorph.

Beweis: Seien $z_0 \in \rho(A)$ und $r > 0$ mit $\overline{D_r(z_0)} \subset \rho(A)$. Zu $n \in \mathbb{N}$ wähle $B_n \in \mathcal{F}(H)$ mit $\|B_n - B\|_k < \frac{1}{n}$ und $\|B_n - B\| < \frac{1}{n}$ und setze $M_n = \operatorname{Im} B_n$. Für alle $z \in D_r(z_0)$ ist M_n invariant für $B_n(z-A)^{-1}$.

Ist $T \in \mathcal{L}(H)$, so gilt

$$\operatorname{Ker}(\lambda - T) = \operatorname{Ker}(\lambda - T|_{\operatorname{Im} T})$$

für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Da $\operatorname{Im} B_n(z-A)^{-1} = \operatorname{Im} B_n = M_n$ gilt, besitzen $B_n(z-A)^{-1}$ und die Einschränkung $B_n(z-A)^{-1}|_{M_n}$ die selben von Null verschiedenen Eigenwerte mit denselben Vielfachheiten und es gilt daher

$$\delta_k\left(B_n(z-A)^{-1}\right) = \delta_k\left(\left(B_n(z-A)^{-1}\right)|_{M_n}\right).$$

Unter Berücksichtigung der linearen Abbildung

$$\{T \in \mathcal{L}(H);\ M_n \in \operatorname{Lat} T\} \to \mathcal{L}(M_n), \quad T \mapsto T|_{M_n},$$

dem Isomorphismus $\mathcal{L}(M_n) \cong \mathbb{C}^{N \times N}$ (mit $N = \dim M_n$) und der holomorphen Abbildung

$$\rho(A) \to \mathcal{L}(H), \quad z \mapsto 1 + B_n(z-A)^{-1},$$

folgt mit Lemma 1.3.7, dass

$$\rho(A) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \delta_k(B_n(z-A)^{-1})$$

holomorph ist. Unter Benutzung von Satz 1.3.2 gilt außerdem

$$\begin{aligned} \left\|B_n(z-A)^{-1} - B(z-A)^{-1}\right\|_k &= \left\|(B_n - B)(z-A)^{-1}\right\|_k \\ &\le \|B_n - B\|_k \left\|(z-A)^{-1}\right\| \end{aligned}$$

für alle $z \in \rho(A)$. Mit Lemma 1.3.6 (ii) folgt

$$\delta_k(B_n(z-A)^{-1}) \xrightarrow{n} \delta_k(B(z-A)^{-1})$$

für alle $z \in \rho(A)$. Da

$$\left\|B_n(z-A)^{-1}\right\|_k \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|B_n\|_k \left\|(z-A)^{-1}\right\|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z \in D_r(0)$ gilt, und

$$\overline{D} = \overline{D_r(z_0)} \to [0,\infty[, \quad z \mapsto \left\|(z-A)^{-1}\right\|$$

eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge ist, folgt

$$\sup_{z\in\overline{D}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|B_n(z-A)^{-1}\right\|_k < \infty.$$

Somit ist $(\delta_k(B_n(z-A)^{-1}))_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig beschränkt auf $\overline{D}$ nach Lemma 1.3.6 (iii). Nach dem Satz von Vitali konvergiert die durch

$$f_n\colon \rho(A) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \delta_k(B_n(z-A)^{-1}) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

gegebene Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakt gleichmäßig gegen

$$\rho(A) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \delta_k(B(z-A)^{-1}).$$

Mit dem Satz von Weierstraß folgt die Behauptung. □

Lemma 3.2.2. *Seien $w \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $D = D_r(w)$ und $z \in D$ gegeben. Dann gilt*

$$\mathrm{d}(z,\partial D) = r - |z-w|.$$

Beweis: Sei ohne Einschränkung $z \neq w$. Für $z \in D$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(z,\partial D) &= \inf_{p\in\partial D} |z-p| \\
&\geq \inf_{p\in\partial D} (|w-p| - |z-w|) \\
&= \left(\inf_{p\in\partial D} |w-p|\right) - |z-w| \\
&= r - |z-w|.
\end{aligned}$$

Mit $q = z + \frac{z-w}{|z-w|}(r-|z-w|)$ folgt

$$\left|\left(z + \frac{z-w}{|z-w|}(r-|z-w|)\right) - w\right| = \frac{|z-w|}{|z-w|}(|z-w| + r - |z-w|) = r,$$

somit ist $q \in \partial D$. Damit gilt andererseits

$$\mathrm{d}(z,\partial D) = \inf_{p\in\partial D} |z-p| \leq |z-q| = r - |z-w|.$$

□

Lemma 3.2.3. *Seien $w \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $D = D_r(w)$, $v_0 \in \mathbb{C}$ und $z_0 \in \partial D$, so, dass für die abgeschlossene Strecke $L = [z_0, v_0]$ schon $v_0 \in D \cup \{z_0\}$ gilt. Dann gibt es eine Konstante $K = K(r,w) \in (0,\infty)$ mit*

$$\mathrm{d}(z, \partial D) \geq K\,|z - z_0|$$

für alle $z \in L$.

Beweis: Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, dass $v_0 \neq z_0$ ist, denn sonst wäre $L = \{z_0\}$. Sei $z \in L$ und

$$[0,1] \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto z_0 + t(v_0 - z_0)$$

die kanonische Parametrisierung von L. Für

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto z_0 + t(v_0 - z_0) - w$$

und $t \in [0,1]$ gilt $f'(t) = v_0 - z_0$. Wegen

$$\operatorname{grad} |\cdot|\,(x,y) = \frac{1}{|(x,y)|}(x,y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ folgt mit

$$g\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto |f(t)|$$

und der Kettenregel

$$\begin{aligned} g'(0) &= \operatorname{grad} |\cdot|\,(f(0))\,f'(0) \\ &= \frac{1}{|z_0 - w|}(z_0 - w)^t (v_0 - z_0) \neq 0, \end{aligned}$$

denn sonst wäre

$$|v_0 - w|^2 = |(v_0 - z_0) + (z_0 - w)|^2 = |v_0 - z_0|^2 + |z_0 - w|^2 \geq r^2$$

im Widerspruch zur Voraussetzung, dass $v_0 \in D = D_r(w)$ gilt. Die Funktion

$$h\colon]0,1] \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2, \quad h(t) = \frac{t\,|v_0 - z_0|}{r - |z_0 + t(v_0 - z_0) - w|}$$

ist stetig und mit der Parametrisierung von L und Lemma 3.2.2 folgt, dass

$$\{h(t);\ t \in]0,1]\} = \left\{ \frac{|z - z_0|}{\mathrm{d}(z, \partial D)};\ z \in L \setminus \{z_0\} \right\} \qquad (*)$$

gilt. Wegen

$$\lim_{t \to 0} h(t) = \left(\lim_{t \to 0} \frac{t - 0}{g(t) - g(0)} \right) (-\,|v_0 - z_0|) = -\frac{|v_0 - z_0|}{g'(0)}$$

ist h in $t = 0$ zu $\tilde{h}$ stetig fortsetzbar.

Da $\tilde{h}$ als stetige Funktion auf einem kompakten Intervall ihr Maximum annimmt, ist sie beschränkt, etwa durch $K(r,w)$. Dann ist aber auch h beschränkt und die Behauptung folgt aus $(*)$. □

Lemma 3.2.4. *Seien $w \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $D = D_r(w)$, $z_0 \in \partial D$, $p \geq 0$ und $L = [z_0, v_0]$ eine abgeschlossene Strecke mit $L \setminus \{z_0\} \subset D$. Ist $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph mit*

$$\operatorname{Re} f(z) \leq K \, \mathrm{d}(z, \partial D)^{-p}$$

für alle $z \in D$, so existiert $M > 0$ mit

$$|f(z)| \leq M \, |z - z_0|^{-p-1}$$

für alle $z \in D \cap L = L \setminus \{z_0\}$.

Beweis: Sei $z \in D \cap L$. Aus der Voraussetzung und Lemma 3.2.2 folgt

$$\operatorname{Re} f(z) \leq K \, \mathrm{d}(z, \partial D)^{-p} = K(r - |z - w|)^{-p}$$

für alle $z \in D$. Aus Lemma 1.2.11 und Lemma 3.2.3 folgt direkt, dass es Konstanten $N, M > 0$ mit

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq N(r - |z - w|)^{-p-1} \\ &= N(\mathrm{d}(z, \partial D))^{-p-1} \\ &\leq M \, |z - z_0|^{-p-1} \end{aligned}$$

für alle $z \in L \setminus \{z_0\}$ gibt. □

Lemma 3.2.5. *Seien $k \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{L}(H)$ unitär, $B \in \mathscr{S}_k(H)$ und $T = A + B$. Weiterhin gelte $\sigma_p(T) = \emptyset$. Seien weiter $z_0 \in \mathbb{T}$ und L eine Strecke, die z_0 als Endpunkt besitzt, nicht tangential zu $\mathbb{T}$ liegt und $L \cap \mathbb{T} = \{z_0\}$ erfüllt. Dann gibt es eine Konstante $K \in \mathbb{N}$ derart, dass*

$$\left\| (z - T)^{-1} \right\| \leq \exp\left(K \, |z - z_0|^{-k-1} \right)$$

für alle $z \in L \setminus \{z_0\}$ mit $|z - z_0|$ klein genug.

Beweis: Nach dem Satz von Weyl 1.2.9 ist $\sigma(T) \subset \sigma(A) \subset \mathbb{T}$. Seien $z_0 \in \sigma(T)$, L eine Strecke wie in der Voraussetzung und

$$D = \begin{cases} D_1(0), & \text{falls } L \cap D_1(0) \neq \emptyset \\ D_1(2z_0), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann enthält $D \cap L$ eine Teilstrecke von L. Nach Lemma 3.2.1 ist die Abbildung

$$\delta\colon \rho(A) \to \mathbb{C}, \quad \delta(z) = \delta_k(-B(z - A)^{-1}),$$

holomorph. Für alle $z \in \rho(A) \subset \rho(T)$ gilt weiter

$$z - T = (1 - B(z - A)^{-1})(z - A),$$

und damit $-1 \notin \sigma(-B(z - A)^{-1})$.

Aus Lemma 1.3.6 (i) folgt $\delta(z) \neq 0$ für alle $z \in \rho(A)$. Damit gilt

$$(z - T)^{-1} = (\delta(z))^{-1}(z - A)^{-1}\delta(z)(1 - B(z - A)^{-1})^{-1}.$$

Wir wollen nun $\|(z-T)^{-1}\|$ geeignet nach oben abschätzen, indem wir die einzelnen Faktoren betrachten.

Nach Lemma 1.3.6 (iii) gibt es zunächst eine nur von k abhängige Konstante $K_1 > 0$ so, dass
$$|\delta(z)| \leq \exp\left(K_1 \left\|B(z-A)^{-1}\right\|_k^k\right)$$
für alle $z \in \rho(A)$ gilt. Mit Satz 1.3.2 folgt

$$|\delta(z)| \leq \exp\left(K_1 \|B\|_k^k \left\|(z-A)^{-1}\right\|^k\right)$$

für alle $z \in \rho(A)$.

Da A normal ist, ist auch $(z-A)^{-1}$ normal. Mit der Spektralradiusformel gilt

$$\begin{aligned}\left\|(z-A)^{-1}\right\| &= \sup\left\{|\lambda|\,;\ \lambda \in \sigma((z-A)^{-1})\right\}\\ &= \sup\left\{\frac{1}{|z-\lambda|};\ \lambda \in \sigma(A)\right\}\\ &= \frac{1}{\mathrm{d}(z,\sigma(A))}\end{aligned}$$

für alle $z \in \rho(A)$.

Mit $K_2 = K_1 \|B\|_k^k$ folgt wegen $\mathrm{d}(z,\sigma(A)) \geq \mathrm{d}(z,\mathbb{T})$ schon

$$|\delta(z)| \leq \exp\left(K_2(\mathrm{d}(z,\mathbb{T}))^{-k}\right)$$

für alle $z \in \rho(A)$. Weiter gilt
$$\mathrm{d}(z,\mathbb{T}) \geq \mathrm{d}(z,\partial D),$$
für alle $z \in D$, womit sofort

$$|\delta(z)| \leq \exp\left(K_2(\mathrm{d}(z,\partial D))^{-k}\right)$$

für alle $z \in D$ folgt.

Da $\delta(z) \neq 0$ für alle $z \in \rho(A)$ gilt, hat δ insbesondere auf D einen holomorphen Logarithmus. Es gibt also ein $\alpha \in \mathcal{O}(D)$ mit

$$\exp(\alpha(z)) = \delta(z)$$

für alle $z \in D$. Damit gilt

$$\exp(\mathrm{Re}(\alpha(z)) = \left(\exp(\alpha(z))\overline{\exp\alpha(z)}\right)^{\frac{1}{2}} = |\delta(z)|$$

und somit
$$\mathrm{Re}(\alpha(z)) \leq K_2(\mathrm{d}(z,\partial D))^{-k}$$

für alle $z \in D$.

Mit Lemma 3.2.4 angewendet auf α existiert eine Konstante $K_3 > 0$ mit

$$|\alpha(z)| \leq K_3 |z - z_0|^{-k-1}$$

für alle $z \in D \cap L = L \setminus \{z_0\}$. Wegen

$$-\operatorname{Re}\alpha(z) \leq |\alpha(z)|$$

für alle $z \in D$ folgt weiter

$$\left|(\delta(z))^{-1}\right| \leq \exp\left(K_3 |z - z_0|^{-k-1}\right)$$

für alle $z \in L \setminus \{z_0\}$.

Nach Lemma 1.3.6 (iv) gibt es eine Konstante $K_4 > 0$ mit

$$\begin{aligned}\left\|(z-T)^{-1}\right\| &\leq \exp\left(K_3 |z - z_0|^{-k-1}\right) \left\|(z-A)^{-1}\right\| \left\|\delta(z)(1 - B(z-A)^{-1})^{-1}\right\| \\ &\leq \exp\left(K_3 |z - z_0|^{-k-1}\right) \frac{1}{\mathrm{d}(z, \partial D)} \exp\left(K_4 \left\|B(z-A)^{-1}\right\|_k^k\right) \\ &\leq \exp\left(K_3 |z - z_0|^{-k-1}\right) \frac{1}{\mathrm{d}(z, \partial D)} \exp\left(\frac{K_4 \|B\|_k^k}{\mathrm{d}(z, \partial D)^k}\right)\end{aligned}$$

für alle $z \in L \setminus \{z_0\}$. Da L nicht tangential zu ∂D ist gibt es nach Lemma 3.2.3 eine Konstante $K_5 > 0$ mit

$$\frac{|z - z_0|}{\mathrm{d}(z, \partial D)} \leq K_5$$

für alle $z \in L$. Damit folgt

$$\left\|(z-T)^{-1}\right\| \leq \exp\left(K_3 |z - z_0|^{-k-1}\right) \frac{K_5}{|z - z_0|} \exp\left(K_4 \|B\|_k^k \frac{K_5^k}{|z - z_0|^k}\right)$$

für alle $z \in L \setminus \{z_0\}$.

Man rechnet leicht nach, dass es dann auch ein $K > 0$, mit

$$\left\|(z-T)^{-1}\right\| \leq \exp\left(K |z - z_0|^{-k-1}\right)$$

für alle $z \in L \setminus \{z_0\}$ gibt. □

Bemerkung 3.2.6. Sei $T = A + B$ wie in Lemma 3.2.5. Dann gibt es eine nur von T abhängige Konstante $K > 0$ mit

$$\left\|(z-T)^{-1}\right\| \leq \exp\left(K |1 - |z||^{-k-1}\right)$$

für alle $z \in \overline{D_2(0)} \setminus \mathbb{T}$. Zum Beweis wähle man für $z \in \overline{D_2(0)} \setminus (\mathbb{T} \cup \{0\})$ die Strecke L als die Verbindungsstrecke $L = [z, \frac{z}{|z|}]$. Setzt man $z_0 = \frac{z}{|z|}$ so folgt mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von Lemma 3.2.5

$$\mathrm{d}(z, \partial D) = \mathrm{d}(z, \mathbb{T}) = |1 - |z||$$

und

$$|\delta(z)| \leq \exp\left(K_2 \, |1 - |z||^{-k}\right)$$

mit einer nur von K und B abhängigen Konstante K_2. Der Beweis von Lemma 1.2.11 zeigt, dass

$$|\alpha(z)| \leq 2^{k+4} \left(K_2 + |\alpha(w_z)|\right) |1 - |z||^{-k-1}$$

gilt, wobei $w_z \in \{0\} \cup \partial D_2(0)$ den Mittelpunkt des Kreises D bezeichnet. Da $\delta(z)$ keine Nullstelle hat, ist

$$\{\operatorname{Re} \alpha(z); \; z \in \{0\} \cup \partial D_2(0)\} \subset \mathbb{R}$$

beschränkt. Indem man

$$\operatorname{Im} \alpha(w_z) \in [0, 2\pi]$$

wählt, erreicht man, dass

$$|\alpha(z)| \leq M \, |1 - |z||^{-k-1}$$

für alle $z \in \overline{D_2(0)} \setminus (\mathbb{T} \cup \{0\})$ gilt mit einer nur von T abhängigen Konstante $M > 0$. Mit $K_3 = M$ folgt wie im Beweis von Lemma 3.2.5 die Existenz einer nur von T abhängigen Konstante $K > 0$ mit

$$\left\|(z - T)^{-1}\right\| \leq \exp\left(K \, |1 - |z||^{-k-1}\right)$$

für alle $z \in \overline{D_2(0)} \setminus \mathbb{T}$.

Im Folgenden betrachten wir Existenzaussagen über invariante und hyperinvariante Teilräume von unitären Operatoren mit Schatten-p-Klasse Störung.

Satz 3.2.7. *Seien $p \geq 1$, $A \in \mathcal{L}(H)$ unitär, $B \in \mathscr{S}_p(H)$ und $T = A + B$. Weiter sei $|\sigma(T)| > 1$. Dann hat T einen nichttrivialen abgeschlossenen hyperinvarianten Teilraum.*

Beweis: Mit dem Satz von Weyl (1.2.9), angewendet auf $A = T - B$, gilt zunächst

$$\sigma(A) \subset \sigma(T) \cup \sigma_p(A).$$

Wegen $|\sigma(T)| > 1$ gilt

$$T \neq \mu 1$$

für alle $\mu \in \mathbb{C}$, denn sonst wäre $\sigma(T) = \{\mu\}$. Daher können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\sigma_p(T) = \emptyset$ gilt.

Gäbe es $\lambda \in \sigma_p(T)$, so wäre nämlich

$$M_\lambda = \{x \in H; \; Tx = \lambda x\} \neq \emptyset$$

ein hyperinvarianter Teilraum für T, der wegen $T \neq \lambda 1$ auch $M_\lambda \subsetneq H$ erfüllt.
Mit dem Satz von Weyl (1.2.9), angewendet auf $T = A + B$ folgt dann

$$\sigma(T) \subset \sigma(A) \subset \mathbb{T}.$$

Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $\sigma(T)$ zusammenhängend ist, denn sonst folgte die Behauptung sofort aus dem Rieszschen Zerlegungssatz (1.2.7).

Durch Multiplikation von $T = A + B$ mit einer passenden komplexen Zahl kann man erreichen, dass $1 \in \sigma(T)$ gilt. Da sich durch Multiplikation mit einem Skalar die Menge $\mathrm{Lat}(T)$ nicht ändert, können wir ohne Einschränkung $1 \in \sigma(T)$ voraussetzen, wenn wir die Frage untersuchen, ob T nichttriviale abgeschlossene invariante Teilräume besitzt.

Ist dann $\lambda \in \overline{D_2(0)} \setminus \mathbb{T}$, so ist $L = [1, 2]$ eine Strecke wie in Lemma 3.2.5. Aus Lemma 3.2.5 und Bemerkung 3.2.6 folgt dann also insbesondere, dass T die Voraussetzung von Lemma 2.3.1 erfüllt. Zusammen mit Satz 2.3.2 und Satz 2.2.3 folgt, dass T einen nichttrivialen abgeschlossenen hyperinvarianten Teilraum besitzt.

$\square$

Lemma 3.2.8. *Seien $N \in \mathcal{L}(H)$ normal und $\mu \in \mathbb{C}$ so, dass*

(i) μ der einzig mögliche Häufungspunkt in $\sigma(N)$ ist und

(ii) $\dim \mathrm{Ker}(\lambda - N) < \infty$ ist für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\mu\}$.

Dann ist N kompakt.

Beweis: Ohne Einschränkung sei $\mu = 0$. Sonst ersetze N durch $N - \mu$. Aus Voraussetzung (i) folgt, dass jeder Punkt $\lambda \in \sigma(N) \setminus \{0\}$ isolierter Punkt in $\sigma(N)$ und damit Eigenwert für N ist.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $r \in (0, \varepsilon)$ so, dass

$$\sigma_p(N) \cap \{z \in \mathbb{C};\ |z| = r\} = \emptyset$$

gilt. Die Menge

$$M = \sigma_p(N) \cap \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| > r\}$$

ist höchstens endlich, denn

$$M \subset \{\lambda \in \mathbb{C};\ r \leq |\lambda| \leq \|N\|\} \subset \mathbb{C}$$

ist relativ kompakt und M besitzt keine Häufungspunkte. Sei also $M = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Zu $i = 1, \ldots, n$ betrachte

$$G_\varepsilon^i \colon \overline{D}_r(0) \cup M \to \{0, 1\}, \quad z \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } z = \lambda_i \text{ für ein } i \in \{1, \ldots, n\}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt für

$$G_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} G_\varepsilon^i,$$

dass $G_\varepsilon(\lambda_i) = 1$ für $i = 1, \ldots, n$ und $G_\varepsilon(z) = 0$ für alle $z \in \overline{D_r(0)}$. Für $F_\varepsilon = 1 - G_\varepsilon$ folgt aus den Eigenschaften des stetigen Funktionalkalküls, dass

$$F_\varepsilon(N) + G_\varepsilon(N) = 1$$

gilt, dass $F_\varepsilon(N)$ und $G_\varepsilon(N)$ Projektionen sind, und dass $F_\varepsilon(N)$ selbstadjungiert ist. Da

$$(\cdot - \lambda_i) G_\varepsilon^i(\cdot) \equiv 0$$

für alle $i = 1, \dots, n$ gilt, folgt weiter, dass

$$NG_\varepsilon^i(N) = \lambda_i G_\varepsilon^i(N)$$

für alle $i = 1, \dots, n$ gilt. Damit ist $\operatorname{Im} G_\varepsilon^i(N) \subset \operatorname{Ker}(\lambda_i - N)$ endlich dimensional für $i = 1, \dots, n$ und es folgt $G_\varepsilon(N) \in \mathcal{F}(H)$. Weiter gilt

$$N = NF_\varepsilon(N) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i G_\varepsilon^i(N)$$

und wegen

$$\|NF_\varepsilon(N)\| = \sup_{z \in \sigma(N)} |zF_\varepsilon(z)| \leq r < \varepsilon$$

ist N Grenzwert von Operatoren endlichen Ranges, also kompakt. □

Ist $T \in \mathcal{L}(H)$ so bezeichnen wir mit $\sigma_\pi(T)$ das approximative Punktspektrum von T.

Korollar 3.2.9. *Seien $p \geq 1$, $A \in \mathcal{L}(H)$ unitär, $B \in \mathscr{S}_p(H)$ und $T = A + B$. Dann hat T einen nichttrivialen abgeschlossenen invarianten Teilraum.*

Beweis: Wegen Lemma 3.2.7 dürfen wir annehmen, dass $\sigma(T) = \{\mu\}$ für ein $\mu \in \mathbb{C}$.

Wir zeigen, dass $A - \mu$ kompakt ist. Aus dem Satz von Weyl (1.2.9) folgt

$$\sigma(A) \subset \{\mu\} \cup \sigma_p(A).$$

Wäre $A - \mu$ nicht kompakt, so würde mit Lemma 3.2.8 folgen, dass ein $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\mu\}$ existieren würde mit $\dim(\operatorname{Ker}(\lambda - A)) = \infty$ oder dass es einen Häufungspunkt $\lambda \neq \mu$ von $\sigma(A)$ gibt.

In beiden Fällen gibt es ein Orthonormalsystem $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lambda_n \xrightarrow{n} \lambda$ und

$$Ax_n = \lambda_n x_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da B kompakt ist, folgt $\|Bx_n\| \xrightarrow{n} 0$ mit Lemma 1.1.13. Damit folgt

$$\|(A + B - \lambda)x_n\| \leq \|(A + B - \lambda_n)x_n\| + \|(\lambda_n - \lambda)x_n\| \xrightarrow{n} 0$$

und somit ist

$$\lambda \in \sigma_\pi(T) \subset \sigma(T)$$

im Widerspruch zu $\sigma(T) = \{0\}$.
Also ist $A - \mu$ kompakt und somit auch $T - \mu = (A - \mu) + B$. Mit dem Satz von Lomonosov (1.2.8) folgt die Behauptung. □

Satz 3.2.10. *Seien $T \in \mathcal{L}(H)$ und $1 - T^*T \in \mathscr{S}_p(H)$ für $1 \leq p < \infty$. Dann hat T einen nichttrivialen abgeschlossenen invarianten Teilraum.*

Beweis: Es gelte ohne Einschränkung $\sigma_p(T) = \emptyset = \sigma_p(T^*)$. Denn für $\lambda \in \sigma_p(T)$ wäre jeder eindimensionale Teilraum von $\operatorname{Ker}(\lambda - T) \neq \{0\}$ ein nichttrivialer hyperinvarianter Teilraum für T. Für $\lambda \in \sigma_p(T^*)$ benutze man Lemma 1.2.4.
Da $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^* = \{0\}$ gilt, folgt aus Lemma 1.3.8, dass es einen unitären Operator $U \in \mathcal{L}(H)$ mit $T = U\,|T|$ gibt. Es ist

$$B = |T| - 1 = (1 + |T|)^{-1}(|T|^2 - 1) = (1 + |T|)^{-1}(T^*T - 1) \in \mathscr{S}_p(H)$$

und damit

$$T = U(1 - B) = U + UB \in U + \mathscr{S}_p(H).$$

Mit Korollar 3.2.9 folgt die Behauptung. $\square$

Schließlich erhalten wir die Behauptung aus Satz 3.1.2, indem wir Satz 3.2.10 auf T^* anwenden.

Literaturverzeichnis

[1] H. Bercovici, C. Foias, and C. Pearcy, *Dual Algebras with Applications to Invariant Subspaces and Dilation Theory*, CDMS Regional Conference Series in Mathematics 56, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1985.

[2] N. L. Carothers, *A Shourt Course on Banach Space Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[3] I. Colojoara and C. Foias, *Theory of Generalized Spectral Operators*, Gordon and Breach, New York, 1968.

[4] N. Dunford and J. Schwartz, *Linear Operators, Spectral Theory, Self Adjoint Operators in Hilbert Space, Part 2*, Wiley-Interscience, New York, 1988.

[5] P. Enflo, *On the Invariant Subspace Problem in Banach Spaces*, Séminaire Maurey-Schwartz (1975-1976) Espaces L^p, applications radonifiantes et géometrie des espaces de Banach, Exp. Nos. 14-15, 7 pp., 1976.

[6] J. Eschmeier, *Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher*, Vorlesung, Universität des Saarlandes, WiSe 2015/2016.

[7] ———, *Funktionalanalysis*, Vorlesung, Universität des Saarlandes, WS 2015/16.

[8] K. Guo, W. He, and S. Hou, *Maximal Invariant Subspaces for a Class of Operators*, Ark Mat., 48, 323-333, 2010.

[9] H. Hedenmalm, S. Richter, and K. Seip, *Interpolating Sequences and Invariant Subspaces of given Index in the Bergman Spaces*, J. Reine Angew. Math. 477, 13-30, 1996.

[10] H. Radjavi and P. Rosenthal, *Invariant subspaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 77, Springer, New York, 1973.

[11] C. Read, *A Solution to the Invariant Subspace Problem*, 16 (4): 337-401, Bull. London Math. Soc., London, 1984.

[12] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, International Series in Pure and Applied Mathematics, 1986.

[13] Herbert Schröder, *Funktionalanalysis*, Akademie Verlag, Berlin, 1997.

[14] G. Wittstock, *Lineare Operatoren auf dem Hilbertraum*, Vorlesung, Universität des Saarlandes, WS 2002/03.