Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät I
Fachrichtung Mathematik

Bachelorarbeit

Extremale Fortsetzungen in Familien von Operatoren auf Hilberträumen

Michael Hartz

Oktober 2010

Angefertigt unter Betreuung von
Prof. Dr. Jörg Eschmeier

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Saarbrücken, den

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Der Dilatationssatz von Sz.-Nagy ist ein wichtiges Werkzeug zum Studium von Kontraktionen auf Hilberträumen. Eine Version dieses Satzes besagt das Folgende:

Satz. *Jede Kontraktion auf einem Hilbertraum besitzt eine Fortsetzung zu einer Co-Isometrie.*

Dabei heißt ein Operator T auf einem Hilbertraum Co-Isometrie, falls $TT^* = 1$ gilt, das heißt, falls T^* eine Isometrie ist. Zusammen mit der Tatsache, dass jede Isometrie auf einem Hilbertraum eine Fortsetzung zu einem unitären Operator hat, erhält man leicht eine andere Version des Satzes.

Satz. *Zu jeder Kontraktion T auf einem Hilbertraum H gibt es einen Hilbertraum $K \supset H$ und einen unitären Operator U auf K, sodass*

$$T^k = PU^k\big|_H$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt, wobei P die Orthogonalprojektion von K auf H ist.

Der Operator U heißt auch *Dilatation* von T. Ein Beispiel für eine Anwendung dieses Satzes ist die folgende Ungleichung von John von Neumann.

Korollar. *Sei $T \in \mathcal{L}(H)$ eine Kontraktion und $p \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom. Dann gilt*

$$||p(T)|| \leq ||p||_{\overline{\mathbb{D}}}.$$

Beweis. Sei U eine unitäre Dilatation von T. Dann gilt $p(T) = Pp(U)\big|_H$ für alle Polynome $p \in \mathbb{C}[z]$. Weil der stetige Funktionalkalkül von U isometrisch ist und das Spektrum von unitären Operatoren in der Einheitskreislinie liegt, gilt $||p(U)|| \leq ||p||_{\overline{\mathbb{D}}}$. Es folgt

$$||p(T)|| = ||Pp(U)\big|_H|| \leq ||p(U)|| \leq ||p||_{\overline{\mathbb{D}}}.$$

□

Die von-Neumannsche Ungleichung kann nun als Ausgangspunkt für das Studium von Funktionalkalkülen für Kontraktionen dienen. Eine solche Vorgehensweise findet sich etwa in [DAE$^+$03].

Dieses Beispiel illustriert den Nutzen von Fortsetzungssätzen. Sie ermöglichen es, zu einem gegebenen Operator eine Fortsetzung mit besseren Eigenschaften zu finden. Dann kann man diese Fortsetzung studieren, für die meistens stärkere Sätze zur Verfügung stehen, um schließlich Rückschlüsse auf den ursprünglichen Operator zu ziehen. So haben wir gerade eine Kontraktion zunächst zu einer Co-Isometrie fortgesetzt und daraufhin für den adjungierten Operator dieser Co-Isometrie eine unitäre Fortsetzung betrachtet. Dann konnten wir den stetigen Funktionalkalkül dieses unitären Operators benutzen, der für die Kontraktion nicht zur Verfügung stand.

Auch für (meist vertauschende) Tupel von Hilbertraumoperatoren ist man an Fortsetzungssätzen interessiert. Eine Fortsetzung eines Tupels $T = (T_1, \dots, T_n)$ von Operatoren soll dabei ein weiteres Operatortupel $S = (S_1, \dots, S_n)$ sein, sodass für $i = 1, \dots, n$ der Operator S_i eine Fortsetzung von T_i ist. Es genügt also nicht, jede Komponente einzeln fortzusetzen, was die Suche nach Fortsetzungssätzen für Operatortupel erschwert.

Jim Aglers Konzept von Familien [Agl88] bietet einen allgemeinen Rahmen für solche Fortsetzungssätze. Eine Familie ist dabei eine Klasse $\mathcal{F}$ von n-Tupeln aus Hilbertraumoperatoren, die den folgenden vier Bedingungen genügt:

(F1) $\mathcal{F}$ ist beschränkt.

(F2) $\mathcal{F}$ ist stabil unter Einschränkung auf invariante Teilräume.

(F3) $\mathcal{F}$ ist stabil unter beliebigen direkten Summen.

(F4) $\mathcal{F}$ ist stabil unter unitalen $*$-Homomorphismen.

Die Details dieser Bedingungen sind in Definition 2.1 zu finden. Beispiele für Familien sind im Fall $n = 1$ die Klasse der Kontraktionen, die Klasse der subnormalen Kontraktionen und die Klasse der Isometrien. Im Fall $n \geq 1$ bildet etwa die Klasse aller n-Tupel aus kommutierenden Isometrien eine Familie. Wir nennen ein Operatortupel $T = (T_1, \dots, T_n)$ sphärische Isometrie, falls

$$\sum_{i=1}^{n} T_i^* T_i = 1$$

gilt, sowie sphärische Kontraktion, falls

$$\sum_{i=1}^{n} T_i^* T_i \leq 1$$

ist. Dann sind auch die Klasse aller sphärischen Isometrien und die Klasse aller sphärischen Kontraktionen Familien. Bezüglich weiteren Beispielen und Beweisen sei auf Lemma 2.4 verwiesen.

Für die Suche nach Fortsetzungssätzen ist der Begriff der Extremalen einer Familie von zentraler Bedeutung. Ein Operatortupel T in einer Familie heißt dabei extremal, wenn jede Fortsetzung R von T innerhalb der Familie die Form $R = T \oplus A$ für ein weiteres Operatortupel A hat, wobei die direkte Summe komponentenweise zu verstehen ist. Mit diesen Bezeichnungen besagt der Fortsetzungssatz von Agler, dass jedes Operatortupel einer Familie eine Fortsetzung zu einem extremalen Operatortupel hat. Damit wird die Suche nach Fortsetzungssätzen also auf die Bestimmung der Extremalen einer Familie reduziert.

In der vorliegenden Arbeit werden die Grundlagen der Theorie der Familien bereitgestellt und die Extremalen einiger Familien bestimmt. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Familie der kommutierenden sphärischen Isometrien und der Familie der kommutierenden sphärischen Kontraktionen. Dieser Teil orientiert sich eng an der Arbeit [RS10] von Stefan Richter und Carl Sundberg aus dem Jahr 2010.

Das erste Kapitel dient dazu, Grundlagen für spätere Kapitel bereitzustellen, die über die Themen einer typischen Einführung in die Funktionalanalysis hinausgehen. Dieser Teil kann zunächst auch übersprungen werden, um später bei Bedarf dorthin zurückzukehren. Neben allgemeinen Grundlagen aus der Operatorentheorie werden subnormale Operatoren behandelt. Dabei werden einige Subnormalitätskriterien bereitgestellt, von denen später das Kriterium in Korollar 1.23 wichtig sein wird. In diesem Kapitel führen wir darüber hinaus den Koszul-Komplex für ein vertauschendes Tupel von Modulhomomorphismen ein, der für uns besonders im Fall eines vertauschenden Tupels von Hilbertraumoperatoren von Interesse ist. Damit können wir dann die Begriffe Invertierbarkeit und Fredholmeigenschaft sowie Spektrum und wesentliches Spektrum für ein kommutierendes Operatortupel definieren. Im Hinblick auf die spätere Anwendung gewinnen wir in Lemma 1.33 noch ein Kriterium dafür, wann ein wesentlich normales Tupel Fredholm ist.

Im zweiten Kapitel geht es um Familien im Sinne von Agler. Von zentraler Bedeutung ist hier der bereits erwähnte Fortsetzungssatz 2.18. Im Gegensatz zur Originalarbeit von Agler, in der ein Beweis mit transfiniter Induktion angedeutet wird, beweisen wir diesen Satz mit dem Lemma von Zorn. Dabei ist zu beachten, dass die Klasse aller Fortsetzungen eines gegebenen Operatortupels im Allgemeinen keine Menge ist, sodass das Lemma von Zorn nicht direkt benutzt werden kann. Stattdessen finden wir zunächst eine obere Schranke für die Dimension der Hilberträume, auf denen gewisse Fortsetzungen leben. Um den Beweis des Satzes von Agler für allgemeine Familien führen zu können, benötigen wir einige Resultate aus der Theorie der vollständig positiven Abbildungen. Für die Familien, die in dieser Arbeit genauer untersucht werden, ist das nicht unbedingt erforderlich. Die Aussage des betreffenden Lemmas 2.12 kann in diesen Fällen leicht direkt nachgeprüft werden.

Im dritten Kapitel bestimmen wir die Extremalen der Familie aller n-Tupel aus kommutierenden Isometrien und die Extremalen der Familie aller kommutierenden sphärischen Isometrien. Erstere sind genau die n-Tupel aus kommutierenden unitären Operatoren (Satz 3.1), letztere genau die kommutierenden sphärisch unitären

Tupel, das heißt die kommutierenden sphärischen Isometrien mit normalen Komponenten (Satz 3.8). Zusammen mit dem Satz von Agler erhalten wir damit einen neuen Beweis für zwei bekannte Fortsetzungssätze. Der erste stammt von Itô [Itô58] und Brehmer [Bre61] und besagt, dass jedes Tupel aus kommutierenden Isometrien eine gemeinsame Fortsetzung zu einem Tupel aus kommutierenden unitären Operatoren besitzt. Der zweite ist ein Resultat von Athavale [Ath90], nach welchem kommutierende sphärische Isometrien subnormal sind. Darüber hinaus werden wir sehen, dass kommutierende sphärisch unitäre Tupel sogar extremal für die Familie aller kommutierenden sphärischen Kontraktionen sind.

Bevor wir uns genauer mit sphärischen Kontraktionen beschäftigen, untersuchen wir im vierten Kapitel ein spezielles Operatortupel, den n-Shift M_z auf dem Drury-Arveson-Raum $H(\mathbb{B})$. Der Drury-Arveson-Raum ist ein Hilbertraum holomorpher Funktionen auf der Einheitskugel im $\mathbb{C}^n$, der durch seinen reproduzierenden Kern

$$K(z, w) = \frac{1}{1 - \langle z, w \rangle}$$

charakterisiert ist. Der n-Shift M_z ist dann das n-Tupel, das aus den Multiplikationsoperatoren mit den Koordinatenfunktionen besteht. Ziel dieses Kapitels ist Satz 4.22. Er besagt, dass das adjungierte Tupel M_z^* extremal für die Familie der kommutierenden sphärischen Kontraktionen ist. Im Anschluss an Satz 5.16 werden wir dafür einen kurzen Beweis erhalten, der auf dem Satz von Agler beruht. In diesem Kapitel wird jedoch eine andere Herangehensweise gewählt, die die Struktur des Koszul-Komplexes von M_z ausnutzt. Um die Kohomologiegruppen dieses Komplexes zu bestimmen, machen wir im zweiten Abschnitt dieses Kapitels einen Exkurs in die kommutative Algebra, wo zunächst das Tupel M_z auf dem Polynomring $\mathbb{C}[z]$ betrachtet wird. Dieser Abschnitt ist bewusst eher knapp gehalten und setzt grundlegende Kenntnisse der multilinearen und der homologischen Algebra voraus. Im späteren Verlauf wird lediglich Korollar 4.15 benötigt. Zumindest dessen Aussage kann leicht ohne Kenntnis dieses Abschnittes verstanden werden.

Im letzten Kapitel beschäftigen wir uns mit kommutierenden sphärischen Kontraktionen. Zunächst zeigen wir dazu einen Satz über Operatortupel der Form $S^* \oplus V$, wobei S eine direkte Summe von n-Shifts und V eine kommutierende sphärische Isometrie ist. Genauer geht es dabei um eine hinreichende Bedingung dafür, dass ein vertauschendes n-Tupel von Operatoren diese spezielle Gestalt hat. Im Fall $n = 1$ entspricht dieser Satz gerade der Wold-Zerlegung von Isometrien auf Hilberträumen. Im nächsten Abschnitt betrachten wir eindimensionale Fortsetzungen sphärischer Kontraktionen. Das dort gewonnene Resultat ermöglicht es, im Fall $n = 1$ die Extremalen der Familie aller Kontraktionen als Co-Isometrien zu identifizieren. Mit dem Satz von Agler erhalten wir damit einen neuen Beweis für den zu Beginn als Motivation genutzten Dilatationssatz von Sz.-Nagy. An dieser Stelle bietet es sich an, kurz auf die Familie aller n-Tupel aus kommutierenden Kontraktionen einzugehen. Im Fall $n = 2$ können wir noch zeigen, dass die Extremalen dieser Familie genau die Paare aus kommutierenden Co-Isometrien sind. Für $n \geq 3$ ist die Situation komplizierter. In diesem Fall sind nicht alle Extremalen auch vertauschende Tupel von Co-Isometrien. Im letzten Abschnitt kommt fast sämtliche bis dahin entwickelte Theorie zusammen, um die Extremalen der Familie aller kommutierenden sphärischen Kontraktionen zu klassifizieren. Dabei werden wir in Satz 5.16 sehen, dass jede extremale sphärische Kontraktion T die Form $T = S^* \oplus U$ hat, wobei S eine direkte Summe von n-Shifts und U ein kommutierendes sphärisch unitäres Operatortupel ist. Zusammen mit dem Satz von Agler erhalten wir damit einen neuen Beweis für einen Fortsetzungssatz von Müller-Vasilescu [MV93] und Arveson [Arv98], der besagt, dass jede kommutierende sphärische Kontraktion eine Fortsetzung zu einem Operatortupel der Form $S^* \oplus U$ hat.

Die verwendete Notation wird meistens dann erklärt, wenn sie zum ersten Mal benutzt wird. Generell sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ die Menge aller natürlichen Zahlen und $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ferner seien H und K stets komplexe Hilberträume.

Mein Dank gilt Professor Eschmeier, der mir dieses interessante Thema gestellt hat. Er hat mich bei der Anfertigung der Bachelorarbeit sehr gut betreut und mir gleichzeitig viele Freiheiten bei der Ausarbeitung gelassen. Ich danke auch meinen Eltern, die mir nicht nur während der Entstehung der Bachelorarbeit Rückhalt gewährt haben. Schließlich geht mein Dank an die Studienstiftung des deutschen Volkes für die finanzielle und vor allem die ideelle Förderung während meines bisherigen Studiums.

1 Vorbereitungen

1.1 Grundlagen aus der Operatorentheorie

Sei H ein Hilbertraum und $\mathcal{L}(H)$ der Raum der stetigen linearen Operatoren auf H. Auf $\mathcal{L}(H)$ ist neben der Normtopologie noch eine weitere Topologie für uns von Interesse.

Definition 1.1. Durch die Halbnormen $(p_x)_{x\in H}$ mit

$$p_x(T) = ||Tx|| \qquad \text{für } T \in \mathcal{L}(H)$$

ist eine separierte lokalkonvexe Topologie auf $\mathcal{L}(H)$ gegeben. Diese heißt die *starke Operatortopologie (SOT)*.

Offenbar konvergiert ein Netz stetiger linearer Operatoren genau dann in der starken Operatortopologie, wenn es punktweise auf H konvergiert. Die starke Operatortopologie ist also gröber als die Normtopologie. Man kann darüber hinaus zeigen, dass die Komposition, die in der Normtopologie stetig ist, im Falle eines unendlichdimensionalen Hilbertraumes SOT-unstetig ist [Hal82, Problem 111]. Es gilt aber immerhin noch:

Lemma 1.2. *Die Komposition*

$$\circ : \mathcal{L}(H) \times \mathcal{L}(H) \to L(H), \quad (S,T) \mapsto ST$$

ist SOT-folgenstetig.

Beweis. Seien $(T_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ Folgen in $\mathcal{L}(H)$, die gegen T bzw. S in der starken Operatortopologie konvergieren. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus ist dann $M = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} ||T_n|| < \infty$. Für alle $x \in H$ folgt

$$\begin{aligned} ||T_nS_nx - TSx|| &\leq ||T_nS_nx - T_nSx|| + ||T_nSx - TSx|| \\ &\leq M||S_nx - Sx|| + ||T_nSx - TSx|| \xrightarrow{n\to\infty} 0. \end{aligned}$$

Somit konvergiert $(T_nS_n)_{n=0}^{\infty}$ in der starken Operatortopologie gegen TS. □

Bekanntlich heißt ein linearer Operator $T \in \mathcal{L}(H,K)$ zwischen zwei Hilberträumen H und K Isometrie, falls $||Tx|| = ||x||$ für alle $x \in H$ gilt. Die folgende Definition ist eine Abschwächung dieses Begriffes.

Definition 1.3. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(H,K)$ heißt *partielle Isometrie*, wenn es einen abgeschlossenen Unterraum M von H gibt, sodass $||Tx|| = ||x||$ für alle $x \in M$ und $Tx = 0$ für alle $x \in M^\perp$ gilt. M heißt der Anfangsraum und $T(M) = T(H)$ der Zielraum von T.

Ist T eine partielle Isometrie, so ist offenbar $\ker(T)^\perp$ der Anfangsraum von T. Eine nützliche Charakterisierung partieller Isometrien liefert das folgende Lemma.

Lemma 1.4. *Sei $T \in \mathcal{L}(H,K)$. Dann ist T genau dann eine partielle Isometrie, wenn T^*T eine Projektion ist. In diesem Fall ist auch TT^* eine Projektion. Das Bild von T^*T ist der Anfangsraum und das Bild von TT^* der Zielraum von T.*

Beweis. Sei T^*T eine Projektion und $M = \operatorname{ran}(T^*T)$. Dann ist M ein abgeschlossener Unterraum von H und für alle $x \in M$ gilt

$$||x||^2 = \langle x, x\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = ||Tx||^2.$$

Für $x \in M^\perp = \ker(T^*T)$ gilt andererseits

$$0 = \langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = ||Tx||^2.$$

Somit ist T eine partielle Isometrie mit Anfangsraum M.

Sei umgekehrt T eine partielle Isometrie mit Anfangsraum M. Aus $||Tx|| = ||x||$ für $x \in M$ folgt mit der Polarisierungsidentität $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ für $x, y \in M$. Ist $x \in M$ und $y \in M^\perp$, so gilt $Ty = 0$, also $\langle x, y\rangle = 0 = \langle Tx, Ty\rangle$. Somit erhalten wir

$$\langle x, y\rangle = \langle Tx, Ty\rangle \qquad \text{für alle } x \in M, y \in H.$$

Ist nun $x \in M$, so gilt $\langle x, y\rangle = \langle T^*Tx, y\rangle$ für alle $y \in H$, also $T^*Tx = x$. Mit T verschwindet auch T^*T auf $M^\perp$, mithin ist T^*T die Orthogonalprojektion auf M.

Seien nun die beiden äquivalenten Bedingungen erfüllt. Es bleibt zu zeigen, dass dann auch TT^* eine Projektion ist, deren Bild der Zielraum $R = T(M) = T(H)$ ist. Sei dazu $S \in \mathcal{L}(K,H)$ der Operator, der auf R mit $(T\big|_M)^{-1}$ übereinstimmt und auf $R^\perp$ identisch 0 ist. Weil T den Raum M nach Voraussetzung isometrisch auf R abbildet, ist S stetig mit $\operatorname{ran}(S) = M$. Für $x \in R$ gilt somit: $Sx = T^*TSx = T^*x$ und deshalb $x = TT^*x$. Ist $y \in R^\perp = \operatorname{ran}(T)^\perp = \ker(T^*)$, dann ist $T^*y = 0$ und folglich auch $TT^*y = 0$. Mithin ist TT^* die Orthogonalprojektion auf R, den Zielraum von T. $\square$

Wenn $T \in \mathcal{L}(H,K)$ eine Isometrie ist, gilt das selbst im Fall $K = H$ nicht notwendigerweise auch für den adjungierten Operator T^*. Ein einfaches Beispiel dafür ist der unilaterale Rechtsshift S, der definiert ist durch

$$S : l^2(\mathbb{N}_0) \to l^2(\mathbb{N}_0), \quad S(a_n)_{n=0}^\infty = (b_n)_{n=0}^\infty \quad \text{mit } b_n = \begin{cases} 0, & \text{für } n = 0, \\ a_{n-1}, & \text{für } n \geq 1. \end{cases}$$

Offensichtlich ist S eine Isometrie. Der adjungierte Operator zu S ist der unilaterale Linksshift

$$S^* : l^2(\mathbb{N}_0) \to l^2(\mathbb{N}_0), \quad S(a_n)_{n=0}^\infty = (a_{n+1})_{n=0}^\infty.$$

Dieser hat einen nichttrivialen Kern, ist also insbesondere keine Isometrie. Aus dem Lemma folgt jedoch unmittelbar, dass dieses Phänomen in der Klasse der partiellen Isometrien nicht auftritt.

Korollar 1.5. *T ist genau dann eine partielle Isometrie, wenn T^* eine partielle Isometrie ist.* □

Wir benötigen noch ein Lemma von Douglas [Dou66] über Inklusionsbeziehungen zwischen Bildern von Hilbertraumoperatoren.

Lemma 1.6. *Seien $A, B \in \mathcal{L}(H, K)$. Dann sind äquivalent:*

(i) $\operatorname{ran}(A) \subset \operatorname{ran}(B)$.

(ii) $AA^* \leq \lambda^2 BB^*$ *für ein* $\lambda \geq 0$.

(iii) *Es existiert ein $C \in \mathcal{L}(H)$ mit $A = BC$.*

In diesem Fall kann man den Operator C in (iii) so wählen, dass zusätzlich gilt:

(a) $||C||^2 = \inf\{\mu \geq 0 : AA^* \leq \mu BB^*\}$,

(b) $\ker(A) = \ker(C)$,

(c) $\operatorname{ran}(C) \subset \overline{\operatorname{ran}(B^*)}$.

Durch die Bedingung (c) ist der Operator C aus (iii) schon eindeutig bestimmt.

Beweis. (iii) $\Rightarrow$ (ii): Sei $A = BC$. Für $x \in H$ gilt dann

$$\langle ||C||^2 1 - CC^* x, x\rangle = ||C||^2 ||x||^2 - ||C^* x||^2 \geq 0.$$

Deshalb ist $||C||^2 1 - CC^*$ und somit auch $B(||C||^2 1 - CC^*)B^*$ ein positiver Operator. Es folgt

$$AA^* = BCC^*B^* = ||C||^2 BB^* - B(||C||^2 1 - CC^*)B^* \leq ||C||^2 BB^*. \tag{1.1}$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) ist klar.

(i) $\Rightarrow$ (iii): Sei $\operatorname{ran}(A) \subset \operatorname{ran}(B)$ und $x \in H$. Dann ist $Ax \in \operatorname{ran}(A) \subset \operatorname{ran}(B)$, also existiert ein eindeutiges Element $y \in \ker(B)^\perp$ mit $By = Ax$. Sei $Cx = y$. Der hierdurch definierte Operator C ist linear und erfüllt $A = BC$. Es bleibt zu zeigen, dass C stetig ist. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen genügt es dazu zu zeigen, dass C ein abgeschlossener Operator ist. Sei also $((x_n, y_n))_{n=0}^{\infty}$ eine Folge im Graphen von C mit $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x, y)$. Weil A und B stetig sind, ist $Ax = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} By_n = By$. Weil $\ker(B)^\perp$ abgeschlossen ist, ist auch $y = \lim_{n\to\infty} y_n \in \ker(B)^\perp$, also $Cx = y$. Das zeigt, dass C ein abgeschlossener Operator ist.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei $\lambda \geq 0$ mit $AA^* \leq \lambda^2 BB^*$. Wir definieren einen linearen Operator D von $\operatorname{ran}(B^*)$ nach $\operatorname{ran}(A^*)$ vermöge $D(B^*x) = A^*x$. Wegen

$$||A^*x||^2 = \langle AA^*x, x\rangle \leq \lambda^2\langle BB^*x, x\rangle = \lambda^2||B^*x||^2 \tag{1.2}$$

für $x \in H$ ist D wohldefiniert und stetig, kann also stetig auf $\overline{\operatorname{ran}(B^*)}$ fortgesetzt werden. Sei D auf $\operatorname{ran}(B^*)^\perp$ identisch 0. Dann gilt $DB^* = A^*$. Deshalb leistet $C = D^*$ das Gewünschte.

Zum Zusatz: Sei $\mu_0 = \inf\{\mu \geq 0 : AA^* \leq \mu BB^*\}$ und $\lambda = \sqrt{\mu_0}$. Weil das Infimum angenommen wird, ist $AA^* \leq \lambda^2 BB^*$. Für den im Beweis von (ii) $\Rightarrow$ (iii) konstruierten Operator $C = D^*$ gilt nach (1.2) die Ungleichung $||D||^2 \leq \lambda^2 = \mu_0$, also auch $||C||^2 = ||D||^2 \leq \mu_0$. Mit Ungleichung (1.1) folgt $\mu_0 \leq ||C||^2$, also erfüllt C die Bedingung (a). Weiterhin gilt wegen

$$\ker(C) = \operatorname{ran}(D)^\perp = \operatorname{ran}(A^*)^\perp = \ker(A)$$

auch (b). Eigenschaft (c) folgt direkt aus

$$\operatorname{ran}(B^*)^\perp \subset \ker(D) = \operatorname{ran}(C)^\perp.$$

Zum Nachweis der Eindeutigkeit sei E ein Operator mit $A = BE$ und $\operatorname{ran}(E) \subset \overline{\operatorname{ran}(B^*)}$. Wir zeigen, dass E mit dem gerade betrachteten Operator C übereinstimmt. Wegen $A = BE$ gilt $E^*B^* = A^* = C^*B^*$, also $E^*f = C^*f$ für alle $f \in \overline{\operatorname{ran}(B^*)}$. Ist $f \in \operatorname{ran}(B^*)^\perp$, so ist $f \in \operatorname{ran}(E)^\perp = \ker(E^*)$, also $E^*f = 0 = C^*f$. Das zeigt $E^* = C^*$ und somit auch $E = C$. □

Für uns ist eine Folgerung besonders interessant.

Korollar 1.7. *Sei $B \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert und $x_0 \in H$. Dann ist $x_0 \in \operatorname{ran}(B)$ genau dann, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit*

$$\varepsilon^2|\langle x, x_0\rangle|^2 \leq ||Bx||^2$$

für alle $x \in H$.

Beweis. Im Fall $x_0 = 0$ ist das trivial. Sei also $x_0 \neq 0$ und A die Orthogonalprojektion von H auf den von x_0 erzeugten eindimensionalen Unterraum von H, also

$$A : H \to H, \quad x \mapsto \frac{\langle x, x_0\rangle}{||x_0||^2}x_0.$$

Sei $x \in H$. Weil A eine Orthogonalprojektion ist, gilt

$$\langle AA^*x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle = \frac{|\langle x, x_0\rangle|^2}{||x_0||^2}.$$

Weil B selbstadjungiert ist, ist $\langle BB^*x, x\rangle = ||Bx||^2$. Es gilt nun $x_0 \in \mathrm{ran}(B)$ genau dann, wenn $\mathrm{ran}(A) \subset \mathrm{ran}(B)$ ist. Nach dem Douglas-Lemma 1.6 ist das genau dann der Fall, wenn $AA^* \leq \lambda^2 BB^*$ für ein $\lambda \geq 0$ gilt, also genau dann, wenn es ein $\lambda \geq 0$ gibt mit

$$|\langle x, x_0\rangle|^2 \leq \lambda^2 ||x_0||^2 ||Bx||^2$$

für alle $x \in H$. Das ist aber äquivalent zur Existenz eines $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon^2 |\langle x, x_0\rangle|^2 \leq ||Bx||^2$ für alle $x \in H$. $\square$

Für zwei selbstadjungierte Operatoren S und T auf einem Hilbertraum H schreiben wir $S \leq T$, falls $T - S$ ein positiver Operator ist. Dadurch ist eine partielle Ordnung auf der Menge aller selbstadjungierten Operatoren in $\mathcal{L}(H)$ gegeben. Folgen selbstadjungierter Operatoren, die in dieser Ordnung monoton und beschränkt sind, haben besonders gute Eigenschaften. Es gilt nämlich das folgende operatorentheoretische Analogon eines wohlbekannten Satzes aus der reellen Analysis:

Lemma 1.8. *Sei $(S_n)_{n=0}^\infty$ eine Folge selbstadjungierter Operatoren in $\mathcal{L}(H)$ und $T \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert mit*

$$S_n \leq S_{n+1} \leq T$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gibt es einen selbstadjungierten Operator $S \in \mathcal{L}(H)$ mit $S \leq T$ und

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

in der starken Operatortopologie.

Beweis. Indem wir S_n und T durch $S_n - S_0$ und $T - S_0$ ersetzen, können wir annehmen, dass alle S_n positive Operatoren sind. Für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ ist

$$||S_n - S_m|| \leq ||S_n|| + ||S_m|| \leq 2||T||.$$

Weiterhin gilt für einen positiven Operator $A \in \mathcal{L}(H)$ und $x \in H$:

$$\langle A^2x, x\rangle = ||Ax||^2 \leq ||\sqrt{A}||^2 ||\sqrt{A}x||^2 = ||A|| \langle Ax, x\rangle.$$

Für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq m$ und $x \in H$ folgt die Ungleichung

$$\begin{aligned} ||S_n x - S_m x||^2 = \langle (S_n - S_m)^2 x, x\rangle &\leq ||S_n - S_m|| \langle S_n x - S_m x, x\rangle \\ &\leq 2||T|| \langle S_n x - S_m x, x\rangle. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist für $x \in H$ die Folge $(\langle S_n x, x\rangle)_{n=0}^\infty$ eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge reeller Zahlen und deshalb konvergent. Also ist $(S_n x)_{n=0}^\infty$ eine Cauchyfolge für alle $x \in H$ und somit ebenfalls konvergent. Der durch

$$Sx = \lim_{n\to\infty} S_n x$$

definierte Operator ist linear und wegen $||S_n|| \leq ||T||$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ auch stetig. Klarerweise gilt

$$0 \leq \langle Sx, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle S_n x, x\rangle \leq \langle Tx, x\rangle$$

für alle $x \in H$, sodass S selbstadjungiert mit $S \leq T$ ist. $\square$

Für monoton fallende Folgen von Operatoren erhalten wir ein ähnliches Resultat, das wir im Fall von Orthogonalprojektionen benötigen werden.

Korollar 1.9. *Sei $(S_n)_{n=0}^\infty$ eine monoton fallende Folge positiver Operatoren in $\mathcal{L}(H)$, das heißt, es gilt*

$$0 \leq S_{n+1} \leq S_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gibt es einen positiven Operator $S \in \mathcal{L}(H)$ mit $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ in der starken Operatortopologie.

Beweis. Das folgt aus Lemma 1.8 angewendet auf die Folge $(-S_n)_{n=0}^\infty$ mit $T = 0$. $\square$

1.2 Subnormale Operatoren

Definition 1.10. Sei $S \in \mathcal{L}(H)$ ein stetiger linearer Operator. S heißt *subnormal*, falls es einen Hilbertraum $K \supset H$ und einen normalen Operator $N \in \mathcal{L}(K)$ gibt mit $N(H) \subset H$ und $N\big|_H = S$.

Trivialerweise ist jeder normale Operator subnormal. Die Umkehrung gilt nicht, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel. Sei $H = l^2(\mathbb{N}_0)$ und S der unilaterale Rechtsshift. Dann ist S^* der unilaterale Linksshift und es gilt $S^*S = 1$ sowie $SS^* = 1 - P_0$, wobei P_0 die Orthogonalprojektion auf die erste Komponente ist. Insbesondere ist S nicht normal. Sei $K = l^2(\mathbb{Z})$ und N der bilaterale Rechtsshift, also

$$N : l^2(\mathbb{Z}) \to l^2(\mathbb{Z}), \quad N(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (a_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Dann ist N^* der bilaterale Linksshift und es gilt $N^*N = NN^* = 1$, das heißt, N ist normal. Offensichtlich ist $N\big|_{l^2(\mathbb{N}_0)} = S$, der Operator S ist also subnormal.

Operatoren $S \in \mathcal{L}(H)$ mit $S^*S - SS^* \geq 0$ nennt man *hyponormal*. Mit dieser Bezeichnung besagt das nächste Lemma, dass jeder subnormale Operator hyponormal ist. Die Umkehrung gilt nicht, siehe etwa [Hal82, Problem 203].

Lemma 1.11. *Ist $S \in \mathcal{L}(H)$ subnormal, so ist $S^*S - SS^* \geq 0$.*

Beweis. Sei $N \in \mathcal{L}(K)$ eine normale Fortsetzung von S und P_H die Orthogonalprojektion von K auf H. Für alle $x \in H$ gilt dann

$$||S^*x|| = ||P_H N^*x|| \leq ||N^*x|| = ||Nx|| = ||Sx||,$$

also

$$\langle (S^*S - SS^*)x, x \rangle = ||Sx||^2 - ||S^*x||^2 \geq 0.$$

□

Ist S subnormal und N eine normale Fortsetzung von S, so ist für jeden normalen Operator M auch $N \oplus M$ eine normale Fortsetzung von S. Deshalb hat jeder subnormale Operator viele normale Fortsetzungen. Im Allgemeinen sind wir an möglichst „kleinen“ normalen Fortsetzungen interessiert.

Definition 1.12. Sei $S \in \mathcal{L}(H)$ ein subnormaler Operator und $N \in \mathcal{L}(K)$ eine normale Fortsetzung von S. Der Operator N heißt *minimale normale Fortsetzung* von S, falls es keinen echten abgeschlossenen Untervektorraum von K gibt, der N reduziert und H enthält.

Minimale normale Fortsetzungen besitzen eine einfache Charakterisierung.

Lemma 1.13. *Sei $S \in \mathcal{L}(H)$ ein subnormaler Operator und $N \in \mathcal{L}(K)$ eine normale Fortsetzung von S. Dann ist N genau dann eine minimale normale Fortsetzung von S, wenn*

$$K = \bigvee_{k=0}^{\infty} N^{*k}(H)$$

gilt.

Beweis. Sei $K^+ = \bigvee_{k=0}^{\infty} N^{*k}(H)$. Offensichtlich ist K^+ ein abgeschlossener Untervektorraum von K, der H enthält. Weil N normal ist, ist K^+ reduzierend für N. Umgekehrt ist K^+ in jedem abgeschlossenen Untervektorraum von K, der N reduziert und H enthält, selbst enthalten. Die Behauptung folgt. □

Insbesondere folgt, dass jeder subnormale Operator S eine minimale normale Fortsetzung hat. Ist nämlich $N \in \mathcal{L}(K)$ eine beliebige normale Fortsetzung von S und K^+ wie im Beweis definiert, so ist $N\big|_{K^+}$ eine minimale normale Fortsetzung von S. Man kann zeigen, dass je zwei minimale normale Fortsetzungen von S unitär äquivalent sind, siehe etwa [Con91, Corollary 2.7]. Wir werden dieses Resultat im Folgenden nicht benötigen, sprechen aber dennoch von *der* minimalen normalen Fortsetzung.

Beispiel. Ist S der unilaterale Rechtsshift auf $l^2(\mathbb{N}_0)$ und N der bilaterale Rechtsshift auf $l^2(\mathbb{Z})$, so ist N die minimale normale Fortsetzung von S. In der Tat ist

$$N^{*k}(l^2(\mathbb{N}_0)) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z}) : a_n = 0 \text{ für } n < -k\},$$

also

$$\bigvee_{k=0}^{\infty} N^{*k}(l^2(\mathbb{N}_0)) = l^2(\mathbb{Z}).$$

Man überlegt sich leicht, dass das Spektrum des bilateralen Shifts N die Einheitskreislinie, das Spektrum des unilateralen Shifts S jedoch die ganze Einheitskreisscheibe ist. Insbesondere ist also $\sigma(N) \subset \sigma(S)$. Das gilt allgemein für minimale normale Fortsetzungen.

Satz 1.14. *Sei $S \in \mathcal{L}(H)$ ein subnormaler Operator mit minimaler normaler Fortsetzung $N \in \mathcal{L}(K)$. Dann ist $\sigma(N) \subset \sigma(S)$.*

Beweis. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $\lambda - S$ subnormal mit minimaler normaler Fortsetzung $\lambda - N$. Deshalb genügt es zu zeigen, dass mit S auch N invertierbar ist.

Sei also S invertierbar, E das Spektralmaß zu N und $0 < \varepsilon < ||S^{-1}||^{-1}$. Sei ferner $M = E(B_\varepsilon(0))(K)$. Dann ist M ein abgeschlossener Untervektorraum von K, der N reduziert. Für alle $x \in M$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} ||N^k x||^2 = \langle N^{*k}N^k E(B_\varepsilon(0))x, x\rangle &= \left\langle \left(\int_{\sigma(N)} |t|^{2k} \chi_{B_\varepsilon(0)}\, dE(t) \right) x, x \right\rangle \\ &= \int_{B_\varepsilon(0)} |t|^{2k}\, d\langle E(t)x, x\rangle \le \varepsilon^{2k}||x||^2. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir für $x \in M, y \in H$ und $k \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} |\langle x, y\rangle| &= |\langle x, S^k S^{-k} y\rangle| = |\langle x, N^k S^{-k} y\rangle| = |\langle N^{*k}x, S^{-k}y\rangle| \\ &\le ||N^{*k}x||\, ||S^{-k}y|| \le \varepsilon^k ||S^{-1}||^k\, ||x||\, ||y||. \end{aligned}$$

Wegen $\varepsilon < ||S^{-1}||^{-1}$ folgt im Limes $k \to \infty$ für alle $x \in M$ und $y \in H$ die Beziehung $\langle x, y\rangle = 0$, also $H \subset M^\perp$. Weil $M^\perp$ den Operator N reduziert und N die minimale normale Fortsetzung von S ist, gilt $M^\perp = K$ und somit $M = \{0\}$. Mithin ist $0 \notin \sigma(N)$. $\square$

Aus der Inklusionsbeziehung der Spektren erhalten wir direkt eine Aussage über die Operatornormen:

Korollar 1.15. *Sei S subnormal mit minimaler normaler Fortsetzung N. Dann ist $||S|| = ||N||$.*

Beweis. Aus $\sigma(N) \subset \sigma(S)$ folgt für die Spektralradien von N und S die Ungleichung $r(N) \leq r(S)$, also

$$||N|| = r(N) \leq r(S) \leq ||S||.$$

Die umgekehrte Ungleichung ist trivial. □

Die Definition eines subnormalen Operators fordert die Existenz einer normalen Fortsetzung auf einem größeren Hilbertraum. In vielen Fällen ist jedoch eine intrinsische Charakterisierung von Subnormalität nützlich, wie sie der folgende Satz von Embry liefert.

Satz 1.16. *Ein Operator $S \in \mathcal{L}(H)$ ist genau dann subnormal, wenn*

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \langle S^{j+k} x_j, S^{j+k} x_k \rangle \geq 0$$

für alle $x_0, \ldots, x_n \in H$ gilt.

Beweis. Siehe [Con91, Theorem II.1.9]. □

Zum Studium normaler Operatoren sind Spektralmaße hilfreich. Der richtige Verallgemeinerung für subnormale Operatoren sind positive Operatormaße.

Definition 1.17. Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum. Ein *positives Operatormaß* auf X ist eine Abbildung Q, die jeder Borelmenge $A \subset X$ einen positiven Operator $Q(A) \in \mathcal{L}(H)$ zuordnet, sodass $Q(X) = 1$ gilt und für jedes $x \in H$ die Mengenfunktion $\langle Q(\cdot)x, x \rangle$ ein reguläres Borelmaß auf X ist.

Genau wie für Spektralmaße können wir ein Integral über positive Operatormaße definieren.

Lemma 1.18. *Sei Q ein positives Operatormaß auf einem lokalkompakten Hausdorffraum X und $\mathfrak{B}(X)$ die σ-Algebra aller Borelmengen von X.*

(a) *Es ist $||Q(A)|| \leq 1$ für alle $A \in \mathfrak{B}(X)$.*

(b) *Für alle $x, y \in H$ ist $\langle Q(\cdot)x, y \rangle$ ein reguläres komplexes Borelmaß auf X mit totaler Variation $||\langle Q(\cdot)x, y \rangle|| \leq 4||x|| \, ||y||$.*

(c) *Ist f eine beschränkte Borelfunktion auf X, so gibt es genau einen stetigen linearen Operator $T_f \in \mathcal{L}(H)$ mit*

$$\langle T_f x, y\rangle = \int\limits_X f\, d\langle Q(\cdot)x, y\rangle$$

für alle $x, y \in H$. Wir schreiben $T_f = \int_X f\, dQ$.

Beweis. (a) Für $A \in \mathfrak{B}(X)$ gilt

$$||Q(A)|| = \sup_{||x|| \leq 1} \langle Q(A)x, x\rangle \leq \sup_{||x|| \leq 1} \langle Q(X)x, x\rangle = 1.$$

(b) Die Polarisierungsidentität liefert für $x, y \in H$ und $A \in \mathfrak{B}(X)$ die Gleichung

$$\langle Q(A)x, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \langle\langle Q(A)(x + i^k y), x + i^k y\rangle.$$

Somit ist $\langle Q(\cdot)x, y\rangle$ als Linearkombination regulärer Borelmaße ein reguläres komplexes Borelmaß. Für $x, y \in H$ und $A \in \mathfrak{B}(X)$ gilt außerdem

$$|\langle Q(A)x, y\rangle| \leq ||Q(A)||\, ||x||\, ||y|| \leq ||x||\, ||y||.$$

Ist also $\mu_{x,y} = \langle Q(\cdot)x, y\rangle$, so ist $|\mu_{x,y}(A)| \leq ||x||\, ||y||$ für alle $A \in \mathfrak{B}(X)$. Sei nun $(A_i)_{i=1}^n$ eine messbare Partition von X und

$$\begin{aligned}
I_1 &= \{i \in \{1, \ldots, n\} : \mathrm{Re}(\mu_{x,y}(A_i)) \geq 0\},\\
I_2 &= \{i \in \{1, \ldots, n\} : \mathrm{Re}(\mu_{x,y}(A_i)) < 0\},\\
I_3 &= \{i \in \{1, \ldots, n\} : \mathrm{Im}(\mu_{x,y}(A_i)) \geq 0\},\\
I_4 &= \{i \in \{1, \ldots, n\} : \mathrm{Im}(\mu_{x,y}(A_i)) < 0\}.
\end{aligned}$$

Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |\mu_{x,y}(A_i)| &\leq \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{Re}(\mu_{x,y}(A_i))| + \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{Im}(\mu_{x,y}(A_i))|\\
&= \sum_{i \in I_1} \mathrm{Re}(\mu_{x,y}(A_i)) - \sum_{i \in I_2} \mathrm{Re}(\mu_{x,y}(A_i))\\
&\quad + \sum_{i \in I_3} \mathrm{Im}(\mu_{x,y}(A_i)) - \sum_{i \in I_4} \mathrm{Im}(\mu_{x,y}(A_i))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \operatorname{Re}\left(\mu_{x,y}\left(\bigcup_{i\in I_1} A_i\right)\right) - \operatorname{Re}\left(\mu_{x,y}\left(\bigcup_{i\in I_2} A_i\right)\right)\\
&\quad + \operatorname{Im}\left(\mu_{x,y}\left(\bigcup_{i\in I_3} A_i\right)\right) - \operatorname{Im}\left(\mu_{x,y}\left(\bigcup_{i\in I_4} A_i\right)\right)\\
&\leq 4||x||\,||y||.
\end{aligned}
$$

Somit ist

$$||\langle Q(\cdot)x, y\rangle|| \leq 4||x||\,||y||.$$

(c) Sei f eine beschränkte Borelfunktion auf X. Nach der Standardabschätzung für Integrale bezüglich komplexen Maßen (etwa [Els09, Bemerkung vor Satz VIII.2.23]) gilt für $x, y \in H$ die Ungleichung

$$\left|\int_X f\, d\langle Q(\cdot)x, y\rangle\right| \leq ||f||_\infty\, ||\langle Q(\cdot)x, y\rangle|| \leq 4||f||_\infty\, ||x||\,||y||.$$

Das zeigt, dass die Sesquilinearform

$$(x, y) \mapsto \int_X f\, d\langle Q(\cdot)x, y\rangle$$

stetig auf $H \times H$ ist. Nach dem Satz von Lax-Milgram gibt es daher einen eindeutig bestimmten Operator $T_f \in \mathcal{L}(H)$ mit

$$\langle T_f x, y\rangle = \int_X f\, d\langle Q(\cdot)x, y\rangle$$

für alle $x, y \in H$. □

Mit diesem Integralbegriff können wir eine weitere hinreichende Bedingung für Subnormalität formulieren:

Satz 1.19. *Sei $S \in \mathcal{L}(H)$ und Q ein positives Operatormaß auf $[0,1]$, sodass*

$$S^{*k} S^k = \int_0^1 t^k\, dQ(t)$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt. Dann ist S subnormal.

Beweis. Seien $x_0, \dots x_n \in H$ beliebig. Durch

$$\mu_{j,k} = \langle Q(\cdot)x_j, x_k\rangle$$

für $j,k = 0,\dots,n$ sind komplexe Maße auf $[0,1]$ definiert. Sei μ ein positives Borelmaß auf $[0,1]$ mit $\mu_{j,k} << \mu$ für alle j und alle k, etwa $\mu = \sum_{j,k=0}^n |\mu_{j,k}|$. Seien ferner $h_{j,k} = \frac{d\mu_{j,k}}{d\mu}$ die Radon-Nikodym-Ableitungen [Els09, Satz VII.2.3]. Für alle Borelmengen $A \in \mathfrak{B}([0,1])$ und $j,k = 0,\dots n$ gilt dann

$$\langle Q(A)x_j, x_k\rangle = \int_0^1 \chi_A \, d\mu_{j,k} = \int_0^1 \chi_A h_{j,k} \, d\mu.$$

Sei $(\lambda_0,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ beliebig. Für alle $A \in \mathfrak{B}([0,1])$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^1 \chi_A \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n h_{j,k}\lambda_j\overline{\lambda_k}\, d\mu &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \langle Q(A)x_j, x_k\rangle \lambda_j \overline{\lambda_k} \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \langle \sqrt{Q(A)}\lambda_j x_j, \sqrt{Q(A)}\lambda_k x_k\rangle \\ &= \left\| \sum_{j=0}^n \sqrt{Q(A)}\lambda_j x_j \right\|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Ein wohlbekannter Satz aus der Maßtheorie [Els09, Satz IV.4.4] impliziert, dass μ-fast überall $\sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n h_{j,k}\lambda_j\overline{\lambda_k} \geq 0$ gilt. Die Menge

$$\begin{aligned} N &= \left\{ t \in [0,1] : \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n h_{j,k}(t)\lambda_j\overline{\lambda_k} < 0 \text{ für ein Tupel } (\lambda_0,\dots,\lambda_n) \in (\mathbb{Q}+i\mathbb{Q})^{n+1} \right\} \\ &= \bigcup_{(\lambda_0,\dots,\lambda_n)\in(\mathbb{Q}+i\mathbb{Q})^{n+1}} \left\{ t \in [0,1] : \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n h_{j,k}(t)\lambda_j\overline{\lambda_k} < 0 \right\}\end{aligned}$$

ist also eine μ-Nullmenge. Andererseits ist für alle $t \in [0,1]$ die Abbildung

$$H_t : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}, (\lambda_0,\dots,\lambda_n) \mapsto \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n h_{j,k}(t)\lambda_j\overline{\lambda_k}$$

stetig. Ist also $t \notin N$, so ist $H_t \geq 0$ auf der dichten Menge $(\mathbb{Q}+i\mathbb{Q})^{n+1}$, also auch auf $\mathbb{C}^{n+1}$. Das zeigt, dass die Matrix $(h_{j,k})_{j,k=0}^n$ positiv semidefinit μ-fast überall ist.

Insbesondere gilt für μ-fast alle t die Ungleichung $\sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n h_{j,k}(t)t^j t^k \geq 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_0^1 \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n h_{j,k}(t)t^j t^k \, d\mu(t) &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \int_0^1 t^{j+k} \, d\mu_{j,k}(t) \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \int_0^1 t^{j+k} \, d\langle Q(t)x_j, x_k\rangle \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \langle S^{*j+k} S^{j+k} x_j, x_k\rangle \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \langle S^{j+k} x_j, S^{j+k} x_k\rangle. \end{aligned}$$

Nach Satz 1.16 ist S daher subnormal. □

Das Ziel des restlichen Abschnittes ist ein Subnormalitätskriterium nur in Termen der C^*-Algebrastruktur von $\mathcal{L}(H)$. Wir benötigen zunächst noch eine Definition.

Definition 1.20. Sei $f \in C([0,1])$. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sei $B_n(f)$ das n-te *Bernstein-polynom* von f, welches durch

$$B_n(f)(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f\left(\frac{i}{n}\right) t^i (1-t)^{n-i}$$

für $t \in [0,1]$ definiert ist.

Bekanntlich konvergiert für stetiges f die Folge $(B_n(f))_{n=0}^\infty$ gleichmäßig gegen f. Für Polynome gilt eine stärkere Aussage:

Lemma 1.21. *Sei p ein Polynom vom Grad $\leq d$. Dann ist auch $B_n(p)$ ein Polynom vom Grad $\leq d$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und die Koeffizienten von $B_n(p)$ konvergieren für $n \to \infty$ gegen die von p.*

Beweis. Siehe [Lor53, Kapitel 1.4]. □

Der folgende Satz ist der entscheidende Schritt auf dem Weg zum gesuchten Kriterium für Subnormalität.

Satz 1.22. *Sei $S \in \mathcal{L}(H)$ ein Operator mit*

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} S^{*j} S^j \geq 0$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gibt es ein positives Operatormaß Q auf $[0,1]$, sodass

$$S^{*k}S^k = \int_0^1 t^k \, dQ(t)$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Beweis. Wir versuchen, den Beweis des Spektralsatzes für selbstadjungierte Operatoren zu imitieren. Dazu konstruieren wir zunächst eine lineare Abbildung $\Phi : C([0,1]) \to \mathcal{L}(H)$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) Φ ist stetig mit $||\Phi|| \leq 2$.

(b) $\Phi(\mathrm{id}^k) = S^{*k}S^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

(c) Φ ist positiv, das heißt, für $f \in C([0,1])$ mit $f \geq 0$ ist $\Phi(f) \geq 0$.

Ist $p = \sum_{j=0}^n a_j t^j$ ein Polynom, so sei

$$\Phi(p) = \sum_{j=0}^n a_j S^{*j} S^j.$$

Das definiert eine lineare Abbildung auf dem Raum der Polynome. Für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned}
\Phi(t^l(1-t)^k) &= \Phi\left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j}(-1)^j t^{j+l}\right) \\
&= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j}(-1)^j S^{*j+l} S^{j+l} \\
&= S^{*l} \underbrace{\left(\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} S^{*j} S^j\right)}_{\geq 0} S^l \geq 0.
\end{aligned}$$

Ist also $f \in C([0,1])$ und $B_n(f)$ das n-te Bernsteinpolynom von f, so gilt für alle $x \in H$ die Ungleichungskette

$$\begin{aligned}
|\langle \Phi(B_n(f))x, x\rangle| &= \left|\left\langle \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f\left(\frac{i}{n}\right) \Phi(t^i(1-t)^{n-i})x, x\right\rangle\right| \\
&\leq \sum_{i=0}^n \left|f\left(\frac{i}{n}\right)\right| \binom{n}{i} |\langle \Phi(t^i(1-t)^{n-i})x, x\rangle| \\
&\leq ||f||_\infty \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \langle \Phi(t^i(1-t)^{n-i})x, x\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= ||f||_\infty \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left\langle \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} (-1)^j S^{*j+i} S^{j+i} x, x \right\rangle \\
&= ||f||_\infty \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} (-1)^j ||S^{j+i} x||^2 \\
&= ||f||_\infty \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=i}^{n} \underbrace{\binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i}}_{=\binom{n}{k}\binom{k}{i}} (-1)^{k-i} ||S^k x||^2 \\
&= ||f||_\infty \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} ||S^k x||^2 \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \\
&= ||f||_\infty ||x||^2,
\end{aligned}
$$

denn für $k \geq 1$ ist $\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} = 0$. Ist f zusätzlich reellwertig, so ist $\Phi(B_n(f))$ selbstadjungiert und es folgt

$$||\Phi(B_n(f))|| = \sup_{||x|| \leq 1} |\langle \Phi(B_n(f))x, x \rangle| \leq ||f||_\infty.$$

Für beliebiges $f \in C([0,1])$ liefert eine Zerlegung in Real- und Imaginärteil die Ungleichung

$$||\Phi(B_n(f))|| \leq 2||f||_\infty.$$

Ist nun f insbesondere ein Polynom vom Grad $\leq d$, so ist $B_n(f)$ nach Lemma 1.21 ebenfalls ein Polynom vom Grad $\leq d$, dessen Koeffizienten gegen die von f konvergieren. Deshalb ist

$$\lim_{n \to \infty} \Phi(B_n(f)) = \Phi(f) \in \mathcal{L}(H)$$

und somit gilt auch $||\Phi(f)|| \leq 2||f||_\infty$. Das zeigt, dass die lineare Abbildung Φ auf dem Raum der Polynome stetig mit $||\Phi|| \leq 2$ ist, sie besitzt also eine eindeutige stetige lineare Fortsetzung auf $C([0,1])$, die wieder Φ heiße. Diese Abbildung erfüllt offensichtlich die Eigenschaften (a) und (b), es bleibt die Positivität zu zeigen. Sei dazu $f \in C([0,1])$ mit $f \geq 0$. Dann gilt

$$\Phi(f) = \lim_{n \to \infty} \Phi(B_n(f)) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{i} f\left(\frac{i}{n}\right)}_{\geq 0} \underbrace{\Phi(t^i(1-t)^{n-i})}_{\geq 0} \geq 0,$$

weil die positiven Operatoren einen abgeschlossenen, konvexen Kegel in $\mathcal{L}(H)$ bilden.

Seien nun $x, y \in H$. Dann ist die Abbildung

$$\varphi_{x,y} : C([0,1]) \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto \langle \Phi(f)x, y \rangle$$

ein stetiges lineares Funktional auf $C([0,1])$. Nach dem Darstellungssatz von Riesz [Els09, Satz VIII.2.26] gibt es genau ein reguläres komplexes Borelmaß $\mu_{x,y}$ auf $[0,1]$ mit

$$\langle \Phi(f)x, y \rangle = \varphi_{x,y}(f) = \int_0^1 f \, d\mu_{x,y} \tag{1.3}$$

für alle $f \in C([0,1])$. Es gilt dann $||\mu_{x,y}|| = ||\varphi_{x,y}|| \leq 2||x|| \, ||y||$. Weiterhin ist $\varphi_{x,x}$ wegen der Positivität von Φ ein positives lineares Funktional, also ist $\mu_{x,x}$ ein reguläres positives Borelmaß. Die Eindeutigkeitsaussage im Rieszschen Darstellungssatz zeigt, dass die Abbildung $(x, y) \mapsto \mu_{x,y}$ sesquilinear ist. Ist nun $A \in \mathfrak{B}([0,1])$ eine Borelmenge, so ist

$$(x, y) \mapsto \mu_{x,y}(A)$$

eine Sesquilinearform auf $H \times H$, die wegen

$$|\mu_{x,y}(A)| \leq ||\mu_{x,y}|| \leq 2||x|| \, ||y||$$

stetig ist. Nach dem Satz von Lax-Milgram gibt es also genau einen stetigen linearen Operator $Q(A)$ mit

$$\langle Q(A)x, y \rangle = \mu_{x,y}(\chi_A) = \int_0^1 \chi_A \, d\mu_{x,y} \quad \text{für alle } x, y \in H.$$

Wir zeigen, dass die hierdurch definierte Mengenfunktion Q ein positives Operatormaß ist. Weil die $\mu_{x,x}$ positive Maße sind, ist $Q(A)$ ein positiver Operator. Klarerweise ist $\langle Q(\cdot)x, x \rangle = \mu_{x,x}$ ein reguläres Borelmaß. Für $x, y \in H$ gilt nach Gleichung (1.3) ferner

$$\langle Q([0,1])x, y \rangle = \int_0^1 1 \, d\mu_{x,y} = \langle \Phi(1)x, y \rangle = \langle x, y \rangle,$$

also $Q([0,1]) = 1$, sodass Q in der Tat ein positives Operatormaß ist.

Ist $f \in C([0,1])$ beliebig, so gilt nach Definition des Integrals über positive Operatormaße für $x, y \in H$ die Gleichung

$$\left\langle \left(\int_0^1 f \, dQ \right) x, y \right\rangle = \int_0^1 f \, d\langle Q(\cdot)x, y \rangle = \int_0^1 f \, d\mu_{x,y} = \langle \Phi(f)x, y \rangle.$$

Somit ist $\int_0^1 f\,dQ = \Phi(f)$. Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ folgt insbesondere

$$\int\limits_0^1 t^k\,dQ(t) = \Phi(\mathrm{id}^k) = S^{*k}S^k.$$

□

Zusammen erhalten wir schließlich ein Kriterium von Agler [Agl85], das die gesuchte Charakterisierung von Subnormalität nur in Termen der C^*-Algebrastruktur von $\mathcal{L}(H)$ gibt. In der Tat kann es dazu verwendet werden, Subnormalität in allgemeinen C^*-Algebren zu definieren.

Korollar 1.23. *Sei $S \in \mathcal{L}(H)$ eine Kontraktion. Dann ist S genau dann subnormal, wenn*

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} S^{*j}S^j \geq 0 \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0 \tag{1.4}$$

gilt.

Beweis. Aus den Sätzen 1.19 und 1.22 folgt unmittelbar, dass die Bedingung (1.4) hinreichend für die Subnormalität von S ist.

Sei umgekehrt S eine subnormale Kontraktion mit minimaler normaler Fortsetzung N. Nach Korollar 1.15 ist N eine Kontraktion, also $1 - N^*N \geq 0$. Wegen der Normalität von N gilt somit für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die Ungleichung

$$0 \leq (1 - N^*N)^k = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} N^{*j}N^j.$$

Für alle $x \in H$ folgt daraus

$$\left\langle \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} S^{*j}S^j x, x \right\rangle = \left\langle \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} N^{*j}N^j x, x \right\rangle \geq 0.$$

Mithin ist Bedingung (1.4) auch notwendig für die Subnormalität von S. □

1.3 Koszul-Komplex und mehrdimensionales Spektrum

Im Folgenden betrachten wir nicht nur einzelne Operatoren, sondern für ein $n \in \mathbb{N}$ auch n-Tupel $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{L}(H)^n$. Meistens werden wir zusätzlich annehmen, dass die Operatoren T_i kommutieren, das heißt, dass

$$T_iT_j = T_jT_i \qquad \text{für } i, j = 1, \ldots, n$$

gilt. Ein solches Operatortupel T nennen wir auch vertauschend.

Ein einzelner Operator $T \in \mathcal{L}(H)$ ist nach dem Satz von der Stetigkeit der Inversen genau dann in $\mathcal{L}(H)$ invertierbar, wenn er injektiv und surjektiv ist, also genau dann, wenn der Komplex

$$0 \to H \xrightarrow{T} H \to 0$$

exakt ist. Mit dieser Charakterisierung hat Joseph Taylor [Tay70] den Begriff der Invertierbarkeit auf Tupel vertauschender Operatoren verallgemeinert und damit ein gemeinsames Spektrum definiert. Der geeignete Komplex dafür ist der sogenannte Koszul-Komplex des Operatortupels. Wir folgen der Darstellung in [EP96] und definieren den Koszul-Komplex zunächst allgemein für Tupel vertauschender Endomorphismen auf Moduln.

Sei K ein kommutativer Ring mit 1, $n \in \mathbb{N}$ und $s = (s_1, \ldots, s_n)$ die kanonische Basis des freien K-Moduls K^n. Sei ferner

$$\Lambda(s) = \Lambda(K^n) = \bigoplus_{p=0}^{n} \Lambda^p(K^n)$$

die äußere Algebra von K^n. Für einen weiteren K-Modul X sei

$$\begin{aligned} \Lambda(s, X) &= X \otimes_K \Lambda(s) \quad \text{und} \\ \Lambda^p(s, X) &= X \otimes_K \Lambda^p(s). \end{aligned}$$

Die Elemente von $\Lambda^p(s, X)$ nennen wir Formen vom Grad p in den Unbestimmten $s_1, \ldots, s_n$ mit Koeffizienten in X. Jede solche Form hat eine eindeutige Darstellung

$$x = \sum_{|I|=p} x_I s_I = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} x_{i_1 \ldots i_p} s_{i_1} \wedge \ldots \wedge s_{i_p},$$

wobei wir die $\otimes$-Zeichen weggelassen haben.

Sei nun $a = (a_1, \ldots, a_n)$ ein vertauschendes Tupel von K-Modul-Endomorphismen auf X. Der Koketten-Koszul-Komplex $K^\bullet(a, X)$ von a besteht aus den Räumen $K^p(a, X) = \Lambda^p(s, X)$ und den Korandabbildungen

$$\delta_a^p : K^p(a, X) \to K^{p+1}(a, X), \quad \delta_a^p(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i s_i \right) \wedge x,$$

wobei $\wedge$ das äußere Produkt zwischen $\Lambda(s, \mathrm{End}_K(X))$ und $\Lambda(s, X)$ bezeichne. Es gilt also

$$\begin{aligned}
&\delta_a^p\left(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_p\le n} x_{i_1\ldots i_p} s_{i_1}\wedge\ldots\wedge s_{i_p}\right)\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_p\le n} a_i x_{i_1\ldots i_p} s_i\wedge s_{i_1}\wedge\ldots\wedge s_{i_p} \qquad (1.5)\\
&=\sum_{1\le j_1<\ldots<j_{p+1}\le n}\left(\sum_{\rho=1}^{p+1}(-1)^{\rho-1} a_{j_\rho} x_{j_1\ldots\widehat{j_\rho}\ldots j_{p+1}}\right) s_{j_1}\wedge\ldots\wedge s_{j_{p+1}}.
\end{aligned}$$

Man rechnet unmittelbar unter Verwendung der Kommutativität des Tupels a nach, dass $\delta_a^p\delta_a^{p-1}=0$ für alle p gilt. Der Koszul-Komplex ist also in der Tat ein Komplex. Die zugehörigen Kohomologiegruppen werden mit

$$H^p(a,X)=\ker(\delta_a^p)/\operatorname{ran}(\delta_a^{p-1})$$

bezeichnet.

Bemerkung 1.24. Mit der Identifikation $K^0(a,X)\cong X$ und $K^1(a,X)\cong X^n$ ist

$$\delta_a^0(x)=\begin{pmatrix}a_1x\\ \vdots\\ a_nx\end{pmatrix}\qquad \text{für } x\in X.$$

Es folgt

$$H^0(a,X)=\ker(\delta_a^0)\cong\bigcap_{i=1}^{n}\ker a_i.$$

Ebenso können wir die letzte Kohomologiegruppe des Koszul-Komplexes bestimmen. Vermöge $K^{n-1}(a,X)\cong X^n$ und $K^n(a,X)\cong X$ ist die Abbildung δ_a^{n-1} gegeben durch

$$\delta_a^{n-1}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\pm a_ix_i\qquad \text{für } x_1,\ldots,x_n\in X.$$

Wegen $\delta_a^n=0$ folgt

$$H^n(a,X)=K^n(a,X)/\operatorname{ran}(\delta_a^{n-1})\cong X/\sum_{i=1}^{n}\operatorname{ran}a_i.$$

Sei nun wieder $K = \mathbb{C}$, $X = H$ ein komplexer Hilbertraum und $a = T \in \mathcal{L}(H)^n$ ein vertauschendes Tupel von Operatoren auf H. Dann werden die Räume $K^p(T, H)$ vermöge der Identifikation

$$K^p(T, H) = \Lambda^p(s, H) = H \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda^p(s) \cong H^{\binom{n}{p}}$$

zu Hilberträumen. Das gleiche gilt für $\Lambda^p(s) \cong \mathbb{C}^{\binom{n}{p}}$. Das Skalarprodukt homogener Elemente $x \otimes \omega$ und $y \otimes \eta$ in $K^p(T, H) = H \otimes \Lambda^p(s)$ ist dann gegeben durch

$$\langle x \otimes \omega, y \otimes \eta \rangle = \langle x, y \rangle \langle \omega, \eta \rangle.$$

Ferner zeigt die Darstellung in Gleichung (1.5), dass die δ_T^p stetige lineare Operatoren sind.

Mit dem Koszul-Komplex können wir nun definieren, wann ein vertauschendes Tupel von Operatoren invertierbar oder Fredholm ist.

Definition 1.25. Ein vertauschendes Tupel $T \in \mathcal{L}(H)^n$ heißt *invertierbar*, falls alle Kohomologiegruppen $H^p(T, H)$ trivial sind, das heißt, falls $K^\bullet(T, H)$ exakt ist. T heißt *Fredholm*, falls alle Kohomologiegruppen $H^p(T, H)$ endlichdimensional sind.

Mit diesem Invertierbarkeitsbegriff können wir das Taylorspektrum und das wesentliche Spektrum eines vertauschenden Operatortupels definieren.

Definition 1.26. Sei $T \in \mathcal{L}(H)^n$ ein vertauschendes Tupel von Operatoren. Die Menge

$$\sigma(T) = \sigma(T, H) = \{\lambda \in \mathbb{C}^n : \lambda - T \text{ ist nicht invertierbar}\}$$

heißt *Taylorspektrum* von T, die Menge

$$\sigma_e(T) = \sigma_e(T, H) = \{\lambda \in \mathbb{C}^n : \lambda - T \text{ ist nicht Fredholm}\}$$

heißt *wesentliches Spektrum* von T.

Die Operatoren δ_T^p besitzen noch eine andere Darstellung. Für $i = 1, \ldots, n$ sei dazu

$$E_i^p : \Lambda^p(s) \to \Lambda^{p+1}(s), \quad \omega \mapsto s_i \wedge \omega.$$

Dann ist

$$\delta_T^p = \sum_{i=1}^n T_i \otimes E_i^p.$$

Diese Darstellung eignet sich besonders zur Bestimmung des zu δ_T^p adjungierten Operators. Man rechnet nämlich direkt nach, dass

$$\delta_T^{p\,*} = \sum_{i=1}^n T_i^* \otimes E_i^{p*}$$

gilt. Die linearen Abbildungen E_i^p erfüllen gewisse Vertauschungsrelationen:

Lemma 1.27. *Für alle i, j und p gelten die Relationen*

$$E_i^p E_j^{p-1} + E_j^p E_i^{p-1} = 0 \qquad \text{und}$$
$$E_i^{p-1} E_j^{p-1*} + E_j^{p*} E_i^p = \delta_{ij} 1.$$

Beweis. Die erste Relation folgt unmittelbar aus der Antisymmetrie des $\wedge$-Produkts. Es bleibt die zweite Relation zu zeigen. Für alle i und alle p sei dazu

$$M_i^p = \left\{ \sum_{|I|=p} \lambda_I s_I \in \Lambda^p(s) : \lambda_I = 0 \text{ falls } i \in I \right\}$$

der Raum aller p-Formen, in denen die Unbestimmte s_i nicht vorkommt. Dann gilt für $x = \sum_{|I|=p} \lambda_I s_I \in M_i^p$ die Gleichung

$$||E_i^p x||^2 = \left|\left| \sum_{|I|=p} \lambda_I s_i \wedge s_I \right|\right|^2 = \sum_{|I|=p} ||\lambda_I s_i \wedge s_I||^2 = \sum_{|I|=p} ||\lambda_I s_I||^2 = ||x||^2.$$

Offensichtlich ist $E_i^p x = 0$ für $x \in M_i^{p\perp}$, also ist E_i^p eine partielle Isometrie mit Anfangsraum M_i^p und es ist $\ker(E_i^p) = M_i^{p\perp} = \operatorname{ran}(E_i^{p-1})$. Nach Lemma 1.4 ist somit $E_i^{p-1} E_i^{p-1*}$ die Orthogonalprojektion auf $\ker(E_i^p)$ und $E_i^{p*} E_i^p$ die Orthogonalprojektion auf $\operatorname{ran}(E_i^{p*}) = \ker(E_i^p)^\perp$. Es folgt

$$E_i^{p-1} E_i^{p-1*} + E_i^{p*} E_i^p = 1.$$

Sei nun $j \neq i$ und $\omega \in \Lambda^p(s)$ beliebig. Die Form ω hat eine Darstellung $\omega = \omega' + s_j \wedge \omega''$ mit $\omega' \in \ker(E_j^p)^\perp$ und $\omega'' \in \ker(E_j^{p-1})^\perp$, das heißt, in ω' und ω'' kommt die Unbestimmte s_j nicht vor. Dann gilt

$$E_j^{p-1} E_j^{p-1*} \omega = s_j \wedge \omega'' = E_j^{p-1} \omega''.$$

Weil E_j^{p-1} auf $\ker(E_j^{p-1})^\perp$ injektiv ist, folgt daher

$$E_j^{p-1*} \omega = \omega''.$$

Damit erhalten wir

$$E_i^{p-1} E_j^{p-1*} \omega = s_i \wedge \omega''$$

und

$$E_j^{p*} E_i^p \omega = E_j^{p*}(s_i \wedge \omega' + s_i \wedge s_j \wedge \omega'') = E_j^{p*}(-s_j \wedge s_i \wedge \omega'') = -s_i \wedge \omega'',$$

denn in $s_i \wedge \omega'$ und in $s_i \wedge \omega''$ kommt die Unbestimmte s_j nicht vor. Somit ist

$$(E_i^{p-1} E_j^{p-1*} + E_j^{p*} E_i^p)\omega = 0.$$

□

Wir benötigen noch ein elementares Lemma.

Lemma 1.28. *Sei $T \in \mathcal{L}(H,K)$. Dann ist $\ker(T^*T) = \ker(T)$. Ist $\operatorname{ran}(T)$ oder äquivalent $\operatorname{ran}(T^*)$ abgeschlossen, so gilt auch $\operatorname{ran}(T^*T) = \operatorname{ran}(T^*)$.*

Beweis. Offensichtlich ist $\ker(T) \subset \ker(T^*T)$. Sei umgekehrt $x \in \ker(T^*T)$. Dann ist $Tx \in \ker(T^*) = \operatorname{ran}(T)^\perp$, also $Tx = 0$ und somit $x \in \ker(T)$.

Die Inklusion $\operatorname{ran}(T^*T) \subset \operatorname{ran}(T^*)$ ist wieder trivial. Ist $z \in \operatorname{ran}(T^*)$ und $\operatorname{ran}(T)$ abgeschlossen, so gibt es ein $y \in \ker(T^*)^\perp = \operatorname{ran}(T)$ mit $T^*y = z$. Sei $x \in H$ mit $Tx = y$. Dann ist $T^*Tx = z$. □

Im Folgenden schreiben wir auch δ^p an Stelle von δ^p_T, falls klar ist, um welches Operatortupel es sich handelt. Indem wir auch die adjungierten Operatoren zu den δ^p betrachten, erhalten wir nützliche Charakterisierungen für die Invertierbarkeit und die Fredholmeigenschaft eines vertauschenden Tupels von Operatoren.

Lemma 1.29. *Sei $T \in \mathcal{L}(H)^n$ ein vertauschendes Tupel. Der Operator D^p sei definiert durch*

$$D^p = D^p_T : K^p(T,H) \to K^p(T,H), \quad D^p = \delta^{p-1}\delta^{p-1*} + \delta^{p*}\delta^p.$$

Dann gilt:

(a) (i) *Ist $H^p(T,H) = 0$, so ist D^p injektiv und hat dichtes Bild. Ist zusätzlich $\operatorname{ran}(\delta^p)$ oder äquivalent $\operatorname{ran}(\delta^{p*})$ abgeschlossen, so ist D^p invertierbar.*

(ii) *Ist D^p invertierbar, so ist $H^p(T,H) = 0$.*

Insbesondere ist T genau dann invertierbar, wenn D^p für alle p invertierbar ist.

(b) (i) *Ist $\dim(H^p(T,H)) < \infty$ und $\operatorname{ran}(\delta^p)$ abgeschlossen, so ist D^p Fredholm.*

(ii) *Ist D^p Fredholm, so ist $\dim(H^p(T,H)) < \infty$.*

Insbesondere ist T genau dann Fredholm, wenn D^p für alle p Fredholm ist.

Beweis. Die orthogonale Zerlegung

$$K^p(T,H) = H_1 \oplus H_2$$

mit $H_1 = \ker \delta^p$ und $H_2 = \ker(\delta^p)^\perp = \overline{\operatorname{ran} \delta^{p*}} \subset \ker \delta^{p-1*}$ reduziert den Operator D^p. Sei zunächst $\dim H^p(T,H) < \infty$. Dann hat der Operator

$$\delta^{p-1} : K^{p-1}(T,H) \to \ker(\delta^p)$$

endlich codimensionales Bild, also ist $\operatorname{ran}(\delta^{p-1})$ abgeschlossen. Unter Verwendung von Lemma 1.28 erhalten wir

$$\begin{aligned}\ker(D^p\big|_{H_1}) &= \ker(\delta^{p-1}\delta^{p-1*}\big|_{H_1}) = H_1 \cap \ker(\delta^{p-1}\delta^{p-1*})\\ &= H_1 \cap \ker(\delta^{p-1*}) = \ker(\delta^p) \cap \operatorname{ran}(\delta^{p-1})^\perp\\ &\cong \ker(\delta^p)/\operatorname{ran}(\delta^{p-1})\end{aligned}$$

sowie

$$\operatorname{ran}(D^p\big|_{H_1}) = \operatorname{ran}(\delta^{p-1}\delta^{p-1*}) = \operatorname{ran}(\delta^{p-1}),$$

also

$$H_1/\operatorname{ran}(D^p\big|_{H_1}) = \ker(\delta^p)/\operatorname{ran}(\delta^{p-1}).$$

Somit ist $D^p\big|_{H_1}$ Fredholm und im Fall $H^p(T,H) = 0$ sogar invertierbar. Auf H_2 gilt in jedem Fall

$$\begin{aligned}\ker(D^p\big|_{H_2}) &= \ker(\delta^{p*}\delta^p\big|_{H_2}) = H_2 \cap \ker(\delta^{p*}\delta^p)\\ &= H_2 \cap \ker(\delta^p) = 0.\end{aligned}$$

Wenn also $H^p(T,H) = 0$ ist, dann ist D^p injektiv und hat wegen $D^{p*} = D^p$ auch dichtes Bild. Sei nun zusätzlich $\operatorname{ran}(\delta^p)$ abgeschlossen. Wiederum mit Lemma 1.28 erhalten wir

$$\operatorname{ran}(D^p\big|_{H_2}) = \operatorname{ran}(\delta^{p*}\delta^p) = \operatorname{ran}(\delta^{p*}) = H_2,$$

also ist $D^p\big|_{H_2}$ invertierbar. Zusammen mit dem Resultat für H_1 sehen wir, dass D^p im Fall $H^p(T,H) = 0$ invertierbar und im Fall $\dim(H^p(T,H)) < \infty$ Fredholm ist. Damit sind (a)(i) und (b)(i) bewiesen.

Zum Nachweis von (a)(ii) bemerke man, dass mit D^p auch $D^p\big|_{H_1}$ invertierbar ist. Inbesondere ist $D^p\big|_{H_1} = \delta^{p-1}\delta^{p-1*}\big|_{H_1}$ surjektiv, also gilt $\ker(\delta^p) \subset \operatorname{ran}(\delta^{p-1})$. Die umgekehrte Inklusion ist klar.

Ebenso ist mit D^p auch $D^p\big|_{H_1}$ Fredholm, es gilt somit

$$\dim(\ker(\delta^p)/\operatorname{ran}(\delta^{p-1}\delta^{p-1*})) = \dim(H_1/\operatorname{ran}(D^p\big|_{H_1})) < \infty.$$

Wegen $\operatorname{ran}(\delta^{p-1}\delta^{p-1*}) \subset \operatorname{ran}(\delta^{p-1})$ folgt

$$\dim(\ker(\delta^p)/\operatorname{ran}(\delta^{p-1})) < \infty.$$

Das zeigt (b)(ii), womit das Lemma bewiesen ist. □

Das folgende Lemma stellt einen Zusammenhang zwischen dem Koszul-Komplex von $T = (T_1, \dots, T_n)$ und dem des adjungierten Tupels $T^* = (T_1^*, \dots, T_n^*)$ her.

Lemma 1.30. *Sei $T \in \mathcal{L}(H)^n$ ein vertauschendes Tupel von Operatoren. Wenn $K^\bullet(T, H)$ exakt an der Stelle $K^p(T, H)$ ist und δ_T^p abgeschlossenes Bild hat, dann ist $K^\bullet(T^*, H)$ exakt an der Stelle $n - p$.*

Beweis. Für alle k sei $f^k : \Lambda^k(s) \to \Lambda^{n-k}(s)$ der eindeutig bestimmte lineare Isomorphismus mit

$$f^k(s_{i_1} \wedge \dots \wedge s_{i_k}) = s_{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge s_{i_n}$$

für alle Teilmengen $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$, wobei $i_{k+1}, \dots, i_n$ so gewählt sind, dass $(i_1, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots, i_n)$ eine gerade Permutation von $(1, \dots, n)$ ist. Die Abbildung f^k ist wohldefiniert, weil die beteiligten Formen invariant unter geraden Permutationen der s_i sind. Ferner sei $c^k : \Lambda^k(s) \to \Lambda^k(s)$ definiert durch

$$\sum_{i_1 < \dots < i_k} \lambda_{i_1 \dots i_k} s_{i_1} \wedge \dots \wedge s_{i_k} \mapsto \sum_{i_1 < \dots < i_k} \overline{\lambda_{i_1 \dots i_k}} s_{i_1} \wedge \dots \wedge s_{i_k}.$$

Dann ist c^k ein konjugiert linearer Isomorphismus. Für alle $\omega, \eta \in \Lambda^k(s)$ gilt

$$\eta \wedge c^{n-k} f^k(\omega) = \langle \eta, \omega \rangle s_1 \wedge \dots \wedge s_n.$$

In der Tat, sind ω und η Elemente der kanonischen Basis von $\Lambda^k(s)$, so folgt das direkt aus der Definition. Der allgemeine Fall ergibt sich dann aus Linearitätsgründen. Für alle $\omega \in \Lambda^k(s)$ und $\eta \in \Lambda^{k-1}(s)$ erhalten wir damit

$$\begin{aligned}
\eta \wedge (c^{n-(k-1)} f^{k-1}(E_i^{k-1^*} \omega)) &= \langle \eta, E_i^{k-1^*} \omega \rangle s_1 \wedge \dots \wedge s_n \\
&= \langle E_i^{k-1} \eta, \omega \rangle s_1 \wedge \dots \wedge s_n \\
&= E_i^{k-1} \eta \wedge c^{n-k} f^k(\omega) \\
&= s_i \wedge \eta \wedge c^{n-k} f^k(\omega) \\
&= (-1)^{k-1} \eta \wedge E_i^{n-k} c^{n-k} f^k(\omega) \\
&= (-1)^{k-1} \eta \wedge c^{n-(k-1)} E_i^{n-k} f^k(\omega),
\end{aligned}$$

also $f^{k-1}(E_i^{k-1^*} \omega) = (-1)^{k-1} E_i^{n-k} f^k(\omega)$. Sei

$$h^k : \Lambda^k(s, H) \to \Lambda^{n-k}(s, H), \quad h^k = 1 \otimes f^k.$$

Dann ist h^k ein linearer Isomorphismus und für alle $x \in H$ und alle Multiindizes $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ gilt

$$\begin{aligned}
h^{k-1} \delta_T^{k-1^*} x s_I &= h^{k-1} \left(\sum_{i=1}^n T_i^* x E_i^{k-1^*} s_I \right) \\
&= \sum_{i=1}^n T_i^* x (-1)^{k-1} E_i^{n-k} (f^k(s_I)) \\
&= (-1)^{k-1} \delta_{T^*}^{n-k} (h^k(x s_I)).
\end{aligned}$$

Daraus folgt für alle k die Relation

$$h^{k-1}\delta_T^{k-1*} = (-1)^{k-1}\delta_{T^*}^{n-k}h^k. \tag{1.6}$$

Ist nun $\ker(\delta_T^p) = \operatorname{ran}(\delta_T^{p-1})$ und $\operatorname{ran}(\delta_T^p)$ abgeschlossen, so ist auch $\operatorname{ran}(\delta_T^{p*})$ abgeschlossen und wir erhalten

$$\ker(\delta_T^{p-1*}) = \operatorname{ran}(\delta_T^{p-1})^\perp = \ker(\delta_T^p)^\perp = \operatorname{ran}(\delta_T^{p*}).$$

Sei $x \in \ker(\delta_{T^*}^{n-p})$. Nach Gleichung (1.6) mit $k = p$ ist dann

$$(h^p)^{-1}x \in \ker(\delta_T^{p-1*}) = \operatorname{ran}(\delta_T^{p*}),$$

also existiert ein $y \in \Lambda^{p+1}(s, H)$ mit $(h^p)^{-1}x = \delta_T^{p*}y$ und somit $x = h^p\delta_T^{p*}y$. Gleichung (1.6) mit $k = p+1$ liefert dann $x = (-1)^p\delta_{T^*}^{n-(p+1)}h^{p+1}y$. Daraus folgt

$$\ker(\delta_{T^*}^{n-p}) \subset \operatorname{ran}(\delta_{T^*}^{n-(p+1)}),$$

die andere Inklusion ist trivial. □

Ähnlich wie für einen einzelnen Operator kann man wesentliche Normalität auch für ein vertauschendes Tupel von Operatoren definieren.

Definition 1.31. Ein vertauschendes Tupel $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{L}(H)^n$ heißt *wesentlich normal*, wenn $T_i^*T_i - T_iT_i^* \in \mathcal{K}(H)$ ist für $i = 1, \ldots, n$.

Bemerkung 1.32. Das Tupel T ist genau dann wesentlich normal, wenn die Restklassen $[T_1], \ldots, [T_n] \in \mathcal{C}(H) = \mathcal{L}(H)/\mathcal{K}(H)$ in der Calkin-Algebra normal sind. Wegen $T_iT_j = T_jT_i$ folgt dann aus dem Satz von Putnam-Fuglede [Rud91, Theorem 12.16], dass sogar $[T_i]^*[T_j] = [T_j][T_i]^*$ für $i, j = 1, \ldots, n$ gilt. Mithin ist die von $[1], [T_1], \ldots, [T_n]$ erzeugte C^*-Unteralgebra von $\mathcal{C}(H)$ kommutativ.

Im Fall eines wesentlich normalen Tupels gibt es ein besonders einfaches Kriterium um zu entscheiden, ob das Tupel Fredholm ist.

Lemma 1.33. *Ist $T \in \mathcal{L}(H)^n$ ein wesentlich normales Operatortupel, so ist T genau dann Fredholm, wenn der Operator $\sum_{i=1}^n T_iT_i^*$ Fredholm ist.*

Beweis. Ist $A \in \mathcal{K}(H)$ ein kompakter Operator und $C \in \mathcal{L}(\Lambda^p(s))$ beliebig, so ist der Operator $A \otimes C \in \mathcal{L}(H \otimes \Lambda^p(s))$ wegen $\dim(\Lambda^p(s)) < \infty$ ebenfalls kompakt. Sind also $A, B \in \mathcal{L}(H)$ Operatoren mit $[A] = [B] \in \mathcal{C}(H)$ und ist $C \in \mathcal{L}(\Lambda^p(s))$ beliebig, so gilt bereits

$$[A \otimes C] = [B \otimes C] \in \mathcal{C}(H \otimes \Lambda^p(s)) = \mathcal{C}(K^p(T, H)).$$

In der Calkin-Algebra $\mathcal{C}(K^p(T,H))$ erhalten damit für alle p die Identität

$$\begin{aligned}
[\delta_T^{p-1}\delta_T^{p-1*} + \delta_T^{p*}\delta_T^{p}] &= \left(\sum_{i=1}^{n}[T_i \otimes E_i^{p-1}]\right)\left(\sum_{i=1}^{n}[T_i^* \otimes E_i^{p-1*}]\right) \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^{n}[T_i^* \otimes E_i^{p*}]\right)\left(\sum_{i=1}^{n}[T_i \otimes E_i^{p}]\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[(T_i \otimes E_i^{p-1})(T_j^* \otimes E_j^{p-1*})] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[(T_j^* \otimes E_j^{p*})(T_i \otimes E_i^{p})] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}([T_iT_j^* \otimes E_i^{p-1}E_j^{p-1*}] + [T_j^*T_i \otimes E_j^{p*}E_i^{p}]) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[T_iT_j^* \otimes (E_i^{p-1}E_j^{p-1*} + E_j^{p*}E_i^{p})] \qquad ([T_iT_j^*] = [T_j^*T_i]) \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n} T_iT_i^* \otimes 1\right] \in \mathcal{C}(H \otimes \Lambda^p(s)),
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus Lemma 1.27 folgt. Weil ein Operator genau dann Fredholm ist, wenn seine Restklasse in der Calkin-Algebra invertierbar ist, folgt die Behauptung aus Lemma 1.29 (b). □

2 Familien

2.1 Definition, Beispiele und erste Eigenschaften

Die folgende Definition einer Familie im Sinne von Agler [Agl85] ist der zentrale Begriff dieser Arbeit.

Definition 2.1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Familie ist eine Klasse $\mathcal{F}$ von n-Tupeln $T \in \mathcal{L}(H)^n$ mit folgenden Eigenschaften:

(F1) $\mathcal{F}$ ist beschränkt, das heißt, es gibt ein $c > 0$, sodass für alle $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{F}$ die Ungleichung $||T_i|| < c$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt.

(F2) $\mathcal{F}$ ist stabil unter Einschränkung auf invariante Teilräume, das heißt, für $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{F}$ und jeden abgeschlossenen Untervektorraum $M \subset H$ mit $T_i M \subset M$ für $i = 1, \ldots, n$ ist auch $T\big|_M = (T_1\big|_M, \ldots, T_n\big|_M) \in \mathcal{F}$.

(F3) $\mathcal{F}$ ist stabil unter beliebigen direkten Summen, das heißt, für eine Familie $(T^{(\lambda)})_{\lambda \in \Lambda}$ von Tupeln $T^{(\lambda)} = (T_1^{(\lambda)}, \ldots, T_n^{(\lambda)}) \in \mathcal{L}(H_\lambda)^n$ in $\mathcal{F}$ ist auch

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} T^{(\lambda)} = \Big(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} T_1^{(\lambda)}, \ldots, \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} T_n^{(\lambda)} \Big) \in \mathcal{L}\Big(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda \Big)^n$$

ein Tupel in $\mathcal{F}$.

(F4) $\mathcal{F}$ ist stabil unter unitalen $*$-Homomorphismen, das heißt, für einen $*$-Homomorphismus $\pi : \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(K)$ mit $\pi(1) = 1$ und ein Tupel $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{F}$ ist auch $\pi(T) = (\pi(T_1), \ldots, \pi(T_n)) \in \mathcal{F}$.

Bevor wir zu Beispielen für Familien kommen, verallgemeinern wir zunächst die Begriffe Kontraktion, Isometrie und unitärer Operator auf n-Tupel von Operatoren. Zum Teil gibt es dafür mehrere Möglichkeiten.

Definition 2.2. Sei $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{L}(H)^n$ ein Tupel von Operatoren.

(a) T heißt sphärische Isometrie, wenn $\sum_{i=1}^n ||T_i x||^2 = ||x||^2$ für alle $x \in H$ gilt.

(b) T heißt sphärische Kontraktion, wenn $\sum_{i=1}^n ||T_i x||^2 \leq ||x||^2$ für alle $x \in H$ gilt.

(c) T heißt sphärisch unitär, wenn T eine sphärische Isometrie ist und alle T_i normale Operatoren sind.

(d) T heißt Zeilenkontraktion, wenn $|| \sum_{i=1}^{n} T_i x_i ||^2 \leq \sum_{i=1}^{n} ||x_i||^2$ für alle Elemente $x_1, \ldots, x_n \in H$ gilt.

Die Charakterisierungen sphärischer Kontraktionen und sphärischer Isometrien im folgenden Lemma folgen unmittelbar aus der Definition.

Lemma 2.3. *Sei $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{L}(H)^n$ ein Tupel von Operatoren.*

(a) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
  - (i) *T ist eine sphärische Kontraktion.*
  - (ii) $\sum_{i=1}^{n} T_i^* T_i \leq 1$.
  - (iii) *Der Operator $T^{(1)} : H \to H^n, x \mapsto (T_i x)_{i=1}^n$ ist eine Kontraktion.*
  - (iv) *Der Operator ${T^{(1)}}^* : H^n \to H, (x_i)_{i=1}^n \mapsto \sum_{i=1}^{n} T_i^* x_i$ ist eine Kontraktion.*
  - (v) *$T^* = (T_1^*, \ldots, T_n^*)$ ist eine Zeilenkontraktion.*

(b) *Ebenfalls äquivalent sind:*
  - (i) *T ist eine sphärische Isometrie.*
  - (ii) $\sum_{i=1}^{n} T_i^* T_i = 1$.
  - (iii) *Der Operator $T^{(1)} : H \to H^n, x \mapsto (T_i x)_{i=1}^n$ ist eine Isometrie.*

Das folgende Lemma enthält nun Beispiele für Familien.

Lemma 2.4. *Die folgenden Klassen sind Familien im Fall $n = 1$:*

(a) *Die Klasse aller Kontraktionen.*

(b) *Die Klasse aller Isometrien.*

(c) *Die Klasse aller selbstadjungierten Kontraktionen.*

(d) *Die Klasse aller subnormalen Kontraktionen.*

Im Fall $n \geq 1$ sind Familien:

(e) *Die Klasse $\mathcal{F}_{sc}$ aller kommutierenden sphärischen Kontraktionen.*

(f) *Die Klasse $\mathcal{F}_{si}$ aller kommutierenden sphärischen Isometrien.*

(g) *Die Klasse $\mathcal{F}_{cc}$ aller n-Tupel aus kommutierenden Kontraktionen.*

(h) *Die Klasse aller n-Tupel aus kommutierenden Isometrien.*

Beweis. Es ist klar, dass die Teile (a) und (b) Spezialfälle der Teile (e) und (f) sind. Die Eigenschaften (F1) und (F2) sind in allen Fällen trivial.

Zum Nachweis von (F3) für (c) und (d) beachte man, dass die Adjunktion mit direkten Summen vertauscht, also sind direkte Summen von selbstadjungierten Operatoren wieder selbstadjungiert und direkte Summen normaler Operatoren wieder normal. Das entsprechende Resultat für subnormale Operatoren folgt unmittelbar. Für (e)-(h) rechnet man (F3) direkt nach.

Weiterhin bemerke man, dass unitale $*$-Homomorphismen positive Operatoren auf positive Operatoren abbilden und deshalb die Ordnung $\leq$ erhalten. Insbesondere werden Isometrien auf Isometrien und Kontraktionen auf Kontraktionen abgebildet, denn ein Operator ist genau dann isometrisch, wenn $T^*T = 1$ gilt, und genau dann eine Kontraktion, wenn $T^*T \leq 1$ ist. Das erledigt zugleich (F4) für die Teile (g) und (h). Die Charakterisierungen in Lemma 2.3 liefern die vierte Eigenschaft für (e) und (f). Für Teil (c) ist sie trivial. Der einzige nichttriviale Teil ist, dass subnormale Kontraktionen stabil unter unitalen $*$-Homomorphismen sind, das folgt aber direkt aus Korollar 1.23. □

Seien H, K Hilberträume und P die Orthogonalprojektion von $H \oplus K$ auf H. Für einen Operator $T \in \mathcal{L}(H \oplus K)$ schreiben wir

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(H \oplus K),$$

wobei $A = PT\big|_H \in \mathcal{L}(H)$, $B = PT\big|_K \in \mathcal{L}(K, H)$, $C = (1-P)T\big|_H \in \mathcal{L}(H, K)$ und $D = (1-P)T\big|_K \in \mathcal{L}(K)$ sei. Für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in H \oplus K$ ist dann

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + By \\ Cx + Dy \end{pmatrix} \in H \oplus K.$$

Insbesondere ist T genau dann eine Fortsetzung von A, wenn $C = 0$ ist. Der adjungierte Operator zu T ist gegeben durch

$$T^* = \begin{pmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(H \oplus K).$$

Sind

$$T_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(H \oplus K),$$

so wird T_1T_2 durch das übliche Matrizenprodukt dargestellt, also

$$T_1T_2 = \begin{pmatrix} A_1A_2 + B_1C_2 & A_1B_2 + B_1D_2 \\ C_1A_2 + D_1C_2 & C_1B_2 + D_1D_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(H \oplus K).$$

Wir betrachten nun wieder Tupel von Operatoren. Sind $T = (T_1, \dots, T_n) \in \mathcal{L}(H)^n$ und $R = (R_1, \dots, R_n) \in \mathcal{L}(H \oplus K)^n$ zwei Operatortupel, so heißt R Fortsetzung von T, wenn R_i eine Fortsetzung von T_i für alle i ist. In diesem Fall heißt $\dim(K)$ der Rang der Fortsetzung. Wir nennen R eine triviale Fortsetzung von T, wenn es ein Operatortupel $A \in \mathcal{L}(K)^n$ mit $R = T \oplus A$ gibt. Offensichtlich ist das genau dann der Fall, wenn alle R_i die Form

$$R_i = \begin{pmatrix} T_i & 0 \\ 0 & A_i \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(H \oplus K)$$

haben.

Definition 2.5. Sei $\mathcal{F}$ eine Familie. Ein Operatortupel $T \in \mathcal{F}$ heißt extremal in $\mathcal{F}$, wenn jede Fortsetzung R von T in $\mathcal{F}$ trivial ist. Mit $\operatorname{ext}(\mathcal{F})$ bezeichnen wir die Klasse aller extremalen $T \in \mathcal{F}$.

Im Folgenden schreiben wir $R \geq T$, falls R eine Fortsetzung von T ist. Wir betrachten zunächst eine einfache, aber nützliche Charakterisierung trivialer Fortsetzungen.

Lemma 2.6. *Sei $T \in \mathcal{L}(H)^n$ und $R \in \mathcal{L}(H \oplus K)^n$ mit $R \geq T$. Dann sind äquivalent:*

(i) *R ist eine triviale Fortsetzung von T.*

(ii) *Es gilt $PR_i = R_iP$ für $i = 1, \dots, n$, wobei P die Orthogonalprojektion von $H \oplus K$ auf H bezeichne.*

(iii) *Es gilt $R_i^* H \subset H$ für $i = 1, \dots, n$.*

Beweis. Für $i = 1, \dots, n$ hat R_i eine Darstellung

$$R_i = \begin{pmatrix} T_i & A_i \\ 0 & B_i \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(H \oplus K).$$

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): Für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in H \oplus K$ und $i = 1, \dots, n$ gilt

$$(PR_i - R_iP) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_ix + A_iy - T_ix = A_iy.$$

Somit ist $PR_i = R_iP$ für $i = 1, \dots, n$ genau dann, wenn $A_i = 0$ für $i = 1, \dots, n$ gilt, das heißt genau dann, wenn R eine triviale Fortsetzung von T ist.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii): Für $i = 1, \dots, n$ ist

$$R_i^* = \begin{pmatrix} T_i^* & 0 \\ A_i^* & B_i^* \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(H \oplus K),$$

also gilt $R_i^* H \subset H$ für $i = 1, \dots, n$ genau dann, wenn $A_i = 0$ für $i = 1, \dots, n$ gilt. □

Beispiel. Ist $\mathcal{F}$ die Familie der subnormalen Kontraktionen, so besteht $\mathrm{ext}(\mathcal{F})$ genau aus den normalen Kontraktionen.

Beweis. Sei $S \in \mathcal{F}$ nicht normal und N die minimale normale Fortsetzung von S. Dann ist N eine nichttriviale Fortsetzung von S und nach Korollar 1.15 ebenfalls eine Kontraktion, also ist N ein Operator in $\mathcal{F}$. Somit ist S nicht extremal in $\mathcal{F}$.

Ist umgekehrt $T \in \mathcal{F} \cap \mathcal{L}(H)$ normal und $S \in \mathcal{F}$ eine Fortsetzung von T, so sei N die minimale normale Fortsetzung von S. Für $x \in H$ gilt dann

$$||Tx|| = ||T^*x|| = ||P_H N^*x|| \leq ||N^*x|| = ||Nx|| = ||Tx||,$$

also $||P_H N^*x|| = ||N^*x||$ und somit $N^*x \in H$. Deshalb ist N eine triviale Fortsetzung von T, also auch S. Mithin ist T extremal in $\mathcal{F}$. $\square$

Insbesondere besitzt also jeder Operator dieser Familie eine Fortsetzung zu einem extremalen Operator. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, dass das allgemein für Familien gilt. Für das folgende Beispiel ist das trivial.

Beispiel. Ist $\mathcal{F}$ die Familie der selbstadjungierten Kontraktionen, so gilt $\mathrm{ext}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$. Ist nämlich $T \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert und S eine selbstadjungierte Fortsetzung von T, so gilt offensichtlich

$$S^*(H) = S(H) = T(H) \subset H,$$

also ist S eine triviale Fortsetzung von T.

Im folgenden Lemma sind einige Aussagen über die Extremalen einer Familie zusammengestellt.

Lemma 2.7. *Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Familien.*

(a) *Sei $U \in \mathrm{ext}(\mathcal{F})$ und $V \in \mathcal{F}$. Ist $R \in \mathcal{F}$ mit $R \geq U \oplus V$, dann gibt es ein $R' \in \mathcal{F}$ mit $R' \geq V$ und $R = U \oplus R'$.*

(b) *Beliebige direkte Summen von Extremalen sind extremal.*

(c) *Ist $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, so ist $\mathrm{ext}(\mathcal{G}) \cap \mathcal{F} \subset \mathrm{ext}(\mathcal{F})$.*

(d) *Sind $U, V \in \mathcal{F}$ mit $U \oplus V \in \mathrm{ext}(\mathcal{F})$, so sind schon $U, V \in \mathrm{ext}(\mathcal{F})$.*

Beweis. (a) Seien $U \in \mathcal{L}(H_1)^n, V \in \mathcal{L}(H_2)^n$ und $R \in \mathcal{L}(H_1 \oplus H_2 \oplus H_3)^n$ mit $R \geq U \oplus V$. Nach Voraussetzung gilt $R \geq U \oplus V \geq U$. Weil U extremal ist, gibt es ein $R' \in \mathcal{L}(H_2 \oplus H_3)^n \cap \mathcal{F}$ mit $R = U \oplus R'$. Weil R auch eine Fortsetzung von V ist, gilt für $x \in H_2$ und $i = 1, \ldots, n$ ferner

$$R_i' \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = R_i \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = V_i x.$$

Somit ist auch $R' \geq V$.

(b) Sei $(T^{(\lambda)})_{\lambda\in\Lambda}$ mit $\Lambda \neq \emptyset$ eine Familie von n-Tupeln in $\operatorname{ext}(\mathcal{F})$, etwa $T^{(\lambda)} \in \mathcal{L}(H_\lambda)^n$. Nach Definition ist $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} T^{(\lambda)} \in \mathcal{F}$. Sei

$$\mathcal{A} = \Big\{ I \subset \Lambda : \bigoplus_{\lambda\in I} T^{(\lambda)} \in \operatorname{ext}(\mathcal{F}) \Big\}.$$

$\mathcal{A}$ ist durch Inklusion partiell geordnet und enthält alle einelementigen Teilmengen von Λ, ist also insbesondere nicht leer. Sei $\mathcal{I}$ eine Kette in $\mathcal{A}$ und $I_0 = \bigcup_{I\in\mathcal{I}} I$. Wir zeigen $I_0 \in \mathcal{A}$. Sei also $R \in \mathcal{L}(H)^n \cap \mathcal{F}$ mit $R \geq \bigoplus_{\lambda\in I_0} T^{(\lambda)}$. Für $I \in \mathcal{I}$ bezeichne P_I die Orthogonalprojektion von H auf $\bigoplus_{\lambda\in I} H_\lambda$. Weil R eine triviale Fortsetzung von allen $\bigoplus_{\lambda\in I} T^{(\lambda)}$ ist, gilt nach Lemma 2.6 dann

$$P_I R_j = R_j P_I$$

für alle $I \in \mathcal{I}$ und $j = 1, \ldots, n$. Das Netz $(P_I)_{I\in\mathcal{I}}$ konvergiert in der starken Operatortopologie gegen P, die Orthogonalprojektion von H auf $\bigoplus_{\lambda\in I_0} H_\lambda$. Weil die Komposition getrennt stetig in der starken Operatortopologie ist, folgt

$$P R_j = R_j P$$

für $j = 1, \ldots, n$, sodass R nach Lemma 2.6 eine triviale Fortsetzung von $\bigoplus_{\lambda\in I_0} T^{(\lambda)}$ ist. Mithin ist $I_0 \in \mathcal{A}$. Nach dem Lemma von Zorn hat $\mathcal{A}$ ein maximales Element Λ_0. Angenommen, es ist $\Lambda_0 \subsetneq \Lambda$, etwa $\lambda_1 \in \Lambda \setminus \Lambda_0$. Sei $\Lambda_1 = \Lambda_0 \cup \{\lambda_1\}$. Wir zeigen $\Lambda_1 \in \mathcal{A}$, was ein Widerspruch zur Maximalität von Λ_0 in $\mathcal{A}$ ist und den Beweis von (b) vervollständigt. Sei also $R \in \mathcal{F}$ mit

$$R \geq \bigoplus_{\lambda\in\Lambda_1} T^{(\lambda)} = \Big(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda_0} T^{(\lambda)} \Big) \oplus T^{(\lambda_1)}.$$

Nach (a) gibt es dann ein $R' \in \mathcal{F}$ mit $R' \geq T^{(\lambda_1)}$ und

$$R = \Big(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda_0} T^{(\lambda)} \Big) \oplus R'.$$

Wegen $T^{(\lambda_1)} \in \operatorname{ext}\mathcal{F}$ existiert ein $R'' \in \mathcal{F}$ mit $R' = T^{(\lambda_1)} \oplus R''$, also

$$R = \Big(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda_0} T^{(\lambda)} \Big) \oplus T^{(\lambda_1)} \oplus R''.$$

Somit ist $\Lambda_1 \in \mathcal{A}$.

(c) ist trivial.

(d) Angenommen, V ist nicht extremal in $\mathcal{F}$. Dann gibt es eine nichttriviale Fortsetzung R von V in $\mathcal{F}$ der Form

$$R_i = \begin{pmatrix} V_i & A_i \\ 0 & B_i \end{pmatrix}$$

für $i = 1, \dots, n$, wobei nicht alle A_i null sind. Dann ist aber $U \oplus R$ eine Fortsetzung von $U \oplus V$ in $\mathcal{F}$ mit

$$U_i \oplus R_i = \begin{pmatrix} U_i & 0 & 0 \\ 0 & V_i & A_i \\ 0 & 0 & B_i \end{pmatrix}.$$

Weil nicht alle A_i null sind, ist $U \oplus R$ eine nichttriviale Fortsetzung von $U \oplus V$, ein Widerspruch zu $U \oplus V \in \operatorname{ext}(\mathcal{F})$. □

2.2 Der Satz von Agler

In diesem Abschnitt beweisen wir den Satz von Agler, der unsere zentrale Motivation für die Bestimmung der Extremalen einer Familie ist. Er besagt, dass jedes Operatortupel T in einer Familie $\mathcal{F}$ eine Fortsetzung zu einem extremalen Tupel in $\mathcal{F}$ besitzt.

Definition 2.8. Für eine Teilmenge $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}(H)$ sei

$$\mathcal{S}^* = \{T^* : T \in \mathcal{S}\}.$$

$\mathcal{S}$ heißt selbstadjungiert, falls $\mathcal{S} = \mathcal{S}^*$ ist. Ein selbstadjungierter Unterraum von $\mathcal{L}(H)$, der 1 enthält, heißt *Operatorsystem.*

Sei $\tilde{H}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}(\tilde{H})$ ein Operatorsystem und $N \in \mathbb{N}$. Mit $M_N(\mathcal{S})$ bezeichnen wir die Menge aller $N \times N$-Matrizen mit Koeffizienten in $\mathcal{S}$. Jedes Element $A \in M_N(\mathcal{S})$ kann in natürlicher Weise mit einem Operator auf $\tilde{H}^N$ identifiziert werden. Wir nennen A positiv, falls der entsprechende Operator ein positiver Operator auf $\tilde{H}^N$ ist. Ist $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{L}(H)$ eine lineare Abbildung, so erhalten wir für alle $N \in \mathbb{N}$ lineare Abbildungen

$$\Phi_N : M_N(\mathcal{S}) \to M_N(\mathcal{L}(H)), \quad (a_{ij})_{i,j=1}^N \mapsto (\Phi(a_{ij}))_{i,j=1}^N.$$

Definition 2.9. Sei $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}(\tilde{H})$ ein Operatorsystem und $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{L}(H)$ eine lineare Abbildung. Φ heißt positiv, falls Φ positive Elemente von $\mathcal{S}$ auf positive Operatoren in $\mathcal{L}(H)$ abbildet. Φ heißt N-positiv, falls Φ_N positiv ist. Wir nennen Φ vollständig positiv, falls alle Φ_N positiv sind.

Vollständig positive Abbildungen besitzen einige bemerkenswerte Eigenschaften. Ein Beispiel ist der folgende Fortsetzungssatz von Arveson:

Satz 2.10. *Sei $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}(\tilde{H})$ ein Operatorsystem und $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{L}(H)$ eine vollständig positive Abbildung. Dann gibt es eine vollständig positive Abbildung $\Psi : \mathcal{L}(\tilde{H}) \to \mathcal{L}(H)$, die Φ fortsetzt.*

Beweis. Siehe [Pau86, Theorem 6.5]. □

In der Sprache der Kategorientheorie besagt der Fortsetzungssatz von Arveson gerade, dass $\mathcal{L}(H)$ ein injektives Objekt in der Kategorie der Operatorsysteme mit vollständig positiven Abbildungen als Morphismen ist.

Man überlegt sich leicht, dass unitale $*$-Homomorphismen vollständig positiv sind. Ebenso kann man zeigen, dass für einen Operator $V \in \mathcal{L}(H, \tilde{H})$ die Abbildung

$$\mathcal{L}(\tilde{H}) \to \mathcal{L}(H), \quad T \mapsto V^*TV$$

vollständig positiv ist. Der folgende Dilatationssatz von Stinespring besagt, dass jede vollständig positive Abbildung von $\mathcal{L}(\tilde{H})$ nach $\mathcal{L}(H)$ aus diesen beiden Teilen aufgebaut ist.

Satz 2.11. *Sei $\Phi : \mathcal{L}(\tilde{H}) \to \mathcal{L}(H)$ eine vollständig positive Abbildung. Dann gibt es einen Hilbertraum K, einen unitalen $*$-Homomorphismus $\pi : \mathcal{L}(\tilde{H}) \to \mathcal{L}(K)$ sowie einen stetigen linearen Operator $V \in \mathcal{L}(H, K)$ mit $||\Phi(1)|| = ||V||^2$ und*

$$\Phi(T) = V^*\pi(T)V \quad \text{für alle } T \in \mathcal{L}(\tilde{H}).$$

Beweis. Siehe [Pau86, Theorem 4.1]. □

Ist Φ sogar unital, so ist V eine Isometrie und wir können H als Unterraum von K auffassen. Mit dieser Identifikation ist V^* die Orthogonalprojektion P_H von K auf H. Es gilt also

$$\Phi(T) = P_H\pi(T)\big|_H \quad \text{für alle } T \in \mathcal{L}(\tilde{H}).$$

Sei nun $(T^{(\lambda)})_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie von Operatortupeln einer Familie $\mathcal{F}$, die total geordnet ist, das heißt, für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ ist $T^{(\lambda_1)}$ eine Fortsetzung von $T^{(\lambda_2)}$ oder umgekehrt. Sei etwa $T^{(\lambda)} \in \mathcal{L}(H_\lambda)^n$ für $\lambda \in \Lambda$. Ferner gebe es einen Hilbertraum K mit $H_\lambda \subset K$ für alle $\lambda \in \Lambda$. Sei $H = \overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda} \subset K$. Weil die $T^{(\lambda)}$ total geordnet und gleichmäßig beschränkt sind, gibt es ein eindeutig bestimmtes Operatortupel $T \in \mathcal{L}(H)^n$ mit $T_i\big|_{H_\lambda} = T_i^{(\lambda)}$ für alle $\lambda \in \Lambda$ und $i = 1, \ldots, n$. Wir schreiben $T = \bigvee_{\lambda\in\Lambda} T^{(\lambda)}$. Für die meisten Beispiele von Familien, die wir bisher kennengelernt haben (siehe Lemma 2.4), ist unmittelbar klar, dass T wieder ein Element von $\mathcal{F}$ ist. Das gilt auch allgemein.

Lemma 2.12. *Ist $(T^{(\lambda)})_{\lambda\in\Lambda}$ eine total geordnete Familie von Operatortupeln einer Familie $\mathcal{F}$ wie oben, so ist auch $T = \bigvee_{\lambda\in\Lambda} T^{(\lambda)} \in \mathcal{F}$.*

Beweis. Die Beweisstrategie ähnelt der in [DMW99, Theorem 1.1., (i)]. Sei

$$\tilde{H} = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda \quad \text{und} \quad \tilde{T} = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} T^{(\lambda)} \in \mathcal{L}(\tilde{H})^n.$$

Nach Definition 2.1 ist dann $\tilde{T} \in \mathcal{F}$. Für ein Tupel $A = (A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{L}(E)^n$ auf einem Hilbertraum E, $a \in \mathbb{C}$ und $b, c, d \in \mathbb{C}^n$ sei

$$(a,b,c,d)(A) = a1 + \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu A_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu A_\nu^* + \sum_{\nu=1}^{n} d_\nu A_\nu^* A_\nu.$$

Mit dieser Notation ist die Menge

$$\mathcal{S} = \left\{ (a,b,c,d)(\tilde{T}) : (a,b,c,d) \in \mathbb{C} \times (C^n)^3 \right\} \subset \mathcal{L}(\tilde{H})$$

ein Operatorsystem. Sei $N \in \mathbb{N}$ und $a^{(ij)} \in \mathbb{C}$ sowie $b^{(ij)}, c^{(ij)}, d^{(ij)} \in \mathbb{C}^n$ für $i, j = 1, \dots, N$. Sei ferner $\lambda \in \Lambda$ und $(h_i)_{i=1}^N \in H_\lambda^N$. Wir definieren $(\tilde{h}_i)_{i=1}^N \in \tilde{H}^N$ durch $\tilde{h}_i = (h_i^{(\mu)})_{\mu \in \Lambda}$ mit

$$h_i^{(\mu)} = \begin{cases} h_i, & \text{falls } \mu = \lambda, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt die Gleichung

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left((a^{(ij)}, b^{(ij)}, c^{(ij)}, d^{(ij)})(\tilde{T}) \right)_{i,j=1}^N (\tilde{h}_i)_i^N, (\tilde{h}_i)_i^N \right\rangle_{\tilde{H}^N} \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Bigg(\langle a^{(ij)} \tilde{h}_j, \tilde{h}_i \rangle_{\tilde{H}} + \sum_{\nu=1}^n \langle b_\nu^{(ij)} \tilde{T}_\nu \tilde{h}_j, \tilde{h}_i \rangle_{\tilde{H}} \\
&\quad + \sum_{\nu=1}^n \langle c_\nu^{(ij)} \tilde{h}_j, \tilde{T}_\nu \tilde{h}_i \rangle_{\tilde{H}} + \sum_{\nu=1}^n \langle d_\nu^{(ij)} \tilde{T}_\nu \tilde{h}_j, \tilde{T}_\nu \tilde{h}_i \rangle_{\tilde{H}} \Bigg) \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Bigg(\langle a^{(ij)} h_j, h_i \rangle_H + \sum_{\nu=1}^n \langle b_\nu^{(ij)} T_\nu h_j, h_i \rangle_H \\
&\quad + \sum_{\nu=1}^n \langle c_\nu^{(ij)} h_j, T_\nu h_i \rangle_H + \sum_{\nu=1}^n \langle d_\nu^{(ij)} T_\nu h_j, T_\nu h_i \rangle_H \Bigg) \\
&= \left\langle \left((a^{(ij)}, b^{(ij)}, c^{(ij)}, d^{(ij)})(T) \right)_{i,j=1}^N (h_i)_i^N, (h_i)_i^N \right\rangle_{H^N}.
\end{aligned}$$

Ist also $\left((a^{(ij)}, b^{(ij)}, c^{(ij)}, d^{(ij)})(\tilde{T}) \right)_{i,j=1}^N \in M_N(\mathcal{S})$ eine positive Matrix, so ist

$$\left\langle \left((a^{(ij)}, b^{(ij)}, c^{(ij)}, d^{(ij)})(T) \right)_{i,j=1}^N (h_i)_i^N, (h_i)_i^N \right\rangle_{H^N} \geq 0$$

für alle $(h_i)_{i=1}^N \in \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda \right)^N$. Weil diese Menge dicht in H^N liegt, folgt, dass die lineare Abbildung

$$\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{L}(H), \quad (a,b,c,d)(\tilde{T}) \mapsto (a,b,c,d)(T)$$

wohldefiniert und vollständig positiv ist. Nach dem Fortsetzungssatz 2.10 von Arveson besitzt Φ eine Fortsetzung zu einer vollständig positiven Abbildung auf $\mathcal{L}(\tilde{H})$, diese heiße wieder Φ. Nach dem Dilatationssatz 2.11 von Stinespring und der anschließenden Bemerkung gibt es einen Hilbertraum $K \supset H$ und einen unitalen $*$-Homomorphismus $\pi : \mathcal{L}(\tilde{H}) \to \mathcal{L}(K)$ mit

$$\Phi(S) = P_H \pi(S)\big|_H \qquad \text{für alle } S \in \mathcal{L}(\tilde{H}),$$

wobei P_H die Orthogonalprojektion von K auf H ist. Für $k = 1, \dots, n$ gilt insbesondere

$$\begin{aligned} P_H \pi(\tilde{T}_k)^* \pi(\tilde{T}_k)\big|_H &= P_H \pi(\tilde{T}_k{}^* \tilde{T}_k)\big|_H = \Phi(\tilde{T}_k{}^* \tilde{T}_k) = T_k^* T_k \\ &= \Phi(\tilde{T}_k{}^*) \Phi(\tilde{T}_k) = P_H \pi(\tilde{T}_k)^* P_H \pi(\tilde{T}_k)\big|_H. \end{aligned}$$

Ist also

$$\pi(\tilde{T}_k) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(H \oplus (K \ominus H)),$$

so ist

$$A^* A = P_H \pi(\tilde{T}_k)^* P_H \pi(\tilde{T}_k)\big|_H = P_H \pi(\tilde{T}_k)^* \pi(\tilde{T}_k)\big|_H = A^* A + C^* C,$$

also $C = 0$. Somit gilt $\pi(\tilde{T}_k)(H) \subset H$ und deshalb

$$T_k = \Phi(\tilde{T}_k) = P_H \pi(\tilde{T}_k)\big|_H = \pi(\tilde{T}_k)\big|_H$$

für $k = 1, \dots, n$. Weil $\mathcal{F}$ nach Definition stabil unter unitalen $*$-Homomorphismen und unter Einschränkung auf invariante Teilräume ist, folgt $T \in \mathcal{F}$. $\square$

Die folgende Definition orientiert sich an [Arv03].

Definition 2.13. Sei $T \in \mathcal{F} \cap \mathcal{L}(H)^n$ und $A \subset H$. T heißt extremal auf A, wenn für jede Fortsetzung R von T in $\mathcal{F}$ gilt:

$$R_i^* x = T_i^* x \qquad \text{für alle } x \in A, i = 1, \dots, n.$$

Einige unmittelbare Folgerungen aus der Definition sind im folgenden Lemma zusammengefasst. Der erste Teil legt nahe, dass wir mit dem neuen Begriff messen können, wie weit ein Operatortupel davon entfernt ist, extremal zu sein.

Lemma 2.14. *Sei $T \in \mathcal{F} \cap \mathcal{L}(H)^n$ und $A \subset H$.*

(a) *T ist genau dann extremal, wenn T extremal auf H ist.*

(b) *Ist T extremal auf A, so ist auch jede Fortsetzung von T in $\mathcal{F}$ extremal auf A.*

(c) *Ist T extremal auf einer dichten Teilmenge von A, so ist T extremal auf A.*

Beweis. (a) Sei T extremal und R eine Fortsetzung von T in $\mathcal{F}$. Dann ist $R = T \oplus R'$ für ein Operatortupel R'. Für alle $x \in H$ und $i = 1, \ldots, n$ gilt daher

$$R_i^* x = (T_i^* \oplus R'^*_i)x = T_i^* x,$$

also ist T extremal auf H.

Sei umgekehrt T extremal auf H und R eine Fortsetzung von T in $\mathcal{F}$. Für alle $x \in H$ und $i = 1, \ldots, n$ gilt dann

$$R_i^* x = T_i^* x \in H,$$

also $R_i^*(H) \subset H$. Somit ist R eine triviale Fortsetzung von T.

(b) Sei $S \geq T$ eine Fortsetzung von T in $\mathcal{F}$ und $R \geq S$ eine Fortsetzung von S in $\mathcal{F}$. Dann ist R auch eine Fortsetzung von T. Weil T extremal auf A ist, gilt für alle $x \in A$ und $i = 1, \ldots, n$ die Gleichung

$$R_i^* x = T_i^* x = S_i^* x.$$

Somit ist auch S extremal auf A.

(c) ist klar, weil die beteiligten Operatoren stetig sind. □

Bekanntlich haben je zwei Orthonormalbasen eines Hilbertraumes die gleiche Kardinalität. Das folgende Lemma ist eine leichte Verallgemeinerung dieser Tatsache.

Lemma 2.15. *Sei B eine Orthonormalbasis eines Hilbertraumes H und $C \subset H$ eine Menge, deren lineare Hülle dicht in H liegt. Dann ist $|B| \leq |C|$.*

Beweis. Ist $|C| < \infty$, so ist H endlichdimensional und die Behauptung ist eine elementare Aussage aus der linearen Algebra. Sei also C eine unendliche Menge. Für $x \in C$ definieren wir

$$B_x = \{y \in B : \langle x, y \rangle \neq 0\}.$$

Nach der Besselschen Ungleichung ist $|B_x| \leq |\mathbb{N}|$ für alle $x \in C$. Die Voraussetzung impliziert $C^\perp = 0$ und somit

$$\bigcup_{x \in C} B_x = B.$$

Weil C eine unendliche Menge ist, folgt $|B| \leq |\mathbb{N} \times C| = |C|$. □

Seien X, Y zwei Mengen, wobei X ein ausgezeichnetes Element 0 habe. Mit $X^{(Y)}$ bezeichnen wir die Menge aller Abbildungen von Y nach X, die alle bis auf endlich viele Elemente von Y auf $0 \in X$ abbilden. In dieser Notation sei $d = \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N}_0)}$. Mit dem folgenden Lemma können wir später die Größe der Hilberträume kontrollieren, auf denen Fortsetzungen eines Operatortupels $T \in \mathcal{F}$ leben.

Lemma 2.16. *Seien $U \subset l^2(I)$ ein abgeschlossener Untervektorraum sowie $T \in \mathcal{F} \cap \mathcal{L}(U)^n$, $x \in U$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dann gilt*

$$\sup\{||S_i^* x|| : S \geq T, S \in \mathcal{F} \cap \mathcal{L}(V)^n, V \subset l^2(I \times d)\} = \sup\{||S_i^* x|| : S \geq T, S \in \mathcal{F}\}.$$

Beweis. Die Ungleichung $\leq$ ist trivial. Umgekehrt sei $S \geq T, S \in \mathcal{F}$, etwa $S \in \mathcal{L}(K)^n$. Wir definieren

$$\Phi : d \to \mathcal{L}(K), \quad (a_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto S_1^{a_0} S_1^{*a_1} S_2^{a_2} \ldots S_n^{a_{2n-2}} S_n^{*a_{2n-1}} S_1^{a_{2n}} \ldots$$

Das Bild von Φ besteht aus allen endlichen Produkten der S_i und S_i^*. Sei

$$K^+ = \bigvee_{V \in \operatorname{ran} \Phi} V(U) \subset K.$$

Dann ist K^+ ein abgeschlossener Untervektorraum von K, der U enthält und S reduziert. Sei $S^+ = S\big|_{K^+} \in \mathcal{F}$ und B_1 eine Orthonormalbasis von U. Die lineare Hülle der Menge

$$\{\Phi(a)b : a \in d, b \in B_1\}$$

liegt dann dicht in K^+. Sei P die Orthogonalprojektion von K^+ auf $K^+ \ominus U$. Es folgt, dass die lineare Hülle von

$$\{P\Phi(a)b : a \in d \setminus \{0\}, b \in B_1\}$$

dicht in $K^+ \ominus U$ liegt. Ist also B_2 eine Orthonormalbasis von $K^+ \ominus U$, so gilt für die Kardinalität von B_2 nach Lemma 2.15 die Ungleichung

$$|B_2| \leq |B_1 \times d \setminus \{0\}| \leq |I \times d \setminus \{0\}|.$$

Es gibt also eine Injektion $B_2 \hookrightarrow I \times (d \setminus \{0\})$ und deshalb eine Isometrie $K^+ \ominus U \hookrightarrow l^2(I \times (d \setminus \{0\}))$. Zusammen mit der Inklusion $U \subset l^2(I) = l^2(I \times \{0\})$ erhalten wir eine unitäre Abbildung $\psi : K^+ \to V = \operatorname{ran} \psi \subset l^2(I \times d)$ mit $\psi(y) = y$ für $y \in U$. Das Operatortupel $\psi S^+ \psi^* = (\psi S_1^+ \psi^*, \ldots, \psi S_n^+ \psi^*) \in \mathcal{L}(V)^n$ ist dann eine Fortsetzung von T in $\mathcal{F}$ und es gilt

$$||S_i^* x|| = ||S_i^{+*} x|| = ||\psi S_i^{+*} x|| = ||\psi S_i^{+*} \psi^* x|| = ||(\psi S_i^+ \psi^*)^* x||.$$

Das zeigt die umgekehrte Ungleichung. □

Mit Bezeichnungen wie oben sei $e = (d^{(\mathbb{N})})^n$. Das folgende Lemma erlaubt es, zu einem Operatortupel eine Fortsetzung zu konstruieren, die extremal auf einer vorgegebenen Einpunktmenge ist.

Lemma 2.17. *Sei $T \in \mathcal{F} \cap \mathcal{L}(U)^n$ mit $U \subset l^2(I)$ und $x \in U$ beliebig. Dann gibt es eine Fortsetzung $R \in \mathcal{F} \cap \mathcal{L}(V)^n$ von T, die extremal auf $\{x\}$ ist, wobei $V \subset l^2(I \times e)$ ist.*

Beweis. Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$ beliebig. Für alle $S \in \mathcal{F}$ gilt

$$||S_i^* x|| \leq ||S_i^*|| \, ||x|| = ||S_i|| \, ||x|| \leq c||x||,$$

wobei c die Konstante aus Definition 2.1 ist. Wir konstruieren nun induktiv eine Folge

$$T = T^{(0)} \leq T^{(1)} \leq T^{(2)} \leq \ldots$$

mit

$$T^{(k)} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{L}(V_k)^n, \quad V_k \subset l^2(I \times d^k)$$

und

$$||T_1^{(k)^*} x|| \geq \sup\{||S_1^* x|| : S \geq T^{(k-1)}, S \in \mathcal{F} \cap \mathcal{L}(V_k)^n, V_k \subset l^2(I \times d^k)\} - \frac{1}{k}$$

für $k \geq 1$. Das ist möglich, weil alle Suprema endlich sind. Hierbei nehmen wir die Identifikation $l^2(I \times d^{k-1}) = l^2(I \times d^{k-1} \times \{0\}) \subset l^2(I \times d^k)$ vor. Nach Lemma 2.16 ist dann auch

$$||T_1^{(k)^*} x|| \geq \sup\{||S_1^* x|| : S \geq T^{(k-1)}, S \in \mathcal{F}\} - \frac{1}{k}.$$

Es ist $V_k \subset l^2(I \times d^k) \subset l^2(I \times d^{(\mathbb{N})})$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Sei $V_{\infty,1} = \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} V_k}$ und $T^{(\infty,1)} = \bigvee_{k=1}^{\infty} T^{(k)} \in \mathcal{L}(V_{\infty,1})^n$. Nach Lemma 2.12 ist $T^{(\infty,1)} \in \mathcal{F}$. Sei $S \in \mathcal{F} \cap \mathcal{L}(K)^n$ eine Fortsetzung von $T^{(\infty,1)}$ und P_k die Orthogonalprojektion von $V_{\infty,1}$ auf V_k. Dann ist $S \geq T_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, also gilt

$$||T_1^{(\infty,1)^*} x|| \geq ||P_k T_1^{(\infty,1)^*} x|| = ||T_1^{(k)^*} x|| \geq ||S_1^* x|| - \frac{1}{k},$$

und somit $||T_1^{(\infty,1)^*} x|| \geq ||S_1^* x||$. Bezeichnet P die Orthogonalprojektion von K auf $V_{\infty,1}$, so folgt

$$||S_1^* x - T_1^{(\infty,1)^*} x||^2 = ||S_1^* x - P S_1^* x||^2 = ||S_1^* x||^2 - ||T_1^{(\infty,1)^*} x||^2 \leq 0.$$

Mithin ist $S_1^* x = T_1^{(\infty,1)^*} x$.

Indem wir ebenso mit $T^{(\infty,1)}$ verfahren und dabei die zweite Komponente betrachten, erhalten wir eine Fortsetzung $T^{(\infty,2)} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{L}(V_{\infty,2})^n$ von $T^{(\infty,1)}$ mit

$V_{\infty,2} \subset l^2(I \times (d^{(\mathbb{N})})^2)$, sodass für jede Fortsetzung S von $T^{(\infty,2)}$ in $\mathcal{F}$ die Gleichung $S_2^* x = T_2^{(\infty,2)^*} x$ gilt. Weil sowohl $T^{(\infty,2)}$ als auch S Fortsetzungen von $T^{(\infty,1)}$ sind, gilt nach dem bereits Bewiesenen auch $S_1^* x = T_1^{(\infty,1)^*} x = T_1^{(\infty,2)^*} x$. Indem wir so fortfahren, erhalten wir schließlich eine Fortsetzung $T^{(\infty,n)} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{L}(V_{\infty,n})$ mit $V = V_{\infty,n} \subset l^2(I \times (d^{(\mathbb{N})})^n)$, sodass für jede Fortsetzung S von $T^{(\infty,n)}$ in $\mathcal{F}$ gilt:

$$S_i^* x = T_i^{(\infty,n)^*} x \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

$R = T^{(\infty,n)}$ ist also eine Fortsetzung von T, die extremal auf $\{x\}$ ist. $\square$

Nach diesen Vorbereitungen können wir endlich den Fortsetzungssatz von Agler beweisen.

Satz 2.18. *Sei $T \in \mathcal{F}$. Dann gibt es eine extremale Fortsetzung von T in $\mathcal{F}$.*

Beweis. Weil T unitär äquivalent zu einem Operatortupel auf $l^2(I)$ für eine geeignete Menge I ist, können wir annehmen, dass $T \in \mathcal{L}(l^2(I))^n$ gilt. Ist nämlich $\psi : H \to l^2(I)$ die unitäre Abbildung, so erhalten wir eine 1:1-Korrespondenz

$$\{S \geq T, S \in \mathcal{F}\} \longleftrightarrow \{R \geq \psi T \psi^*, R \in \mathcal{F}\}$$

vermöge

$$\mathcal{L}(H \oplus K) \ni S \mapsto (\psi \oplus 1) S (\psi^* \oplus 1) \in \mathcal{L}(l^2(I) \oplus K).$$

Diese Korrespondenz erhält triviale Fortsetzungen und deshalb auch extremale Fortsetzungen. Sei also T ein Operatortupel auf $H_0 = l^2(I)$. Wir zeigen zunächst, dass es einen Hilbertraum $H_1 \supset H_0$ und ein Operatortupel $T^{(1)} \in \mathcal{F} \cap L(H_1)^n$ gibt, das T fortsetzt und extremal auf H_0 ist. Sei dazu

$$\mathcal{A} = \big\{(A, T^{(A)}) : A \subset H_0, T^{(A)} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{L}(V_A)^n, V_A \subset l^2(I \times e^{(A)}),\\ T^{(A)} \text{ ist extremal auf } A, T^{(A)} \geq T\big\}.$$

Wegen $(\emptyset, T) \in \mathcal{A}$ ist $\mathcal{A} \neq \emptyset$. $\mathcal{A}$ ist durch die Relation

$$(A, T^{(A)}) \preceq (B, T^{(B)}) \Leftrightarrow A \subset B \text{ und } T^{(A)} \leq T^{(B)}$$

partiell geordnet. Sei nun $((A_j, T^{(A_j)}))_{j \in J}$ eine Kette in $\mathcal{A}$, etwa $T^{(A_j)} \in \mathcal{L}(V_j)^n$ mit $V_j \subset l^2(I \times e^{(A_j)})$. Sei $A = \bigcup_{j \in J} A_j \subset H_0$. Dann ist $V_j \subset l^2(I \times e^{(A)})$ für alle $j \in J$. Sei

$$V_A = \overline{\bigcup_{j \in J} V_j} \subset l^2(I \times e^{(A)})$$

und $T^{(A)} = \bigvee_{j\in J} T^{(A_j)} \in \mathcal{L}(V_A)^n$ das eindeutig bestimmte Operatortupel, das auf V_j mit $T^{(A_j)}$ übereinstimmt für alle $j \in J$. Nach Lemma 2.12 ist $T^{(A)} \in \mathcal{F}$. Weil $T^{(A)}$ eine Fortsetzung von allen $T^{(A_j)}$ ist, ist $T^{(A)}$ nach Lemma 2.14 extremal auf A. Somit ist $(A, T^{(A)}) \in \mathcal{A}$ eine obere Schranke. Nach dem Lemma von Zorn hat $\mathcal{A}$ ein maximales Element $(K, T^{(K)})$, etwa $T^{(K)} \in \mathcal{L}(H_1)^n$. Angenommen, es ist $K \subsetneq H_0$. Dann gibt es ein $x \in H_0 \setminus K$. Nach Lemma 2.17 existiert eine Fortsetzung $T^{(K\cup\{x\})} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{L}(U)^n$ von $T^{(K)}$ mit $U \subset l^2(I \times e^{(K)} \times e) = l^2(I \times e^{(K\cup\{x\})})$, die extremal auf $\{x\}$ ist. Dann ist $T^{(K\cup\{x\})} \in \mathcal{A}$ extremal auf $K \cup \{x\}$, im Widerspruch zur Maximalität von $(K, T^{(K)})$ in $\mathcal{A}$. Somit ist $K = H_0$ und $T^{(1)} = T^{(K)} \in \mathcal{L}(H_1)^n$ ist eine Fortsetzung von T in $\mathcal{F}$, die extremal auf H_0 ist.

Indem wir induktiv so fortfahren, erhalten wir eine aufsteigende Folge $(H_n)_{n=0}^{\infty}$ von Hilberträumen und eine Folge von Operatortupeln

$$T = T^{(0)} \leq T^{(1)} \leq T^{(2)} \leq \dots$$

mit $T^{(k)} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{L}(H_k)^n$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, sodass $T^{(k+1)}$ extremal auf H_k ist für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Sei $T^{(\infty)} = \bigvee_{k\in\mathbb{N}_0} T^{(k)} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{L}(K)^n$, wobei K die Vervollständigung von $\bigcup_{n=0}^{\infty} H_k$ ist. Dann ist $T^{(\infty)}$ eine Fortsetzung von allen $T^{(k)}$, also extremal auf H_k für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Weil $\bigcup_{k=0}^{\infty} H_k$ dicht in K liegt, folgt die Extremalität von $T^{(\infty)}$ auf K. Somit ist $T^{(\infty)}$ eine extremale Fortsetzung von T in $\mathcal{F}$. Hierbei haben wir mehrfach Lemma 2.14 angewendet. □

3 Isometrien

3.1 Kommutierende Isometrien

Für die Familie der kommutierenden Isometrien ist die Bestimmung der Extremalen nicht schwierig.

Satz 3.1. *Die Extremalen der Familie aller n-Tupel aus kommutierenden Isometrien sind genau die n-Tupel aus kommutierenden unitären Operatoren.*

Beweis. Sei $U = (U_1, \ldots, U_n) \in \mathcal{L}(H)^n$ ein kommutierendes Tupel unitärer Operatoren und $S \in \mathcal{L}(H \oplus K)^n$ eine Fortsetzung von U zu einem Tupel kommutierender Isometrien. Dann gilt für $x \in H$ und $i = 1, \ldots, n$ die Ungleichung

$$||x|| = ||U_i^* x|| = ||P_H S_i^* x|| \leq ||S_i^* x|| \leq ||x||,$$

also $||P_H S_i^* x|| = ||S_i^* x||$ und somit $S_i^* x \in H$. Es folgt $S_i^*(H) \subset H$ für $i = 1, \ldots, n$, das heißt, S ist eine triviale Fortsetzung von U. Mithin ist T extremal in der Familie der kommutierenden Isometrien.

Sei umgekehrt $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{L}(H)^n$ ein kommutierendes Tupel aus Isometrien, sodass nicht alle T_i unitär sind, ohne Einschränkung sei etwa T_1 nicht unitär. Wir zeigen, dass T eine nichttriviale Fortsetzung zu einer kommutierenden Isometrie hat. T_1 ist als Isometrie subnormal (das folgt zum Beispiel aus Korollar 1.23). Sei $S_1 \in \mathcal{L}(K)$ die minimale normale Fortsetzung von T_1. Nach Lemma 1.13 ist dann $K = \bigvee_{j=0}^{\infty} S_1^{*j}(H)$. Weil T_1 nicht normal ist, ist $S_1^* H \not\subset H$, also ist jede Fortsetzung von T der Form $(S_1, \ldots, S_n) \in \mathcal{L}(K)^n$ nichttrivial. Für $i = 2, \ldots, n$ und $x_0, \ldots, x_k \in H$ sei

$$S_i \left(\sum_{j=0}^{k} S_1^{*j} x_j \right) = \sum_{j=0}^{k} S_1^{*j} T_i x_j.$$

Unter Verwendung der Normalität von S_1 erhalten wir für $x_0, \ldots, x_k \in H$ und $i = 1, \ldots, n$ die Gleichungskette

$$\begin{aligned} \left|\left| \sum_{j=0}^{k} S_1^{*j} T_i x_j \right|\right|^2 &= \sum_{j=0}^{k} \sum_{l=0}^{k} \langle S_1^{*j} T_i x_j, S_1^{*l} T_i x_l \rangle \\ &= \sum_{j=0}^{k} \sum_{l=0}^{k} \langle {T_1}^l T_i x_j, {T_1}^j T_i x_l \rangle \qquad (S_1|_H = T_1) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{k}\sum_{l=0}^{k}\langle T_iT_1^l x_j, T_iT_1^j x_l\rangle \\
&= \sum_{j=0}^{k}\sum_{l=0}^{k}\langle T_1^l x_j, T_1^j x_l\rangle && (T_i^*T_i = 1) \\
&= \sum_{j=0}^{k}\sum_{l=0}^{k}\langle S_1^{*j} x_j, S_1^{*l} x_l\rangle \\
&= \left\|\sum_{j=0}^{k} S_1^{*j} x_j\right\|^2 .
\end{aligned}
$$

Somit sind die S_i wohldefiniert und setzen sich auf K zu Isometrien fort. Man beachte, dass diese Definition für $i = 1$ wegen der Normalität von S_1 wieder den Operator S_1 ergibt und dass $S_i\big|_H = T_i$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt. Für $1 \leq i, j \leq n$ und $x_0, \ldots, x_k \in H$ gilt weiterhin

$$
\begin{aligned}
S_jS_i \sum_{l=0}^{k} S_1^{*l} x_l &= S_j \sum_{l=0}^{k} S_1^{*l} T_i x_l \\
&= \sum_{l=0}^{k} S_1^{*l} T_j T_i x_l \\
&= \sum_{l=0}^{k} S_1^{*l} T_i T_j x_l \\
&= S_iS_j \sum_{l=0}^{k} S_1^{*l} x_l .
\end{aligned}
$$

Das zeigt, dass S ein kommutierendes Tupel von Operatoren ist, also eine nichttriviale Fortsetzung von T zu einem Tupel kommutierender Isometrien. □

Zusammen mit dem Satz 2.18 von Agler erhalten wir einen Fortsetzungssatz für Tupel kommutierender Isometrien, der von Itô [Itô58] und Brehmer [Bre61] stammt.

Korollar 3.2. *Jedes n-Tupel aus kommutierenden Isometrien besitzt eine gemeinsame Fortsetzung zu einem n-Tupel aus kommutierenden unitären Operatoren.* □

3.2 Sphärische Isometrien

Ziel dieses Abschnittes ist die Bestimmung der Extremalen der Familie $\mathcal{F}_{si}$ aller kommutierenden sphärischen Isometrien. Wir beginnen mit einem einfachen Argument, das wir öfters benötigen werden.

Lemma 3.3. *Sei $T \in \mathcal{L}(H, K)$ ein Operator derart, dass eine Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ existiert mit*

$$\operatorname{Re}\langle Tx, y\rangle \leq f(y) \quad \text{für alle } x \in H, y \in K.$$

Dann ist $T = 0$.

Beweis. Seien $x \in H, y \in K$ beliebig und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Drehfaktor mit $\lambda\langle Tx, y\rangle = |\langle Tx, y\rangle|$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$k|\langle Tx, y\rangle| = \langle T(k\lambda x), y\rangle = \operatorname{Re}\langle T(k\lambda x), y\rangle \leq f(y).$$

Im Limes $k \to \infty$ folgt $|\langle Tx, y\rangle| = 0$, also $T = 0$. □

Auch die folgende Rechnung wird häufiger gebraucht.

Lemma 3.4. *Sei $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{L}(H)^n$ eine kommutierende sphärische Kontraktion und $R = (R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{L}(H \oplus K)^n$ eine kommutierende Fortsetzung von T der Form*

$$R_i = \begin{pmatrix} T_i & A_i \\ 0 & B_i \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(H \oplus K) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Dann ist R genau dann eine sphärische Kontraktion, wenn

$$||x||^2 - \sum_{i=1}^n ||T_i x||^2 - 2\operatorname{Re}\Big\langle \sum_{i=1}^n A_i^* T_i x, y\Big\rangle + ||y||^2 - \sum_{i=1}^n ||A_i y||^2 - \sum_{i=1}^n ||B_i y||^2 \geq 0$$

für alle $x \in H$ und $y \in K$ gilt.

Beweis. Für alle $x \in H$ und $y \in K$ gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \left|\left| R_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right|\right|^2 &= \sum_{i=1}^n (||T_i x + A_i y||^2 + ||B_i y||^2) \\
&= \sum_{i=1}^n (||T_i x||^2 + 2\operatorname{Re}\langle T_i x, A_i y\rangle + ||A_i y||^2 + ||B_i y||^2) \\
&= \sum_{i=1}^n ||T_i x||^2 + 2\operatorname{Re}\Big\langle \sum_{i=1}^n A_i^* T_i x, y\Big\rangle + \sum_{i=1}^n ||A_i y||^2 + \sum_{i=1}^n ||B_i y||^2.
\end{aligned}$$

Weil R genau dann eine sphärische Kontraktion ist, wenn

$$\sum_{i=1}^n \left|\left| R_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right|\right|^2 \leq ||x||^2 + ||y||^2$$

für alle $x \in H$ und $y \in K$ gilt, folgt die Behauptung. □

Der folgende Satz ist ein wichtiger Schritt auf dem Weg zur Bestimmung von $\operatorname{ext}(\mathcal{F}_{si})$ und $\operatorname{ext}(\mathcal{F}_{sc})$.

Satz 3.5. *Kommutierende sphärisch unitäre Tupel sind extremal für die Familien der kommutierenden sphärischen Kontraktionen und der kommutierenden sphärischen Isometrien.*

Beweis. Sei $U = (U_1, \ldots, U_n)$ ein kommutierendes sphärisch unitäres Tupel. Nach Lemma 2.7 genügt es zu zeigen, dass U extremal für die Familie der kommutierenden sphärischen Kontraktionen ist.

Sei also $S \in \mathcal{L}(H \oplus K)^n$ mit $S \geq U$ eine kommutierende sphärische Kontraktion. Wir zeigen, dass S eine triviale Fortsetzung von U ist. Für $i = 1, \ldots, n$ hat S_i eine Darstellung

$$S_i = \begin{pmatrix} U_i & A_i \\ 0 & B_i \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(H \oplus K).$$

Der $(1,2)$-Eintrag der Gleichung $S_i S_j = S_j S_i$ liefert dann

$$U_i A_j + A_i B_j = U_j A_i + A_j B_i \qquad \text{für } i, j = 1, \ldots, n. \tag{3.1}$$

Weil S eine sphärische Kontraktion und U insbesondere eine sphärische Isometrie ist, gilt nach Lemma 3.4 für alle $x \in H$ und $y \in K$ die Ungleichung

$$2 \operatorname{Re} \left\langle \sum_{i=1}^{n} A_i^* U_i x, y \right\rangle + \sum_{i=1}^{n} ||A_i y||^2 + \sum_{i=1}^{n} ||B_i y||^2 \leq ||y||^2.$$

Indem wir $x = 0$ setzen, erhalten wir daraus insbesondere

$$\sum_{i=1}^{n} ||A_i y||^2 + \sum_{i=1}^{n} ||B_i y||^2 \leq ||y||^2 \quad \text{für } y \in K. \tag{3.2}$$

Lemma 3.3 impliziert ferner $\sum_{i=1}^{n} A_i^* U_i = 0$ und somit auch

$$\sum_{i=1}^{n} U_i^* A_i = 0.$$

Sei nun $j \in \{1, \ldots, n\}$. Wir zeigen $A_j = 0$. Nach Voraussetzung ist jedes U_i normal und es gilt $U_i U_j = U_j U_i$ für alle i. Nach dem Satz von Putnam-Fuglede [Rud91, Theorem 12.16] ist dann auch $U_i^* U_j = U_j U_i^*$ für alle i. Durch Anwendung von U_i^* auf Gleichung (3.1) und Summation über i erhalten wir

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} U_i^* U_i A_j}_{=A_j} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} U_i^* A_i B_j}_{=0} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} U_i^* U_j A_i}_{=U_j \sum_{i=1}^{n} U_i^* A_i = 0} + \sum_{i=1}^{n} U_i^* A_j B_i.$$

Somit folgt $A_j = \sum_{i=1}^n U_i^* A_j B_i$. Weil U insbesondere eine sphärische Kontraktion ist, ist $U^* = (U_1^*, \ldots, U_n^*)$ eine Zeilenkontraktion. Für alle $y \in K$ mit $||y|| \leq 1$ gilt also

$$||A_j y||^2 = \left|\left|\sum_{i=1}^n U_i^* A_j B_i y\right|\right|^2 \leq \sum_{i=1}^n ||A_j B_i y||^2 \leq ||A_j||^2 \sum_{i=1}^n ||B_i y||^2.$$

Nach Ungleichung (3.2) folgt für alle $y \in K$ mit $||y|| \leq 1$ die Abschätzung

$$||A_j y||^2 \leq ||A_j||^2 \left(||y||^2 - \sum_{i=1}^n ||A_i y||^2 \right) \leq ||A_j||^2 (1 - ||A_j y||^2).$$

Umordnen liefert $||A_j y||^2 (1 + ||A_j||^2) \leq ||A_j||^2$ für alle $y \in K$ mit $||y|| \leq 1$ und somit

$$||A_j||^2 (1 + ||A_j||^2) = \sup_{||y|| \leq 1} ||A_j y||^2 (1 + ||A_j||^2) \leq ||A_j||^2.$$

Es folgt $A_j = 0$ wie gewünscht. Mithin ist S eine triviale Fortsetzung von U. □

Wir werden im Folgenden Multiindixnotation benötigen. Für ein $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ sei stets $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!$ und

$$\gamma_\alpha = \binom{|\alpha|}{\alpha} = \frac{|\alpha|!}{\alpha!}.$$

Für $i = 1, \ldots, n$ sei ferner $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, wobei die 1 an der i-ten Stelle steht. Sind α und β zwei Multiindizes, so schreiben wir $\alpha \geq \beta$, falls $\alpha_i \geq \beta_i$ für alle i gilt. Ist $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, so sei $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{\alpha_n}$. Für ein vertauschendes Tupel $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{L}(H)^n$ definieren wir ebenso $T^\alpha = T_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot T_n^{\alpha_n}$.

Das folgende Lemma stammt von Attele und Lubin [AL96] und wird zum Nachweis der Subnormalität kommutierender sphärischer Isometrien nützlich sein.

Lemma 3.6. *Sei $(T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{L}(H)^n$ eine kommutierende sphärische Isometrie. Dann gilt für $i = 1, \ldots, n$ und alle $k \in \mathbb{N}$:*

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} T_i^{*j} T_i^j = \sum_{\substack{|\alpha|=k \\ \alpha_i=0}} \gamma_\alpha T^{*\alpha} T^\alpha.$$

Beweis. Der Beweis erfolgt per Induktion nach k. Für $k = 1$ folgt die Aussage direkt daraus, dass T eine sphärische Isometrie ist. Sei die Behauptung also für ein $k \geq 1$

bereits gezeigt. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k+1}(-1)^j\binom{k+1}{j}T_i^{*j}T_i^j &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}T_i^{*j}T_i^j + \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^j\binom{k}{j-1}T_i^{*j}T_i^j \\
&= \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}T_i^{*j}T_i^j - T_i^*\left(\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}T_i^{*j}T_i^j\right)T_i \\
&= \sum_{\substack{|\alpha|=k\\ \alpha_i=0}}\gamma_\alpha T^{*\alpha}T^\alpha - T_i^*\left(\sum_{\substack{|\alpha|=k\\ \alpha_i=0}}\gamma_\alpha T^{*\alpha}T^\alpha\right)T_i \\
&= \sum_{\substack{|\alpha|=k\\ \alpha_i=0}}\gamma_\alpha T^{*\alpha}(1-T_i^*T_i)T^\alpha.
\end{aligned}
$$

Für $j = 1, \ldots, n$ sei nun

$$M_j : \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H), \quad S \mapsto T_j^* S T_j$$

und $M = (M_1, \ldots, M_n)$. Weil T ein vertauschendes Tupel von Operatoren ist, kommutieren die M_j. Unter Verwendung der Tatsache, dass T eine sphärische Isometrie ist, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{|\alpha|=k\\ \alpha_i=0}}\gamma_\alpha T^{*\alpha}(1-T_i^*T_i)T^\alpha &= \sum_{\substack{|\alpha|=k\\ \alpha_i=0}}\gamma_\alpha M^\alpha(1-T_i^*T_i) \\
&= \left(\sum_{j\neq i} M_j\right)^k (1-T_i^*T_i) \\
&= \left(\sum_{j\neq i} M_j\right)^{k+1} (1) \\
&= \sum_{\substack{|\alpha|=k+1\\ \alpha_i=0}}\gamma_\alpha T^{*\alpha}T^\alpha.
\end{aligned}
$$

Das zeigt die Behauptung für $k+1$. □

Zusammen mit dem Subnormalitätskriterium von Agler erhalten wir, dass sphärische Isometrien komponentenweise subnormal sind. Wir werden gleich sehen, dass sie auch eine gemeinsame normale Fortsetzung erlauben.

Korollar 3.7. *Sei $(T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{L}(H)^n$ eine kommutierende sphärische Isometrie. Dann ist T_i subnormal für $i = 1, \ldots, n$.*

Beweis. Das folgt direkt aus Lemma 3.6 zusammen mit Korollar 1.23. □

Wir kommen nun zum zentralen Satz dieses Abschnittes, der die Extremalen der Familie aller kommutierenden sphärischen Isometrien beschreibt. Man beachte dabei die Ähnlichkeit zu Satz 3.1.

Satz 3.8. *Die Extremalen der Familie aller kommutierenden sphärischen Isometrien sind genau die kommutierenden sphärisch unitären Tupel.*

Beweis. Nach Satz 3.5 sind die sphärisch unitären Tupel extremal für die Familie der sphärischen Isometrien.

Sei umgekehrt $T = (T_1, \ldots, T_n)$ eine kommutierende sphärische Isometrie, die nicht sphärisch unitär ist. Wir zeigen, dass T dann eine nichttriviale Fortsetzung in $\mathcal{F}_{si}$ besitzt. Ohne Einschränkung sei dazu T_1 nicht normal. Nach Korollar 3.7 ist T_1 aber subnormal, sei $S_1 \in \mathcal{L}(K)$ die minimale normale Fortsetzung von T_1. Weil T_1 nicht normal ist, ist $S_1^* H \not\subset H$, also ist jede Fortsetzung der Form $(S_1, \ldots, S_n) \in \mathcal{L}(K)^n$ nichttrivial. Für $i = 2, \ldots, n$ und $x_0, \ldots, x_k \in H$ definieren wir wie im Beweis zu Satz 3.1

$$S_i \left(\sum_{j=0}^{k} S_1^{*j} x_j \right) = \sum_{j=0}^{k} S_1^{*j} T_i x_j.$$

Ähnlich wie dort rechnet man nach, dass für $i = 1, \ldots, n$ und $x_0, \ldots, x_k$ die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| \sum_{j=0}^{k} S_1^{*j} T_i x_j \right\|^2 = \left\| \sum_{j=0}^{k} S_1^{*j} x_j \right\|^2$$

gilt. Somit sind $S_2, \ldots, S_n$ wohldefiniert und können auf K zu einem sphärisch isometrischen Tupel fortgesetzt werden. Wörtlich wie im Beweis zu Satz 3.1 sieht man, dass S ein kommutierendes Tupel von Operatoren ist somit eine nichttriviale Fortsetzung von T in $\mathcal{F}_{si}$ darstellt. □

Der resultierende Fortsetzungssatz stammt von Athavale [Ath90]:

Korollar 3.9. *Jede kommutierende sphärische Isometrie besitzt eine Fortsetzung zu einem kommutierenden sphärisch unitären Tupel.* □

4 Der n-Shift M_z auf dem Drury-Arveson-Raum $H(\mathbb{B})$

4.1 Definition und erste Eigenschaften

Im Folgenden sei stets $\mathbb{B} = \mathbb{B}_n$ die offene euklidische Einheitskugel in $\mathbb{C}^n$ und $\mathcal{O}(\mathbb{B})$ die Menge aller auf $\mathbb{B}$ holomorphen Funktionen. Wir schreiben z für die identische Funktion auf $\mathbb{B}$. Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ sei nach wie vor $\gamma_\alpha = \frac{|\alpha|!}{\alpha!}$.

Definition 4.1. Der *Drury-Arveson-Raum* $H(\mathbb{B})$ ist definiert durch

$$H(\mathbb{B}) = \left\{ f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha z^\alpha \in \mathcal{O}(\mathbb{B}) : ||f||^2 = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{|a_\alpha|^2}{\gamma_\alpha} < \infty \right\}.$$

Vermöge

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{a_\alpha \overline{b_\alpha}}{\gamma_\alpha}$$

für $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha z^\alpha$ und $g = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} b_\alpha z^\alpha$ wird ein Skalarprodukt auf $H(\mathbb{B})$ definiert, welches die Norm induziert. $H(\mathbb{B})$ wird damit zu einem Hilbertraum. Die Familie

$$(e_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} = (\sqrt{\gamma_\alpha} z^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$$

ist eine Orthonormalbasis für $H(\mathbb{B})$. Insbesondere liegen die Polynome $\mathbb{C}[z]$ dicht in $H(\mathbb{B})$.

Der Drury-Arveson-Raum wird oft auch durch das folgende Lemma definiert.

Lemma 4.2. *$H(\mathbb{B})$ ist ein funktionaler Hilbertraum mit reproduzierendem Kern*

$$K(z, w) = \frac{1}{1 - \langle z, w \rangle}.$$

Beweis. Für $z, w \in \mathbb{B}$ ist

$$K(z, w) = \frac{1}{1 - \langle z, w \rangle} = \sum_{k=0}^{\infty} \langle z, w \rangle^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w_i} \right)^k = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \gamma_\alpha z^\alpha \overline{w}^\alpha.$$

Wegen

$$||K(\cdot,w)||^2 = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \frac{|\gamma_\alpha \overline{w}^\alpha|^2}{\gamma_\alpha} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \gamma_\alpha |w^\alpha|^2 = \frac{1}{1-|w|^2}$$

ist also $K(\cdot,w) \in H(\mathbb{B})$. Für $f = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} a_\alpha z^\alpha \in H(\mathbb{B})$ gilt dann

$$\langle f, K(\cdot,w)\rangle = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \frac{a_\alpha \gamma_\alpha w^\alpha}{\gamma_\alpha} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} a_\alpha w^\alpha = f(w).$$

□

Für eine Funktion $f = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} a_\alpha z^\alpha \in H(\mathbb{B})$ und $i = 1,\dots,n$ ist

$$||z_i f||^2 = \left|\left| \sum_{\alpha\geq e_i} a_{\alpha-e_i} z^\alpha \right|\right|^2 = \sum_{\alpha\geq e_i} \frac{|a_{\alpha-e_i}|^2}{\gamma_{\alpha-e_i}} \underbrace{\frac{\gamma_{\alpha-e_i}}{\gamma_\alpha}}_{=\frac{\alpha_i}{|\alpha|}\leq 1} \leq \sum_{\alpha\geq e_i} \frac{|a_{\alpha-e_i}|^2}{\gamma_{\alpha-e_i}} = ||f||^2.$$

Deshalb ist die folgende Definition sinnvoll.

Definition 4.3. Der n-Shift $M_z = (M_{z_1},\dots,M_{z_n}) \in \mathcal{L}(H(\mathbb{B}))^n$ sei definiert durch

$$M_{z_i} f = z_i f$$

für $i = 1,\dots,n$.

Das adjungierte Tupel M_z^* des n-Shifts wird eine besondere Rolle bei der Untersuchung sphärischer Kontraktionen spielen. Man beachte, dass der Drury-Arveson-Raum für $n = 1$ gerade der klassische Hardy-Raum ist. Daher ist der 1-Shift unitär äquivalent zum unilateralen Rechtsshift auf dem $l^2(\mathbb{N}_0)$.

Das folgende Lemma enthält einige elementare Eigenschaften von M_z.

Lemma 4.4. *Der n-Shift M_z hat folgende Eigenschaften:*

(a) *Für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $i = 1,\dots,n$ ist*

$$M_{z_i}^* z^\alpha = \begin{cases} \frac{\alpha_i}{|\alpha|} z^{\alpha-e_i}, & \textit{falls } \alpha \neq 0, \\ 0, & \textit{falls } \alpha = 0. \end{cases}$$

(b) $\sum_{i=1}^n M_{z_i} M_{z_i}^* = 1 - P_0$, *wobei $P_0 : H(\mathbb{B}) \to H(\mathbb{B}), f \mapsto f(0)$ die Orthogonalprojektion von $H(\mathbb{B})$ auf die konstanten Funktionen ist. Insbesondere ist* $\sum_{i=1}^n M_{z_i} M_{z_i}^* \leq 1$.

(c) $\sum_{i=1}^n M_{z_i}^* M_{z_i} \geq 1$.

Beweis. (a) Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Für $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha z^\alpha \in H(\mathbb{B})$ sei

$$T_i f = \sum_{\alpha \geq e_i} \frac{\alpha_i}{|\alpha|} a_\alpha z^{\alpha - e_i}.$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\left|\left| \sum_{\alpha \geq e_i} \frac{\alpha_i}{|\alpha|} a_\alpha z^{\alpha - e_i} \right|\right|^2 &= \left|\left| \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{\alpha_i + 1}{|\alpha| + 1} a_{\alpha + e_i} z^\alpha \right|\right|^2 \\
&= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \left(\frac{\alpha_i + 1}{|\alpha| + 1} \right)^2 \frac{|a_{\alpha + e_i}|^2}{\gamma_{\alpha + e_i}} \frac{\gamma_{\alpha + e_i}}{\gamma_\alpha} \\
&= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{\alpha_i + 1}{|\alpha| + 1} \frac{|a_{\alpha + e_i}|^2}{\gamma_{\alpha + e_i}} \\
&\leq ||f||^2
\end{aligned}$$

ist T_i ein stetiger linearer Operator auf $H(\mathbb{B})$. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ gilt andererseits

$$\langle M_{z_i}^* z^\alpha, z^\beta \rangle = \langle z^\alpha, z^{\beta + e_i} \rangle = \begin{cases} \frac{1}{\gamma_\alpha}, & \text{für } \alpha = \beta + e_i, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im Fall $\alpha_i = 0$ verschwindet dieser Ausdruck, ansonsten folgt

$$\langle M_{z_i}^* z^\alpha, z^\beta \rangle = \left\langle \frac{\gamma_{\alpha - e_i}}{\gamma_\alpha} z^{\alpha - e_i}, z^\beta \right\rangle = \left\langle \frac{\alpha_i}{|\alpha|} z^{\alpha - e_i}, z^\beta \right\rangle.$$

Daraus erhalten wir $M_{z_i}^* = T_i$, womit Teil (a) gezeigt ist.

(b) Aus Teil (a) folgt für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ die Beziehung

$$M_{z_i} M_{z_i}^* z^\alpha = \begin{cases} \frac{\alpha_i}{|\alpha|} z^\alpha, & \text{falls } \alpha \neq 0, \\ 0, & \text{falls } \alpha = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Für $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha z^\alpha \in H(\mathbb{B})$ gilt somit

$$\left(\sum_{i=1}^n M_{z_i} M_{z_i}^* \right) f = \sum_{\alpha \neq 0} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{|\alpha|} \right) a_\alpha z^\alpha = \sum_{\alpha \neq 0} a_\alpha z^\alpha = f - f(0).$$

(c) Für $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha z^\alpha \in H(\mathbb{B})$ ist

$$\left\langle \sum_{i=1}^n M_{z_i}^* M_{z_i} f, f \right\rangle = \sum_{i=1}^n ||M_{z_i} f||^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{|a_\alpha|^2}{\gamma_\alpha} \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha + e_i}}$$

$$= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{|a_\alpha|^2}{\gamma_\alpha} \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha+e_i}} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{|a_\alpha|^2}{\gamma_\alpha} \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i + 1}{|\alpha| + 1}}_{=\frac{|\alpha|+n}{|\alpha|+1} \geq 1}$$
$$\geq ||f||^2.$$

Somit gilt $\sum_{i=1}^n M_{z_i}^* M_{z_i} \geq 1$. □

Man sieht unmittelbar, dass die M_{z_i} nicht normal sind. Es gilt aber:

Lemma 4.5. *Das Tupel $M_z \in \mathcal{L}(H(\mathbb{B}))^n$ ist wesentlich normal.*

Beweis. Für $i = 1, \ldots, n$ sei $S_i = M_{z_i}^* M_{z_i} - M_{z_i} M_{z_i}^*$. Für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $i = 1, \ldots, n$ gilt nach Lemma 4.4 (a)

$$M_{z_i}^* M_{z_i} z^\alpha = M_{z_i}^* z^{\alpha+e_i} = \frac{\alpha_i + 1}{|\alpha| + 1} z^\alpha.$$

Ist nun $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha z^\alpha \in H(\mathbb{B})$ beliebig, so folgt daraus zusammen mit Gleichung (4.1) die Identität

$$S_i f = (M_{z_i}^* M_{z_i} - M_{z_i} M_{z_i}^*) f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha \frac{\alpha_i + 1}{|\alpha| + 1} z^\alpha - \sum_{\alpha \neq 0} a_\alpha \frac{\alpha_i}{|\alpha|} z^\alpha$$
$$= f(0) + \sum_{\alpha \neq 0} a_\alpha \left(\frac{\alpha_i + 1}{|\alpha| + 1} - \frac{\alpha_i}{|\alpha|} \right) z^\alpha = f(0) + \sum_{\alpha \neq 0} a_\alpha \frac{|\alpha| - \alpha_i}{(|\alpha| + 1)|\alpha|} z^\alpha.$$

Für $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sup_{|\alpha| \geq N+1} \left| \frac{|\alpha| - \alpha_i}{(|\alpha| + 1)|\alpha|} \right| \leq \sup_{|\alpha| \geq N+1} \frac{2|\alpha|}{(|\alpha| + 1)|\alpha|} = \frac{2}{N+2}.$$

Bezeichnet also P_N die Orthogonalprojektion von $H(\mathbb{B})$ auf den Raum der Polynome vom Grad $\leq N$, so folgt

$$||(P_N S_i - S_i) f||^2 = \left|\left| \sum_{|\alpha| \geq N+1} \frac{|\alpha| - \alpha_i}{(|\alpha| + 1)|\alpha|} a_\alpha z^\alpha \right|\right|^2 = \sum_{|\alpha| \geq N+1} \left| \frac{|\alpha| - \alpha_i}{(|\alpha| + 1)|\alpha|} \right|^2 \frac{|a_\alpha|^2}{\gamma_\alpha}$$
$$\leq \sum_{|\alpha| \geq N+1} \left(\frac{2}{N+2} \right)^2 \frac{|a_\alpha|^2}{\gamma_\alpha} \leq \left(\frac{2}{N+2} \right)^2 ||f||^2.$$

Somit gilt

$$||P_N S_i - S_i|| \leq \frac{2}{N+2} \xrightarrow{N \to \infty} 0,$$

also ist $S_i = M_{z_i}^* M_{z_i} - M_{z_i} M_{z_i}^*$ als Limes von Operatoren mit endlichem Rang kompakt. □

Der unilaterale Rechtsshift ist ein einfaches Beispiel eines Fredholmoperators. Das folgende Korollar ist die n-dimensionale Verallgemeinerung dieser Aussage.

Korollar 4.6. *Das Tupel M_z ist Fredholm.*

Beweis. Nach Lemma 4.4 (b) ist $\sum_{i=1}^n M_{z_i} M_{z_i}^*$ Fredholm. Die Behauptung folgt also direkt aus Lemma 4.5 und Lemma 1.33. □

Alle Kohomologiegruppen des Koszul-Komplexes $K^\bullet(M_z, H(\mathbb{B}))$ sind also endlichdimensional. Um diese Gruppen genauer bestimmen zu können, untersuchen wir zunächst den Koszul-Komplex von M_z auf dem Polynomring $\mathbb{C}[z]$.

4.2 Der Koszul-Komplex von M_z auf dem Polynomring $\mathbb{C}[z]$

Als erstes betrachten wir den Koszul-Komplex für ein Element eines Moduls. Wir werden sehen, dass dieser eng mit dem Koszul-Komplex für vertauschende Modulhomomorphismen verwandt ist. Die Darstellung orientiert sich im Wesentlichen an [Eis95, Chapter 17]. Sei im Folgenden stets R ein kommutativer noetherscher Ring mit 1.

Definition 4.7. Sei N ein R-Modul und $x \in N$. Der Koszul-Komplex von x ist definiert als

$$K(x) : 0 \to R \xrightarrow{d_x} N \xrightarrow{d_x} \Lambda^2(N) \xrightarrow{d_x} \ldots \xrightarrow{d_x} \Lambda^p N \xrightarrow{d_x} \Lambda^{p+1} N \xrightarrow{d_x} \ldots,$$

wobei $d_x(a) = x \wedge a$ sei. Ist N ein freier R-Modul vom Rang n und $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n \cong N$, so schreiben wir $K(x_1, \ldots, x_n)$ für $K(x)$.

Bemerkung 4.8. Ist R ein K-Modul für einen kommutativen Ring K mit 1, so können wir für alle p folgende Identifikation vornehmen:

$$\Lambda_R^p(R^n) = \Lambda_R^p(R \otimes_K K^n) = R \otimes_K \Lambda_K^p(K^n).$$

Seien nun $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ und $s_1, \ldots, s_n$ die kanonische R-Basis für R^n. Für alle $r \in R$ und alle Teilmengen $\{i_1, \ldots, i_p\} \subset \{1, \ldots, n\}$ gilt dann

$$\begin{aligned} d_x(r s_{i_1} \wedge \ldots \wedge s_{i_p}) &= x \wedge (r s_{i_1} \wedge \ldots \wedge s_{i_p}) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i s_i \right) \wedge (r s_{i_1} \wedge \ldots \wedge s_{i_p}) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i r) s_i \wedge s_{i_1} \wedge \ldots \wedge s_{i_p} \in \Lambda_R^p(R^n). \end{aligned}$$

Ist $M_x = (M_{x_1}, \ldots, M_{x_n})$ das vertauschende Tupel der K-Modulhomomorphismen

$$M_{x_i} : R \to R, \quad r \mapsto x_i r \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

so gilt daher mit der Identifikation von oben

$$K(x) = K^\bullet(M_x, R).$$

Zwei Spezialfälle sind von eigenem Interesse:

1. Für $K = R$ folgt zusammen mit Bemerkung 1.24 eine Darstellung für die Kohomologiegruppen an den beiden Enden von $K(x_1, \ldots, x_n)$, nämlich

$$\begin{aligned} &H^0(K(x_1, \ldots, x_n)) = \{r \in R : x_j r = 0 \text{ für } j = 1, \ldots, n\} \quad \text{und} \\ &H^n(K(x_1, \ldots, x_n)) = R/\langle x_1, \ldots, x_n \rangle. \end{aligned}$$

   Natürlich kann man das auch leicht direkt nachrechnen.

2. Ist $R = \mathbb{C}[z], K = \mathbb{C}$ und $x = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}[z]^n$, so gilt

$$K(z_1, \ldots, z_n) = K^\bullet(M_z, \mathbb{C}[z]).$$

Mit dem Begriff des Tensorproduktes zweier Komplexe werden wir beschreiben können, wie der Koszul-Komplex eines Paares (x', x'') aus den Koszul-Komplexen $K(x')$ und $K(x'')$ entsteht.

Definition 4.9. Seien

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &: \ldots \to F_i \xrightarrow{\varphi_i} F_{i+1} \to \ldots \\ \mathcal{G} &: \ldots \to G_i \xrightarrow{\psi_i} G_{i+1} \to \ldots \end{aligned}$$

zwei Komplexe von R-Moduln. Das Tensorprodukt von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ ist definiert als

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} : \ldots \to \sum_{i+j=k} F_i \otimes G_j \xrightarrow{d^k} \sum_{i+j=k+1} F_i \otimes G_j \to \ldots,$$

wobei die Abbildung d^k auf $F_i \otimes G_j$ durch

$$\varphi_i \otimes 1 + (-1)^i 1 \otimes \psi_j$$

gegeben sei.

Man rechnet leicht nach, dass das Vorzeichen in der Definition von d^k gerade so gewählt wurde, dass $d^{k+1} d^k = 0$ gilt. Somit ist $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ in der Tat ein Komplex.

Lemma 4.10. *Ist $N = N' \oplus N''$, so ist $\Lambda N = \Lambda N' \otimes \Lambda N''$ als graduiert kommutative Algebren, wobei die Multiplikation in $\Lambda N' \otimes \Lambda N''$ für homogene Elemente durch*

$$(a \otimes b) \wedge (c \otimes d) = (-1)^{\deg(b)\deg(c)}(a \wedge c) \otimes (b \wedge d)$$

definiert sei. Ist $x' \in N'$ und $x'' \in N''$ mit $x = (x', x'') \in N$, so ist

$$K(x) = K(x') \otimes K(x'').$$

Beweis. Aus der multilinearen Algebra ist bekannt, dass die kanonische Abbildung

$$\Lambda(N') \otimes \Lambda(N'') \to \Lambda(N), \quad a \otimes b \mapsto a \wedge b$$

ein wohldefinierter R-Modulisomorphismus ist, siehe etwa [Eis95, Prop. A2.2]. Mit dieser Identifikation ist

$$\begin{aligned}(a \otimes b) \wedge (c \otimes d) &= (-1)^{\deg(b)\deg(c)}(a \wedge c) \otimes (b \wedge d)\\ &= (-1)^{\deg(b)\deg(c)}(a \wedge c) \wedge (b \wedge d)\\ &= (a \wedge b) \wedge (c \wedge d),\end{aligned}$$

also ist auch $\Lambda N = \Lambda N' \otimes \Lambda N''$ als graduiert kommutative Algebren. Es ist klar, dass dabei dem Modul $\Lambda^p N$ der Modul $\sum_{i+j=p} \Lambda^i N' \otimes \Lambda^j N''$ entspricht. Deshalb genügt es zu zeigen, dass unter dieser Identifikation die Korandabbildungen von $K(x)$ und $K(x') \otimes K(x'')$ übereinstimmen. Sei dazu $y = y' \otimes y'' \in \Lambda N' \otimes \Lambda N'' = \Lambda N$ und

$$\begin{aligned}x = (x', x'') = x' \otimes 1 + 1 \otimes x'' &\in \left(\Lambda^1 N' \otimes R\right) \oplus \left(R \otimes \Lambda^1 N''\right)\\ &= \left(\Lambda^1 N' \otimes \Lambda^0 N''\right) \oplus \left(\Lambda^0 N' \otimes \Lambda^1 N''\right)\\ &= \Lambda^1 N.\end{aligned}$$

Wegen $\deg(1) = 0$ und $\deg(x'') = 1$ ist dann

$$\begin{aligned}d_x(y) = x \wedge y &= (x' \otimes 1 + 1 \otimes x'') \wedge (y' \otimes y'')\\ &= (x' \wedge y') \otimes y'' + (-1)^{\deg(y')} y' \otimes (x'' \wedge y'')\\ &= (d_{x'} \otimes 1)(y' \otimes y'') + (-1)^{\deg(y')}(1 \otimes d_{x''})(y' \otimes y''),\end{aligned}$$

wie gewünscht. □

Das Tensorprodukt zweier Komplexe ist für uns besonders interessant, wenn einer der Komplexe der Koszul-Komplex eines Elementes $y \in R$ ist. Das folgende Lemma zeigt, wie in diesem Fall die Kohomologiegruppen des Tensorproduktes der Komplexe mit denen der einzelnen Komplexe zusammenhängen.

Lemma 4.11. *Ist $\mathcal{F}$ der Koszul-Komplex eines Elementes $y \in R$ und $(\mathcal{G}, \psi)$ ein weiterer Komplex von R-Moduln, so gibt es eine lange exakte Kohomologiesequenz*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^p(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) \arrow[r] & H^p(\mathcal{G}) \arrow[dll, "y"] \\
H^p(\mathcal{G}) \arrow[r] & H^{p+1}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) \arrow[r] & H^{p+1}(\mathcal{G}) \arrow[dll, "y"] \\
H^{p+1}(\mathcal{G}) \arrow[r] & H^{p+2}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}.$$

Beweis. Für $n \in \mathbb{Z}$ sei $\mathcal{G}[n]$ der um n-Stellen verschobene Komplex, also $\mathcal{G}[n]_i = \mathcal{G}_{n+i}$ für alle i. Die Korandabbildungen von $\mathcal{G}[n]$ seien die Korandabbildungen von $\mathcal{G}$, multipliziert mit $(-1)^n$. Der Komplex $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ hat die Form

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & G_i \arrow[r, "\psi_i"] \arrow[ddr, "y"] & G_{i+1} \arrow[r, "\psi_{i+1}"] \arrow[ddr, "y"] & G_{i+1} \arrow[r] & \cdots \\
& \oplus & \oplus & \oplus & \\
\cdots \arrow[r] & G_{i-1} \arrow[r, "-\psi_{i-1}"'] & G_i \arrow[r, "-\psi_i"'] & G_{i+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}.$$

Das kommutierende Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & G_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "-\psi_{i-1}"'] & G_{i-1} \arrow[d, "-\psi_{i-1}"'] & \oplus & G_i \arrow[r] \arrow[d, "\psi_i"] \arrow[dll, "y"] & G_i \arrow[r] \arrow[d, "\psi_i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & G_i \arrow[r] & G_i & \oplus & G_{i+1} \arrow[r] & G_{i+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

liefert also eine kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$0 \to \mathcal{G}[-1] \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \to \mathcal{G} \to 0.$$

Wegen $H^p(\mathcal{G}[-1]) = H^{p-1}(\mathcal{G})$ ist die zugehörige lange exakte Kohomologiesequenz gegeben durch

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^p(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) \arrow[r] & H^p(\mathcal{G}) \arrow[dll, "\delta"] \\
H^p(\mathcal{G}) \arrow[r] & H^{p+1}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) \arrow[r] & H^{p+1}(\mathcal{G}) \arrow[dll, "\delta"] \\
H^{p+1}(\mathcal{G}) \arrow[r] & H^{p+2}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}.$$

Die Verbindungshomomorphismen δ sind in der Tat von der Multiplikation mit y induziert: Ist $x \in G_p$ mit $\psi_p(x) = 0$, so ist $(0, x) \in G_{p-1} \oplus G_p$ ein Urbild. Die

Korandabbildung von $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ bildet $(0, x)$ auf $(yx, \psi_p(x)) = (yx, 0) \in G_p \oplus G_{p+1}$ ab. Das Urbild $yx \in G_p$ repräsentiert dann die Klasse von $\delta([x]) \in H^{p+1}(\mathcal{G}[-1]) = H^p(\mathcal{G})$.

$\square$

Wir erhalten ein Korollar, das uns ermöglichen wird, die Kohomologiegruppen des Koszul-Komplexes $K(x_1, \ldots, x_n)$ per Induktion nach n zu bestimmen.

Korollar 4.12. *Ist $x = (x', y) \in N = N' \oplus R$, so gibt es eine lange exakte Kohomologiesequenz*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^p(K(x)) \arrow[r] & H^p(K(x')) \arrow[dll, rounded corners, "y"] \\
H^p(K(x')) \arrow[r] & H^{p+1}(K(x)) \arrow[r] & H^{p+1}(K(x')) \arrow[dll, rounded corners, "y"] \\
H^{p+1}(K(x')) \arrow[r] & H^{p+2}(K(x)) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}.$$

Beweis. Man überlegt sich leicht, dass der durch $(x', y) \mapsto (y, x')$ gegebene Isomorphismus $N' \oplus R \cong R \oplus N'$ einen Isomorphismus von Komplexen $K(x) \cong K(y, x')$ induziert. Nach Lemma 4.10 ist also $K(x) \cong K(y) \otimes K(x')$. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 4.11. $\square$

Die folgende Definition verallgemeinert den Begriff eines Elementes von R, das kein Nullteiler und keine Einheit ist, auf n-Tupel von Elementen in R.

Definition 4.13. Eine Folge von Elementen $x_1, \ldots, x_n \in R$ heißt *reguläre Folge*, falls die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(a) $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \neq R$.

(b) Für $i = 1, \ldots, n$ ist x_i kein Nullteiler in $R/\langle x_1, \ldots, x_{i-1} \rangle$.

Mit der bisher entwickelten Theorie können wir die Kohomologiegruppen des Koszul-Komplexes einer regulären Folge bestimmen.

Satz 4.14. *Sei $x_1, \ldots, x_n \in R$ eine reguläre Folge. Dann ist*

$$H^p(K(x_1, \ldots, x_n)) = \begin{cases} 0, & \textit{falls } 0 \leq p \leq n-1, \\ R/\langle x_1, \ldots, x_n \rangle, & \textit{falls } p = n. \end{cases}$$

Beweis. Im Fall $p = n$ ist die Aussage aus Bemerkung 4.8 bekannt. Wir zeigen nun per Induktion nach n, dass $H^p(K(x_1, \ldots, x_n)) = 0$ für $0 \leq p \leq n-1$ und jede reguläre Folge $x_1, \ldots, x_n$ in R gilt.

Ist x_1 eine reguläre Folge in R, so ist x_1 kein Nullteiler und deshalb $H^0(K(x_1)) = 0$, was die Behauptung für $n = 1$ zeigt. Sei nun $n \geq 2$ und die Behauptung für reguläre Folgen der Länge $n-1$ bereits gezeigt. Wir definieren $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ sowie $x = (x_1, \dots, x_n)$. Korollar 4.12 liefert eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$
\begin{tikzcd}
 & & \cdots \arrow[dll, rounded corners] \\
H^{p-1}(K(x')) \arrow[r] & H^p(K(x)) \arrow[r] & H^p(K(x')) \arrow[dll, rounded corners] \\
\cdots & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & \cdots \arrow[dll, rounded corners] \\
H^{n-2}(K(x')) \arrow[r] & H^{n-1}(K(x)) \arrow[r] & H^{n-1}(K(x')) \arrow[dll, rounded corners, "x_n"] \\
H^{n-1}(K(x')) \arrow[r] & H^n(K(x)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\quad .
$$

Weil nach Induktionsvoraussetzung $H^p(K(x')) = 0$ für $p < n-1$ ist, folgt daraus $H^p(K(x)) = 0$ für $p < n-1$. Im Fall $p = n-1$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
H^{n-1}(K(x)) &= \ker(H^{n-1}(K(x')) \xrightarrow{x_n} H^{n-1}(K(x'))) \\
&= \ker(R/\langle x_1, \dots, x_{n-1}\rangle \xrightarrow{x_n} R/\langle x_1, \dots, x_{n-1}\rangle) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

weil x_n kein Nullteiler in $R/\langle x_1, \dots, x_{n-1}\rangle$ ist. Damit ist der Beweis vollständig. $\square$

Mit diesem Satz erhalten wir das gewünschte Resultat über den Koszul-Komplex von M_z auf dem Polynomring.

Korollar 4.15. *Für den Koszul-Komplex des Tupels M_z auf $\mathbb{C}[z]$ gilt*

$$
\dim_{\mathbb{C}} H^p(M_z, \mathbb{C}[z]) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \leq p \leq n-1, \\ 1, & \text{falls } p = n. \end{cases}
$$

Beweis. Nach Bemerkung 4.8 ist

$$
H^p(M_z, \mathbb{C}[z]) = H^p(K(z_1, \dots, z_n)) \quad \text{für } 0 \leq p \leq n.
$$

Weil $z_1, \dots, z_n$ eine reguläre Folge in $\mathbb{C}[z]$ ist, folgt die Aussage direkt aus Satz 4.14. $\square$

4.3 Extremalität des n-Shifts

Wir können das gerade bewiesene Resultat über den Koszul-Komplex von M_z auf $\mathbb{C}[z]$ auf den Koszul-Komplex von M_z auf $H(\mathbb{B})$ ausdehnen. Dazu bemerke man, dass die Inklusion $\mathbb{C}[z] \subset H(\mathbb{B})$ einen Homomorphismus von Kokettenkomplexen $K^\bullet(M_z, \mathbb{C}[z]) \to K^\bullet(M_z, H(\mathbb{B}))$ induziert. Für eine allgemeinere Version des folgenden Lemmas siehe [Esc09, Theorem 2.3].

Lemma 4.16. *Die linearen Abbildungen*

$$\rho^p : H^p(M_z, \mathbb{C}[z]) \to H^p(M_z, H(\mathbb{B})), [x] \mapsto [x] \quad (p = 0, \dots, n)$$

sind $\mathbb{C}$-Vektorraumisomorphismen.

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei H_k der Raum der homogenen Polynome von Grad k. Für $r \in \mathbb{N}_0$ sei ferner P_r die Orthogonalprojektion von $H(\mathbb{B})$ auf $\bigoplus_{k=0}^r H_k$, den Raum der Polynome vom Grad $\leq r$. Wir zeigen zunächst die Injektivität der ρ^p.

Die Injektivität von ρ^0 ist klar, sei also $p \in \{1, \dots, n\}$ und $[x] \in H^p(M_z, \mathbb{C}[z])$ mit $\rho^p([x]) = [x] = 0 \in H^p(M_z, \mathbb{H}(\mathbb{B}))$. Dann gibt es ein $y \in K^{p-1}(M_z, H(\mathbb{B}))$ mit $\delta^{p-1}(y) = x$. Sei

$$x = \sum_{|I|=p} x_I s_I, \quad y = \sum_{|J|=p-1} y_J s_J \quad \text{und} \quad r = \max_{|I|=p} \deg(x_I).$$

Wegen

$$\delta^{p-1}(\Lambda^{p-1}(s, H_k)) \subset \Lambda^p(s, H_{k+1}) \quad (k \in \mathbb{N}_0) \tag{4.2}$$

folgt

$$x = \delta^{p-1}(y) = \delta^{p-1}\left(\sum_{|J|=p-1} P_{r-1}(y_J) s_J\right),$$

somit ist $[x] = 0 \in H^p(M_z, \mathbb{C}[z])$.

Zum Nachweis der Surjektivität von ρ^p mit $0 \leq p \leq n$ bemerke man, dass nach Korollar 4.6 $\operatorname{ran}(\delta^{p-1})$ abgeschlossen und $H^p(M_z, H(\mathbb{B}))$ ein endlichdimensionaler Banachraum ist . Sei nun $[x] \in H^p(M_z, H(\mathbb{B}))$ beliebig, $x = \sum_{|I|=p} x_I s_I$ und für $r \in \mathbb{N}_0$ sei $x_r = \sum_{|I|=p} P_r(x_I) s_I$. Aus Gleichung (4.2) (mit p an Stelle von $p-1$) folgt $\delta^p(x_r) = 0$, also $[x_r] \in H^p(M_z, \mathbb{C}[z])$ für alle $r \in \mathbb{N}_0$. Wegen $\lim_{r\to\infty} x_r = x \in K^p(M_z, H(\mathbb{B}))$ gilt auch $\lim_{r\to\infty} [x_r] = [x] \in H^p(M_z, H(\mathbb{B}))$. Es folgt, dass $\operatorname{ran}(\rho^p)$ dicht in $H^p(M_z, H(\mathbb{B}))$ liegt, wegen $\dim H^p(M_z, H(\mathbb{B})) < \infty$ ist ρ^p deshalb surjektiv. □

Zusammen mit Korollar 4.15 erhalten wir damit direkt die gesuchte Beschreibung der Kohomologiegruppen $H^p(M_z, H(\mathbb{B}))$. Insbesondere sehen wir, dass M_z Fredholm, aber nicht invertierbar ist. Das ist eine Verallgemeinerung der entsprechenden Aussage über den unilateralen Rechtsshift.

Korollar 4.17. *Für den Koszul-Komplex des Tupels M_z auf $H(\mathbb{B})$ gilt*

$$\dim_{\mathbb{C}} H^p(M_z, H(\mathbb{B})) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \leq p \leq n-1, \\ 1, & \text{falls } p = n. \end{cases}$$

□

Auch die Kohomologiegruppen von $K^\bullet(M_z^*, H(\mathbb{B}))$ können wir nun bestimmen:

Korollar 4.18. *Für den Koszul-Komplex des Tupels M_z^* auf $H(\mathbb{B})$ gilt*

$$\dim_{\mathbb{C}} H^p(M_z^*, H(\mathbb{B})) = \begin{cases} 1, & \text{falls } p = 0, \\ 0, & \text{falls } 1 \leq p \leq n. \end{cases}$$

Beweis. Für $1 \leq p \leq n$ folgt die Aussage direkt aus Lemma 1.30 und Korollar 4.17. Mit Bemerkung 1.24 und der Beschreibung von M_z^* in Lemma 4.4 (a) erhalten wir auch

$$H^0(M_z^*, H(\mathbb{B})) = \bigcap_{i=1}^{n} \ker(M_{z_i}^*) = \mathbb{C}\,1.$$

□

Wir werden dieses Korollar zum Nachweis der Extremalität von M_z^* in $\mathcal{F}_{sc}$, der Familie aller kommutierenden sphärischen Kontraktionen, benutzen. Sei zunächst wieder $T \in \mathcal{L}(H)^n$ ein vertauschendes Tupel von Operatoren und $R \in \mathcal{L}(H \oplus K)^n$ eine kommutierende Fortsetzung von T, etwa

$$R_i = \begin{pmatrix} T_i & A_i \\ 0 & B_i \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(H \oplus K).$$

Neben dem bereits definierten Operator

$$\delta_T^p = \sum_{i=1}^{n} T_i \otimes E_i^p : \Lambda^p(s, H) \to \Lambda^{p+1}(s, H)$$

betrachten wir auch

$$\delta_A^p = \sum_{i=1}^{n} A_i \otimes E_i^p : \Lambda^p(s, K) \to \Lambda^{p+1}(s, H)$$

$$\delta_B^p = \sum_{i=1}^{n} B_i \otimes E_i^p : \Lambda^p(s, K) \to \Lambda^{p+1}(s, K).$$

Weil das Tupel R kommutiert, erhalten wir eine Vertauschungsrelation für die gerade definierten Operatoren.

Lemma 4.19. *Für alle p gilt die Relation*

$$\delta_T^{p+1}\delta_A^p + \delta_A^{p+1}\delta_B^p = 0.$$

Beweis. Für alle p ist $\Lambda^p(s, H \oplus K) = (H \oplus K) \otimes \Lambda^p(s) = \Lambda^p(s,H) \oplus \Lambda^p(s,K)$, weil das Tensorprodukt mit direkten Summen vertauscht. Bezüglich dieser Zerlegung ist

$$\delta_R^p = \begin{pmatrix} \delta_T^p & \delta_A^p \\ 0 & \delta_B^p \end{pmatrix}.$$

Weil R ein Tupel kommutierender Operatoren ist, folgt

$$0 = \delta_R^{p+1}\delta_R^p = \begin{pmatrix} \delta_T^{p+1} & \delta_A^{p+1} \\ 0 & \delta_B^{p+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_T^p & \delta_A^p \\ 0 & \delta_B^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_T^{p+1}\delta_T^p & \delta_T^{p+1}\delta_A^p + \delta_A^{p+1}\delta_B^p \\ 0 & \delta_B^{p+1}\delta_B^p \end{pmatrix}.$$

Der $(1,2)$-Eintrag liefert die Behauptung. □

Ist $H = H(\mathbb{B})$ der Drury-Arveson-Raum und H_k der Raum der homogenen Polynome vom Grad k für alle $k \in \mathbb{N}_0$, so hat H eine orthogonale Zerlegung

$$H = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}_0} H_k.$$

Weiterhin gilt $M_{z_j}^*(H_0) = 0$ und $M_{z_j}^*(H_k) \subset H_{k-1}$ für alle $k \geq 1$ und $j = 1, \ldots, n$. Die folgenden beiden Lemmata sind genau auf diese Situation zugeschnitten.

Lemma 4.20. *Sei $T \in \mathcal{L}(H)^n$ ein Tupel kommutierender Operatoren. Der Hilbertraum H besitze eine orthogonale Zerlegung*

$$H = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}_0} H_k,$$

sodass $T_j(H_0) = 0$ und $T_j(H_k) \subset H_{k-1}$ für alle $k \geq 1$ und $j = 1, \ldots, n$ gilt. Dann ist $T_j^*(H_k) \subset H_{k+1}$ für alle $k \geq 0$ und $j = 1, \ldots, n$ und die selbstadjungierten Operatoren $\delta_T^{p-1}\delta_T^{p-1*}$ sowie

$$D_T^p = \delta_T^{p-1}\delta_T^{p-1*} + \delta_T^{p\,*}\delta_T^p$$

lassen die Räume $\Lambda^p(s, H_k)$ invariant für alle $k \geq 0$ und $p = 0, \ldots, n$.

Beweis. Sei $k \geq 0$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$. Für $x \in H_k$ und $y \in H_{k+1}^\perp$ ist $T_j y \in H_k^\perp$, also gilt $\langle T_j^* x, y\rangle = \langle x, T_j y\rangle = 0$. Es folgt $T_j^*(H_k) \subset H_{k+1}$. Zum Nachweis der zweiten Behauptung beachte man, dass nach Definition von δ_T^p für alle p und alle $k \geq 1$ die Beziehungen $\delta_T^p(\Lambda^p(s,H_k)) \subset \Lambda^{p+1}(s, H_{k-1})$ und $\delta_T^p(\Lambda^p(s,H_0)) = 0$ gelten. Wegen

$$\delta_T^{p\,*} = \sum_{i=1}^n T_i^* \otimes E_i^*$$

folgt aus der ersten Behauptung die Inklusion $\delta_T^{p\,*}(\Lambda^p(s,H_k)) \subset \Lambda^{p-1}(s, H_{k+1})$ für alle p und $k \geq 0$. Somit lassen $\delta_T^{p-1}\delta_T^{p-1*}$ und $D_T^p = \delta^{p-1}\delta^{p-1*} + \delta^{p*}\delta^p$ die Räume $\Lambda^p(s, H_k)$ invariant für alle $p \geq 0$ und alle $k \geq 0$. □

Lemma 4.21. *Sei $n \geq 2$ und $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{L}(H)^n$ ein Tupel kommutierender Operatoren. Der Hilbertraum H besitze eine orthogonale Zerlegung*

$$H = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} H_k,$$

sodass $T_j(H_0) = 0$ und $T_j(H_k) \subset H_{k-1}$ für alle $k \geq 1$ und $j = 1, \ldots, n$ gilt. Weiterhin sei der Koszul-Komplex $K^\bullet(T, H)$ exakt bei $K^p(T, H)$ für $p = 1$ und $p = 2$. Ist dann R eine kommutierende Fortsetzung von T der Form

$$R_i = \begin{pmatrix} T_i & A_i \\ 0 & B_i \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(H \oplus K) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

mit $\sum_{j=1}^n A_j^* T_j = 0$, so ist $A_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n$.

Beweis. Mit den Identifikationen $K^0(T, H) = H$ und $K^1(T, H) = H^n$ und analog mit K an Stelle von H ist

$$\delta_T^0 = \begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_n \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(H, H^n) \quad \text{und}$$

$$\delta_A^0 = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(K, H^n).$$

Deshalb ist die Voraussetzung $\sum_{j=1}^n A_j^* T_j = 0$ äquivalent zu ${\delta_A^0}^* \delta_T^0 = 0$. Die Behauptung $A_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n$ ist äquivalent zu ${\delta_A^0}^* = 0$.

Sei $H_{-1} = 0$. Dann ist $T_j(H_k) \subset H_{k-1}$ für $k \geq 0$ und nach Lemma 4.20 lassen $\delta_T^{p-1} {\delta_T^{p-1}}^*$ und D_T^p die Räume $\Lambda^p(s, H_k)$ invariant für alle $p \geq 1$ und alle $k \geq -1$. Weil $K^\bullet(T, H)$ nach Voraussetzung exakt bei $\Lambda^1(s, H)$ und $\Lambda^2(s, H)$ ist, folgt deshalb mit Lemma 1.29 (a) die Beziehung

$$D_T^1(\Lambda^1(s, H_k)) = \Lambda^1(s, H_k) \tag{4.3}$$

sowie

$$D_T^2(\Lambda^2(s, H_k)) \text{ ist dicht in } \Lambda^2(s, H_k) \tag{4.4}$$

für alle $k \geq -1$. Sei $C = \delta_T^1 \delta_A^0$. Dann gilt

$$C^* \delta_T^1 = {\delta_A^0}^* {\delta_T^1}^* \delta_T^1 = {\delta_A^0}^* {\delta_T^1}^* \delta_T^1 + {\delta_A^0}^* \delta_T^0 {\delta_T^0}^* = {\delta_A^0}^* D_T^1, \tag{4.5}$$

denn ${\delta_A^0}^* \delta_T^0 = 0$ nach Voraussetzung. Mit ${\delta_T^1}^* {\delta_T^2}^* = 0$ und Lemma 4.19 folgt

$$C^* D_T^2 = {\delta_A^0}^* {\delta_T^1}^* (\delta_T^1 {\delta_T^1}^* + {\delta_T^2}^* \delta_T^2) = {\delta_A^0}^* {\delta_T^1}^* \delta_T^1 {\delta_T^1}^* = -{\delta_B^0}^* {\delta_A^1}^* \delta_T^1 {\delta_T^1}^*. \tag{4.6}$$

Wir zeigen nun induktiv, dass für $k \geq -1$ gilt:

$$\begin{aligned} {\delta_A^0}^*(\Lambda^1(s, H_k)) &= 0 \quad \text{und} \\ C^*(\Lambda^2(s, H_k)) &= 0. \end{aligned}$$

Dann folgt ${\delta_A^0}^* = 0$ wie gewünscht.

Für $k = -1$ ist das trivial, sei die Behauptung also für ein $k \geq -1$ bereits gezeigt. Wegen $\delta_T^1(\Lambda^1(s, H_{k+1}) \subset \Lambda^2(s, H_k)$ folgt nach Induktionsvoraussetzung und Gleichung (4.3) sowie (4.5) die Beziehung

$${\delta_A^0}^*(\Lambda^1(s, H_{k+1})) = {\delta_A^0}^* D_T^1(\Lambda^1(s, H_{k+1})) = C^* \delta_T^1(\Lambda^1(s, H_{k+1})) = 0.$$

Somit ist $A_i^*(H_{k+1}) = 0$ für alle i, wegen $\delta_T^1 {\delta_T^1}^*(\Lambda^2(s, H_{k+1})) \subset \Lambda^2(s, H_{k+1})$ gilt auch ${\delta_A^1}^* \delta_T^1 {\delta_T^1}^*(\Lambda^2(s, H_{k+1})) = 0$. Mit Gleichung (4.6) erhalten wir

$$C^*(D_T^2(\Lambda^2(s, H_{k+1}))) = 0$$

und daraus mit Gleichung (4.4) schließlich $C^*(\Lambda^2(s, H_{k+1})) = 0$. Das zeigt die Behauptung für $k + 1$, womit der Beweis vollständig ist. □

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun endlich den Satz über die Extremalität des n-Shifts beweisen.

Satz 4.22. *Sei M_z der n-Shift auf dem Drury-Arveson-Raum $H(\mathbb{B})$. Dann ist M_z^* extremal für die Familie der kommutierenden sphärischen Kontraktionen.*

Beweis. Sei $T = M_z^*$ und $R \in \mathcal{L}(H(\mathbb{B}) \oplus K)^n$ eine kommutierende sphärische Kontraktion, die T fortsetzt. Dann hat R die Form $R = (R_1, \ldots, R_n)$ mit

$$R_i = \begin{pmatrix} T_i & A_i \\ 0 & B_i \end{pmatrix} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Für $k \geq 0$ sei H_k die Menge aller homogenen Polynome vom Grad k. Dann ist

$$H(\mathbb{B}) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} H_k,$$

$T_j(H_0) = 0$ und $T_j(H_k) \subset H_{k-1}$ für $k \geq 1$ und $1 \leq j \leq n$. Zunächst bemerke man, dass es genügt, die Gleichung $\sum_{i=1}^n A_i^* T_i = 0$ zu zeigen. In der Tat, im Fall $n = 1$ folgt dann aus der Surjektivität von T_1 direkt $A_1 = 0$. Im Fall $n \geq 2$ ist der Koszul-Komplex $K^\bullet(T, H(\mathbb{B}))$ nach Korollar 4.18 exakt bei $p = 1$ und $p = 2$, sodass auch in diesem Fall aus Lemma 4.21 die Identität $A_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n$ folgt.

Wir zeigen also $\sum_{i=1}^n A_i^* T_i = 0$. Weil R eine sphärische Kontraktion ist, gilt nach Lemma 3.4 für alle $f \in H(\mathbb{B})$ und $y \in K$ die Ungleichung

$$||f||^2 - \sum_{i=1}^n ||T_i f||^2 - 2 \operatorname{Re} \left\langle \sum_{i=1}^n A_i^* T_i f, y \right\rangle + ||y||^2 - \sum_{i=1}^n ||A_i y||^2 - \sum_{i=1}^n ||B_i y||^2 \geq 0. \tag{4.7}$$

Nach Lemma 4.4 (b) ist aber $1-\sum_{i=1}^n T_i^* T_i = 1-\sum_{i=1}^n M_{z_i} M_{z_i}^*$ gerade die Projektion auf H_0. Ist also $f \in H_0^\perp$, so ist $||f||^2-\sum_{i=1}^n ||T_i f||^2 = 0$ und Ungleichung (4.7) liefert

$$2 \operatorname{Re} \left\langle \sum_{i=1}^n A_i^* T_i f, y \right\rangle \leq ||y||^2 - \sum_{i=1}^n ||A_i y||^2 - \sum_{i=1}^n ||B_i y||^2$$

für alle $f \in H_0^\perp$ und $y \in K$. Nach Lemma 3.3 folgt $\sum_{i=1}^n A_i^* T_i f = 0$ für $f \in H_0^\perp$. Ist $f \in H_0$, so ist $T_i f = M_{z_i}^* f = 0$ für alle i, also gilt insgesamt $\sum_{i=1}^n A_i^* T_i = 0$ wie gewünscht. $\square$

5 Kontraktionen

5.1 Operatortupel der Form $S^* \oplus V$

Definition 5.1. Ein vertauschendes Tupel $S \in \mathcal{L}(H)^n$ heißt direkte Summe von n-Shifts, wenn S unitär äquivalent zu

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_z \in \mathcal{L}\Big(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H(\mathbb{B})\Big)^n$$

für eine Menge Λ ist, das heißt, falls es eine Menge Λ und einen unitären Operator $U \in \mathcal{L}\big(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H(\mathbb{B}), H\big)$ gibt, sodass

$$S_i = U\Big(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_{z_i}\Big)U^*$$

für $i = 1, \ldots, n$ gilt.

Ziel dieses Abschnittes ist der folgende Satz, der bei der Bestimmung der Extremalen der Familie aller kommutierenden sphärischen Kontraktionen hilfreich sein wird.

Satz 5.2. *Sei $T \in \mathcal{L}(H)^n$ ein Tupel kommutierender Operatoren, das folgende Bedingungen erfüllt:*

(a) *$\sum_{i=1}^n T_i^* T_i$ ist eine Projektion.*

(b) *Sind $x_1, \ldots, x_n \in H$ mit $T_i x_j = T_j x_i$ für alle i und j, dann gibt es ein $x \in H$ mit $x_i = T_i x$ für alle i.*

Dann ist $T = S^* \oplus V$, wobei S eine direkte Summe von n-Shifts und V eine sphärische Isometrie ist.

Man beachte, dass die zweite Voraussetzung gerade besagt, dass der Koszul-Komplex $K^\bullet(T, H)$ exakt bei $K^1(T, H)$ ist. Im Fall $n = 1$ kann man noch etwas mehr aussagen. Dann ist die erste Bedingung nach Lemma 1.4 äquivalent dazu, dass T eine partielle Isometrie ist, und die zweite Bedingung ist äquivalent zur Surjektivität von T. Beide Bedingungen sind wiederum nach Lemma 1.4 genau dann erfüllt, wenn $TT^* = 1$ gilt, das heißt, wenn T^* eine Isometrie ist. Solche Operatoren nennt man auch Co-Isometrien. In diesem Fall ist der Operator V aus dem Satz automatisch unitär. Gilt nämlich $T = S^* \oplus V$, so ist $T^* = S \oplus V^*$, und mit T^* ist auch V^* eine Isometrie. Als Korollar erhalten wir im Fall $n = 1$ die Wold-Zerlegung von Isometrien:

Korollar 5.3. *Jede Isometrie T auf einem Hilbertraum hat die Form $T = S \oplus U$, wobei U unitär und S eine direkte Summe von (Rechts-)Shiftoperatoren ist.*

Beweis. Ist T eine Isometrie, so gibt es nach der Vorüberlegung einen unitären Operator V und eine direkte Summe S von 1-Shifts mit $T^* = S^* \oplus V$, also $T = S \oplus U$ mit $U = V^*$. Weil der 1-Shift unitär äquivalent zum unilateralen Rechtsshift auf dem $l^2(\mathbb{N}_0)$ ist, folgt die Behauptung. □

Zum Beweis des Satzes 5.2 benötigen wir noch einige Vorbereitungen. Für den Rest des Abschnittes sei $T = (T_1, \dots, T_n) \in \mathcal{L}(H)^n$ stets ein vertauschendes n-Tupel von Operatoren, das die Bedingungen (a) und (b) aus Satz 5.2 erfüllt. Sei

$$E_0 = \bigcap_{i=1}^{n} \ker(T_i).$$

Wir definieren induktiv eine Folge positiver Operatoren $(P_N)_{N=0}^{\infty}$ auf H durch

$$P_0 = 1 \quad \text{und} \quad P_{N+1} = \sum_{i=1}^{n} T_i^* P_N T_i.$$

Für $i = 1, \dots, n$ sei $M_i : \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H), S \mapsto T_i^* S T_i$ und $M = (M_1, \dots, M_n)$. Weil T ein vertauschendes Tupel von Operatoren ist, kommutieren die M_i. Es folgt für alle $N \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$P_N = \left(\sum_{i=1}^{n} M_i \right)^N 1 = \sum_{|\alpha|=N} \gamma_\alpha T^{*\alpha} T^\alpha.$$

Daraus erhalten wir $\bigcap_{|\alpha|=N} \ker T^\alpha \subset \ker P_N$. Ist umgekehrt $x \in \ker P_N$, so gilt

$$0 = \langle P_N x, x \rangle = \sum_{|\alpha|=N} \gamma_\alpha \langle T^{*\alpha} T^\alpha x, x \rangle = \sum_{|\alpha|=N} \gamma_\alpha ||T^\alpha x||^2.$$

Somit ist $x \in \bigcap_{|\alpha|=N} \ker(T^\alpha)$. Insgesamt folgt

$$\ker P_N = \bigcap_{|\alpha|=N} \ker(T^\alpha).$$

Insbesondere ist also $E_0 = \ker P_1$. Wir zeigen nun induktiv, dass $P_{N-1} - P_N \geq 0$ für alle $N \geq 1$ gilt. Für $N = 1$ ist $P_0 - P_1 = 1 - \sum_{i=1}^{n} T_i^* T_i$ nach Voraussetzung eine Orthogonalprojektion, also ein positiver Operator. Ist die Behauptung für ein $N \geq 1$ bereits gezeigt, so gilt

$$P_N - P_{N+1} = \sum_{i=1}^{n} T_i^* \underbrace{(P_{N-1} - P_N)}_{\geq 0} T_i \geq 0.$$

Das zeigt die Behauptung für $N + 1$.

Die Folge $(P_N)_{N=0}^{\infty}$ ist also eine fallende Folge positiver Operatoren, welche nach Korollar 1.9 in der starken Operatortopologie gegen einen positiven Operator P konvergiert. Wir werden zeigen:

- P ist eine Projektion und $M = \operatorname{ran}(P)$ reduziert die Operatoren T_i.
- $T\big|_M$ ist eine sphärische Isometrie.
- $T^*\big|_{M^\perp}$ ist eine direkte Summe von n-Shifts.

Dazu beginnen wir mit einem Lemma, aus dem der erste Punkt leicht folgt.

Lemma 5.4. *Für alle* $N \in \mathbb{N}$ *ist der Operator* P_N *eine Projektion mit* $T_i P_N = P_{N-1} T_i$ *für* $i = 1, \ldots, n$.

Beweis. Wir zeigen zunächst per Induktion nach N, dass $T_i P_N = P_{N-1} T_i$ für alle i gilt. Nach Voraussetzung (a) an T ist $P_1 = \sum_{i=1}^n T_i^* T_i$ eine Projektion, also ist $\operatorname{ran}(1 - P_1) = \ker(P_1) = \cap_{i=1}^n \ker(T_i)$. Für alle i ist somit $T_i(1 - P_1) = 0$, also $P_0 T_i = T_i = T_i P_1$. Das zeigt die Behauptung für $N = 1$.

Sei die Behauptung nun für ein $N \geq 1$ bereits gezeigt. Für $x \in H$ und $j = 1, \ldots, n$ sei $z_j = P_N T_j x$. Dann gilt für alle i und j die Relation

$$T_i z_j = T_i P_N T_j x = P_{N-1} T_i T_j x = P_{N-1} T_j T_i x = T_j P_N T_i x = T_j z_i.$$

Nach Voraussetzung (b) an T gibt es daher ein $y \in H$ mit $P_N T_j x = z_j = T_j y$ für alle j. Für alle i erhalten wir damit

$$T_i P_{N+1} x = T_i \sum_{j=1}^{n} T_j^* P_N T_j x = T_i \sum_{j=1}^{n} T_j^* T_j y = T_i P_1 y = P_0 T_i y = P_N T_i x.$$

Das zeigt die Behauptung für $N + 1$.

Zum Nachweis der Projektionseigenschaft iterieren wir die Gleichung $T_i P_N = P_{N-1} T_i$. Für $N > 1$ und $i, j = 1, \ldots, n$ folgt

$$T_i T_j P_N = T_i P_{N-1} T_j = P_{N-2} T_i T_j.$$

Indem wir induktiv so fortfahren erhalten wir wegen $P_0 = 1$ für alle $N \in \mathbb{N}$ und alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = N$ die Identität $T^\alpha P_N = T^\alpha$. Somit gilt

$$P_N^2 = \left(\sum_{|\alpha|=N} \gamma_\alpha T^{*\alpha} T^\alpha \right) P_N = \sum_{|\alpha|=N} \gamma_\alpha T^{*\alpha} T^\alpha = P_N,$$

sodass P_N eine Projektion ist. □

Das nächste Lemma ist zwar etwas technisch, aber völlig elementar.

Lemma 5.5. *Sei $N \in \mathbb{N}$ und für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = N$ sei $x_\alpha \in H$. Dann gibt es genau dann ein $x \in H$ mit $x_\alpha = T^\alpha x$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = N$, wenn*

$$T_i x_{\beta+e_j} = T_j x_{\beta+e_i} \tag{5.1}$$

für alle $1 \le i, j \le n$ und alle $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\beta| = N - 1$ gilt.

Beweis. Ist $x_\alpha = T^\alpha x$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = N$, so ist

$$T_i x_{\beta+e_j} = T_i T^{\beta+e_j} x = T_j T^{\beta+e_i} x = T_j x_{\beta+e_i}$$

für alle i und j und alle $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\beta| = N - 1$.

Der Nachweis der umgekehrten Richtung erfolgt per Induktion nach N. Für $N = 1$ ist die Behauptung nach Voraussetzung (b) an T richtig.

Sei die Behauptung also für ein $N \ge 1$ bereits gezeigt und sei $(x_\alpha)_{|\alpha|=N+1}$ eine Familie von Elementen von H, die (5.1) mit $N+1$ an Stelle von N erfüllt. Sei ferner $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\beta| = N$ und $z_i = x_{\beta+e_i}$ für $i = 1, \dots, n$. Dann gilt $T_j z_i = T_i z_j$ für alle i und j. Nach Voraussetzung (b) an T gibt es dann ein $x_\beta \in H$ mit $x_{\beta+e_i} = z_i = T_i x_\beta$ für alle i. Wir betrachten nun die Familie $(x_\beta)_{|\beta|=N}$. Für $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\gamma| = N - 1$ und $1 \le i, j \le n$ gilt dann

$$T_j x_{\gamma+e_i} = x_{(\gamma+e_i)+e_j} = x_{(\gamma+e_j)+e_i} = T_i x_{\gamma+e_j}.$$

Die Familie $(x_\beta)_{|\beta|=N}$ erfüllt also (5.1). Nach Induktionsvoraussetzung gibt es deshalb ein $x \in H$ mit $x_\beta = T^\beta x$ und somit $x_{\beta+e_i} = T_i x_\beta = T^{\beta+e_i} x$ für alle $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\beta| = N$ und $1 \le i \le n$. Mithin ist $x_\alpha = T^\alpha x$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = N + 1$, was die Behauptung für $N + 1$ zeigt. □

Vor dem Beweis des Satzes benötigen wir noch ein weiteres Lemma.

Lemma 5.6. *Für alle $x, y \in E_0$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ gilt*

$$\sqrt{\gamma_\alpha \gamma_\beta}\, \langle T^{*\alpha} x, T^{*\beta} y \rangle = \delta_{\alpha\beta} \langle x, y \rangle,$$

wobei $\delta_{\alpha\beta} = 1$ für $\alpha = \beta$ und $\delta_{\alpha\beta} = 0$ sonst sei.

Beweis. Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $N = |\alpha|$. Der Spaltenoperator $T^{(N)} : H \to \bigoplus_{|\beta|=N} H$ sei definiert durch

$$T^{(N)}x = \left(\sqrt{\gamma_\beta} T^\beta x\right)_{|\beta|=N}.$$

Dann gilt

$$T^{(N)^*}T^{(N)} = \sum_{|\beta|=N} \gamma_\beta T^{*\beta} T^\beta = P_N.$$

Nach Lemma 5.4 ist $T^{(N)^*}T^{(N)}$ somit eine Projektion. Deshalb ist $T^{(N)}T^{(N)^*}$ nach Lemma 1.4 die Orthogonalprojektion auf $\operatorname{ran} T^{(N)}$. Sei $x \in E_0 = \bigcap_{i=1}^n \ker(T_i)$ beliebig. Der Spaltenvektor

$$z = (x_\beta)_{|\beta|=N} \in \bigoplus_{|\beta|=N} H$$

sei definiert durch $x_\beta = x$ für $\beta = \alpha$ und $x_\beta = 0$ sonst. Dann ist $T_i x_{\gamma+e_j} = 0 = T_j x_{\gamma+e_i}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ und alle $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\gamma| = N-1$. Lemma 5.5 liefert also ein $w \in H$ mit $x_\beta = T^\beta w$ für alle $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\beta| = N$. Daher ist $z \in \operatorname{ran} T^{(N)}$ und es gilt

$$z = T^{(N)}T^{(N)^*}z = T^{(N)}\left(\sqrt{\gamma_\alpha} T^{*\alpha}x\right) = \left(\sqrt{\gamma_\alpha\gamma_\beta}\, T^\beta T^{*\alpha} x\right)_{|\beta|=N}.$$

Für alle $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\beta| = N = |\alpha|$ folgt daraus nach Definition von z die Identität

$$\sqrt{\gamma_\alpha\gamma_\beta}\, T^\beta T^{*\alpha} x = \delta_{\alpha\beta} x \tag{5.2}$$

und daher

$$\sqrt{\gamma_\alpha\gamma_\beta}\, \langle T^{*\alpha}x, T^{*\beta}y\rangle = \delta_{\alpha\beta}\langle x, y\rangle.$$

für alle $x, y \in E_0$.

Ist $|\beta| \neq |\alpha|$, etwa ohne Einschränkung $|\beta| > |\alpha|$, so schreiben wir $\beta = \eta + \beta'$ mit $|\eta| = |\beta|$ und $|\beta'| > 0$. Für $x \in E_0 = \bigcap_{i=1}^n \ker(T_i)$ gilt dann nach Gleichung (5.2)

$$\sqrt{\gamma_\eta\gamma_\alpha}\, T^\beta T^{*\alpha} x = T^{\beta'} \sqrt{\gamma_\eta\gamma_\alpha}\, T^\eta T^{*\alpha} x = T^{\beta'}\delta_{\eta\alpha} x = 0.$$

Somit ist $T^\beta T^{*\alpha} x = 0$, also gilt auch in diesem Fall

$$\sqrt{\gamma_\alpha\gamma_\beta}\, \langle T^{*\alpha}x, T^{*\beta}y\rangle = \delta_{\alpha\beta}\langle x, y\rangle.$$

für alle $x, y \in E_0$. □

Nun stehen alle Hilfsmittel zum Beweis des Satzes 5.2 bereit.

Beweis von Satz 5.2. Die Folge $(P_N)_{N=0}^{\infty}$ ist nach Lemma 5.4 eine Folge von Orthogonalprojektionen. Somit ist auch der SOT-Limes P eine Projektion, denn nach Lemma 1.2 gilt

$$P^2 = \lim_{N\to\infty} P_N^2 = \lim_{N\to\infty} P_N = P$$

mit Konvergenz in der starken Operatortopologie. Weil P ein positiver Operator ist, ist P sogar eine Orthogonalprojektion. Lemma 5.4 liefert $P_{N-1}T_i = T_i P_N$ für $i = 1, \ldots, n$ und $N \in \mathbb{N}$, folglich ist auch $PT_i = T_i P$ für alle i. Der abgeschlossene Untervektorraum $M = \operatorname{ran} P$ von H reduziert also T. Nach Definition von P_N gilt $P_N = \sum_{i=1}^n T_i^* P_{N-1} T_i$ und damit auch $P = \sum_{i=1}^n T_i^* P T_i$. Das zeigt, dass $T\big|_M$ eine sphärische Isometrie ist.

Sei nun B eine Orthonormalbasis von E_0. Wir zeigen, dass $T^*\big|_{M^\perp}$ unitär äquivalent zu $\bigoplus_{v\in B} M_z$ ist. Wegen $P = \sum_{i=1}^n T_i^* P T_i$ ist $E_0 \subset \ker(P) = M^\perp$. Deshalb können wir eine lineare Abbildung U von der algebraischen direkten Summe $\bigoplus_{v\in B} \mathbb{C}[z]$ nach $M^\perp$ durch

$$U(p_v)_{v\in B} = \sum_{v\in B} p_v(T^*)v$$

definieren. Sei $(p_v)_{v\in B} \in \bigoplus_{v\in B} \mathbb{C}[z]$, etwa $p_v = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} a_v^{(\alpha)} z^\alpha$ für alle $v \in B$. Wir erhalten die Gleichungskette

$$\begin{aligned}
||U(p_v)_{v\in B}||^2 &= \left|\left|\sum_{v\in B} p_v(T^*)v\right|\right|^2 \\
&= \sum_{v\in B}\sum_{w\in B} \langle p_v(T^*)v, p_w(T^*)w\rangle \\
&= \sum_{v\in B}\sum_{w\in B} \left\langle \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} a_v^{(\alpha)} T^{*\alpha} v, \sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^n} a_w^{(\beta)} T^{*\beta} w \right\rangle \\
&= \sum_{v\in B}\sum_{w\in B}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}\sum_{\beta\in\mathbb{N}_0^n} a_v^{(\alpha)}\overline{a_w^{(\beta)}} \langle T^{*\alpha} v, T^{*\beta} w\rangle \\
&= \sum_{v\in B}\sum_{w\in B}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} a_v^{(\alpha)}\overline{a_w^{(\alpha)}} \frac{\langle v, w\rangle}{\gamma_\alpha} \qquad \text{(nach Lemma 5.6)} \\
&= \sum_{v\in B}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} \frac{|a_v^{(\alpha)}|^2}{\gamma_\alpha} \\
&= \sum_{v\in B} ||p_v||_{H(\mathbb{B})}^2 \\
&= ||(p_v)_{v\in B}||^2_{\bigoplus_{v\in B} H(\mathbb{B})}.
\end{aligned}$$

Man beachte hierbei, dass alle betrachteten Summen in Wirklichkeit endlich waren, insbesondere sind also die Vertauschungen der Summationsreihenfolge gerechtfertigt. Weil die algebraische direkte Summe $\bigoplus_{v\in B}\mathbb{C}[z]$ dicht in dem Hilbertraum $\bigoplus_{v\in B} H(\mathbb{B})$ liegt, setzt sich U zu einer Isometrie auf $\bigoplus_{v\in B} H(\mathbb{B})$ fort. Diese Fortsetzung heiße wieder U.

Zum Nachweis der Surjektivität des gerade definierten Operators U sei

$$[E_0]_{T^*} = \bigvee_{p\in\mathbb{C}[z]} p(T^*)(E_0)$$

der kleinste abgeschlossene Unterraum von H, der E_0 enthält und unter $T_1^*,\dots,T_n^*$ invariant ist. Wir zeigen $[E_0]_{T^*} = M^\perp$. Weil $E_0 \subset M^\perp$ ist und M das Tupel T reduziert, gilt $[E_0]_{T^*} \subset M^\perp$. Zum Nachweis der umgekehrten Inklusion sei $Q_k = P_k - P_{k+1}$ für $k \geq 0$. Es ist $\operatorname{ran}(Q_0) = \operatorname{ran}(1-P_1) = \ker(P_1) = E_0$. Sei nun $E_k = \operatorname{ran}(Q_k)$ für $k \geq 1$. Wir zeigen per Induktion nach k, dass $E_k \subset [E_0]_{T^*}$ für alle $k \geq 0$ gilt. Für $k = 0$ ist das trivial. Ist die Behauptung für ein $k \geq 0$ bereits gezeigt, so gilt für $x \in H$ die Beziehung

$$\begin{aligned} Q_{k+1}x = (P_{k+1} - P_{k+2})x &= \sum_{i=1}^n T_i^*(P_k - P_{k+1})T_i x \\ &= \sum_{i=1}^n T_i^* Q_k T_i x \in \sum_{i=1}^n T_i^*(E_k) \subset [E_0]_{T^*}, \end{aligned}$$

was die Behauptung für $k+1$ zeigt.

Es gilt also $\operatorname{ran}(Q_k) = E_k \subset [E_0]_{T^*}$ für alle $k \geq 0$. Andererseits ist

$$1 - P = \lim_{N\to\infty}(1 - P_N) = \sum_{k=0}^\infty Q_k$$

mit Konvergenz in der starken Operatortopologie, also ist $M^\perp = \operatorname{ran}(1-P) \subset [E_0]_{T^*}$. Zusammen gilt somit $M^\perp = [E_0]_{T^*}$. Wegen

$$\{p(T^*)v : p \in \mathbb{C}[z] \text{ und } v \in B\} \subset \operatorname{ran}(U) \subset M^\perp$$

folgt daraus die Dichtheit von $\operatorname{ran}(U)$ in $M^\perp$. Weil U als Isometrie auch abgeschlossenes Bild hat, ist U daher surjektiv, insgesamt also unitär.

Für alle Elemente $(p_v)_{v\in B}$ der algebraischen direkten Summe $\bigoplus_{v\in B}\mathbb{C}[z]$ und $i = 1,\dots,n$ gilt ferner

$$\begin{aligned} T_i^* U(p_v)_{v\in B} = T_i^* \sum_{v\in B} p_v(T^*)v &= \sum_{v\in B}(z_i p_v)(T^*)v \\ &= U(z_i p_v)_{v\in B} = U\Big(\bigoplus_{v\in B} M_{z_i}\Big)(p_v)_{v\in B}. \end{aligned}$$

Aus Stetigkeitsgründen folgt $T_i^*\big|_{M^\perp} U = U\big(\bigoplus_{v\in B} M_{z_i}\big)$ für $i = 1,\dots,n$. Mithin ist $T^*|_{M^\perp}$ unitär äquivalent zu $\bigoplus_{v\in B} M_z$, also eine direkte Summe von n-Shifts. $\square$

5.2 Rang-Eins-Fortsetzungen sphärischer Kontraktionen

Mit dem folgenden Lemma kann leicht überprüft werden, ob eine eindimensionale Fortsetzung eines vertauschenden Operatortupels wieder vertauschend ist.

Lemma 5.7. *Sei $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{L}(H)^n$ ein kommutierendes Tupel von Operatoren und $R = (R_1, \ldots, R_n)$ eine nichttriviale Rang-Eins-Fortsetzung von T auf $H \oplus \mathbb{C}$ der Form*

$$R_i = \begin{pmatrix} T_i & A_i \\ 0 & B_i \end{pmatrix}.$$

Für alle i sei dabei $A_i 1 = \varepsilon x_i$ für ein $\varepsilon > 0$ und $x_1, \ldots, x_n \in H$ mit $\sum_{i=1}^n ||x_i||^2 = 1$ sowie $B_i 1 = b_i$ mit $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$.

Dann ist R ein kommutierendes Tupel genau dann, wenn $(T_i - b_i)x_j = (T_j - b_j)x_i$ für alle i und j gilt.

Beweis. Weil $T = (T_1, \ldots, T_n)$ und $B = (B_1, \ldots, B_n)$ vertauschende Tupel von Operatoren sind, gilt für alle i und j die Gleichung

$$\begin{aligned} R_i R_j - R_j R_i &= \begin{pmatrix} T_i T_j & T_i A_j + A_i B_j \\ 0 & B_i B_j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} T_j T_i & T_j A_i + A_j B_i \\ 0 & B_j B_i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & T_i A_j + A_i B_j - T_j A_i - A_j B_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit kommutieren die R_i genau dann, wenn

$$(T_i A_j - A_j B_i)1 = (T_j A_i - A_i B_j)1$$

für alle i und j ist, also genau dann, wenn für alle i und j die Identität

$$(T_i - b_i)x_j = (T_j - b_j)x_i$$

gilt. □

Durch geeignete Wahl von $\varepsilon > 0$ lässt sich offensichtlich jede nichttriviale Rang-Eins-Fortsetzung von T auf die Form in Lemma 5.7 bringen. Deshalb betrachten wir im Folgenden nur Fortsetzungen dieser Gestalt.

Lemma 5.8. *Sei $T \in \mathcal{F}_{sc} \cap B(H)^n$ eine kommutierende sphärische Kontraktion und $D = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n T_i^* T_i}$.*

Dann hat T genau dann eine nichttriviale Rang-Eins-Fortsetzung in $\mathcal{F}_{sc}$, wenn es ein $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ und $x_1, \ldots, x_n \in H$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

(a) $\sum_{i=1}^n ||x_i||^2 = 1$,

(b) $(T_i - b_i)x_j = (T_j - b_j)x_i$ *für alle* i *und* j,

(c) $|b| < 1$,

(d) $\sum_{i=1}^n T_i^* x_i \in \operatorname{ran} D$.

Beweis. Weil T eine sphärische Kontraktion ist, ist $1 - \sum_{i=1}^n T_i^* T_i$ ein positiver Operator, besitzt also in der Tat eine positive Quadratwurzel D. Für alle $x \in H$ gilt

$$\sum_{i=1}^n ||T_i x||^2 = \left\langle \sum_{i=1}^n T_i^* T_i x, x \right\rangle = \langle (1 - D^2)x, x\rangle = ||x||^2 - ||Dx||^2.$$

Sei R eine kommutierende Rang-Eins-Fortsetzung von T wie in Lemma 5.7 und $x_0 = \sum_{i=1}^n T_i^* x_i$. Nach Lemma 3.4 ist R genau dann ein sphärische Kontraktion, wenn für alle $x \in H$ und $y \in \mathbb{C}$ die Ungleichung

$$||x||^2 - \sum_{i=1}^n ||T_i x||^2 - 2\operatorname{Re}\left\langle x, \sum_{i=1}^n T_i^* A_i y\right\rangle + |y|^2 - \sum_{i=1}^n ||A_i y||^2 - \sum_{i=1}^n |B_i y|^2 \geq 0$$

gilt, also genau dann, wenn

$$2\varepsilon \operatorname{Re} \overline{y}\langle x, x_0\rangle + (\varepsilon^2 + |b|^2)|y|^2 \leq ||Dx||^2 + |y|^2 \tag{5.3}$$

für alle $x \in H$ und $y \in \mathbb{C}$ ist.

Sei nun R eine sphärische Kontraktion für ein $\varepsilon > 0$. Aus (5.3) folgt für $x = 0$ die Ungleichung $|b| < 1$. Indem wir y eventuell mit einem Drehfaktor multiplizieren, erhalten wir ebenfalls aus (5.3) die Beziehung

$$2\varepsilon|y|\,|\langle x, x_0\rangle| \leq ||Dx||^2 + |y|^2$$

für alle $x \in H$ und $y \in \mathbb{C}$. Daraus folgt

$$(|y| - \varepsilon|\langle x, x_0\rangle|)^2 - \varepsilon^2|\langle x, x_0\rangle|^2 + ||Dx||^2 = |y|^2 - 2\varepsilon|y||\langle x, x_0\rangle| + ||Dx||^2 \geq 0.$$

Insbesondere erhalten wir mit $y = \varepsilon|\langle x, x_0\rangle|$ damit

$$\varepsilon^2|\langle x, x_0\rangle|^2 \leq ||Dx||^2$$

für alle $x \in H$. Nach dem Korollar 1.7 zum Douglas-Lemma ist daher $\sum_{i=1}^n T_i^* x_i = x_0 \in \operatorname{ran} D$. Das zeigt die Notwendigkeit der vier Bedingungen.

Gelten umgekehrt die vier Bedingungen, so ist insbesondere $x_0 = Dz_0$ für ein $z_0 \in H$. Für alle $x \in H$ und $y \in \mathbb{C}$ folgt

$$\begin{aligned}
2\varepsilon \operatorname{Re} \overline{y}\langle x, x_0\rangle + (\varepsilon^2 + |b|^2)|y|^2 &\leq 2\varepsilon|y\langle Dx, z_0\rangle| + (\varepsilon^2 + |b|^2)|y|^2 \\
&\leq 2\varepsilon|y|\,||Dx||\,||z_0|| + (\varepsilon^2 + |b|^2)|y|^2 \\
&\leq \varepsilon(|y|^2 + ||Dx||^2||z_0||^2) + (\varepsilon^2 + |b|^2)|y|^2 \\
&= \varepsilon||Dx||^2||z_0||^2 + \left(\varepsilon + \varepsilon^2 + |b|^2\right)|y|^2.
\end{aligned}$$

Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ wird dieser Ausdruck wegen $|b| < 1$ kleiner oder gleich $||Dx||^2 + |y|^2$ für alle $x \in H$ und $y \in \mathbb{C}$. Gleichung (5.3) zeigt dann, dass R eine sphärische Kontraktion ist, sodass die vier Bedingungen auch hinreichend sind. $\square$

5.3 Kommutierende Kontraktionen

Bevor wir zur Klassifikation der Extremalen der Familie aller kommutierenden sphärischen Kontraktionen kommen, betrachten wir in diesem Abschnitt die Familie $\mathcal{F}_{cc}$ aller n-Tupel aus kommutierenden Kontraktionen. Ein Teil der Extremalen ist in jedem Fall schnell gefunden:

Lemma 5.9. *Vertauschende n-Tupel aus Co-Isometrien sind extremal für die Familie aller n-Tupel aus kommutierenden Kontraktionen.*

Beweis. Sei $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{L}(H)^n$ ein vertauschendes Tupel von Co-Isometrien und $S = (S_1, \ldots, S_n) \in \mathcal{L}(K)^n$ eine Fortsetzung von T zu einem Tupel kommutierender Kontraktionen. Bezeichnet P die Orthogonalprojektion von K auf H, so gilt für alle $x \in H$ und $i = 1, \ldots, n$ die Ungleichung

$$||x|| = ||T_i^* x|| = ||PS_i^* x|| \leq ||S_i^* x|| \leq ||x||,$$

also $||PS_i^* x|| = ||S_i^* x||$ und somit $S_i^* x \in H$. Mithin ist S eine triviale Fortsetzung von T. $\square$

Im Fall $n = 1$ können mit dem letzten Lemma aus dem vorigen Abschnitt bereits alle Extremalen identifiziert werden.

Satz 5.10. *Für eine Kontraktion T sind äquivalent:*

(i) *T ist eine Co-Isometrie.*

(ii) *T hat keine nichttriviale Fortsetzung zu einer Kontraktion.*

(iii) *T hat keine nichttriviale Rang-Eins-Fortsetzung zu einer Kontraktion.*

Insbesondere gilt:
Die Extremalen der Familie aller Kontraktionen sind genau die Co-Isometrien.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) folgt aus Lemma 5.9.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) ist trivial.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sei T eine Kontraktion, die keine Co-Isometrie ist. Dann ist $1-TT^* \neq 0$, also existiert ein $y \in H$, sodass $x = (1-TT^*)y$ Norm 1 hat. Es folgt

$$T^*x = T^*y - T^*TT^*y = (1 - T^*T)(T^*y) = D^2(T^*y) \in \operatorname{ran} D.$$

Lemma 5.8 mit $b = 0$ liefert, dass T eine nichttriviale Rang-Eins-Fortsetzung zu einer Kontraktion hat. □

Zusammen mit dem Satz 2.18 von Agler erhalten wir damit einen neuen Beweis für den in der Einleitung als Motivation genutzten Dilatationssatz von Sz.-Nagy.

Korollar 5.11. *Jede Kontraktion besitzt eine co-isometrische Fortsetzung.* □

Auch für $n = 2$ beschreibt Lemma 5.9 alle Extremalen von $\mathcal{F}_{cc}$.

Satz 5.12. *Die Extremalen der Familie aller Paare aus kommutierenden Kontraktionen sind genau die Paare aus kommutierenden Co-Isometrien.*

Beweis. Die Extremalität von Paaren kommutierender Co-Isometrien folgt aus Lemma 5.9.

Sei umgekehrt $T = (T_1, T_2) \in \mathcal{L}(H)^2$ ein Paar kommutierender Kontraktionen, sodass T_1 und T_2 nicht beide Co-Isometrien sind, ohne Einschränkung sei etwa T_1 nicht co-isometrisch. Nach dem Dilatationssatz 5.11 von Sz.-Nagy gibt es einen Hilbertraum $K \supset H$ und eine Co-Isometrie $S_1 \in \mathcal{L}(K)$, die T_1 fortsetzt. Es ist klar, dass $S_1^*(H) \not\subset H$ gilt, sodass jede Fortsetzung von T der Form $S = (S_1, S_2)$ nichttrivial ist. Deshalb genügt es, eine Fortsetzung von T_2 zu einer Kontraktion $S_2 \in \mathcal{L}(K)$ mit $S_1S_2 = S_2S_1$ zu finden. Die verwendete Konstruktion ähnelt der im Beweis des commutant lifting theorems, siehe etwa [SNF70, p. 64].

Für $i = 1, 2$ sei zunächst $\tilde{T}_i = T_i \oplus 0 \in \mathcal{L}(K)$. Dann gilt die Vertauschungsrelation

$$\tilde{T}_2\tilde{T}_1 = S_1\tilde{T}_2. \tag{5.4}$$

Als ersten Schritt konstruieren wir induktiv Operatoren $B_k \in \mathcal{L}(K)$ für $k \geq -1$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $B_{-1} = (S_1^* - \tilde{T}_1^*)\tilde{T}_2^*$ und $B_kS_1^* = B_{k-1}$ für $k \geq 0$,

(b) $||\tilde{T}_2^*x||^2 + \sum_{i=0}^k ||B_ix||^2 \leq ||x||^2$ für alle $x \in K$,

(c) $\operatorname{ran}(B_k) \subset \overline{(S_1^* - \tilde{T}_1^*)(H)}$.

Sei also $B_{-1} = (S_1^* - \tilde{T_1}^*)\tilde{T_2}^*$. Weil $\tilde{T_2}$ eine Kontraktion ist, ist Punkt (b) für $k = -1$ erfüllt, die Eigenschaft (c) für $k = -1$ ist klar. Seien nun für ein $k \geq 0$ die Operatoren $B_{-1}, B_0, \dots, B_{k-1}$ bereits gegeben. Wir konstruieren einen Operator B_k, der den Eigenschaften (a) - (c) genügt. Zunächst folgt aus Eigenschaft (b) für $k-1$, dass

$$1 - \tilde{T_2}\tilde{T_2}^* - \sum_{i=0}^{k-1} B_i^* B_i$$

ein positiver Operator ist, sodass wir

$$D_k = \sqrt{1 - \tilde{T_2}\tilde{T_2}^* - \sum_{i=0}^{k-1} B_i^* B_i}$$

definieren können. Sei $x \in K$ beliebig. Weil S_1^* eine Isometrie ist, gilt nach der Vertauschungsrelation (5.4) die Gleichung

$$\begin{aligned} ||B_{-1}x||^2 &= ||(S_1^* - \tilde{T_1}^*)\tilde{T_2}^* x||^2 = ||\tilde{T_2}^* x||^2 - ||\tilde{T_1}^*\tilde{T_2}^* x||^2 \\ &= ||\tilde{T_2}^* x||^2 - ||\tilde{T_2}^* S_1^* x||^2. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Im Fall $k \geq 1$ erhalten wir unter Verwendung von Eigenschaft (a) und dieser Gleichung

$$\begin{aligned} ||\tilde{T_2}^* S_1^* x||^2 + \sum_{i=0}^{k-1} ||B_i S_1^* x||^2 &= ||\tilde{T_2}^* S_1^* x||^2 + \sum_{i=0}^{k-1} ||B_{i-1} x||^2 \\ &= ||\tilde{T_2}^* x||^2 + \sum_{i=0}^{k-2} ||B_i x||^2 \\ &\leq ||x||^2 - ||B_{k-1} x||^2, \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung aus Eigenschaft (b) folgt. Wegen $||S_1^* x|| = ||x||$ gilt deshalb

$$||B_{k-1}x||^2 \leq ||S_1^* x||^2 - ||\tilde{T_2}^* S_1^* x||^2 - \sum_{i=0}^{k-1} ||B_i S_1^* x||^2 = ||D_k S_1^* x||^2.$$

Für $k = 0$ folgt aus Gleichung (5.5) wegen $||\tilde{T_2}^* x|| \leq ||x|| = ||S_1^* x||$ ebenfalls

$$||B_{-1}x||^2 \leq ||S_1^* x||^2 - ||\tilde{T_2}^* S_1^* x||^2 = ||D_0 S_1^* x||^2,$$

sodass

$$||B_{k-1}x||^2 \leq ||D_k S_1^* x||^2$$

für alle $k \geq 0$ gilt. Weil $x \in K$ beliebig war, folgt daraus

$$B_{k-1}^* B_{k-1} \leq (D_k S_1^*)^* D_k S_1^*.$$

Nach dem Douglas-Lemma 1.6 existiert daher ein Operator $C_k \in \mathcal{L}(K)$ mit $||C_k|| \leq 1$, $\ker C_k = \ker B_{k-1}^*$ und

$$B_{k-1}^* = (D_k S_1^*)^* C_k.$$

Sei $B_k = C_k^* D_k$. Dann gilt offensichtlich

$$B_k S_1^* = B_{k-1},$$

also ist Eigenschaft (a) erfüllt. Für $x \in K$ gilt weiterhin

$$||B_k x||^2 = ||C_k^* D_k x||^2 \leq ||D_k x||^2 = ||x||^2 - ||\tilde{T_2}^* x||^2 - \sum_{i=0}^{k-1} ||B_i x||^2,$$

was Eigenschaft (b) zeigt. Wegen

$$\operatorname{ran}(B_k) \subset \operatorname{ran}(C_k^*) \subset \ker(C_k)^\perp = \ker(B_{k-1}^*)^\perp = \overline{\operatorname{ran}(B_{k-1})}$$

folgt Eigenschaft (c) aus der Induktionsvoraussetzung. Damit ist die Konstruktion der B_k abgeschlossen.

Als nächstes zeigen wir, dass $L = \overline{(S_1^* - \tilde{T_1}^*)(H)}$ ein wandernder Unterraum für S_1^* ist, das heißt, dass

$$S_1^{*k}(L) \perp L$$

für alle $k \geq 1$ ist. Weil S_1^* eine Isometrie ist, folgt daraus bereits

$$S_1^{*k}(L) \perp S_1^{*l}(L)$$

für $k, l \in \mathbb{N}_0$ mit $k \neq l$. Seien also $x, y \in H$ und $k \geq 1$ beliebig. Ferner sei P die Orthogonalprojektion von K auf H. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\langle S_1^{*k}(S_1^* - T_1^*)x, (S_1^* - T_1^*)y\rangle \\
=&\langle S_1^{*k}x, y\rangle - \langle S_1^{*k+1}x, T_1^* y\rangle - \langle S_1^{*k-1}T_1^* x, y\rangle + \langle S_1^{*k}T_1^* x, T_1^* y\rangle \\
=&\langle PS_1^{*k}x, y\rangle - \langle PS_1^{*k+1}x, T_1^* y\rangle - \langle PS_1^{*k-1}T_1^* x, y\rangle + \langle PS_1^{*k}T_1^* x, T_1^* y\rangle \\
=&\langle T_1^{*k}x, y\rangle - \langle T_1^{*k+1}x, T_1^* y\rangle - \langle T_1^{*k}x, y\rangle + \langle T_1^{*k+1}x, T_1^* y\rangle \\
=&\,0.
\end{aligned}$$

Daraus folgt direkt $S_1^{*k}(L) \perp L$.

Sei nun $x \in K$ beliebig. Nach dem gerade bewiesenen Resultat und Eigenschaft (c) der Operatoren B_k gilt für alle $N, M \in \mathbb{N}_0$ mit $N \geq M$ die Gleichung

$$\left|\left|\sum_{k=M+1}^{N} S_1^{*k} B_k x\right|\right|^2 = \sum_{k=M+1}^{N} ||S_1^{*k} B_k x||^2 = \sum_{k=M+1}^{N} ||B_k x||^2 .$$

Aus Eigenschaft (b) folgt, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} ||B_k x||^2$ konvergiert, sodass die Folge $(\sum_{k=0}^{N} S_1^{*k} B_k x)_{N=0}^{\infty}$ eine Cauchyfolge in K ist. Deshalb können wir durch

$$Rx = \tilde{T_2}^* x + \sum_{k=0}^{\infty} S_1^{*k} B_k x$$

für $x \in K$ eine offensichtlich lineare Abbildung auf K definieren, die nach dem Satz von Banach-Steinhaus auch stetig ist. Man beachte, dass $\operatorname{ran}(B_k) \subset \overline{(S_1^* - \tilde{T_1}^*)(H)} \subset H^{\perp}$ gilt und $H^{\perp}$ ein invarianter Unterraum für S_1^* ist. Zusammen mit Eigenschaft (b) folgt deshalb für alle $x \in K$ die Ungleichung

$$||Rx||^2 = ||\tilde{T_2}^* x||^2 + \sum_{k=0}^{\infty} ||S_1^{*k} B_k x||^2 \leq ||x||^2,$$

sodass R eine Kontraktion ist. Ferner ist $H^{\perp}$ auch invariant für R und es gilt $PR\big|_H = T_2^*$, wobei P die Orthogonalprojektion von K auf H bezeichnet. Aus Eigenschaft (a) und Gleichung (5.4) erhalten wir weiterhin für alle $x \in K$ die Identität

$$\begin{aligned}
RS_1^* x &= \tilde{T_2}^* S_1^* x + \sum_{k=0}^{\infty} S_1^{*k} B_k S_1^* x \\
&= \tilde{T_2}^* S_1^* x + \sum_{k=0}^{\infty} S_1^{*k} B_{k-1} x \\
&= \tilde{T_1}^* \tilde{T_2}^* x + B_{-1} x + S_1^* \sum_{k=0}^{\infty} S_1^{*k} B_k x \\
&= S_1^* \tilde{T_2}^* x + S_1^* \sum_{k=0}^{\infty} S_1^{*k} B_k x \\
&= S_1^* Rx.
\end{aligned}$$

Der Operator $S_2 = R^* \in \mathcal{L}(K)$ ist also eine Fortsetzung von T_2 zu einer Kontraktion mit $S_1 S_2 = S_2 S_1$. □

Der resultierende Fortsetzungssatz stammt von Andô [And63].

Korollar 5.13. *Jedes Paar aus kommutierenden Kontraktionen besitzt eine Fortsetzung zu einem Paar aus kommutierenden Co-Isometrien.*

Bemerkung 5.14. Erstaunlicherweise ist die Situation für $n \geq 3$ eine andere. Wir skizzieren kurz, dass in diesem Fall nicht alle Extremalen der Familie $\mathcal{F}_{cc}$ auch kommutierende Co-Isometrien sind.

Sei dazu zunächst $S = (S_1, \ldots, S_n) \in \mathcal{L}(K_0)^n$ ein Tupel aus kommutierenden Co-Isometrien auf einem Hilbertraum K_0. Nach Korollar 3.2 gibt es dann einen Hilbertraum $K \supset K_0$ und ein Tupel $V = (V_1, \ldots, V_n) \in \mathcal{L}(K)^n$ kommutierender unitärer Operatoren mit

$$S_i^* = V_i\big|_{K_0}$$

für $i = 1, \ldots, n$. Somit gilt auch

$$\left(S_1^{k_1} S_2^{k_2} \ldots S_n^{k_n}\right)^* = V_1^{k_1} V_2^{k_2} \ldots V_n^{k_n}\big|_{K_0}$$

für alle $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$. Sei $U = V^*$ und P_{K_0} die Orthogonalprojektion von K auf K_0. Für alle $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$ folgt

$$S_1^{k_1} S_2^{k_2} \ldots S_n^{k_n} = P_{K_0} U_1^{k_1} U_2^{k_2} \ldots U_n^{k_n}\big|_{K_0}.$$

Sei nun $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{L}(H)^n$ ein Tupel aus kommutierenden Kontraktionen, welches eine Fortsetzung zu einem vertauschendes Tupel S aus Co-Isometrien hat. Dann gibt es also eine Dilatation $U = (U_1, \ldots, U_n) \in \mathcal{L}(K)^n$ von T aus kommutierenden unitären Operatoren, das heißt, es ist

$$T_1^{k_1} T_2^{k_2} \ldots T_n^{k_n} = P U_1^{k_1} U_2^{k_2} \ldots U_n^{k_n}\big|_H$$

für alle $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$, wobei P die Orthogonalprojektion von K auf H sei. Es ist jedoch bekannt, dass für $n \geq 3$ nicht jedes n-Tupel kommutierender Kontraktionen eine solche Dilatation besitzt [Par70]. Nach dem Satz 2.18 von Agler bilden daher in diesem Fall die kommutierenden Co-Isometrien eine echte Unterklasse von $\operatorname{ext}(\mathcal{F}_{cc})$. Die Bestimmung von $\operatorname{ext}(\mathcal{F}_{cc})$ für $n \geq 3$ scheint ein offenes Problem zu sein.

5.4 Extremale sphärische Kontraktionen

Wir kommen nun wieder zurück zu sphärischen Kontraktionen. Die Aussage des folgenden Lemmas folgt im Fall $n = 1$ unmittelbar aus Satz 5.10. Im Fall $n > 1$ ist sie neu und insbesondere in Verbindung mit Satz 5.2 interessant.

Lemma 5.15. *Sei T eine kommutierende sphärische Kontraktion, die keine nichttriviale Rang-Eins-Fortsetzung in $\mathcal{F}_{sc}$ hat. Dann gilt:*

(a) $\sum_{i=1}^n T_i^* T_i$ *ist eine Projektion.*

(b) *Sind $x_1, \ldots, x_n \in H$ mit $T_i x_j = T_j x_i$ für alle i und j, dann gibt es ein $x \in H$ mit $T_i x = x_i$ für alle i.*

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass $S = \sum_{i=1}^n T_i^* T_i$ keine Projektion ist. Sei E das Spektralmaß zum selbstadjungierten Operator S. Wegen $0 \leq S \leq 1$ ist $\sigma(S) \subset [0,1]$. Weil S keine Projektion ist, ist $\sigma(S) \not\subset \{0,1\}$, also ist $E((0,1)) \neq 0$. Auf Grund der σ-Additivität von E in der starken Operatortopologie gibt es somit $0 < r < s < 1$ mit $Q = E([r,s]) \neq 0$. Sei $0 \neq x_0 \in \operatorname{ran}(Q)$ und $x_i = T_i x_0$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n ||x_i||^2 &= \sum_{i=1}^n ||T_i x_0||^2 = \left\langle \sum_{i=1}^n T_i^* T_i x_0, x_0 \right\rangle = \left\langle \left(\int_0^1 t \, dE(t) \right) x_0, x_0 \right\rangle \\
&= \int_0^1 t \, d\langle E(t)x_0, x_0\rangle \geq \int_r^s t \, d\langle E(t)x_0, x_0\rangle \geq r\langle E([r,s])x_0, x_0\rangle \\
&= r\langle Qx_0, x_0\rangle = r||x_0||^2 > 0.
\end{aligned}$$

Indem wir x_0 mit einem Skalierungsfaktor multiplizieren, können wir deshalb ohne Einschränkung $\sum_{i=1}^n ||x_i||^2 = 1$ annehmen. Mit $b = 0$ sind dann die Voraussetzungen (a)-(c) von Lemma 5.8 erfüllt. Für den Operator $D = \sqrt{1-S}$ erhalten wir wegen $s < 1$ die Beziehung

$$\begin{aligned}
D \int_r^s \frac{1}{\sqrt{1-t}} \, dE(t) &= \left(\int_0^1 \sqrt{1-t} \; dE(t) \right) \left(\int_r^s \frac{1}{\sqrt{1-t}} \, dE(t) \right) \\
&= \int_0^1 \chi_{[r,s]} \, dE = Q,
\end{aligned}$$

insbesondere ist also $\operatorname{ran}(Q) \subset \operatorname{ran}(D)$. Es folgt

$$\sum_{i=1}^n T_i^* x_i = \sum_{i=1}^n T_i^* T_i x_0 = \sum_{i=1}^n T_i^* T_i Q x_0 = Q \sum_{i=1}^n T_i^* T_i x_0 \in \operatorname{ran}(D),$$

also ist auch die Bedingung (d) von Lemma 5.8 erfüllt. T hat somit eine nichttriviale Rang-Eins-Fortsetzung in $\mathcal{F}_{sc}$, ein Widerspruch zur Voraussetzung. Das zeigt, dass $\sum_{i=1}^n T_i^* T_i$ eine Projektion ist.

Als nächstes nehmen wir an, dass $\sum_{i=1}^n T_i^* T_i$ eine Projektion ist, die Eigenschaft (b) aber nicht erfüllt ist. Wir betrachten den Spaltenoperator $T^{(1)} : H \to H^n$, definiert durch

$$T^{(1)} x = \begin{pmatrix} T_1 x \\ \vdots \\ T_n x \end{pmatrix}.$$

Dann ist $T^{(1)^*}T^{(1)} = \sum_{i=1}^n T_i^* T_i$ eine Projektion, also ist $T^{(1)}$ eine partielle Isometrie, insbesondere ist $\operatorname{ran}(T^{(1)})$ abgeschlossen. Nach Annahme gibt es $y_1, \ldots, y_n \in H$ mit $T_i y_j = T_j y_i$ für alle i und j, aber $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \notin \operatorname{ran} T^{(1)}$. Sei

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (1 - T^{(1)}T^{(1)^*}) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} T_1 T_k^* y_k \\ \vdots \\ T_n T_k^* y_k \end{pmatrix}$$

die Orthogonalprojektion des Vektors y auf $\operatorname{ran}(T^{(1)})^\perp$. Für alle i und j gilt dann

$$T_i x_j = T_i y_j - T_i \sum_{k=1}^n T_j T_k^* x_k = T_j y_i - T_j \sum_{k=1}^n T_i T_k^* x_k = T_j x_i.$$

Weil $\operatorname{ran}(T^{(1)})$ abgeschlossen ist, ist $x \neq 0$. Nach eventueller Skalierung können wir somit $\sum_{i=1}^n ||x_i||^2 = 1$ annehmen. Wegen $x \in \operatorname{ran}(T^{(1)})^\perp = \ker(T^{(1)^*})$ ist $\sum_{i=1}^n T_i^* x_i = 0 \in \operatorname{ran}(D)$. Wiederum nach Lemma 5.8 mit $b = 0$ hat T daher eine nichttriviale Rang-Eins-Fortsetzung in $\mathcal{F}_{sc}$, ein Widerspruch. Mithin erfüllt T auch die Eigenschaft (b). $\square$

Damit kommen wir zum Höhepunkt dieses Kapitels, der Klassifizierung aller extremalen kommutierenden sphärischen Kontraktionen.

Satz 5.16. *Sei $T = (T_1, \ldots, T_n)$ ein kommutierendes Tupel von Operatoren. Dann sind äquivalent:*

(i) $T \in \operatorname{ext}(\mathcal{F}_{sc})$.

(ii) *$T = S^* \oplus U$, wobei U sphärisch unitär und S eine direkte Summe von n-Shifts ist.*

(iii) (a) *$\sum_{i=1}^n T_i^* T_i$ ist eine Projektion,*

(b) $\sum_{i=1}^n T_i T_i^* \geq 1$,

(c) *sind $x_1, \ldots, x_n \in H$ mit $T_i x_j = T_j x_i$ für alle i und j, dann gibt es ein $x \in H$ mit $T_i x = x_i$ für alle i.*

Beweis. (ii) $\Rightarrow$ (i): Nach Satz 4.22 ist $M_z^* \in \operatorname{ext} \mathcal{F}_{sc}$, mit Lemma 2.7 (b) folgt somit $S^* \in \operatorname{ext}(\mathcal{F}_{sc})$. Andererseits ist nach Satz 3.5 auch $U \in \operatorname{ext} \mathcal{F}_{sc}$, wiederum mit Lemma 2.7 (b) folgt schließlich $S^* \oplus U \in \operatorname{ext} \mathcal{F}_{sc}$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Erfüllt T die Bedingungen aus (iii), so hat T nach Satz 5.2 die Form $T = S^* \oplus U$, wobei $S \in \mathcal{L}(H_1)^n$ eine direkte Summe von n-Shifts und $U \in \mathcal{L}(H_2)^n$

eine sphärische Isometrie ist. Wir zeigen, dass U sogar sphärisch unitär ist. Die Bedingung (b) liefert für $y \in H_2$ die Ungleichung

$$||y||^2 \leq \left\langle \sum_{i=1}^{n} T_i T_i^* \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} U_i U_i^* y, y \right\rangle,$$

also ist auch $\sum_{i=1}^{n} U_i U_i^* \geq 1$. Somit gilt

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} U_i U_i^* - 1 = \sum_{i=1}^{n} (U_i U_i^* - U_i^* U_i).$$

Andererseits sind alle U_i nach Korollar 3.7 subnormal, also ist $U_i U_i^* - U_i^* U_i \leq 0$ für alle i nach Lemma 1.11. Es folgt $U_i U_i^* = U_i^* U_i$ für alle i, also ist U sphärisch unitär.

(i) $\Rightarrow$ (iii): Sei $T \in \operatorname{ext} \mathcal{F}_{sc}$. Dann hat T insbesondere keine nichttriviale Rang-Eins-Fortsetzung in $\mathcal{F}_{sc}$, also folgen (a) und (c) aus Lemma 5.15. Nach Satz 5.2 ist dann $T = S^* \oplus U$ für eine sphärische Isometrie U und eine direkte Summe von n-Shifts S, das heißt, S ist unitär äquivalent zu $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_z$ für eine geeignete Menge Λ. Dann ist $\sum_{i=1}^{n} S_i^* S_i$ unitär äquivalent zu $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i=1}^{n} M_{z_i}^* M_{z_i}$ und nach Lemma 4.4 (c) ist $\sum_{i=1}^{n} M_{z_i}^* M_{z_i} \geq 1$. Es folgt $\sum_{i=1}^{n} S_i^* S_i \geq 1$. Andererseits ist nach Lemma 2.7 (d) mit T auch $U \in \operatorname{ext} \mathcal{F}_{sc}$, nach Lemma 2.7 (c) und Satz 3.8 muss U dann schon sphärisch unitär sein. Somit ist $\sum_{i=1}^{n} T_i T_i^* = (\sum_{i=1}^{n} S_i^* S_i) \oplus 1 \geq 1$. □

Der resultierende Fortsetzungssatz stammt von Müller-Vasilescu [MV93] und Arveson [Arv98]:

Korollar 5.17. *Jede kommutierende sphärische Kontraktion besitzt eine Fortsetzung zu einem Tupel der Form $S^* \oplus U$, wobei S eine direkte Summe von n-Shifts und U ein kommutierendes sphärisch unitäres Tupel ist.* □

Bemerkung 5.18. Zum Beweis von (i) $\Rightarrow$ (ii) in Satz 5.16 wurde die Extremalität des Adjungierten des n-Shifts in $\mathcal{F}_{sc}$ nicht verwendet. Zusammen mit dem Satz 2.18 von Agler erhalten wir dafür nun einen anderen Beweis. Sei dazu $H \neq \{0\}$ ein Hilbertraum und $T = (0, \ldots, 0) \in \mathcal{L}(H)^n$. Offensichtlich ist T eine sphärische Kontraktion. Sei R eine extremale Fortsetzung. Dann hat R nach (i) $\Rightarrow$ (ii) von Satz 5.16 die Form $R = S^* \oplus U$ für eine direkte Summe von n-Shifts S und ein sphärisch unitäres Tupel U. Der Summand S^* kann nicht fehlen, weil sonst $T = (0, \ldots, 0)$ Einschränkung des sphärisch unitären Tupels U, also insbesondere eine sphärische Isometrie wäre. Mit Lemma 2.7 d) folgt nun die Extremalität von S^* und damit die von M_z^* in $\mathcal{F}_{sc}$.

Literaturverzeichnis

[Agl85] Jim Agler, *Hypercontractions and subnormality*, J. Operator Theory **13** (1985), no. 2, 203–217.

[Agl88] ———, *An abstract approach to model theory*, Surveys of some recent results in operator theory, Vol. II, Pitman Research Notes in Mathematics, vol. 192, Longman Scientific & Technical, 1988, pp. 1–23.

[AL96] K.R.M. Attele und A.R. Lubin, *Dilations and commutant lifting for jointly isometric operators – a geometric approach*, J. Funct. Anal. **140** (1996), no. 2, 300–311.

[And63] T. Andô, *On a pair of commutative contractions*, Acta Sci. Math. (Szeged) **24** (1963), 88–90.

[Arv98] William Arveson, *Subalgebras of C^*-algebras. III. Multivariable operator theory*, Acta Math. **181** (1998), no. 2, 159–228.

[Arv03] ———, *Notes on the unique extension property*, unveröffentlichtes Manuskript, 2003.

[Ath90] Ameer Athavale, *On the intertwining of joint isometries*, J. Operator Theory **23** (1990), no. 2, 339–350.

[Bre61] S. Brehmer, *Über vetauschbare Kontraktionen des Hilbertschen Raumes*, Acta Sci. Math. (Szeged) **22** (1961), 106–111.

[Con91] John B. Conway, *The theory of subnormal operators*, Mathematical surveys and monographs, vol. 36, American Mathematical Society, 1991.

[Cur81] Raul E. Curto, *Fredholm and invertible n-tuples of operators. The deformation problem*, Trans. Amer. Math. Soc. **266** (1981), no. 1, 129–159.

[DAE+03] H. Garth Dales, Pietro Aiena, Jörg Eschmeier, Kjeld Laursen und George A. Willis, *Introduction to Banach algebras, operators, and harmonic analysis*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 57, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[DM05] Michael A. Dritschel und Scott McCullough, *Boundary representations for families of representations of operator algebras and spaces*, J. Operator Theory **53** (2005), no. 1, 159–167.

[DMW99] Michael A. Dritschel, Scott McCullough und Hugo J. Woerdeman, *Model theory for ρ-contranctions, $\rho \leq 2$*, J. Operator Theory **41** (1999), no. 2, 321–350.

[Dou66] R. G. Douglas, *On majorization, factorization, and range inclusion of operators on Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc. **17** (1966), 413–415.

[DS63] Nelson Dunford und Jacob T. Schwartz, *Linear operators. Part II: Spectral theory. Self adjoint operators in Hilbert space*, Wiley-Interscience, 1963.

[Eis95] David Eisenbud, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 150, Springer-Verlag, New York, 1995.

[Els09] Jürgen Elstrodt, *Maß- und Integrationstheorie*, Grundwissen Mathematik, Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[EP96] Jörg Eschmeier und Mihai Putinar, *Spectral decompositions and analytic sheaves*, London Mathematical Society Monographs. New Series, vol. 10, Clarendon Press, Oxford, 1996.

[Esc09] Jörg Eschmeier, *Grothendieck's comparison theorem and multivariable Fredholm theory*, Arch. Math. (Basel) **92** (2009), no. 5, 461–475.

[GRS05] Jim Gleason, Stefan Richter und Carl Sundberg, *On the index of invariant subspaces in spaces of analytic functions of several complex variables*, J. Reine Angew. Math. **587** (2005), 49–76.

[Hal82] Paul R. Halmos, *A Hilbert space problem book*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 19, Springer-Verlag, New York, 1982.

[Itô58] Takasi Itô, *On the commutative family of subnormal operators*, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I **14** (1958), 1–15.

[Lan02] Serge Lang, *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 211, Springer-Verlag, New York, 2002.

[Lor53] G. G. Lorentz, *Bernstein polynomials*, Mathematical Expositions, no. 8, University of Toronto Press, Toronto, 1953.

[MV93] V. Müller und F.-H. Vasilescu, *Standard models for some commuting multioperators*, Proc. Amer. Math. Soc. **117** (1993), no. 4, 979–989.

[Par70] Stephen Parrott, *Unitary dilations for commuting contractions*, Pacific J. Math. **34** (1970), 481–490.

[Pau86] Vern Paulsen, *Completely bounded maps and dilations*, Pitman Research Notes in Mathematics, vol. 146, Longman Scientific & Technical, 1986.

[RS10] Stefan Richter und Carl Sundberg, *Joint extensions in families of contractive commuting operator tuples*, J. Funct. Anal. **258** (2010), no. 10, 3319–3346.

[Rud91] Walter Rudin, *Functional analysis*, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1991.

[SNF70] Béla Sz.-Nagy und Ciprian Foiaş, *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*, Translated from the French and revised, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1970.

[Tay70] Joseph L. Taylor, *A joint spectrum for several commuting operators*, J. Funct. Anal. **6** (1970), 172–191.

[Vas82] Florian-Horia Vasilescu, *Analytic functional calculus and spectral decompositions*, Mathematics and its Applications (East European Series), vol. 1, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1982.

[Wer07] Dirk Werner, *Funktionalanalysis*, Springer-Verlag, Berlin, 2007.