Modellsätze für sphärische Kontraktionen

Staatsexamensarbeit

von

Jochen Haupenthal

Betreuer: Prof. Dr. J. Eschmeier

Neunkirchen/Nahe
August 2003

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Eine der wichtigen Fragen in der Funktionalanalysis ist die nach der Existenz von minimalen unitären bzw. isometrischen Dilatationen von Kontraktionen. Nagy und Foias ([13]) konnten diese Frage positiv beantworten. Als eine von vielen Konsequenzen aus diesem wichtigen Ergebnis folgt unmittelbar die von Neumannsche Ungleichung

$$\|p(T)\| \quad \leq \quad \|p\|_{\infty,\mathcal{D}}$$

für Polynome $p \in \mathbb{C}[z]$ und Hilbertraumkontraktionen T, wobei $\mathcal{D}$ die offene euklidische Kreisscheibe in $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Es stellt sich nun die Frage nach einer natürlichen Verallgemeinerung auf den mehrdimensionalen Fall. Dabei geht man anstelle von einzelnen Kontraktionen $T \in L(H)$ von einem Tupel $T = (T_1, \ldots, T_n) \in L(H)^n$ von vertauschenden Kontraktionen aus.

Ando ([1]) gelang es für $n = 2$ die Existenz minimaler unitärer beziehungsweise isometrischer Dilatationen für ein Tupel (T_1, T_2) vertauschender Kontraktionen und die Gültigkeit der von Neumannschen Ungleichung zu zeigen.
Diese Resultate bleiben allerdings für $n \geq 3$ im Allgemeinen nicht richtig. So stammt von Parrott ([10]) für den Fall $n = 3$ ein Gegenbeispiel, das zeigt, dass für beliebige Dimensionen im allgemeinen keine unitären beziehungsweise isometrischen Dilatationen eines vertauschenden Tupels von Kontraktionen mehr existieren. Wählt man n hinreichend groß, so wurde außerdem von Varopoulos ([14]) gezeigt, dass die von Neumannsche Ungleichung für ein Tupel von vertauschenden Kontraktionen über der Kugel falsch ist.

Um trotzdem eine Verallgemeinerung für den mehrdimensionalen Fall zu erhalten benötigt man einen stärkeren Kontraktionsbegriff.
Wir bezeichnen ein Tupel $T = (T_1, \ldots, T_n) \in L(H)^n$ von vertauschenden, stetig linearen Operatoren auf einem Hilbertraum H als n-Kontraktion, falls

$$\sum_{i=1}^{n} T_i T_i^* \quad \leq \quad I_H$$

gilt.
Mit dieser Definition gelang es Arveson ([3]) die Gültigkeit der von Neumannschen Ungleichung

$$\|p(T)\| \quad \leq \quad \|p\|_{\mathcal{M}}$$

für n-Kontraktionen T und Polynome $p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ zu zeigen. Dabei ersetzt er die Supremumsnorm auf der Einheitskreisscheibe durch die Norm des

Multiplikationsoperators mit Symbol p auf einem geeigneten funktionalen Hilbertraum analytischer Funktionen, den wir mit $H(\mathcal{B})$ bezeichnen, wobei $\mathcal{B}$ die n-dimensionale Einheitskugel darstellt. Man kann diesen Hilbertraum mit dem symmetrischen Anteil des Fockraums identifizieren und er ist eine natürliche Verallgemeinerung des uns wohlbekannten Hardyraums über der Einheitskreisscheibe.

Ziel dieser Arbeit soll es sein, einen Modellsatz für n-Kontraktionen anzugeben, der es uns gestattet, eine n-Kontraktion T auf einem Hilbertraum H bis auf unitäre Äquivalenz als Kompression einer direkten Summe aus einem sogenannten n-Shift und einem sphärisch unitären Tupel auf einen $*$-invarianten Unterraum zu schreiben.

Wesentlich dabei ist die Konstruktion eines vollständig kontraktiven, vollständig positiven Algebrenhomomorphismus

$$\rho \ : \ \tau \quad \rightarrow \quad L(H), \qquad p(M_z) \quad \mapsto \quad p(T)$$

wobei τ die Toeplitz-Algebra, das heißt die vom n-Shift $M_z \ \in \ L(H(\mathcal{B}))^n$ erzeugte unitale C^*-Algebra, ist.
Mit Hilfe des Arvesonschen Fortsetzungssatzes können wir diese Abbildung zu einer vollständig positiven Abbildung

$$\phi \ : \ L(H(\mathcal{B})) \quad \rightarrow \quad L(H)$$

fortsetzen.
Unter Zuhilfenahme des Stinespringschen Dilatationsatzes folgt die Existenz einer Dilatation zu einem C^*-Algebrenhomomorphismus

$$\pi \ : \ L(H(\mathcal{B})) \quad \rightarrow \quad L(K) \qquad (K \supset H)$$

mit

$$\phi(T) \ = \ P_H \pi(T)|_H \qquad T \ \in \ L(H(\mathcal{B})).$$

Insbesondere gilt also auch

$$T_i \ = \ P_H \pi(M_{z_i})|_H \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Zu Begin beschäftigen wir uns mit einigen Eigenschaften des uns zugrundeliegenden Raumes $H(\mathcal{B}, \mathcal{E})$ ($\mathcal{E}$ Hilbertraum), insbesondere dabei mit n-Kontraktionen und im Speziellen wiederum mit dem n-Shift $M_z \ \in \ L(H(\mathcal{B}))$.

Anschließend geben wir den Fortsetzungssatz von Arveson und den Stinespringschen Dilatationssatz mit Beweisskizzen an, welche im weiteren Verlauf der Arbeit von entscheidender Rolle sein werden.

Im dritten Kapitel konstruieren wir zunächst den oben bereits angesprochenen vollständig positiven, vollständig kontraktiven, unitalen Algebrenhomomorphismus. Schließlich geben wir einige für uns nützliche Resultate aus der Darstellungstheorie an und zeigen, dass die kompakten Operatoren in der Toeplitz-Algebra enthalten sind. Als Ergebnis dieser Bemühungen erhalten wir die oben bereits erwähnte Zerlegung von n-Kontraktionen in einen Shift-Anteil und einen sphärisch unitären Anteil.
Benutzt man eine minimale Stinespring-Dilatation, so kann man die erhaltenen

Ergebnisse noch verbessern und es stellt sich heraus, dass die Vielfachheit des Shift-Anteils durch die Hilbertraum-Dimension des Defektraums von T gegeben ist.

Abschließend wenden wir den Modellsatz auf den Spezialfall einer sphärischen Isometrie an und erhalten direkt ein Ergebnis von Athavale, das besagt, dass jede sphärische Isometrie subnormal ist.

Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr. J. Eschmeier für das interessante Thema, die hervorragende Vorbereitung in den im Vorfeld stattgefundenen Seminaren und die überaus geduldige Betreuung. Weiterhin bedanke ich mich bei Herrn Dipl. Math. Christoph Barbian und Herrn Dipl. Math. Dominik Faas für die zahlreichen fachlichen Diskussionen und die geleistete Hilfe.

Schließlich danke ich meinen Eltern, die mir das Studium der Mathematik erst ermöglicht und mich in den vergangenen Jahren in jeder Hinsicht unterstützt haben. Ihrem Vorbild will ich folgen.

Kapitel 1

Aller Anfang ist schwer

1.1 Der Raum $H(\mathcal{B}, \mathcal{E})$

Sei im Folgenden immer $\mathcal{E}$ ein Hilbertraum und $\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C}^n; |z| < 1\}$ die offene euklidische Einheitskugel in $\mathbb{C}^n$. Für $\alpha \in \mathbb{N}^n$ sei

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \quad \text{und} \quad \alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \ldots \alpha_n! \,.$$

Proposition 1.1.1.
Für $z, w \in \mathcal{B}$ gilt die Gleichung

$$(1- < z, w >)^{-1} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \gamma_\alpha z^\alpha \overline{w}^\alpha, \tag{1.1}$$

wobei $\gamma_\alpha = \frac{|\alpha|!}{\alpha!}$.

Beweis.
Für $z = (z_1, \ldots, z_n)$ mit $\sum\limits_{j=1}^{n} |z_j| < 1$ gilt

$$(1 - \sum_{j=1}^{n} z_j)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} z_j \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} z_{i_1} \ldots z_{i_k} \right).$$

Indem man $\{1, \ldots, n\}^k$ als disjunkte Vereinigung

$$\{1, \ldots, n\}^k = \bigcup \{\mathcal{J}_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^n \ \text{ mit } \ |\alpha| = k\}$$

der Mengen

$$\mathcal{J}_\alpha = \{i \in \{1, \ldots, n\}^k \mid \#\{\rho \in \{1, \ldots, k\} \mid i_\rho = \nu\} = \alpha_\nu \ \text{ für } \ \nu = 1, \ldots, n\}$$

schreibt und benutzt, dass $\#\mathcal{J}_\alpha = \gamma_\alpha$ ist (siehe dazu etwa S.280 ff. in [8]), erhält man

$$(1 - \sum_{j=1}^{n} z_j)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = k} \gamma_\alpha z^\alpha \right) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \gamma_\alpha z^\alpha.$$

Das heißt, mit

$$< z, w > = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w_j}$$

folgt die Behauptung, da nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\sum_{j=1}^{n} |z_j \overline{w_j}| \ \leq \ |z| \cdot |w| \ < \ 1$$

für $z, w \in \mathcal{B}$ gilt.

$\square$

Insbesondere gilt für $z \in \mathcal{B}$

$$(1 - |z|^2)^{-1} \ = \ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \gamma_\alpha |z^\alpha|^2. \tag{1.2}$$

Wir betrachten nun die Menge

$$H(\mathcal{B}, \mathcal{E}) = \{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \mid a_\alpha \in \mathcal{E} \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ mit } (\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\|a_\alpha\|^2}{\gamma_\alpha})^{1/2} \ < \infty\}.$$

Mit den üblichen Verknüpfungen wird diese Menge, bestehend aus formalen Potenzreihen, deren Koeffizienten der angegebenen Summierbarkeitsbedingung genügen, offensichtlich zu einem Vektorraum.
Versieht man $H(\mathcal{B}, \mathcal{E})$ mit der durch das Skalarprodukt

$$\langle \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \ , \ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} b_\alpha z^\alpha \ \rangle = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{< a_\alpha, b_\alpha >_{\mathcal{E}}}{\gamma_\alpha}$$

gegebenen Norm $\| \cdot \|$, so wird $H(\mathcal{B}, \mathcal{E})$ zu einem Hilbertraum.
Mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung im $l^2(\mathbb{N}^n)$ kann man zeigen, dass die oben auftretenden Potenzreihen kompakt gleichmäßig auf $\mathcal{B}$ konvergieren. Dies ermöglicht es uns, den Raum $H(\mathcal{B}, \mathcal{E})$ mit einem Teilvektorraum des Raumes $\mathcal{O}(\mathcal{B}, \mathcal{E})$ aller $\mathcal{E}$-wertigen analytischen Funktionen auf $\mathcal{B}$ zu identifizieren.

Proposition 1.1.2.
Es gilt

$$H(\mathcal{B}, \mathcal{E}) \ \subset \ \mathcal{O}(\mathcal{B}, \mathcal{E}).$$

Beweis.
Sei $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \in H(\mathcal{B}, \mathcal{E})$.
Für alle $|z| < 1$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \|a_\alpha z^\alpha\| \ &= \ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \|(\frac{1}{\sqrt{\gamma_\alpha}} a_\alpha) \sqrt{\gamma_\alpha} z^\alpha)\| \\ &\leq \ \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\|a_\alpha\|^2}{\gamma_\alpha} \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \gamma_\alpha |z^\alpha|^2 \right)^{1/2} , \end{aligned}$$

indem wir die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung auf endliche Teilsummen anwenden. Der erste Faktor ist nach Vorraussetzung endlich und für den zweiten Faktor gilt

$$\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\gamma_\alpha|z^\alpha|^2\right)^{1/2} \stackrel{(1.2)}{=} \left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)^{1/2}.$$

Da jede punktweise konvergente Potenzreihe auf $\mathcal{B}$ kompakt gleichmäßig auf $\mathcal{B}$ konvergiert, wird durch

$$\mathcal{B} \to \mathcal{E}, \qquad z \mapsto \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$$

eine holomorphe, $\mathcal{E}$-wertige Funktion auf $\mathcal{B}$ definiert.

□

Betrachten wir nun die Abbildung

$$K : \mathcal{B}\times\mathcal{B} \to \mathbb{C}, \qquad (z,w) \mapsto (1-<z,w>)^{-1}.$$

Mit Hilfe von Proposition 1.1.1 sehen wir, dass für $w\in\mathcal{B}$ und $x\in\mathcal{E}$ die Abbildung

$$K(\cdot,w)x : \mathcal{B} \to \mathcal{E}, \qquad z \mapsto K(z,w)x$$

in $H(\mathcal{B},\mathcal{E})$ liegt.

Proposition 1.1.3.
Für $w\in\mathcal{B}$ und $x\in\mathcal{E}$ gilt

$$K(\cdot,w)x \quad\in\quad H(\mathcal{B},\mathcal{E})$$

mit $\|K(\cdot,w)x\| \le \sqrt{K(w,w)}\cdot\|x\|$.

Beweis.
Mit Proposition 1.1.1 folgt für $w\in\mathcal{B}$ und $x\in\mathcal{E}$

$$\begin{aligned} K(z,w)x &= (1-<z,w>)^{-1}x \\ &\stackrel{(1.1)}{=} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\gamma_\alpha z^\alpha\overline{w}^\alpha x \\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}(\gamma_\alpha\overline{w}^\alpha x)z^\alpha \end{aligned}$$

für alle $z\in\mathcal{B}$. Und wegen

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\frac{\|\gamma_\alpha\overline{w}^\alpha x\|^2}{\gamma_\alpha} &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\gamma_\alpha|\overline{w}^\alpha|^2\|x\|^2 \\ &\stackrel{(1.2)}{=} \frac{\|x\|^2}{1-|w|^2} \quad <\infty \end{aligned}$$

ist $K(\cdot,w)x\in H(\mathcal{B},\mathcal{E})$ für $w\in\mathcal{B}$ und $x\in\mathcal{E}$.

□

Proposition 1.1.4.
Für $w \in \mathcal{B}, x \in \mathcal{E}$ und $f \in H(\mathcal{B},\mathcal{E})$ gilt

$$\langle\ f, K(\cdot,w)x\ \rangle_{H(\mathcal{B},\mathcal{E})} \quad = \quad \langle\ f(w), x\ \rangle_{\mathcal{E}}. \tag{1.3}$$

Beweis.
Nach Definition des Skalarproduktes in $H(\mathcal{B},\mathcal{E})$ gilt für eine Potenzreihe

$$f = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \ \in H(\mathcal{B},\mathcal{E}) \quad \text{und} \quad w \in \mathcal{B}, x \in \mathcal{E}$$

$$\begin{aligned}
\langle\ f, K(\cdot,w)x\ \rangle &= \langle \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha, \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} (\gamma_\alpha \overline{w}^\alpha x) z^\alpha \rangle \\
&= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{< a_\alpha, \gamma_\alpha \overline{w}^\alpha x >}{\gamma_\alpha} \\
&= < \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha w^\alpha, x > \\
&= < f(w), x > .
\end{aligned}$$

□

Wir nennen K den reproduzierenden Kern von $H(\mathcal{B},\mathcal{E})$ und schreiben $H(\mathcal{B})$ für $H(\mathcal{B},\mathbb{C})$.
Bemerkung.
Ein funktionaler Hilbertraum über $\mathcal{B}$ ist ein Hilbertraum von $\mathbb{C}$ - wertigen Funktionen auf $\mathcal{B}$, so dass die Punktauswertungen in den Punkten $w \in \mathcal{B}$ stetig sind.
Durch Spezialisieren auf den Fall $\mathcal{E} = \mathbb{C}$ erhalten wir

Proposition 1.1.5.
Für den Hilbertraum $H(\mathcal{B})$ gilt:

(*i*) *Für alle $w \in \mathcal{B}$ liegt die Abbildung*

$$z \ \mapsto\ K(z,w)$$

in $H(\mathcal{B})$ und für alle $f \in H(\mathcal{B}), w \in \mathcal{B}$ gilt $f(w) \ = < f, K(\cdot,w) >$.

(*ii*) *Die Punktauswertungen*

$$\delta_w : H(\mathcal{B}) \ \to\ \mathbb{C},\ f \ \mapsto\ f(w)$$

sind stetig für alle $w \in \mathcal{B}$.

Beweis.

(*i*) Dies wurde in Proposition 1.1.3 und 1.1.4 sogar allgemeiner für den vektorwertigen Fall bewiesen.

(*ii*) Mit Hilfe von (i) folgt

$$|\delta_w(f)| = |f(w)| \overset{(1.3)}{=} |< f, K(\cdot,w) >| \le \|f\| \cdot \|K(\cdot,w)\|$$

für alle $f \in H(\mathcal{B})$, das heißt $\|\delta_w\| \le \|K(\cdot,w)\|$ für alle $w \in \mathcal{B}$.

□

1.2 n-Kontraktionen

Wir wollen in diesem Abschnitt den Begriff der n-Kontraktion definieren und ein wichtiges Beispiel, gerade in Bezug auf den weiteren Verlauf dieser Arbeit, betrachten.

Definition 1.2.1.
Für einen Hilbertraum H heißt ein Tupel $T \in L(H)^n$ vertauschender, stetig linearer Operatoren eine n-Kontraktion, falls

$$\sum_{i=1}^{n} T_i {T_i}^* \leq I_H.$$

Bemerkung.
Für $n = 1$ ist eine n-Kontraktion einfach ein Operator $T \in L(H)$ mit $\|T\| \leq 1$, und der Raum $H(\mathcal{B})$ ist der klassische Hardyraum $H^2(\mathcal{D})$ über dem Einheitskreis in $\mathbb{C}$.

Lemma 1.2.2.
Für einen Hilbertraum H und ein Tupel stetig linearer Operatoren $T \in L(H)^n$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) T ist n-Kontraktion.

(ii) Die Abbildung

$$H^n \overset{(T_1,\ldots,T_n)}{\longrightarrow} H, \quad (x_i) \mapsto \sum_{i=1}^{n} T_i x_i$$

ist kontraktiv.

Beweis.
Zum Beweis der obigen Aussage betrachten wir die Abbildung

$$\varphi \; : \; H^n \; \to \; H, \quad \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} T_i x_i.$$

Offensichtlich ist die zu φ adjungierte Abbildung gegeben durch

$$\varphi^* \; : \; H \; \to \; H^n, \quad \varphi^*(x) = ({T_1}^* x, \ldots, {T_n}^* x).$$

Damit ergibt sich

$$\varphi\varphi^* = \sum_{i=1}^{n} T_i {T_i}^*.$$

Um nun die Äquivalenz von (i) und (ii) zu zeigen, genügt es die Äquivalenzkette

$$\varphi\varphi^* \leq I_H \quad \Leftrightarrow \quad \|\varphi^*\| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \|\varphi\| \leq 1$$

zu betrachten.

$\square$

Im Folgenden werden wir uns mit den Operatoren M_{z_i} der Multiplikationen mit den Koordinatenfunktionen z_i $(i = 1, \ldots, n)$ beschäftigen. Wir werden zeigen, dass das von ihnen gebildete Tupel $M_z = (M_{z_1}, \ldots, M_{z_n})$ aus stetig linearen Operatoren auf $H(\mathcal{B})$ besteht und selbst eine n-Kontraktion ist. Damit wir dazu in der Lage sind, müssen wir zuvor noch etwas genauer auf die uns bereits aus Proposition 1.1.1 bekannten Vorfaktoren γ_α $(\alpha \in \mathbb{N}^n)$ eingehen.

Lemma 1.2.3.
Sei $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Dann gilt für $\gamma_\alpha = \frac{|\alpha|!}{\alpha!}$

$$\frac{\gamma_{\alpha-e_i}}{\gamma_\alpha} = \frac{\alpha_i}{|\alpha|} \quad (\leq 1) \qquad (\alpha \geq e_i). \tag{1.4}$$

Beweis.
Wir müssen lediglich die Definition der γ_α auf die auftretenden Terme anwenden und erhalten für $\alpha \geq e_i$

$$\frac{\gamma_{\alpha-e_i}}{\gamma_\alpha} = \frac{|\alpha - e_i|!\ \alpha!}{|\alpha|!\ (\alpha - e_i)!} = \frac{(|\alpha| - 1)!\ \alpha!}{|\alpha|!\ \frac{\alpha!}{\alpha_i}} = \frac{\frac{|\alpha|!}{|\alpha|}\ \alpha_i}{|\alpha|!} = \frac{\alpha_i}{|\alpha|}.$$

□

Nun können wir die gewünschten Aussagen über die Multiplikationsoperatoren mit den Koordinatenfunktionen zeigen.

Lemma 1.2.4.
Die Abbildungen

$$M_{z_i} \ : \ H(\mathcal{B}) \ \rightarrow \ H(\mathcal{B}), \quad f \ \mapsto \ z_i f \qquad (1 \leq i \leq n)$$

sind wohldefiniert und stetig linear mit $\|M_{z_i}\| \leq 1$.

Beweis.
Sei $f = \sum\limits_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \ \in \ H(\mathcal{B})$. Dann gilt

$$(M_{z_i} f)(z) = (z_i f)(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^{\alpha + e_i} = \sum_{\alpha \geq e_i} a_{\alpha - e_i} z^\alpha. \tag{1.5}$$

Um zu zeigen, dass der letzte Ausdruck wieder in $H(\mathcal{B})$ liegt, rechnen wir die Summierbarkeitsbedingung von $H(\mathcal{B})$ nach.

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \geq e_i} \frac{|a_{\alpha-e_i}|^2}{\gamma_\alpha} &= \sum_{\alpha \geq e_i} \frac{|a_{\alpha-e_i}|^2}{\gamma_{\alpha-e_i}} \ \frac{\gamma_{\alpha-e_i}}{\gamma_\alpha} \\ &\overset{(1.4)}{=} \sum_{\alpha \geq e_i} \frac{|a_{\alpha-e_i}|^2}{\gamma_{\alpha-e_i}} \ \frac{\alpha_i}{|\alpha|} \\ &\leq \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{|a_\alpha|^2}{\gamma_\alpha} = \|f\|^2. \end{aligned}$$

Die Kontraktivität der Abbildung folgt ebenfalls aus obiger Rechnung und die Linearität ist offensichtlich.

□

Um nun weiter schließen zu können, dass das Tupel

$$M_z = (M_{z_1}, \dots, M_{z_n}) \in L(H(\mathcal{B}))^n$$

eine n-Kontraktion ist, berechnen wir zuerst die zu M_{z_i} $(i = 1, \dots, n)$ adjungierten Operatoren.

Lemma 1.2.5.
Für $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \in H(\mathcal{B})$ gilt für die zu den Multiplikationsoperatoren mit den Koordinatenfunktionen z_i adjungierten Operatoren $M_{z_i}^*$ $(i = 1, \dots, n)$

$$(M_{z_i}^* f)(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha+e_i}} a_{\alpha+e_i} z^\alpha. \tag{1.6}$$

Beweis.
Da mit $f, g \in H(\mathcal{B})$ sowohl $M_{z_i} f$ als auch $M_{z_i}^* g$ für alle $i = 1, \dots, n$ wieder in $H(\mathcal{B})$ liegen, können wir obige Aussage schwach nachrechnen.
Seien dazu $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$, $g = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} b_\alpha z^\alpha \in H(\mathcal{B})$.
Dann gilt für alle $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}
\langle f, M_{z_i}^* g \rangle &= \langle M_{z_i} f, g \rangle \\
&= \langle \sum_{\alpha \geq e_i} a_{\alpha-e_i} z^\alpha, \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} b_\alpha z^\alpha \rangle \\
&= \sum_{\alpha \geq e_i} \frac{< a_{\alpha-e_i}, b_\alpha >_{\mathbb{C}}}{\gamma_\alpha} \\
&= \sum_{\alpha \geq e_i} \frac{a_{\alpha-e_i} \overline{b_\alpha}}{\gamma_\alpha} \\
&= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{a_\alpha \overline{b_{\alpha+e_i}}}{\gamma_\alpha} \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha+e_i}} \\
&= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha+e_i}} a_\alpha \overline{b_{\alpha+e_i}}}{\gamma_\alpha} \\
&= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{< a_\alpha, \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha+e_i}} b_{\alpha+e_i} >_{\mathbb{C}}}{\gamma_\alpha} \\
&= \langle \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha, \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha+e_i}} b_{\alpha+e_i} z^\alpha \rangle.
\end{aligned}$$

Beachte dabei

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{|\frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha+e_i}} b_{\alpha+e_i}|^2}{\gamma_\alpha} &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha+e_i}} \frac{|b_{\alpha+e_i}|^2}{\gamma_{\alpha+e_i}} \\
&\overset{(1.4)}{=} \sum_{\alpha \geq e_i} \frac{\alpha_i}{|\alpha|} \frac{|b_\alpha|^2}{\gamma_\alpha} \leq \|g\|^2.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung.
Arveson nennt das Tupel

$$M_z = (M_{z_1}, \dots, M_{z_n}) \in L(H(\mathcal{B}))^n$$

den n-dimensionalen Shift oder n-Shift, welchem wir uns anschließen werden.

Bemerkung 1.2.6.
Aus Lemma 1.2.5 folgt, dass für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, $i = 1, \dots, n$ und $f = \sum\limits_{\gamma \in \mathbb{N}^n} d_\gamma z^\gamma$ gilt:

a) $M_{z_i}^*(z^\alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha_i}{|\alpha|}\ z^{\alpha - e_i} & ; \quad \alpha_i \geq 1 \\ 0 & ; \quad \text{sonst.} \end{cases}$

b) $M_{z_i}^{*\,\beta}(z^\alpha) \in \begin{cases} \mathbb{C}\ z^{\alpha-\beta} & ; \quad \alpha \geq \beta \text{ (komponentenweise)} \\ \{0\} & ; \quad \text{sonst.} \end{cases}$

c) $P_{\mathbb{C}} M_z^{*\beta} f \ = \ d_\beta \ \frac{\beta!}{|\beta|!} \ = \ \frac{d_\beta}{\gamma_\beta}.$

Den Beweis dieser Aussagen kann man zum Teil dem Beweis von Lemma 1.2.5 entnehmen, zum anderen werden sie durch elementare Rechnungen, die hier nicht mehr ausgeführt werden, gezeigt.

Lemma 1.2.7.
Das Tupel

$$M_z = (M_{z_1}, \dots, M_{z_n}) \ \in \ L(H(\mathcal{B}))^n$$

ist eine n*-Kontraktion.*

Beweis.
Wir werden in unserem Beweis nicht nur zeigen, dass der n-dimensionale Shift eine n-Kontraktion ist, sondern dass $I_{H(\mathcal{B})} - \sum\limits_{i=1}^n M_{z_i} M_{z_i}^*$ die Orthogonalprojektion auf $\mathbb{C} \cdot 1 \subset H(\mathcal{B})$, das heißt auf die konstanten Funktionen in $H(\mathcal{B})$ ist. Sei dazu $f = \sum\limits_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \in H(\mathcal{B})$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n M_{z_i} M_{z_i}^* f \quad &\overset{(1.6)}{=} \quad \sum_{i=1}^n M_{z_i} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha+e_i}} \ a_{\alpha+e_i} z^\alpha \\
&\overset{(1.5)}{=} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha \geq e_i} \frac{\gamma_{\alpha - e_i}}{\gamma_\alpha} \ a_\alpha z^\alpha \\
&\overset{(1.4)}{=} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha \geq e_i} \frac{\alpha_i}{|\alpha|} a_\alpha z^\alpha \\
&= \quad \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \widetilde{a_\alpha} z^\alpha,
\end{aligned}$$

wobei $\widetilde{a_\alpha} = a_\alpha$ für $\alpha \neq 0$ und $\widetilde{a_0} = 0$.
Insbesondere ist dann $\sum\limits_{i=1}^n M_{z_i} M_{z_i}^* \ \leq \ I_{H(\mathcal{B})}$ und wir haben somit gezeigt, dass das Tupel M_z eine n-Kontraktion ist.

□

1.3 Multiplikatoren

In diesem Abschnitt führen wir eine Klasse von Operatoren ein, für die wir schon ein Beispiel aus dem vorigen Kapitel kennen, nämlich die Multiplikationsoperatoren mit den Koordinatenfunktionen.

Definition 1.3.1.
Man nennt

$$\mathcal{M}(H(\mathcal{B})) = \{ \ f \in \mathcal{O}(\mathcal{B}) \mid f \cdot H(\mathcal{B}) \ \subset \ H(\mathcal{B}) \ \}$$

den Raum der Multiplikatoren von $H(\mathcal{B})$.

Für die zu diesen Funktionen gehörenden Multiplikationsoperatoren gilt das folgende Lemma.

Lemma 1.3.2.
Für $f \in \mathcal{M}(H(\mathcal{B}))$ ist der Operator

$$M_f \ : \ H(\mathcal{B}) \ \to \ H(\mathcal{B}), \quad g \ \mapsto \ fg$$

stetig linear.

Beweis.
Die Linearität ist offensichtlich und die Stetigkeit ist eine Folgerung aus dem Graphensatz. Da nach Proposition 1.1.5 die Punktauswertungen auf $H(\mathcal{B})$ stetig sind, gilt für $f \in \mathcal{M}(H(\mathcal{B}))$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}, g, h \in H(\mathcal{B})$ mit $g_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} g, \ fg_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} h$

$$\begin{aligned} f(w)g(w) &= f(w)\ \delta_w(g) \\ &= f(w) \lim_{n\to\infty} \delta_w(g_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(w)\ \delta_w(g_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \delta_w(fg_n) \\ &= \delta_w(\lim_{n\to\infty}(fg_n)) \\ &= \delta_w(h) \\ &= h(w) \qquad (w \in \mathcal{B}_n). \end{aligned}$$

Damit hat M_f abgeschlossenen Graphen und somit sind die Multiplikationsoperatoren M_f stetig für alle $f \in \mathcal{M}(H(\mathcal{B}))$.

□

Wir versehen $\mathcal{M}(H(\mathcal{B}))$ mit der von $L(H(\mathcal{B}))$ vermöge

$$\|f\|_{\mathcal{M}} = \|M_f\| \qquad (f \in \mathcal{M}(H(\mathcal{B})))$$

induzierten Norm.

Bemerkung.
Im eindimensionalen Fall, das heißt für $n = 1$, stimmt der von uns betrachtete Hilbertraum $H(\mathcal{B})$, wie bereits schon erwähnt, mit dem Hardyraum überein. Außerdem ist bekannt, dass die Multiplikatoren des Hardyraums genau die beschränkten holomorphen Funktionen sind. Somit gilt also

$$\mathcal{M}(H(\mathcal{D})) = \mathcal{M}(H^2(\mathcal{D})) = H^\infty(\mathcal{D})$$

und für $f \in H^\infty(\mathcal{D})$ ist

$$\|f\|_{\mathcal{M}} = \|f\|_{\infty,\mathcal{D}}.$$

Mit diesem Wissen sind wir in der Lage, die von Neumannsche Ungleichung für (einzelne) Kontraktionen $T \in L(H)$ auf einem Hilbertraum H

$$\|p(T)\| \;\leq\; \|p\|_{\infty,\mathcal{D}} \qquad (p \in \mathbb{C}[z]) \tag{1.7}$$

neu zu formulieren.
Da bekanntlich $\|p\|_{\infty,\mathcal{D}} = \|p\|_{\mathcal{M}} = \|M_p\|$ und $M_p = p(M_z)$ $(p \in \mathbb{C}[z])$ gilt, ist (1.7) äquivalent zu

$$\|p(T)\| \;\leq\; \|p(M_z)\| \qquad (p \in \mathbb{C}[z]). \tag{1.8}$$

Bemerkung 1.3.3. (*Maximalität der* $H(\mathcal{B}) - Norm$)
Arveson zeigt in [3], dass die $H(\mathcal{B})$-Norm in gewissem Sinne maximal ist.
Genauer heißt das, dass die Hilbertraum-Normen des 'Hardy'-Raums $H^2(\partial\mathcal{B}_n)$ und des 'Bergmann'-Raums $H^2(\mathcal{B}_n)$ beide von $\|\cdot\|_{H(\mathcal{B})}$ dominiert werden.
Tatsächlich gilt

$$H(\mathcal{B}) \;\subseteq\; H^2(\partial\mathcal{B}_n) \;\subseteq\; H^2(\mathcal{B}_n),$$

wobei beide Einbettungsabbildungen kompakte Operatoren mit Norm 1 sind.
Beachten sollte man außerdem noch, dass $H(\mathcal{B})$ der einzige dieser 3 Funktionenräume ist, in dem H^∞ nicht enthalten ist, und dass er der einzige dieser drei ist, für den die n-Kontraktion

$$M_z \;=\; (M_{z_1}, \ldots, M_{z_n})$$

der Multiplikationsoperatoren nicht subnormal ist (vergleiche dazu Theorem 4.3 und anschließende Bemerkungen in [3]).

1.4 Ausblick

Wir haben in Abschnitt 1.3 gesehen, dass man die von Neumannsche Ungleichung für (einzelne) Kontraktionen (1.7) auch anders formulieren kann, indem man auf der rechten Seite der Ungleichung die Supremumsnorm auf dem Einheitskreis durch die Multipliernorm $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ auf $H(\mathcal{B})$ ersetzt.
Wir werden in einem späteren Kapitel sehen, dass die von Neumannsche Ungleichung in der Form (1.8) auch für n-Kontraktionen richtig bleibt.
Seien H ein Hilbertraum, $T \in L(H)^n$ eine n-Kontraktion und $p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ ein Polynom in n Variablen. Dann gilt

$$\|p(T)\| \;\leq\; \|p(M_z)\|,$$

wobei $M_z \in L(H(\mathcal{B}))^n$ das in Abschnitt 1.2 definierte Multiplikationstupel auf $H(\mathcal{B})$, das heißt der n-Shift, ist.

Sei $A = \{\, p(M_z) \mid p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n] \,\} \;\subset\; L(H(\mathcal{B}))$ die von $M_{z_1}, \ldots, M_{z_n}$ erzeugte unitale Unteralgebra von $L(H(\mathcal{B}))$. Wir werden zeigen, dass die Abbildung

$$\rho \;:\; A \;\to\; L(H), \quad p(M_z) \;\mapsto\; p(T)$$

ein wohldefinierter, vollständig kontraktiver, vollständig positiver, unitaler Algebrenhomomorphismus ist, den wir sogar auf dem größeren Operatorsystem $S \supset A$ mit

$$S \;=\; LH\{\; M_z^\alpha M_z^{*\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \;\} \;\subset\; L(H(\mathcal{B}))$$

definieren können. Mit Hilfe des Arvesonschen Fortsetzungssatzes können wir diese Abbildung zu einer vollständig positiven Abbildung

$$\Phi \ : \ L(H(\mathcal{B})) \ \to \ L(H)$$

fortsetzen. Unter Zuhilfenahme des Stinespringschen Dilatationssatzes folgt wiederum, dass diese Fortsetzung eine Dilatation zu einem C^*-Algebrenhomomorphismus hat, das heißt, dass ein Hilbertraum $K \supset H$ und eine C^*-Darstellung

$$\pi \ : \ L(H(\mathcal{B})) \ \to \ L(K)$$

existieren mit

$$\Phi(a) = P_H \ \pi(a)|_H \qquad (\ a \in L(H(\mathcal{B})) \ ).$$

Insbesondere gilt für jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$

$$\begin{aligned} p(T) &= \Phi(p(M_z)) \\ &= P_H \ \pi(p(M_z))|_H \\ &= P_H \ p(\pi(M_{z_1}), \ldots, \pi(M_{z_n}))|_H, \end{aligned}$$

also auch

$$T_i = P_H \ \pi(M_{z_i})|_H \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Kapitel 2

Wichtige Hilfsmittel: Die Sätze von Arveson und Stinespring

2.1 Der Arvesonsche Fortsetzungssatz

Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ C^*-Algebren und $S \subset \mathcal{A}$ ein Operatorsystem, das heißt also ein $*$-abgeschlossener Unterraum mit Eins. Sicherlich kann man dann $M_n(S)$ als Unterraum der C^*-Algebra $M_n(\mathcal{A})$ ansehen. Wir versehen $M_n(S)$ mit der von $M_n(\mathcal{A})$ vererbten Norm- und Ordnungstruktur.
Sei nun $\phi : S \to \mathcal{B}$ eine lineare Abbildung. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$

$$\phi_n \ : \ M_n(S) \ \to \ M_n(\mathcal{B}) \quad \text{durch} \quad \phi_n((a_{i,j})) \ = \ (\phi(a_{i,j})).$$

Dann heißt ϕ n-positiv, falls ϕ_n positiv ist und wir nennen ϕ vollständig positiv, falls ϕ n-positiv ist für alle n. Außerdem heißt ϕ vollständig beschränkt, falls $\sup_n \|\phi_n\|$ endlich ist und wir schreiben dann

$$\|\phi\|_{cb} \ = \ \sup_n \|\phi_n\|.$$

Wir beachten hierbei, dass $\|\cdot\|_{cb}$ eine Norm auf den vollständig beschränkten Abbildungen darstellt.
Ebenso benutzen wir die Ausdrücke vollständig isometrisch und vollständig kontraktiv, falls jedes ϕ_n isometrisch ist, beziehungsweise $\|\phi\|_{cb} \leq 1$ gilt.
Ziel dieses Abschnittes ist es einen Satz von Arveson bereitzustellen, der es uns ermöglicht, vollständig positive Abbildungen

$$\varphi \ : \ S \ \to \ L(H)$$

von einem Operatorsystem $S \subset \mathcal{A}$ einer unitalen C^*-Algebra $\mathcal{A}$ auf $L(H)$ für einen Hilbertraum H zu einer vollständig positiven Abbildung

$$\phi \ : \ \mathcal{A} \ \to \ L(H)$$

fortzusetzen. Dieses Ergebnis wollen wir dann auf die bereits in Abschnitt 1.4 beschriebene Situation anwenden. Es soll an dieser Stelle schon erwähnt werden, dass unser Beweis des Arvesonschen Fortsetzungsatzes keineswegs vollständig ist, vielmehr wird eine Anleitung, beziehungsweise eine Beweisskizze geliefert, anhand derer man in der Lage ist, die einzelnen Beweisschritte nachzuvollziehen. Außerdem sei gesagt, dass wir hier nur die Zurückführung auf den endlich-dimensionalen Fall erklären möchten und den verbleibenden Fall lediglich zitieren wollen.

Satz 2.1.1. *(Arveson)*
Seien $\mathcal{A}$ eine unitale C^*-Algebra, $S \subset \mathcal{A}$ ein Operatorsystem und

$$\varphi \ : \ S \ \rightarrow \ L(H)$$

eine vollständig positive Abbildung.
Dann existiert eine vollständig positive Abbildung

$$\phi \ : \ \mathcal{A} \ \rightarrow \ L(H) \qquad \textit{mit} \quad \varphi = \phi|_S.$$

Beweis.
Die Idee des Beweises kann man in zwei Teilaussagen untergliedern, zum einen die Rückführung des vorliegenden Falles auf einen endlich-dimensionalen Fall und zum anderen einen Kompaktheitsschluß mit Banach-Alaoglu.
Da man für einen endlich-dimensionalen Hilbertraum H mit $dim(H) = n$ die Menge der beschränkten Operatoren auf H mit den $n \times n$-Matrizen identifizieren kann, und dieser Fall etwa in Satz 5.2 aus [11] nachzulesen ist, verbleibt an dieser Stelle für uns noch die Rückführung des allgemeinen auf den endlich-dimensionalen Fall zu zeigen.
Dazu schreiben wir

$$\mathcal{F} \ = \ \{ \ F \subset H \mid F \text{ Unterraum} \ , \ dim(F) < \infty \ \}$$

und ordnen $\mathcal{F}$ bezüglich der Inklusion.
Seien nun $F \in \mathcal{F}$ und

$$j \ : \ F \ \rightarrow \ H$$

die Inklusion. Damit wird j^* zur Orthogonalprojektion P_F von H auf F und

$$C_F^H \ : \ L(H) \ \rightarrow \ L(F), \qquad T \ \mapsto \ j^*Tj$$

ist nach den Beispielen aus [11] auf Seite 28 vollständig positiv. Da Kompositionen von vollständig positiven Abbildungen wieder vollständig positiv sind, sind die Abbildungen

$$\varphi_F \ = \ C_F^H \circ \varphi \qquad (F \in \mathcal{F})$$

vollständig positiv.
Nach Satz 5.2 aus [11] existieren dann für

$$\varphi_F \ : \ S \ \rightarrow \ L(F), \qquad a \ \mapsto \ P_F \varphi(a)|_F$$

vollständig positive Fortsetzungen

$$\phi_F \ : \ \mathcal{A} \ \rightarrow \ L(F).$$

Wir betrachten nun im Anschluss die induzierten Abbildungen

$$\Phi_F \ : \ \mathcal{A} \ \rightarrow \ L(H), \qquad a \ \mapsto P_F^* \phi_F(a) P_F.$$

Diese sind, wiederum nach den oben zitierten Beispielen aus [11], vollständig positiv, und es gilt

$$< \Phi_F(a)x, y > = < \varphi(a)P_F x, P_F y > \qquad (a \in S,\ x, y \in H).$$

Man erhält also ein Netz

$$(\Phi_F)_{F \in \mathcal{F}}$$

aus vollständig positiven Abbildungen in $L(\mathcal{A}, L(H))$ mit $\|\Phi_F\| \ \leq \ \|\varphi\|$.
Die Idee ist es, jetzt zu zeigen, dass $L(\mathcal{A}, L(H))$ Dualraum eines Banachraumes ist so, dass die Menge

$$\{\ \rho \in L(\mathcal{A}, L(H)) \mid \rho \text{ vollständig positiv mit } \|\rho\| \ \leq \ \|\varphi\|\}$$

w^*- kompakt ist.
Dann kann man mit dem Satz von Banach-Alaoglu schließen, dass $(\Phi_F)_{F \in \mathcal{F}}$ ein w^*-konvergentes Teilnetz besitzt. Es ist nicht schwer zu sehen, dass der Grenzwert $\Phi \in L(\mathcal{A}, L(H))$ eines solchen Teilnetzes eine Fortsetzung von φ mit den gewünschten Eigenschaften ist.
Seien nun X, Y Banachräume.
Dann existiert genau eine lineare Abbildung

$$j \ : \ X \otimes Y \ \to \ L(X, Y')'$$

mit

$$< T, j(x \otimes y) > = < y, Tx > \qquad (x \in X,\ y \in Y,\ T \in L(X, Y')).$$

Für diese gilt

$$\|j(x \otimes y)\| \ = \ \|x\| \cdot \|y\| \qquad (x \in X,\ y \in Y).$$

An dieser Stelle führen wir noch die Notationen

$$\begin{aligned} X \hat{\otimes} Y &= \overline{j(X \otimes Y)} \ \subset \ L(X, Y')' \\ x \hat{\otimes} y &= j(x \otimes y) \end{aligned}$$

ein.
Außerdem bezeichnen wir mit *rest* die kontraktive Abbildung

$$L(X, Y')'' \overset{rest}{\to} (X \hat{\otimes} Y)', \qquad \varphi \ \mapsto \ \varphi|_{X \hat{\otimes} Y}$$

und mit i die kanonische isometrische Einbettung

$$L(X, Y') \overset{i}{\to} L(X, Y')'', \qquad T \ \mapsto < T, \cdot > .$$

Die Komposition

$$\Xi \ : \ L(X, Y') \overset{i}{\to} L(X, Y')'' \overset{rest}{\to} (X \hat{\otimes} Y)'$$

ist ein isometrischer Isomorphismus (vergleiche Lemma 6.1 in [11]).
Ξ ist die eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$L(X, Y') \overset{\Xi}{\to} (X \hat{\otimes} Y)'$$

mit

$$< x\hat{\otimes}y, \Xi(T) > = < T, j(x \otimes y) > \ \ (=< y, Tx >). \qquad (*)$$

Die w^*-Topologie auf $L(X, Y')$ bezüglich der Dualität

$$< X\hat{\otimes}Y, L(X, Y') >$$

heißt BW-Topologie.
Sei nun $(L_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein beschränktes Netz in $L(X, Y')$ und $L \in L(X, Y')$, so dass $L(x)$ für alle $x \in X$ der w^*-Grenzwert in Y' von $(L_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda}$ ist.
Da

$$L_\lambda(x) \stackrel{w^*}{\longrightarrow} L(x) \qquad \text{für alle } x \in X$$

wegen $(*)$ äquivalent dazu ist, dass $(L_\lambda - L)_{\lambda\in\Lambda}$ als Netz in $(X\hat{\otimes}Y)'$ punktweise auf $j(X \otimes Y)$ gegen 0 konvergiert, $(L_\lambda - L)_{\lambda\in\Lambda}$ ein beschränktes Netz in $(X\hat{\otimes}Y)'$ ist und außerdem $j(X \otimes Y) \subset X\hat{\otimes}Y$ dicht liegt, impliziert dies, dass $(L_\lambda - L)_{\lambda\in\Lambda}$ punktweise auf $X\hat{\otimes}Y$ gegen 0 konvergiert.
Folglich gilt

$$L_\lambda \stackrel{BW}{\longrightarrow} L \quad \Leftrightarrow \quad L_\lambda(x) \stackrel{w^*}{\longrightarrow} L(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Nun fasst man $L(H)$ auf als Dualraum der Spurklasseoperatoren vermöge des Dualsystems

$$\mathcal{C}^1(H) \times L(H) \to \mathbb{C}, \qquad (A, T) \mapsto tr(AT).$$

Man kann zeigen, dass ein beschränktes Netz (T_α) in $L(H)$ genau dann gegen $T \in L(H)$ in der w^*-Topologie von $L(H)$ konvergiert, wenn

$$(T_\alpha) \stackrel{WOT}{\longrightarrow} T$$

(siehe dazu etwa Proposition I. 2.5 in [6]).
Somit gilt für ein beschränktes Netz $(L_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in L(X, L(H))$ und $L \in L(X, L(H))$, falls X ein Banachraum ist

$$L_\lambda \stackrel{BW}{\longrightarrow} L \quad \Leftrightarrow \quad L_\lambda(x) \stackrel{WOT}{\longrightarrow} L(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Hat man dies verinnerlicht, so kann man anschließend die Aussage treffen, dass für eine unitale C^*-Algebra $\mathcal{A}$, ein norm-abgeschlossenes Operatorsystem $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$, einen abgeschlossenen Unterraum $M \subset \mathcal{A}$ und $r > 0$ die Mengen

$$\begin{aligned} B_r(M, H) &= \{ L \in L(M, L(H)) \mid \|L\| \le r \} \\ CB_r(M, H) &= \{ L \in L(M, L(H)) \mid \|L\|_{CB} \le r \} \\ CP_r(\mathcal{S}, H) &= \{ L(\mathcal{S}, L(H)) \mid L \text{ vollständig positiv },\ \|L\| \le r \} \\ & \quad\ (P \in L(H) \text{ positiv}) \end{aligned}$$

kompakt in der BW-Topologie sind.
Da nun die BW-Topologie die w^*-Topologie auf $L(M, L(H))$ ist, folgt, dass $B_r(M, H)$ kompakt nach Banach-Alaoglu ist. Für $CP_r(\mathcal{S}, H)$ und $CB_r(M, H)$ genügt es zu zeigen, dass sie BW-abgeschlossene Teilmengen von $B_r(M, H)$ sind (vergleiche Theorem 6.4 in [11]).
Damit hat das oben erhaltene Netz

$$(\Phi_F)_{F\in\mathcal{F}},$$

da es in $CP_{\|\varphi\|}(\mathcal{A}, H)$ liegt, ein konvergentes Teilnetz

$$(\Phi_{F(\lambda)})_{\lambda\in\Lambda}$$

in der BW-Topologie, dessen Grenzwert wir mit Φ bezeichnen.
Dann gilt

$$\Phi \;=\; \lim_{\lambda} \Phi_{F(\lambda)} \;\in\; CP_{\|\varphi\|}(\mathcal{A}, H).$$

Sind $x, y \in H$ beliebig, so gilt für alle $\lambda \in \Lambda$ mit $F(\lambda) \supset LH\{x, y\}$

$$< \varphi(a)x, y > = < \Phi_{F(\lambda)}x, y > \stackrel{\lambda\in\Lambda}{\longrightarrow} < \Phi(a)x, y > \qquad (a \in \mathcal{S}).$$

Damit gilt also

$$\varphi \;=\; \Phi|_{\mathcal{S}}.$$

□

2.2 Der Stinespringsche Dilatationssatz

Wir haben in Abschnitt 2.1 gesehen, dass es zu einer vollständig positiven Abbildung

$$\varphi \;:\; S \;\rightarrow\; L(H)$$

von einem Operatorsystem $S \subset \mathcal{A}$ einer unitalen C^*-Algebra $\mathcal{A}$ immer eine vollständig positive Abbildung

$$\phi \;:\; \mathcal{A} \;\rightarrow\; L(H) \qquad \text{mit} \qquad \varphi = \phi|_S$$

gibt.
Der Stinespringsche Dilatationssatz sagt uns nun, dass man zu dieser vollständig positiven Fortsetzung einen Hilbertraum $K \supset H$, einen unitalen C^*-Homomorphismus

$$\pi \;:\; L(H(\mathcal{B})) \;\rightarrow\; L(K)$$

und einen stetigen Operator $V : H \to K$ mit $\|\phi(I_{L(H(\mathcal{B}))})\| = \|V\|^2$ finden kann, so dass

$$\phi(a) \;=\; V^*\pi(a)V \qquad (\; a \in L(H(\mathcal{B}))\;).$$

Ist ϕ unital, so kann man noch mehr aussagen.
Es folgt die allgemeine Version des Stinespringschen Dilatationssatzes.

Satz 2.2.1. *(Stinespring)*
Seien H ein Hilbertraum, $\mathcal{A}$ eine unitale C^*-Algebra und

$$\phi \;:\; \mathcal{A} \;\rightarrow\; L(H)$$

eine vollständig positive Abbildung.
Dann existieren ein Hilbertraum K, ein unitaler C^*-Homomorphismus

$$\pi \;:\; \mathcal{A} \;\rightarrow\; L(K)$$

und ein beschränkter Operator $V : H \to K$ mit $\|\phi(1_{\mathcal{A}})\| = \|V\|^2$, so dass

$$\phi(a) \;=\; V^*\pi(a)V \qquad (\; a \in \mathcal{A}\;).$$

Ist ϕ unital, so ist V damit isometrisch.
Identifiziert man in diesem Fall wie üblich den Raum H mit seinem Bild unter der Isometrie V, so gilt

$$\phi(a) \;=\; P_H \pi(a)|_H \qquad (\; a \in \mathcal{A} \;).$$

Beweis.
Zunächst konstruieren wir uns den Hilbertraum $K \supset H$ und das zugehörige Skalarprodukt.
Wir bezeichnen mit $\mathcal{A} \otimes H$ das algebraische Tensorprodukt.
Seien $b \in \mathcal{A}$, $y \in H$. Dann ist die Abbildung

$$\mathcal{A} \times H \;\to\; \mathbb{C}, \qquad (a,x) \;\mapsto <\phi(b^*a)x, y>$$

offensichtlich bilinear.
Die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes liefert uns die Existenz einer linearen Abbildung

$$S_{b,y} \;:\; \mathcal{A} \otimes H \;\to\; \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad S_{b,y}(a \otimes x) \;= <\phi(b^*a)x, y> .$$

Außerdem ist die Abbildung

$$\mathcal{A} \times H \;\to\; (\mathcal{A} \otimes H)^*, \qquad (b,y) \;\mapsto\; S_{b,y}$$

antibilinear, wobei wir mit $(\mathcal{A} \otimes H)^*$ den algebraischen Dualraum zu $(\mathcal{A} \otimes H)$ bezeichnen.
Dann folgt, wiederum mit der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes, die Existenz einer antilinearen Abbildung

$$S \;:\; \mathcal{A} \otimes H \;\to\; (\mathcal{A} \otimes H)^*, \qquad b \otimes y \;\mapsto\; S_{b,y}.$$

Wir definieren nun die sesquilineare Abbildung

$$<\cdot,\cdot>: \; (\mathcal{A} \otimes H) \times (\mathcal{A} \otimes H) \;\to\; \mathbb{C}, \qquad (u,v) \;\mapsto\; S(v)u.$$

Dann ist für $u = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i \;\in \mathcal{A} \otimes H$

$$\begin{aligned} <u,u> = \; S(u)u \;&=\; \sum_{i,j=1}^{n} <\phi(a_i^* a_j)x_j, x_i> \\ &=\; <\phi_n((a_i^* a_j)_{i,j})((x_i)_i), ((x_j)_j)>_{H^n} \\ &\geq\; 0, \end{aligned}$$

da ϕ vollständig positiv ist. Das heißt $<\cdot,\cdot>$ ist positiv semidefinit.
Sei nun $N = \{ \; u \in \mathcal{A} \otimes H \; | \; <u,u> = 0 \; \}$.
Man sieht leicht, dass N ein Untervektorraum ist und durch

$$<u+N, v+N> := <u,v>$$

ein Skalarprodukt auf $(\mathcal{A} \otimes H)/N$ erklärt ist. Mit diesem Skalarprodukt ist $(\mathcal{A} \otimes H)/N$ also ein Prähilbertraum.
Wir definieren dann K als Vervollständigung von $(\mathcal{A} \otimes H)/N$ und erhalten den

gewünschten Hilbertraum.
Als nächstes wenden wir uns dem unitalen C^*-Homomorphismus $\pi : \mathcal{A} \to L(K)$ zu.
Für $a \in \mathcal{A}$ ist die Abbildung

$$\mathcal{A} \times H \;\to\; \mathcal{A} \otimes H, \qquad (b, y) \;\mapsto\; (ab) \otimes y$$

offensichtlich bilinear.
Dann liefert erneut die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts eine lineare Abbildung

$$\pi_0(a) \;:\; \mathcal{A} \otimes H \;\to\; \mathcal{A} \otimes H \quad \text{mit} \quad \pi_0(a)(b \otimes y) \;=\; (ab) \otimes y.$$

Das heißt, es gilt

$$\pi_o(a) \;=\; L_a \;\otimes\; 1_H,$$

wobei

$$L_a \;:\; \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

die Linksmultiplikation mit a ist.
Für $a \in \mathcal{A}$ und $u = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i \otimes y_i \;\in N$ gilt unter Benutzung, dass ϕ_n positiv ist und in der C^*-Algebra $M_n(\mathcal{A})$ die Abschätzung

$$(b_i^* a^* a b_j)_{i,j} \;\leq\; \|a\|^2 \; (b_i^* b_j)_{i,j} \qquad (1 \leq i, j \leq n)$$

gilt,

$$\begin{aligned}
< \pi_0(a)u, \pi_0(a)u > \;&=\; < \sum_{i=1}^{n} (ab_i) \otimes y_i, \sum_{i=1}^{n} (ab_i) \otimes y_i > \\
&=\; \sum_{i,j=1}^{n} < \phi((ab_i)^*(ab_j))y_j, y_i > \\
&=\; < \phi_n((b_i^* a^* a b_j)_{i,j})(y_i)_i, (y_i)_i > \\
&\leq\; \|a\|^2 \sum_{i,j=1}^{n} < \phi(b_i^* b_j) y_j, y_i > \\
&=\; \|a\|^2 < u, u > .
\end{aligned}$$

Diese Rechnung zeigt, dass N invariant unter $\pi_0(a)$ für alle $a \in \mathcal{A}$ ist und dass die induzierte Quotientenabbildung

$$\tilde{\pi}(a) \;:\; (\mathcal{A} \otimes H)/N \;\to\; (\mathcal{A} \otimes H)/N, \qquad (u + N) \;\mapsto\; (\pi_0(a)u) + N$$

wohldefiniert und stetig linear mit $\|\tilde{\pi}(a)\| \leq \|a\|$ ist.
Damit existiert also auch eine stetig lineare Fortsetzung

$$\pi(a) \;:\; K \;\to\; K \quad \text{mit} \quad \|\pi(a)\| \;\leq\; \|a\| \quad (a \in \mathcal{A}).$$

Man prüft leicht nach, dass durch

$$\pi \;:\; \mathcal{A} \;\to\; L(K), \qquad a \;\mapsto\; \pi(a)$$

ein unitaler $*$-Homomorphismus definiert wird. Wir definieren V als die Abbildung

$$H \to K, \qquad x \mapsto (1_{\mathcal{A}} \otimes x) + N.$$

Die Linearität ist offensichtlich und es gilt

$$\begin{aligned} \|Vx\|^2 &= < Vx \ , \ Vx > \\ &= < (1_{\mathcal{A}} \otimes x) + N \ , \ (1_{\mathcal{A}} \otimes x) + N > \\ &= < 1_{\mathcal{A}} \otimes x \ , \ 1_{\mathcal{A}} \otimes x > \\ &= < \phi(1_{\mathcal{A}})x \ , \ x > \\ &\leq \|\phi(1_{\mathcal{A}})\| \cdot \|x\|^2 \qquad (x \in H). \end{aligned}$$

Damit ist V beschränkt und es folgt

$$\begin{aligned} \|V\|^2 &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Vx\|^2 \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} < \ \phi(1_{\mathcal{A}})x \ , \ x \ > = \|\phi(1_{\mathcal{A}})\|, \end{aligned}$$

da ϕ positiv ist.
Somit gilt $\|V\|^2 = \|\phi(1_{\mathcal{A}})\|$.
(Man sieht an dieser Stelle auch, dass, falls ϕ unital ist, $\|Vx\| = \|x\|$ gilt, also dass V eine Isometrie ist.)
Außerdem gilt

$$\begin{aligned} < V^*\pi(a)Vx \ , \ y > &= < \pi(a)Vx \ , \ Vy > \\ &= < \pi(a)((1_{\mathcal{A}} \otimes x) + N) \ , \ (1_{\mathcal{A}} \otimes y) + N > \\ &= < \pi_0(a)(1_{\mathcal{A}} \otimes x) \ , \ (1_{\mathcal{A}} \otimes y) > \\ &= < a \otimes x \ , \ 1_{\mathcal{A}} \otimes y > \\ &= < \phi(a)x \ , \ y > \qquad (x, y \in H, \ a \in \mathcal{A}). \end{aligned}$$

Das heißt

$$V^*\pi(a)V = \phi(a) \qquad (a \in \mathcal{A}).$$

Betrachten wir nun noch den Fall, dass ϕ unital ist.
Identifiziert man H mit VH vermöge der Isometrie V, so wird

$$V : H \to K, \qquad x \mapsto x$$

die Inklusion und

$$V^* : K \to H$$

die Orthogonalprojektion von K auf H.
Also ist

$$P_H\pi(a)|_H = \phi(a) \quad \text{für alle } a \in \mathcal{A}.$$

□

Bemerkung.

- *Stinespring – Darstellung*
  Man nennt jedes Tripel (K, π, V) mit den in Satz 2.2.1 beschriebenen Eigenschaften eine Stinespring - Darstellung von ϕ .

- *Minimale Stinespring – Darstellung*
  Definiert man einen Teilraum $K_1 \subset K$ als die abgeschlossene lineare Hülle aller Vektoren der Form $\pi(a)Vh$ für $a \in \mathcal{A}$ und $h \in H$ - wir schreiben hierfür $K_1 = [\ \pi(\mathcal{A})VH\ ]$ - so sind die Abbildungen

$$\pi_1 \ : \ \mathcal{A} \ \to \ L(K_1), \qquad \pi_1(a) \ = \ \pi(a)|_{K_1}$$

  und

$$V_1 \ : \ H \ \to \ K_1, \qquad V_1 x \ = \ Vx$$

  wohldefiniert.
  Außerdem ist π_1 als Einschränkung von π auf K_1 immer noch ein $*$-Homomorphismus und offensichtlich gilt $V_1 \in L(H, K_1)$ mit

$$V_1^* \pi_1(a) V_1 \ = \ \phi(a) \qquad (a \in \mathcal{A}).$$

  Die Stinespring - Darstellung (K_1, π_1, V_1) von ϕ ist minimal in dem Sinne, dass

$$K_1 \ = \ [\ \pi_1(\mathcal{A}) V_1 H\ ]$$

  gilt.

- *Eine minimale Stinespring – Darstellung ist bis auf unitäre Äquivalenz eindeutig*
  Seien (K_1, π_1, V_1) und (K_2, π_2, V_2) zwei minimale Stinespring-Darstellungen. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|\sum_{i=1}^n \pi_1(a_i)V_1 h_i\|^2 \ &= \ < \sum_{i=1}^n \pi_1(a_i)V_1 h_i \ , \ \sum_{i=1}^n \pi_1(a_i)V_1 h_i > \\
&= \ \sum_{i,j=1}^n < \pi_1(a_i)V_1 h_i \ , \ \pi_1(a_j)V_1 h_j > \\
&= \ \sum_{i,j=1}^n < V_1^* \pi_1(a_j^* a_i)V_1 h_i \ , \ h_j > \\
&= \ \sum_{i,j=1}^n < \phi(a_j^* a_i) h_i \ , \ h_j > \\
&= \ \sum_{i,j=1}^n < V_2^* \pi_2(a_j^* a_i)V_2 h_i \ , \ h_j > \\
&= \ \sum_{i,j=1}^n < \pi_2(a_i)V_2 h_i \ , \ \pi_2(a_j)V_2 h_j > \\
&= \ < \sum_{i}^n \pi_2(a_i)V_2 h_i \ , \ \sum_{i=1}^n \pi_2(a_i)V_2 h_i > \\
&= \ \|\sum_{i=1}^n \pi_2(a_i)V_2 h_i\|^2
\end{aligned}$$

  für $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}, \ h_1, \ldots, h_n \in H.$

Damit ist die Abbildung

$$\begin{aligned} LH\{\ \pi_1(a)V_1h \mid a \in \mathcal{A}, h \in H\} &\to LH\{\ \pi_2(a)V_2h \mid a \in \mathcal{A}, h \in H\}, \\ \sum_{i=1}^{n} \pi_1(a_i)V_1h_i &\mapsto \sum_{i=1}^{n} \pi_2(a_i)V_2h_i \end{aligned}$$

wohldefiniert, isometrisch und offensichtlich surjektiv.
Durch Fortsetzen dieser Abbildung erhalten wir eine unitäre Abbildung

$$U \ : \ K_1 = [\ \pi_1(\mathcal{A})V_1H\ ] \to K_2 = [\ \pi_2(\mathcal{A})V_2H\ ].$$

Für diese gilt dann

$$UV_1x = V_2x\ (x \in H) \quad \text{und} \quad U\pi_1(a)U^* = \pi_2(a)\ (a \in \mathcal{A}).$$

Kapitel 3

Der Modellsatz

3.1 Konstruktion eines vollständig kontraktiven Algebrenhomomorphismus

Sei H ein Hilbertraum und $T \in L(H)^n$ eine n-Kontraktion.
Wir wollen in diesem Abschnitt die in Kapitel 1.4 schon erwähnte Abbildung

$$\rho \ : \ A \ \to \ L(H), \quad p(M_z) \ \mapsto \ p(T),$$

wobei $A = \{p(M_z) \mid p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]\} \subset L(H(\mathcal{B}))$ die von $M_{z_1}, \ldots, M_{z_n}$ erzeugte Unteralgebra von $L(H(\mathcal{B}))$ ist, konstruieren und zeigen, dass sie ein vollständig kontraktiver, vollständig positiver, unitaler Algebrenhomomorphismus ist.

Lemma 3.1.1.
Die Abbildung

$$\sigma_T \ : \ L(H) \ \to \ L(H), \quad X \ \mapsto \ \sum_{i=1}^{n} T_i X T_i^*$$

ist positiv.

Beweis.
Um zu zeigen, dass die obige Abbildung σ_T positiv ist, rechnen wir nach, dass sie positive Elemente wieder auf positive abbildet. Sei dazu $X \in L(H)$ positiv. Dann gilt

$$\begin{aligned} < \sigma_T(X)h \ , \ h > \ &= \ < \sum_{i=1}^{n} T_i X T_i^* h \ , \ h > \\ &= \ \sum_{i=1}^{n} < T_i X T_i^* h \ , \ h > \\ &= \ \sum_{i=1}^{n} \underbrace{< X \underbrace{T_i^* h}_{\in H} \ , \ \underbrace{T_i^* h}_{\in H} >}_{\geq 0} \quad \geq \ 0 \quad (h \in H). \end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung.
Nach den Beispielen auf Seite 28 in [11], die wir auch schon in Kapitel 2 zitiert haben, ist die Abbildung σ_T sogar vollständig positiv.

Wir betrachten nun für $A \in L(H)$ die Abbildung

$$M_A \ : \ L(H) \ \to \ L(H), \quad X \ \mapsto \ AXA^*.$$

Dann ist

$$\sigma_T = \sum_{i=1}^{n} M_{T_i},$$

und für $k \geq 0$ gilt

$$\sigma_T^k = \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{n} M_{T_{i_1}\cdot\ldots\cdot T_{i_k}} = \sum_{|\alpha|=k} \gamma_\alpha M_{T^\alpha}. \tag{3.1}$$

Insbesondere heißt das, dass

$$\sigma_T^k(I_H) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} (T_{i_1}\cdot\ldots\cdot T_{i_k})(T_{i_1}\cdot\ldots\cdot T_{i_k})^*.$$

Lemma 3.1.2.
Die Folge $(\sigma_T^k(I_H))_{k\in\mathbb{N}}$ *ist eine monoton fallende Folge positiver Operatoren.*

Beweis.
Für $k \in \mathbb{N}$ und $T \in L(H)^n$ gilt

$$\begin{aligned} \sigma_T^k(I_H) - \sigma_T^{k+1}(I_H) &= \sigma_T^k(I_H) - \sigma_T^k(\sigma_T(I_H)) \\ &= \sigma_T^k(I_H - \sigma_T(I_H)) \\ &= \sigma_T^k(I_H - \sum_{i=1}^{n} T_i T_i^*). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $T \in L(H)^n$ eine n-Kontraktion, also ist $I_H - \sum_{i=1}^{n} T_i T_i^*$ positiv und somit folgt $\sigma_T^k(I_H - \sum_{i=1}^{n} T_i T_i^*) \ \geq \ 0$ $(k \in \mathbb{N})$, da nach Lemma 3.1.1 die Abbildung σ_T positiv ist.

□

Als monoton fallende Folge positiver Operatoren konvergiert $(\sigma_T^k(I_H))_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen einen positiven Operator auf $L(H)$. Wir schreiben

$$A_{\infty,T} \ = \ SOT - \lim_{k\to\infty} \sigma_T^k(I_H),$$

wobei $\quad 0 \ \leq \ \|A_{\infty,T}\| \ \leq \ 1.$

Lemma 3.1.3.
Die Abbildung

$$K_T \ : \ H \ \to \ H(\mathcal{B},H), \quad x \ \mapsto \ \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \gamma_\alpha(\Delta_T {T^*}^\alpha x) z^\alpha$$

ist eine wohldefinierte, stetig lineare Kontraktion, für die

$$\|K_T\ x\|^2 = \|x\|^2 - < A_{\infty,T}\ x\ ,\ x > \qquad (x \in H) \tag{3.2}$$

gilt, wobei $\Delta_T = (I_H - \sum_{i=1}^{n} T_i T_i^*)^{1/2}$.

Beweis.
Mit $\gamma_\alpha = \frac{|\alpha|!}{\alpha!}$ folgt

$$\begin{aligned} I_H - \sigma_T^{k+1}(I_H) &= \sum_{j=0}^{k} (\sigma_T^j(I_H) - \sigma_T^{j+1}(I_H)) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \sigma_T^j({\Delta_T}^2) \\ &\overset{(3.1)}{=} \sum_{j=0}^{k} \sum_{|\alpha|=j} \gamma_\alpha M_{T^\alpha}({\Delta_T}^2). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{\|\gamma_\alpha(\Delta_T {T^*}^\alpha x) z^\alpha\|^2}{\gamma_\alpha} &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \gamma_\alpha < T^\alpha({\Delta_T}^2)\ {T^*}^\alpha\ x\ ,\ x > \\ &= < \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \gamma_\alpha M_{T^\alpha}({\Delta_T}^2)\ x\ ,\ x > \\ &= < \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} \sum_{|\alpha|=j} \gamma_\alpha M_{T^\alpha}({\Delta_T}^2)\ x\ ,\ x > \\ &\overset{(3.3)}{=} < \lim_{k\to\infty} (I_H - \sigma_T^{k+1}(I_H))\ x\ ,\ x > \\ &= < x\ ,\ x > - < A_{\infty,T}\ x\ ,\ x > \\ &\leq \|x\|^2 \qquad (x \in H). \end{aligned}$$

Somit ist die Abbildung K_T nach der Definition der Norm in $H(\mathcal{B}, H)$ aus Kapitel 1 wohldefiniert und kontraktiv. Die Linearität ist aufgrund der Definition offensichtlich.

□

Man beachte im Folgenden, dass eine kanonische isometrische Isomorphie

$$V\ :\ H(\mathcal{B})\ \tilde{\otimes}\ H\ \to\ H(\mathcal{B}, H)$$

zwischen dem Hilbertraum-Tensorprodukt $H(\mathcal{B})\ \tilde{\otimes}\ H$ und $H(\mathcal{B}, H)$ existiert. Die Abbildung V ist die eindeutige, stetig lineare Abbildung mit

$$V(f \otimes x) = f \cdot x \qquad \text{für } f \in H(\mathcal{B}) \text{ und } x \in H.$$

(Vergleiche hierzu etwa Kapitel 1.4 in [4].)

Definition 3.1.4.
Eine n-Kontraktion $T \in L(H)^n$ heißt rein, falls

$$A_{\infty,T}\ =\ SOT - \lim_{k\to\infty} \sigma_T^k(I_H)\ =\ 0.$$

Bemerkung.
Aufgrund der Beziehung (3.2) ist diese Definition äquivalent dazu, dass K_T eine Isometrie ist.

Lemma 3.1.5.
Sei $T \in L(H)^n$ eine reine n-Kontraktion. Dann definiert die Abbildung

$$\rho \ : \ L(H(\mathcal{B})) \ \to \ L(H), \quad X \ \mapsto \ K_T^*(X \otimes I_H)K_T$$

eine vollständig kontraktive und vollständig positive lineare Abbildung mit $\rho(I_{H(\mathcal{B})}) = I_H$.

Beweis.
Dass ρ unital ist, rechnet man direkt nach. Es gilt nämlich

$$\rho(I_{H(\mathcal{B})}) = K_T^* \underbrace{(I_{H(\mathcal{B})} \otimes I_H)}_{=I_{H(\mathcal{B},H)}} K_T = K_T^* \ K_T = I_H.$$

Die Tatsache, dass ρ vollständig kontraktiv und vollständig positiv ist, folgt direkt aus den Beispielen, die auf Seite 28 in [11] gegeben werden. Es genügt zu beachten, dass die Abbildung

$$L(H(\mathcal{B})) \ \to \ L(H(\mathcal{B}) \ \otimes \ H), \quad X \ \mapsto \ X \ \tilde{\otimes} \ I_H$$

ein C^*-Homomorphismus ist.

□

Zu beachten gilt es im Folgenden, dass wir abkürzend auch im vektorwertigen Fall M_{z_i} statt $M_{z_i} \otimes 1_H$ schreiben werden. Dies ist auch insofern nützlich, da sich die in 1.2.6 gemachten Aussagen sinngemäß vom skalar- auf den vektorwertigen Fall übertragen lassen.

Lemma 3.1.6.
Die oben definierte Abbildung ρ hat die Eigenschaft, dass

$$\rho\Big(\sum_{|\alpha|,|\beta| \leq k} a_{\alpha\beta} M_z^\alpha {M_z^*}^\beta \Big) = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq k} a_{\alpha\beta} T^\alpha {T^*}^\beta, \tag{3.4}$$

wobei $M_z \in L(H(\mathcal{B}))^n$ der in Lemma 1.2.7 definierte n-Shift und $T \in L(H)^n$ eine reine n-Kontraktion sei.

Beweis.
Unter Benutzung von (1.6), beziehungsweise der sich sinngemäß erhaltenden Aussage im vektorwertigen Fall, zeigen wir zunächst

$$M_{z_i}^* \ K_T \ = \ K_T \ T_i^* \qquad (i = 1, \dots, n).$$

Sei dazu $x \in H$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
M_{z_i}^* \ K_T \ x \ &= \ M_{z_i}^* \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \gamma_\alpha \Delta_T {T^*}^\alpha x \ z^\alpha \\
&= \ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha+e_i}} \ \gamma_{\alpha+e_i} \Delta_T {T^*}^{\alpha+e_i} x \ z^\alpha \\
&= \ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \gamma_\alpha (\Delta_T {T^*}^\alpha T_i^* x) z^\alpha \\
&= \ K_T \ T_i^* \ x \qquad\qquad (i = 1, \dots, n).
\end{aligned}$$

Damit gilt also auch

$$K_T^* \; M_{z_i} \;=\; T_i \; K_T^* \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{3.5}$$

Da die Abbildung ρ linear ist, genügt es $\rho(M_z^\alpha M_z^{*\beta}) \;=\; T^\alpha T^{*\beta} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n)$ nachzurechnen. Es gilt

$$\begin{aligned} \rho(M_z^\alpha M_z^{*\beta}) \quad &= \quad K_T^* M_z^\alpha M_z^{*\beta} K_T \\ &\overset{(3.5)}{=} \quad T^\alpha K_T^* K_T T^{*\beta} \\ &= \quad T^\alpha T^{*\beta} \qquad \text{für alle } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n. \end{aligned}$$

□

Dem Leser ist sicherlich aufgefallen, dass insbesondere die beiden letzten Lemmata nur unter der Annahme getroffen werden konnten, dass $T \in L(H)^n$ eine reine n-Kontraktion ist. Dies ist natürlich nicht für alle n-Kontraktionen T der Fall. Aber man kann aus einer gegebenen n-Kontraktion $T \in L(H)^n$ immer eine reine n-Kontraktion konstruieren, einfach dadurch, dass man eine Zahl $0 < r < 1$ an das Tupel heranmultipliziert. Genauer gilt:

Lemma 3.1.7.
Sei $T \in L(H)^n$ eine n-Kontraktion.
Dann ist für $0 < r < 1$ das Tupel $(rT) \in L(H)^n$ eine reine n-Kontraktion.

Beweis.
Da $\sigma_T \;:\; L(H) \;\to\; L(H)$ positiv ist, gilt

$$\|\sigma_T\| \;=\; \|\sigma_T(I_H)\| \;=\; \|\sum_{i=1}^n T_i T_i^*\| \;\leq\; 1.$$

Damit gilt für das Tupel (rT)

$$\|\sigma_{rT}\| \;=\; r^2 \; \|\sigma_T\| \;\leq\; r^2 \;<\; 1,$$

und es folgt, dass

$$A_{\infty, rT} \;=\; SOT - \lim_{k \to \infty} \sigma_{rT}^k(I_H) \;=\; 0,$$

somit ist K_{rT} eine Isometrie.

□

Also sind die Abbildungen bezüglich der reinen n-Kontraktion $(rT) \in L(H)^n$

$$\rho_r \;:\; L(H(\mathcal{B})) \;\to\; L(H), \quad X \;\mapsto\; K_{rT}^*(X \otimes 1_H) K_{rT} \qquad (0 \;<\; r \;<\; 1)$$

vollständig kontraktiv und vollständig positiv. Somit folgt aus (3.4)

$$\rho_r(\sum_{|\alpha|,|\beta| \leq k} a_{\alpha\beta} M_z^\alpha M_z^{*\beta}) = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq k} a_{\alpha\beta} (rT)^\alpha (rT)^{*\beta}. \tag{3.6}$$

Wegen (3.6) konvergieren die Abbildungen ρ_r $(0 < r < 1)$ punktweise auf

$$S \;=\; LH\{\; M_z^\alpha M_z^{*\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \;\} \;\subset\; L(H(\mathcal{B}))$$

gegen eine Abbildung $\rho : S \to L(H)$ mit

$$\rho(\sum_{|\alpha|,|\beta|\leq k} a_{\alpha\beta} M_z^\alpha M_z^{*\beta}) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq k} a_{\alpha\beta} T^\alpha T^{*\beta}. \tag{3.7}$$

(Beachte dabei, dass die auftretenden Summen endlich sind.)
Mit ρ_r $(0 < r < 1)$ ist auch der punktweise Limes ρ offensichtlich wieder vollständig kontraktiv und vollständig positiv.
Wir haben also die in Kapitel 1.4 gesuchte Abbildung nicht nur auf

$$A = \{p(M_z) \mid p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]\} \subset L(H(\mathcal{B})),$$

sondern auf der größeren Menge $S \supset A$ konstruiert.
Wir können jetzt also, so wie in Kapitel 1.4 beschrieben, fortfahren und zuerst den Arvesonschen Fortsetzungssatz (2.1) anwenden und erhalten danach mit dem Stinespringschen Dilatationssatz (2.2) die gewünschte Dilatation zu einem C^*-Algebrenhomomorphismus zu dieser Fortsetzung.

Bemerkung.
Wegen $\|\rho_r\| \leq 1$ $(0 < r < 1)$ überträgt sich die punktweise Konvergenz auch auf $\overline{S}$.
Man kann zeigen,welches wir zu einem späteren Zeitpunkt auch ausführen werden (genauer gesagt in Lemma 3.4.2), dass $\overline{S}$ die von $M_{z_1}, \ldots, M_{z_n}$ erzeugte C^*-Teilalgebra von $L(H(\mathcal{B}))$ ist. Arveson nennt dies die Toeplitz-Algebra τ_n, welches wir ebenso halten werden.

3.2 Die Calkin-Algebra $\mathcal{C}(H(\mathcal{B}))$

Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, dass die Operatoren der Form

$$M_{z_i}^* M_{z_i} - M_{z_i} M_{z_i}^* \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

in $\mathcal{K}(H(\mathcal{B}))$ liegen, das heißt kompakt sind.
Dazu überlegen wir uns, dass sie Diagonaloperatoren mit gegen Null konvergenten Eigenwerten sind. Für solche ist die Kompaktheit wohlbekannt. Genauer gilt das folgende Lemma.

Lemma 3.2.1.
*Sei H ein Hilbertraum mit Orthonormalbasis $(e_i)_{i\in I}$ und $T \in L(H)$.
Gibt es eine Familie $(\lambda_i)_{i\in I}$ komplexer Zahlen mit $\lim_{i\in I} \lambda_i = 0$ (Das heißt zu jedem $\epsilon > 0$ existiert eine endliche Teilmenge $J \subset I$ mit $|\lambda_i| < \epsilon$ für alle $i \in I \setminus J$.) und $Te_i = \lambda_i e_i$ $(i \in I)$, so ist T schon kompakt.*

Damit sind wir in der Lage, die Kompaktheit der obigen Operatoren zu zeigen.

Lemma 3.2.2.
Sei $M_z = (M_{z_1}, \ldots, M_{z_n}) \in L(H(\mathcal{B}))^n$ der n-Shift. Dann sind die Operatoren

$$M_{z_i}^* M_{z_i} - M_{z_i} M_{z_i}^* \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

kompakt.

Beweis.
Nach Definition von $H(\mathcal{B})$ und des Skalarproduktes in $H(\mathcal{B})$ aus Kapitel 1 ist $(z^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ ein Orthogonalsystem in $H(\mathcal{B})$ mit $\overline{LH}\{z^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\} = H(\mathcal{B})$. Es gilt aber $\|z^\alpha\|^2 = < z^\alpha, z^\alpha > = \frac{1}{\gamma_\alpha}$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Das heißt, dass man die z^α $(\alpha \in \mathbb{N}^n)$ normieren muß, um eine Orthonormalbasis zu erhalten. Damit ist also $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ mit $e_\alpha = \sqrt{\gamma_\alpha}\, z^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{N}^n)$ eine Orthonormalbasis von $H(\mathcal{B})$.
Sei nun $f \in H(\mathcal{B})$ mit $f = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha \frac{1}{\sqrt{\gamma_\alpha}} e_\alpha$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
&(M_{z_i}^* M_{z_i} - M_{z_i} M_{z_i}^*)(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha \frac{1}{\sqrt{\gamma_\alpha}} e_\alpha) \\
&\quad = \quad (M_{z_i}^* M_{z_i} - M_{z_i} M_{z_i}^*)(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha) \\
&\quad \overset{(1.5),(1.6)}{=} \quad \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha+e_i}}\, a_\alpha z^\alpha \; - \; \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha+e_i}}\, a_{\alpha+e_i} z^{\alpha+e_i} \\
&\quad = \quad \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha+e_i}}\, a_\alpha z^\alpha \; - \; \sum_{\alpha\geq e_i} \frac{\gamma_{\alpha-e_i}}{\gamma_\alpha}\, a_\alpha z^\alpha \\
&\quad = \quad \sum_{\alpha,\alpha_i=0} \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha+e_i}}\, a_\alpha z^\alpha \; + \; \sum_{\alpha\geq e_i} (\frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha+e_i}} \; - \; \frac{\gamma_{\alpha-e_i}}{\gamma_\alpha}) a_\alpha z^\alpha \\
&\quad \overset{(1.4)}{=} \quad \sum_{\alpha,\alpha_i=0} \frac{1}{|\alpha|+1} a_\alpha z^\alpha \; + \; \sum_{\alpha\geq e_i} (\frac{\alpha_i+1}{|\alpha|+1} \; - \; \frac{\alpha_i}{|\alpha|}) a_\alpha z^\alpha \\
&\quad = \quad \sum_{\alpha,\alpha_i=0} \frac{1}{|\alpha|+1} a_\alpha z^\alpha \; + \; \sum_{\alpha\geq e_i} \frac{|\alpha|-\alpha_i}{|\alpha|(|\alpha|+1)}\, a_\alpha z^\alpha \\
&\quad = \quad \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \lambda_\alpha a_\alpha \frac{1}{\sqrt{\gamma_\alpha}} e_\alpha \qquad (i = 1, \ldots, n),
\end{aligned}
$$

wobei $\lambda_\alpha = \frac{1}{|\alpha|+1}$ falls $\alpha_i = 0$ und $\lambda_\alpha = \frac{|\alpha|-\alpha_i}{|\alpha|(|\alpha|+1)}$ sonst.
Insbesondere gilt

$$(M_{z_i}^* \; M_{z_i} \; - \; M_{z_i} \; M_{z_i}^* \;)e_\alpha \; = \; \lambda_\alpha \; e_\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{N}^n).$$

Da nun die so erhaltene Folge $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ gegen 0 strebt (in obigem Sinne), folgt mit Lemma 3.2.1

$$M_{z_i}^* \; M_{z_i} \; - \; M_{z_i} \; M_{z_i}^* \quad \in \; \mathcal{K}(H(\mathcal{B})) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

□

Außerdem haben wir im Beweis von Lemma 1.2.7 gezeigt, dass

$$I_{H(\mathcal{B})} \; - \; \sum_{i=1}^n M_{z_i} M_{z_i}^* \qquad \in \; L(H(\mathcal{B}))$$

die Orthogonalprojektion von $H(\mathcal{B})$ auf die konstanten Funktionen $\mathbb{C}\cdot 1 \subset H(\mathcal{B})$, insbesondere also auch kompakt ist.

Definition 3.2.3.
Die Quotienten-Algebra

$$\mathcal{C}(H(\mathcal{B})) \; = L(H(\mathcal{B}))\Big/\mathcal{K}(H(\mathcal{B}))$$

heißt Calkin-Algebra.

Bemerkung.
Da die kompakten Operatoren $\mathcal{K}(H(\mathcal{B}))$ ein abgeschlossenes, zweiseitiges Ideal in $L(H(\mathcal{B}))$ bilden, ist die Calkin-Algebra selbst wieder eine C^*-Algebra, wie wir in Korollar (3.3.4) zeigen werden.

Wir können jetzt also sagen, dass die Restklassen $[M_{z_1}], \dots, [M_{z_n}]$ ein vertauschendes Tupel normaler Elemente

$$(\;[M_{z_1}], \dots, [M_{z_n}]\;) \;\in\; \mathcal{C}(H(\mathcal{B}))^n$$

in der Calkin-Algebra bilden, derart dass

$$\sum_{i=1}^{n} [M_{z_i}][M_{z_i}]^* \;=\; [I_{H(\mathcal{B})}]. \tag{3.8}$$

Wir sind sogar mit Hilfe eines Satzes von Fuglede-Putnam-Rosenblum in der Lage, eine noch bessere Aussage zu treffen.

Satz 3.2.4. *(Fuglede-Putnam-Rosenblum)*
Seien $M, N, T \in L(H)$ (H Hilbertraum).
Sind M, N normal und gilt $MT = TN$, so folgt

$$M^*T = TN^*.$$

Einen Beweis hierzu findet man etwa in [12] auf S. 300 f.

Bemerkung.
Da man mittels der Gelfand-Naimark-Siegel-Konstruktion jede C^*-Algebra mit einer C^*-Unteralgebra von $L(H)$ identifizieren kann, erhält man eine Version von Satz 3.2.4 für beliebige C^*-Algebren.

Wendet man dies auf $M = N = [M_{z_i}]$ und $T = [M_{z_j}]$ $(i, j = 1, \dots, n)$ an, so sind die Voraussetzungen nach den oben getroffenen Aussagen erfüllt und es gilt

$$[M_{z_i}]^*[M_{z_j}] \;=\; [M_{z_j}][M_{z_i}]^* \qquad (i, j = 1, \dots, n). \tag{3.9}$$

3.3 Etwas über Darstellungen

Sei H ein Hilbertraum und $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra. Es sei an dieser Stelle gesagt, dass wann immer wir von einem Ideal in $\mathcal{A}$ reden, darunter stets ein abgeschlossenes, zweiseitiges Ideal verstehen. Wir werden zeigen, dass dieses dann automatisch $*$-abgeschlossen ist. Daher ist es selbst eine C^*-Algebra. Wir wollen im Folgenden zeigen, dass man unter bestimmten Voraussetzungen eine gegebene Darstellung auf einem Ideal eindeutig zu einer Darstellung der gesamten C^*-Algebra fortsetzen kann.
Damit wir dies tun können, geben wir an dieser Stelle noch eine kurze Einführung in die benötigten Begriffe und treffen grundlegende Aussagen für die Darstellungstheorie.

Definition 3.3.1.
Eine Darstellung einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$ ist ein C^*-Algebrenhomomorphismus von $\mathcal{A}$ in die C^*-Algebra $L(H)$ für einen Hilbertraum H.
Man sagt: $\pi : \mathcal{A} \to L(H)$ ist eine Darstellung von $\mathcal{A}$ auf H.

Als wichtiges Hilfsmittel benötigen wir das folgende Lemma, das uns etwas über die Existenz einer lokalen, abzählbaren, approximativen Rechts-Eins aussagt.

Lemma 3.3.2.
Seien $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra und $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ ein Ideal. Für alle $x \in \mathcal{I}$ gilt:
Es existiert eine Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{I}$, $e_i = e_i^*$ für alle $i \in \mathbb{N}$ mit

(i) $\sigma(e_n) \subseteq [0,1]$ *für alle $n \in \mathbb{N}$,*

(ii) $\lim_{n\to\infty} \|xe_n - x\| = 0.$

Den Beweis dieses Lemmas wollen wir an dieser Stelle nicht ausführen. Er ist zum Beispiel in [2] auf S.10 ff. nachzulesen.
Eine direkte Folgerung aus diesem Lemma ist das folgende Korollar.

Korollar 3.3.3.
Jedes Ideal $\mathcal{I}$ einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$ ist selbstadjungiert.

Beweis.
Seien $\mathcal{I}$ ein Ideal einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$ und $y \in \mathcal{I}$. Wähle nun mit Hilfe von Lemma (3.3.2) eine Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{I}$ mit $e_n = e_n^*$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $y = \lim_{n\to\infty} ye_n$.
Durch Adjungieren der letzten Bedingung erhält man

$$y^* = (\lim_{n\to\infty} ye_n)^* = \lim_{n\to\infty} (ye_n)^* = \lim_{n\to\infty} e_n^* y^* = \lim_{n\to\infty} e_n y^* \in \mathcal{I},$$

da $e_n y^* \in \mathcal{I}$ und $\mathcal{I}$ abgeschlossen ist.

□

Eine weitere Folgerung und für das Fortführen dieser Arbeit wichtiges Ergebnis sagt uns etwas über den Quotienten $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ eines Ideals $\mathcal{I}$ einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$ aus.

Korollar 3.3.4.
Seien $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra und $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ ein Ideal.
Dann ist auch $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ mit der induzierten Involution eine C^*-Algebra.

Beweis.
Für den Beweis der Aussage genügt es,

$$\|[x]\|^2 \leq \|[x]^*[x]\| \quad \text{für alle } x \in \mathcal{A}$$

zu zeigen.
Enthält $\mathcal{A}$ keine Eins, so bezeichnen wir mit $\mathcal{A}_1 \supset \mathcal{A}$ die C^*-Algebra, die durch Adjunktion einer Eins aus $\mathcal{A}$ entsteht. Wir bezeichnen mit e das Einselement von $\mathcal{A}$, falls $\mathcal{A}$ unital ist, beziehungsweise das Einselement von $\mathcal{A}_1$ sonst.
Sei $x \in \mathcal{A}$ (fest) und $E = \{u \in \mathcal{I} \mid u = u^*, \sigma(u) \subseteq [0,1]\}$.
Zeige zunächst

$$\|[x]\| = \inf_{u\in E} \|x - xu\|.$$

($\leq$) Klar, da $E \subset \mathcal{I}$ und damit gilt

$$\inf_{z \in \mathcal{I}} \|x - z\| \;\leq\; \inf_{u \in E} \|x - xu\|.$$

($\geq$) Es genügt zu zeigen, dass

für alle $z \in \mathcal{I}$ eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E existiert, mit $\|x + z\| \geq \inf_{n\in\mathbb{N}} \|x - xu_n\|$.

Sei dazu $z \in \mathcal{I}$. Wähle nun gemäß Lemma (3.3.2) eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für z. Bezeichnet man mit e die Eins in $\mathcal{A}$, so gilt $\|e - u_n\| \leq 1$. Damit kann man nun weiterschließen, dass

$$\begin{aligned}
\|x + z\| &\geq \liminf_{n\to\infty} \|(x + z)(e - u_n)\| \\
&= \liminf_{n\to\infty} \|x(e - u_n) + z(e - u_n)\| \\
&= \liminf_{n\to\infty} \|x - xu_n\| \\
&\geq \inf_{n\in\mathbb{N}} \|x - xu_n\|
\end{aligned}$$

gilt. Somit gilt also $\|[x]\| = \inf_{u\in E} \|x - xu\|$.
Dies können wir in der folgenden Rechnung benutzen und erhalten

$$\begin{aligned}
\|[x]\|^2 &= (\inf_{u\in E} \|x - xu\|)^2 \\
&= \inf_{u\in E} \|x(e - u)\|^2 \\
&= \inf_{u\in E} \|(e - u)x^*x(e - u)\| \\
&\leq \inf_{u\in E} \|x^*x - x^*xu\| \\
&= \|[x^*x]\| \;=\; \|[x]^*[x]\|.
\end{aligned}$$

□

Definition 3.3.5.
Eine Darstellung $\pi : \mathcal{A} \to L(H)$ heißt nichtentartet, falls die C^*-Algebra der Operatoren $\pi(\mathcal{A})$ trivialen Nullraum hat.
Dabei heißt für $E \subset L(H)$ die Menge

$$null(E) \;=\; \bigcap (KerA \;;\; A \in E)$$

der Nullraum von E.

Eine Charakterisierung von nichtentarteten Darstellungen, die wir im weiteren Verlauf noch häufiger benutzen werden, drückt das nachfolgende Lemma aus.

Lemma 3.3.6.
Sei π eine Darstellung von $\mathcal{A}$ auf H. Dann gilt

$$\pi \text{ nichtentartet} \;\Leftrightarrow\; \overline{LH\{\pi(a)\xi \mid a \in \mathcal{A}, \xi \in H\}} \;=\; H.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\pi \text{ nichtentartet} \quad &\Leftrightarrow \quad \bigcap (KerT \mid T \in \pi(\mathcal{A})) = \{0\} \\
&\Leftrightarrow \quad \bigcap \big((ImT^*)^\perp \mid T \in \pi(\mathcal{A})\big) = \{0\} \\
&\overset{\pi(\mathcal{A}) \text{ selbstadjungiert}}{\Leftrightarrow} \quad \bigcap \big((ImT)^\perp \mid T \in \pi(\mathcal{A})\big) = \{0\} \\
&\Leftrightarrow \quad \Big(\bigcup (ImT \mid T \in \pi(\mathcal{A}))\Big)^\perp = \{0\} \\
&\Leftrightarrow \quad \overline{LH\{\pi(a)\xi \mid a \in \mathcal{A}, \xi \in H\}} = H
\end{aligned}$$

□

Für $\overline{LH}\{\pi(a)\xi \mid a \in \mathcal{A}, \xi \in H\}$ schreiben wir abkürzend $[\pi(\mathcal{A})H]$.
Arveson zeigt in [2], dass jede nichtentartete Darstellung π von einer C^*-Subalgebra $\mathcal{B} \subset \mathcal{K}(H)$ der kompakten Operatoren in H auf einen Hilbertraum K unitär äquivalent zu einem Vielfachen der identischen Darstellung ist, das heißt, dass man K als orthogonale Summe

$$K = \bigoplus_{i \in I} K_i \quad (I \text{ Indexmenge})$$

von π-invarianten Unterräumen K_i schreiben kann, so dass für jedes $B \in \mathcal{B}$ der Operator $\pi(B)|_{K_i} \in L(K_i)$ unitär äquivalent zu einer Einschränkung $B|_{H_i}$ von B auf einen für $\mathcal{B}$ invarianten Unterraum $H_i \subset H$ ist.
Genauer gilt der folgende Satz.

Satz 3.3.7.
Seien H, K Hilberträume, $\mathcal{B}$ eine C^*-Unteralgebra von $\mathcal{K}(H)$ und

$$\pi : \mathcal{B} \to L(K)$$

eine nichtentartete Darstellung von $\mathcal{B}$ auf K.
Dann existieren eine Indexmenge I und eine Zerlegung

$$K = \bigoplus_{i \in I} K_i,$$

von K in π-invariante Unterräume $\{0\} \neq K_i \subset K$ $(i \in I)$ derart, dass für jedes $i \in I$ ein abgeschlossener $\mathcal{B}$-invarianter Unterraum $H_i \subset H$ und eine unitäre Abbildung

$$U_i : K_i \to H_i$$

existieren, so dass

$$\pi(B)|_{K_i} = U_i^* B|_{H_i} U_i \qquad \text{für alle } B \in \mathcal{B}.$$

Den Beweis findet man etwa in [2] auf S.19 ff.
Betrachten wir nun den Fall, dass die Unteralgebra $\mathcal{B}$ schon ganz $\mathcal{K}(H)$ ist, das heißt π ist eine Darstellung der kompakten Operatoren von H auf K. Dann

müssen die abgeschlossenen Unterräume $H_i \subset H$ $(i \in I)$ aus obigem Satz invariant unter allen kompakten Operatoren sein. Da die C^*-Algebra der kompakten Operatoren $\mathcal{K}(H)$ irreduzibel ist, gilt

$$H_i \;=\; H \qquad \text{für alle } i \in I.$$

Dabei heißt eine C^*-Algebra $\mathcal{A} \subset L(H)$ irreduzibel, falls die identische Darstellung

$$\mathcal{A} \;\to\; L(H), \qquad a \;\mapsto\; a$$

irreduzibel ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die einzigen abgeschlossenen invarianten Unterräume $M \subset H$ für $\mathcal{A}$ lediglich $\{0\}$ und H sind.
Mit obigem Satz erhält man also für den Fall $\mathcal{B} = \mathcal{K}(H)$

Korollar 3.3.8.
Seien H, K Hilberträume und

$$\pi \;:\; \mathcal{K}(H) \;\to\; L(K)$$

eine nichtentartete Darstellung.
Dann existieren eine Indexmenge I und eine Zerlegung

$$K \;=\; \bigoplus_{i \in I} K_i,$$

von K in π-invariante Unterräume $\{0\} \neq K_i \subset K$ $(i \in I)$ derart, dass für jedes $i \in I$ eine unitäre Abbildung

$$U_i \;:\; K_i \;\to\; H$$

existiert, so dass

$$\pi(C)|_{K_i} \;=\; U_i^* C U_i \qquad \textit{für alle } C \in \mathcal{K}(H).$$

Bemerkung.
Eine Darstellung einer C^*-Subalgebra von einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$ auf einen Hilbertraum H kann im Allgemeinen nicht zu einer Darstellung von ganz $\mathcal{A}$ auf H fortgesetzt werden. Falls die Subalgebra aber ein Ideal ist und die Darstellung nichtentartet ist, so geht es doch.

Das heißt es gilt der folgende Satz.

Satz 3.3.9.
Sei $\mathcal{I} \;\subset\; \mathcal{A}$ ein Ideal der C^*-Algebra $\mathcal{A}$. Dann gilt:
Jede nichtentartete Darstellung

$$\pi \;:\; \mathcal{I} \;\to\; L(H)$$

hat eine eindeutige Fortsetzung zu einer Darstellung

$$\tilde{\pi} \;:\; \mathcal{A} \;\to\; L(H).$$

Beweis.
Sei $\mathcal{I} \;\subset\; \mathcal{A}$ ein Ideal und $\pi \;:\; \mathcal{I} \;\to\; L(H)$ eine nichtentartete Darstellung.

Beh.(1) : Für alle $x \in \mathcal{A}$ existiert ein eindeutiger stetig linearer Operator $\tilde{\pi}(x)$ auf H mit $\tilde{\pi}(x)\pi(y) \; = \; \pi(xy) \qquad$ für alle $y \in \mathcal{I}$.

Beweis.
Die Eindeutigkeitsaussage ist direkt klar, da Vektoren der Gestalt $\pi(y)\xi$, $y \in \mathcal{I}$, $\xi \in H$ ganz H aufspannen, nach Lemma (3.3.6).
Der Existenzteil ist allerdings nicht so einfach. Um ihn zu zeigen, machen wir zuerst die Annahme, dass π zyklisch ist, das heißt, dass ein $\xi_0 \in H$ existiert mit $[\pi(\mathcal{I})\xi_0] = H$. Sei nun also $\xi_0 \in H$ ein solcher zyklischer Vektor.
Wir werden zeigen, dass

$$\|\pi(xy)\xi_0\| \; \leq \; \|x\| \, \|\pi(y)\xi_0\| \qquad \text{für alle } y \in \mathcal{I}$$

gilt.
Sei dazu $y \in \mathcal{I}$. Wir wählen mit Hilfe von Lemma 3.3.2 eine Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{I}$ mit $e_n = e_n^*$, $\sigma(e_n) \subseteq [0,1]$ und $y^* e_n \overset{n\to\infty}{\to} y^*$. Durch Adjungieren der letzten Eigenschaft erhält man
$e_n y \; = \; (y^* e_n)^* \overset{n\to\infty}{\to} (y^*)^* \; = \; y$, da die Involution stetig ist. Damit ergibt sich also

$$\begin{aligned} \|\pi(xy)\xi_0\| \; &= \; \lim_{n\to\infty} \|\pi(xe_n y)\xi_0\| \\ &= \; \lim_{n\to\infty} \|\pi(xe_n)\pi(y)\xi_0\| \\ &\leq \; \sup_{n\in\mathbb{N}} \|xe_n\| \cdot \|\pi(y)\xi_0\| \\ &\leq \; \|x\| \cdot \|\pi(y)\xi_0\|. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Abbildung

$$\pi(y)\xi_0 \; \mapsto \; \pi(xy)\xi_0 \; (y \in \mathcal{I})$$

eindeutig zu einem Operator $\tilde{\pi}(x)$ auf $[\pi(\mathcal{I})\xi_0] = H$ mit

$$\|\tilde{\pi}(x)\| \; \leq \; \|x\|$$

fortgesetzt werden kann.
Für alle $y, z \in \mathcal{I}$ gilt

$$\tilde{\pi}(x)\pi(y)\pi(z)\xi_0 = \tilde{\pi}(x)\pi(yz)\xi_0 = \pi(xyz)\xi_0 = \pi(xy)\pi(z)\xi_0$$

und somit

$$\tilde{\pi}(x)\pi(y) \; = \; \pi(xy) \qquad \text{für alle } y \in \mathcal{I}$$

auf ganz H.
Für den Fall, dass π nicht zyklisch ist, nutzen wir aus, dass man für eine nichtentartete Darstellung π auf H den Hilbertraum H als orthogonale Summe von invarianten, zyklischen Unterräumen H_i für π schreiben kann (vergleiche S.16 in [2]). Es gilt also: Es existieren eine Indexmenge I und π-invariante, zyklische Unterräume H_i von H mit

$$H \; = \; \bigoplus_{i\in I} H_i.$$

Für alle $x \in \mathcal{I}$ definiere $\pi_i(x) \;=\; \pi(x)|_{H_i}$.
Damit wird π_i zu einer zyklischen Darstellung von $\mathcal{I}$ auf H_i und wir können den ersten, das heißt den zyklischen Fall auf π_i anwenden.
Somit erhalten wir für alle $x \in \mathcal{A}$ Operatoren $\tilde{\pi}_i(x) \in L(H_i)$ mit
$\pi_i = \tilde{\pi}_i|_{\mathcal{I}}$ und $\tilde{\pi}_i(x)\pi_i(y) = \pi_i(xy)$ für alle $x \in \mathcal{A},\; y \in \mathcal{I}$.
Definiere nun $\tilde{\pi}(x) \;=\; \bigoplus_{i\in I} \tilde{\pi}_i(x) \quad (x \in \mathcal{A})$.
Dann gilt für alle $x \in \mathcal{A}, y \in \mathcal{I}$

$$\tilde{\pi}(x)\pi(y) = \bigoplus_{i\in I} \pi_i(x)\pi_i(y) = \bigoplus_{i\in I} \pi_i(xy) = \pi(xy).$$

Damit ist Beh.(1) gezeigt.
Es existiert also eine eindeutige Abbildung

$$\tilde{\pi} \;:\; \mathcal{A} \;\to\; L(H), \qquad x \;\mapsto\; \tilde{\pi}(x)$$

mit

$$\tilde{\pi}(x)\pi(y) \;=\; \pi(xy) \qquad (x \in \mathcal{A}, y \in \mathcal{I}).$$

$\square$

Beh.(2) : Es gilt auch $\pi(yx) \;=\; \pi(y)\pi(x)$ für alle $x \in \mathcal{A},\; y \in \mathcal{I}$.

Beweis.
Sei $x \in \mathcal{A}, y \in \mathcal{I}$.
Dann gilt

$$\pi(yx)\pi(z) \;=\; \pi(xyz) \;=\; \pi(y)\pi(xz) \;=\; \pi(y)\tilde{\pi}(x)\pi(z)$$

für alle $z \in \mathcal{I}$ und wegen $[\pi(\mathcal{I})H] = H$
folgt

$$\pi(yx) \;=\; \pi(y)\pi(x).$$

$\square$

Beh.(3) : $\tilde{\pi}$ erhält die algebraischen Operationen und die Involution und es gilt $\tilde{\pi}|_{\mathcal{I}} \;=\; \pi$.

Beweis.
Seien $a, b \in \mathbb{C},\; x_1, x_2, x \in \mathcal{A}$. Dann gilt

- $\pi((ax_1 + bx_2)y) = \pi(ax_1y + bx_2y) = a\pi(x_1y) + b\pi(x_2y)$
  $= a\tilde{\pi}(x_1)\pi(y) + b\tilde{\pi}(x_2)\pi(y) = (a\tilde{\pi}(x_1) + b\tilde{\pi}(x_2))\pi(y)$
  für alle $y \in \mathcal{I}$ und wegen der Eindeutigkeit in Beh.(1) folgt

  $$\tilde{\pi}((ax_1 + bx_2)) \;=\; a\tilde{\pi}(x_1) + b\tilde{\pi}(x_2).$$

- $\pi(x_1x_2y) = \tilde{\pi}(x_1)\pi(x_2y) = \tilde{\pi}(x_1)\tilde{\pi}(x_2)\pi(y)$
  für alle $y \in \mathcal{I}$ und wegen der Eindeutigkeit in Beh.(1) folgt

  $$\tilde{\pi}(x_1x_2) \;=\; \tilde{\pi}(x_1)\tilde{\pi}(x_2).$$

- $\pi(x^*y) = \pi(y^*x)^* \overset{Beh.(2)}{=} (\pi(y^*)\tilde{\pi}(x))^* = \tilde{\pi}(x)^*\pi(y)$
  für alle $y \in \mathcal{I}$ und wegen der Eindeutigkeit in Beh.(1) folgt

$$\tilde{\pi}(x^*) \;=\; \tilde{\pi}(x)^*.$$

Außerdem gilt für alle $y, z \in \mathcal{I}$

$$\tilde{\pi}(z)\pi(y) = \pi(zy) = \pi(z)\pi(y)$$

und wegen $[\pi(\mathcal{I})H] = H$ folgt daraus $\tilde{\pi}|_{\mathcal{I}} \;=\; \pi$.

□

Somit ist die Existenz der Fortsetzung gezeigt.
Sei σ eine weitere Darstellung von $\mathcal{A}$ auf H mit $\sigma|_{\mathcal{I}} = \pi$.
Seien $x \in \mathcal{A},\ y \in \mathcal{I}$. Dann folgt

$$\sigma(x)\pi(y) = \sigma(x)\sigma(y) = \sigma(xy) = \pi(xy) = \tilde{\pi}(x)\pi(y).$$

Also gilt $\sigma \;=\; \tilde{\pi}$ nach dem Eindeutigkeitsteil aus Beh.(1).

□

Seien nun umgekehrt π eine Darstellung von $\mathcal{A}$ auf H, $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ ein Ideal und $H_{\mathcal{I}} = [\pi(\mathcal{I})H]$.
Dann gilt:
Da $\mathcal{I}$ ein Ideal ist folgt, dass $\pi(\mathcal{A})H_{\mathcal{I}} \subset H_{\mathcal{I}}$ gilt, und da $H_{\mathcal{I}}$ abgeschlossen ist können wir H als direkte Summe von $H_{\mathcal{I}}$ und dessen Orthogonalkomplement $H_{\mathcal{I}}^{\perp}$ schreiben, das heißt

$$H = H_{\mathcal{I}} \oplus H_{\mathcal{I}}^{\perp}, \quad \text{wobei } H_{\mathcal{I}}, H_{\mathcal{I}}^{\perp} \text{ reduzierende Teilräume für } \pi(\mathcal{A}).$$

Man beachte dabei, dass ein Teilraum $M \subset H$ genau dann reduzierend für ein Operatorsystem $S \subset L(H)$ ist, falls er invariant für S ist.
Seien

$$\pi_{\mathcal{I}} \;:\; \mathcal{A} \;\to\; L(H_{\mathcal{I}}) \quad \text{mit } \pi_{\mathcal{I}}(x) = \pi(x)|_{H_{\mathcal{I}}}$$

und

$$\sigma_{\mathcal{I}} \;:\; \mathcal{A} \;\to\; L(H_{\mathcal{I}}^{\perp}) \quad \text{mit } \sigma_{\mathcal{I}}(x) = \pi(x)|_{H_{\mathcal{I}}^{\perp}}.$$

Dann gilt offenbar

$$\pi(x) = \pi_{\mathcal{I}}(x) \oplus \sigma_{\mathcal{I}}(x),$$

wobei $\pi_{\mathcal{I}}$ eindeutig durch seine Einschränkung $\pi_{\mathcal{I}}|_{\mathcal{I}}$ auf $\mathcal{I}$ bestimmt ist, da $\pi_{\mathcal{I}}$ nichtentartet ist. Da $\sigma_{\mathcal{I}}|_{\mathcal{I}} = 0$ ist, induziert $\sigma_{\mathcal{I}}$ eine Darstellung von $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ auf $H_{\mathcal{I}}^{\perp}$ vermöge $x + \mathcal{I} \mapsto \sigma_{\mathcal{I}}(x)$. Beachten muss man hierbei, dass $\sigma_{\mathcal{I}}$, da $H_{\mathcal{I}}^{\perp}$ der Nullraum von $\pi(\mathcal{I})$ ist, $\mathcal{I}$ annulliert.
Das heißt, sobald wir alle Darstellungen von $\mathcal{I}$ und $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ kennen, können wir also die Darstellungen von $\mathcal{A}$ rekonstruieren.

3.4 Verallgemeinerte Wold - Zerlegungen

Sei $T \in L(H)^n$ eine n-Kontraktion und

$$\pi \ : \ L(H(\mathcal{B})) \ \to \ L(K)$$

eine C^*-Darstellung auf einen Hilbertraum $K \supset H$ so, dass

$$\rho(a) \ = \ P_H \pi(a)|_H \qquad (a \in \tau_n)$$

gilt, wobei ρ die in Abschnitt 3.1 konstruierte vollständig kontraktive, vollständig positive Abbildung und τ_n die Toeplitz-Algebra, das heißt die von $M_z \in L(H(\mathcal{B}))^n$ erzeugte unitale C^*-Algebra ist.
Wir zeigen zuerst, dass die kompakten Operatoren in der Toeplitz-Algebra enthalten sind.

Lemma 3.4.1.
Sei $M_z \in L(H(\mathcal{B}))^n$ der n-Shift und

$$S \ = \ LH\{M_z^\alpha M_z^{*\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}.$$

Es gilt

$$\mathcal{K}(H(\mathcal{B})) \ \subset \ \overline{S}.$$

Dabei bezeichnet $\mathcal{K}(H(\mathcal{B}))$ die kompakten Operatoren auf $H(\mathcal{B})$.

Beweis.
Wir werden in einem ersten Schritt zeigen, dass die Operatoren in $L(H(\mathcal{B}))$ mit eindimensionalem Bild in $\overline{S}$ enthalten sind.
Sei also $B \in L(H(\mathcal{B}))$, so dass $dim(BH(\mathcal{B})) = 1$.
Wähle nun ein Element

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \in H(\mathcal{B}) \quad \text{mit} \quad \|f\| = 1$$

so, dass das Bild von B von f erzeugt wird. Definiere anschließend

$$g = B^* f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} b_\alpha z^\alpha \ \in H(\mathcal{B}).$$

Wir haben im Beweis von (1.2.7) schon gesehen, dass

$$P_{\mathbb{C}} = I_{H(\mathcal{B})} - \sum_{i=1}^n M_{z_i} M_{z_i}^*$$

die Orthogonalprojektion auf die konstanten Funktionen $\mathbb{C} \cdot 1 \subset H(\mathcal{B})$ ist.
Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir einen Operator $B_k \in L(H(\mathcal{B}))$ durch

$$B_k = \sum_{|\alpha|, |\beta| \le k} a_\alpha \overline{b_\beta} M_z^\alpha P_{\mathbb{C}} M_z^{*\beta}.$$

Da $P_{\mathbb{C}} \in \overline{S}$, ist definitionsgemäß auch $B_k \in \overline{S}$ ($k \in \mathbb{N}$). Um nun zu schließen, dass auch $B \in \overline{S}$, genügt es, da $\overline{S}$ abgeschlossen ist, zu zeigen, dass die Operatoren

B_k in der Operatornorm gegen B konvergieren.
Um dies zu zeigen definieren wir für $u, v \in H(\mathcal{B})$ eine lineare Abbildung

$$\beta_{u,v} \; : \; H(\mathcal{B}) \; \to \; H(\mathcal{B}), \quad \tilde{f} \; \mapsto < \tilde{f}, v > u.$$

Offensichtlich ist $\beta_{u,v} \in L(H(\mathcal{B}))$ mit $\|\beta_{u,v}\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ $(u, v \in H(\mathcal{B}))$ und somit ist die sesquilineare Abbildung

$$\beta : H(\mathcal{B}) \times H(\mathcal{B}) \; \to \; L(H(\mathcal{B})), \quad (u,v) \; \mapsto \; \beta_{u,v}$$

stetig.
Für ein beliebiges $\tilde{f} = \sum\limits_{\alpha \in \mathbb{N}^n} d_\alpha z^\alpha \in H(\mathcal{B})$ existiert jetzt ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit

$$B\tilde{f} = \lambda \cdot f,$$

da das Bild von B nach Wahl von f erzeugt wird. Wegen $\|f\| = 1$ gilt dann

$$\lambda = \lambda \cdot \|f\|^2 = < \lambda f, f > = < B\tilde{f}, f >$$

und wir können schreiben

$$\begin{aligned} B\tilde{f} = \lambda \cdot f &= < B\tilde{f}, f > \cdot f \\ &= < \tilde{f}, B^* f > \cdot f \\ &= < \tilde{f}, g > \cdot f \\ &= \beta_{f,g} \tilde{f}. \end{aligned}$$

Mit den Ergebnissen aus Lemma 1.2.6 folgt außerdem

$$\begin{aligned} B_k \tilde{f} &= \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq k} a_\alpha \overline{b_\beta} M_z^\alpha P_{\mathbb{C}} M_z^{*\beta} \tilde{f} \\ &= \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq k} a_\alpha \overline{b_\beta} \frac{1}{\gamma_\beta} d_\beta z^\alpha \\ &= \left(\sum_{|\beta| \leq k} \frac{< d_\beta, b_\beta >}{\gamma_\beta} \right) \cdot \left(\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha z^\alpha \right) \\ &= \langle \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} d_\beta z^\beta, \sum_{|\beta| \leq k} b_\beta z^\beta \rangle \cdot \left(\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha z^\alpha \right) \\ &= < \tilde{f}, g_k > \cdot f_k \\ &= \beta_{f_k, g_k} \tilde{f} \end{aligned}$$

mit $f_k = \sum\limits_{|\alpha| \leq k} a_\alpha z^\alpha$ und $g_k = \sum\limits_{|\beta| \leq k} b_\beta z^\beta$ $(k \in \mathbb{N})$.
Wir sehen also, dass $B_k = \beta_{f_k, g_k}$ $(k \in \mathbb{N})$ und $B = \beta_{f,g}$.
Da β stetig ist, und weil $f_k \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} f$ und $g_k \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} g$ gilt, folgt

$$B_k = \beta_{g_k, f_k} \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} \beta_{f,g} = B,$$

was wir zeigen wollten.
Da wir jeden Operator $B \in L(H(\mathcal{B}))$ mit endlichdimensionalem Bild als endliche Summe von Operatoren mit eindimensionalem Bild schreiben können, liegen

also auch die erstgenannten in $\overline{S}$.
Da, abschließend, die endlichdimensionalen Operatoren auf einem Hilbertraum dicht in den kompakten Operatoren auf diesem Hilbertraum liegen und $\overline{S}$ abgeschlossen ist, folgt also

$$\mathcal{K}(H(\mathcal{B})) \ \subset \ \overline{S},$$

was zu zeigen war.

□

Mit Hilfe des obigen Lemmas sind wir nun in der Lage, die bereits am Ende von Kapitel 3.1 behauptete Identität $\tau_n = \overline{S}$ zu zeigen.

Lemma 3.4.2.
Sei $M_z \in L(H(\mathcal{B}))^n$ der n-Shift, τ_n die Toeplitz-Algebra und

$$S \ = \ LH\{M_z^\alpha M_z^{*\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}.$$

Dann gilt

$$\tau_n \ = \ \overline{S}.$$

Beweis.
Da τ_n die von M_z erzeugte, unitale C^*-Algebra ist, ist die Inklusion $\overline{S} \subset \tau_n$ offensichtlich. Um nun zu zeigen, dass auch die Inklusion $\tau_n \subset \overline{S}$ gilt, muss man nur noch zeigen, dass auch $\overline{S}$ eine C^*-Algebra ist, da die Erzeuger von τ_n in $\overline{S}$ liegen. Da $\overline{S} \subset L(H(\mathcal{B}))$ offensichtlich ein $*$-abgeschlossener Unterraum ist genügt es, die multiplikative Abgeschlossenheit von $\overline{S}$ nachzurechnen.
In Abschnitt 3.2 haben wir gezeigt, dass τ_n modulo den kompakten Operatoren $\mathcal{K}(H(\mathcal{B}))$ kommutativ ist (3.9). Außerdem folgt aus Lemma (3.4.1), dass $\mathcal{K}(H(\mathcal{B})) \subset \overline{S}$ gilt.
Somit gilt für $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}^n$

$$[(M_z^\alpha M_z^{*\beta})(M_z^\gamma M_z^{*\delta})] = [M_z^{\alpha+\gamma} M_z^{*\beta+\delta}].$$

Daraus folgt, dass ein kompakter Operator $K \in \mathcal{K}(H(\mathcal{B}))$ existiert, so dass

$$M_z^\alpha M_z^{*\beta} M_z^\gamma M_z^{*\delta} \ = \ \underbrace{M_z^{\alpha+\gamma} M_z^{*\beta+\delta}}_{\in S} + \underbrace{K}_{\in \overline{S}} \ \in \overline{S},$$

was wir zeigen wollten.

□

Korollar 3.4.3.
Die kompakten Operatoren auf $H(\mathcal{B})$ sind in der von $M_z = (M_{z_1}, \ldots, M_{z_n})$ erzeugten unitalen C^*-Algebra enthalten, das heißt es gilt

$$\mathcal{K}(H(\mathcal{B})) \ \subset \ \tau_n.$$

Wir bezeichnen weiterhin mit π die bereits zu Beginn dieses Kapitels erwähnte Darstellung von $L(H(\mathcal{B}))$ auf einen Hilbertraum K. Wir können nun damit beginnen, die gewünschte Zerlegung zu konstruieren.

Lemma 3.4.4.

a) Die Räume

$$K_1 \;=\; \bigvee (\pi(a)K \mid a \in \mathcal{K}(H(\mathcal{B})))$$

und

$$K_0 \;=\; K \ominus K_1 \;=\; \bigcap (Ker(\pi(a)) \mid a \in \mathcal{K}(H(\mathcal{B})))$$

sind invariant unter π .

b) Die Darstellung

$$\pi|_{K_1} \;:\; \mathcal{K}(H(\mathcal{B})) \;\to\; L(K_1), \quad a \;\mapsto\; \pi(a)|_{K_1}$$

ist nichtentartet.

Beweis.

a) Sei $b \in L(H(\mathcal{B}))$. Dann ist für alle $a \in \mathcal{K}(H(\mathcal{B}))$ auch $ba \in \mathcal{K}(H(\mathcal{B}))$, und somit gilt für alle $k \in K$

$$\pi(b)\pi(a)k = \pi(ba)k \in K_1.$$

Damit folgt also

$$\pi(b)(\pi(a)K) \subset K_1 \qquad (a \in \mathcal{K}(H(\mathcal{B}))),$$

und wegen der Linearität und der Stetigkeit von $\pi(b) \in L(K)$ gilt

$$\pi(b)(\bigvee_{a\in\mathcal{K}(H(\mathcal{B}))} (\pi(a)K)) \;\subset\; K_1.$$

Demnach ist K_1 invariant unter π.
Nun müssen wir nur noch zeigen, dass das Orthogonalkomplement K_0 von K_1 in K die angegebene Form hat.
Sei $a \in \mathcal{K}(H(\mathcal{B}))$. Dann ist auch $a^* \in \mathcal{K}(H(\mathcal{B}))$ und mit

$$K \;\ominus\; \pi(a)K \;=\; Ker(\;\pi(a)^*\;) \;=\; Ker(\;\pi(a^*)\;)$$

folgt

$$\begin{aligned} K \ominus K_1 \;&=\; K \ominus (\bigvee_{a\in\mathcal{K}(H(\mathcal{B}))} (\;\pi(a)K)\;) \\ &=\; \bigcap_{a\in\mathcal{K}(H(\mathcal{B}))} (K \;\ominus\; \pi(a)K) \\ &=\; \bigcap_{a\in\mathcal{K}(H(\mathcal{B}))} Ker\;\pi(a^*) \\ &=\; \bigcap_{a\in\mathcal{K}(H(\mathcal{B}))} Ker\;\pi(a). \end{aligned}$$

b) Sei $k \in K_1$ mit
$$\pi|_{K_1}(a)k = 0 \quad (a \in \mathcal{K}(H(\mathcal{B}))).$$
Dann gilt auch
$$\pi(a)k = 0 \quad (a \in \mathcal{K}(H(\mathcal{B}))),$$
woraus folgt, dass $k \in Ker\ \pi(a) \quad (a \in \mathcal{K}(H(\mathcal{B})))$.
Nach der Definition von K_1 liegt k somit in K_0. Das heißt
$$K_1 \ \ni \ k \ \in \ K_0 = K \ominus K_1,$$
wodurch $k = 0$ folgt.
Damit ist $\pi|_{K_1}$ also nichtentartet.

□

Wir sind nun in der Lage Korollar 3.3.8 auf die nichtentartete Darstellung
$$\pi|_{K_1} \ : \ \mathcal{K}(H(\mathcal{B})) \ \to \ L(K_1), \quad a \ \mapsto \ \pi(a)|_{K_1}$$
anzuwenden.

Lemma 3.4.5.

a) *Sei*
$$\pi|_{K_1} \ : \ \mathcal{K}(H(\mathcal{B})) \ \to \ L(K_1), \quad a \ \mapsto \ \pi(a)|_{K_1}$$
die nichtentartete Darstellung von $\mathcal{K}(H(\mathcal{B}))$ *auf* K_1 *aus Lemma* 3.4.4.
Dann existieren eine Indexmenge I *und eine Zerlegung*
$$K_1 \ = \ \bigoplus_{i \in I} K_i$$
von K_1 *in* $\pi|_{K_1}$*-invariante Unterräume* $\{0\} \neq K_i \subset K_1$ $(i \in I)$ *derart, dass für jedes* $i \in I$ *eine unitäre Abbildung*
$$U_i \ : \ K_i \ \to \ H(\mathcal{B})$$
existiert, so dass
$$(\pi|_{K_1})(a)|_{K_i} \ = \ U_i^* \ a \ U_i$$
für alle $a \in \mathcal{K}(H(\mathcal{B}))$.

b) *Die Abbildung*
$$U \ = \ \bigoplus_{i \in I} U_i \ : \ K_1 = \bigoplus_{i \in I} K_i \ \to \ \bigoplus_{i \in I} H(\mathcal{B}),$$
definiert als direkte Summe der in a) erhaltenen unitären Abbildungen U_i*, ist selbst unitär, mit*
$$\pi|_{K_1}(a) \ = \ U^* \ (\bigoplus_{i \in I} a) \ U$$
für alle $a \in \mathcal{K}(H(\mathcal{B}))$.

Beweis.

a) Wende direkt Lemma 3.3.8 auf die gegebene Situation an.

b) Als direkte Summe der unitären Abbildungen U_i $(i \in I)$ ist U ebenfalls unitär mit

$$\begin{aligned} \pi|_{K_1}(a) &= \bigoplus_{i\in I}(\ (\pi|_{K_1})(a)|_{K_i}\ ) \\ &\overset{(a)}{=} \bigoplus_{i\in I}(U_i^*\ a\ U_i) \\ &= (\bigoplus_{i\in I} U_i^*)(\bigoplus_{i\in I} a)(\bigoplus_{i\in I} U_i) \\ &= U^*(\bigoplus_{i\in I} a)U \qquad (\ a \in \mathcal{K}(H(\mathcal{B}))\ ). \end{aligned}$$

□

Die beiden Darstellungen

$$L(H(\mathcal{B})) \ \to\ L(K_1), \quad a \ \mapsto\ \pi(a)|_{K_1}$$

und

$$L(H(\mathcal{B})) \ \to\ L(K_1), \quad a \ \mapsto\ U^*(\bigoplus_{i\in I} a)U$$

sind beides Fortsetzungen der nichtentarteten Darstellung

$$\mathcal{K}(H(\mathcal{B})) \ \to\ L(K_1), \quad a \ \mapsto\ \pi(a)|_{K_1}.$$

Nach dem Eindeutigkeitsteil aus Satz 3.3.9 sind diese Fortsetzungen also gleich. Für die Einschränkung von π auf K_0 gilt nach Konstruktion

$$\pi|_{K_0}(\mathcal{K}(H(\mathcal{B}))) \ =\ 0.$$

Nach Konstruktion ist

$$T_i \ =\ \rho(M_{z_i}) \ =\ P_H\pi(M_{z_i})|_H \qquad (i = 1, \dots, n)$$

die Kompression von

$$\pi(M_{z_i}) \ =\ \pi(M_{z_i})|_{K_1} \oplus \pi(M_{z_i})|_{K_0} \qquad (i = 1, \dots, n).$$

Hierbei ist bis auf unitäre Äquivalenz

$$\pi(M_{z_j})|_{K_1} \ \cong\ \bigoplus_{i\in I} M_{z_j} \quad \in L(\bigoplus_{i\in I} H(\mathcal{B})).$$

Da nach Abschnitt 3.2

$$([M_{z_1}], \dots, [M_{z_n}]) \quad \in \mathcal{C}(H(\mathcal{B}))^n$$

ein vertauschendes Tupel normaler Elemente in der Calkin-Algebra und die Abbildung

$$\phi\ :\ \mathcal{C}(H(\mathcal{B})) \ \to\ L(K_0), \quad \phi([a]) \ =\ \pi(a)|_{K_0}$$

ein C^*-Algebrenhomomorphismus ist, für den $\phi([M_{z_i}]) = \pi(M_{z_i})|_{K_0} =: W_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ gilt, definiert

$$W = \pi(M_z)|_{K_0}$$

ein vertauschendes Tupel normaler Operatoren und unter Benutzung von (3.8) folgt, dass

$$\sum_{i=1}^{n} W_i W_i^* = I_{K_0}. \tag{3.10}$$

Ein solches Tupel nennt man sphärisch unitäres Tupel.

Bevor wir nun in der Lage sind den Modellsatz für sphärische Kontraktionen aufzuschreiben, müssen wir uns noch der Wirkung von Operatoren der Form $\pi(p(M_z))^*$ auf den Hilbertraum H widmen. Hierbei bezeichnet π wieder den C^*-Algebrenhomomorphismus aus dem vorigen Abschnitt, $p \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom in n Variablen und M_z den n-Shift.
Es gilt das folgende Lemma

Lemma 3.4.6.
Für die Darstellung $\pi : L(H(\mathcal{B})) \to L(K)$ und den n-Shift M_z ist der Hilbertraum $H \subset K$ invariant unter allen Operatoren

$$\pi(p(M_z))^* \qquad (p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]).$$

Bemerkung.
Bezeichnet man mit $A = \{p(M_z) \mid p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]\} \subset L(H(\mathcal{B}))$ die vom n-Shift $M_z \in L(H(\mathcal{B}))^n$ erzeugte unitale Teilalgebra, so werden wir abkürzend sagen, dass H $*$-invariant unter der Algebra $\pi(A)$ ist.

Beweis. (von Lemma 3.4.6)
Sei $j : H \to K$ die Inklusion und $p \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom. Dann gilt

$$\begin{aligned} j^*\pi(p(M_z))P_H\pi(p(M_z)^*)|_H &= \rho(p(M_z))\rho(p(M_z)^*) \\ &\overset{(*)}{=} \rho(p(M_z)p(M_z)^*) \\ &= j^*\pi(p(M_z)p(M_z)^*)|_H, \end{aligned}$$

oder äquivalent

$$j^*\pi(p(M_z))P_H\pi(p(M_z)^*)j = j^*\pi(p(M_z)p(M_z)^*)j. \tag{3.11}$$

Dabei gilt es in Gleichung $(*)$ zu beachten, dass ρ aufgrund von (3.7) genau die gewünschte Multiplikationseigenschaft hat.

Damit folgt nun mit $B = P_H\pi(p(M_z)^*)j \; - \; \pi(p(M_z)^*)j$

$$\begin{aligned}
B^*B &= [P_H\pi(p(M_z)^*)j - \pi(p(M_z)^*)j]^* \; [P_H\pi(p(M_z)^*)j - \pi(p(M_z)^*)j] \\
&= (P_H\pi(p(M_z)^*)j)^* \; [P_H\pi(p(M_z)^*)j - \pi(p(M_z)^*)j] \\
&\quad - (\pi(p(M_z)^*)j)^* \; [P_H\pi(p(M_z)^*)j - \pi(p(M_z)^*)j] \\
&= (j^*\pi(p(M_z)^*)^*P_H^*) \; [P_H\pi(p(M_z)^*)j - \pi(p(M_z)^*)j] \\
&\quad - (j^*\pi(p(M_z)^*)^*) \; [P_H\pi(p(M_z)^*)j - \pi(p(M_z)^*)j] \\
&= (j^*\pi(p(M_z))P_H) \; [P_H\pi(p(M_z)^*)j - \pi(p(M_z)^*)j] \\
&\quad - (j^*\pi(p(M_z))) \; [P_H\pi(p(M_z)^*)j - \pi(p(M_z)^*)j] \\
&= j^*\pi(p(M_z))P_HP_H\pi(p(M_z)^*)j \; - \; j^*\pi(p(M_z))P_H\pi(p(M_z)^*)j \\
&\quad - j^*\pi(p(M_z))P_H\pi(p(M_z)^*)j \; + \; j^*\pi(p(M_z))\pi(p(M_z)^*)j \\
&\overset{(3.11)}{=} \underbrace{j^*\pi(p(M_z))P_H\pi(p(M_z)^*)j \; - \; j^*\pi(p(M_z))P_H\pi(p(M_z)^*)j}_{=0} \\
&\quad \underbrace{- \; j^*\pi(p(M_z)p(M_z)^*)j \; + \; j^*\pi(p(M_z)p(M_z)^*)j}_{=0} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Das heißt also

$$[P_H\pi(p(M_z)^*)j - \pi(p(M_z)^*)j]^* \; [P_H\pi(p(M_z)^*)j - \pi(p(M_z)^*)j] \; = \; 0$$

und damit

$$P_H\pi(p(M_z)^*)j \; = \; \pi(p(M_z)^*)j,$$

woraus hervorgeht, dass H $*$-invariant unter $\pi(\mathcal{A})$ ist.

$\square$

3.5 Der Modellsatz

Sei $T \in L(H)^n$ (H Hilbertraum) eine n-Kontraktion und

$$\pi \; : \; L(H(\mathcal{B})) \; \to \; L(K)$$

eine Stinespring-Dilatation gemäß Kapitel 2 zu der in Abschnitt 3.1 konstruierten, unitalen, vollständig positiven, linearen Abbildung

$$\rho \; : \; S \; \to \; L(H),$$

wobei $S = LH\{M_z^\alpha M_z^{*\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}$ und $M_z \in L(H(\mathcal{B}))^n$ der n-Shift ist.
Wir haben in Kapitel 3.4 gesehen, dass man den Hilbertraum K in π-invariante Räume K_1, K_0 zerlegen kann, derart dass

$$\pi(a) \; = \; \pi(a)|_{K_1} \; \oplus \; \pi(a)|_{K_0} \qquad (\; a \in L(H(\mathcal{B})) \;)$$

gilt, und dass es eine Indexmenge I und einen unitären Operator $U \in L(\; K_1 \; , \; \bigoplus_{i \in I} H(\mathcal{B}) \;)$ gibt, so dass

$$\pi(a)|_{K_1} \; = \; U^*(\; \bigoplus_{i \in I} a \;)U \qquad (\; a \in L(H(\mathcal{B})) \;)$$

gilt. Außerdem ist

$$T_j \;=\; \rho(M_{z_j}) \;=\; P_H\pi(M_{z_j})|_H \qquad (j = 1,\dots,n)$$

die Kompression von

$$\pi(M_{z_j}) \;=\; \pi(M_{z_j})|_{K_1} \;\oplus\; \pi(M_{z_j})|_{K_0} \qquad (j = 1,\dots,n).$$

Durch Identifikation von K_1 mit $\bigoplus_{i\in I} H(\mathcal{B})$ vermöge U erhält man

$$K \;=\; (\; \bigoplus_{i\in I} H(\mathcal{B}) \;) \;\oplus\; K_0$$

und

$$\pi(a) \;=\; (\; \bigoplus_{i\in I} a \;) \;\oplus (\; \pi(a)|_{K_0} \;) \qquad (\; a \in L(H(\mathcal{B})) \;).$$

Außerdem existiert ein geeignetes, sphärisch unitäres Tupel $W \in L(K_0)^n$, so dass wir

$$\tilde{T_j} \;=\; P_H\pi(M_{z_j})|_H \;=\; P_H(\; (\; \bigoplus_{i\in I} M_{z_j} \;) \;\oplus\; W_j \;)|_H \qquad (j = 1,\dots,n)$$

schreiben können.
Nach Konstruktion und unter Benutzung von Lemma 3.4.6 gilt dann auch

$$\begin{aligned}
\tilde{T_j^*} \;&=\; (\; P_H\pi(M_{z_j})|_H \;)^* \\
&=\; P_H\pi(M_{z_j})^*|_H \\
&\overset{(3.4.6)}{=}\; \pi(M_{z_j})^*|_H \\
&=\; [\; (\; \bigoplus_{i\in I} M_{z_j}^* \;) \;\oplus\; W_j^* \;]|_H \qquad (j = 1,\dots,n).
\end{aligned}$$

3.6 Minimale Dilatationen

Wählt man jetzt eine minimale Stinespring-Dilatation, so kann man weitere Aussagen treffen.
Wir starten weiterhin mit einer n-Kontraktion $T \in L(H)^n$ und bezeichnen wie üblich mit τ_n die Toeplitz-Algebra. Außerdem sei

$$\pi \;:\; \tau_n \;\to\; L(K)$$

eine minimale Stinespring-Dilatation der in Abschnitt 3.1 konstruierten, unitalen, vollständig positiven, linearen Abbildung

$$\rho \;:\; \tau_n \;\to\; L(H).$$

Das heißt π ist ein $*$-Homomorphismus mit

$$\rho(a) \;=\; P_H\pi(a)|_H \qquad (\; a \in \tau_n \;),$$

der die Minimalitätsbedingung

$$[\; \pi(\tau_n)H \;] \;=\; K$$

erfüllt.
Nach Lemma 3.4.2 gilt für

$$S = LH\{M_z^\alpha M_z^{*\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\},$$

dass

$$\tau_n = \overline{S}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \pi(\tau_n) = \pi(\overline{S}) &\subset \overline{LH}\{\ \pi((p(M_z))(q(M_z)^*)) \mid p,q \in \mathbb{C}[z]\ \} \\ &= \overline{LH}\{\ \pi(p(M_z))\pi(q(M_z)^*) \mid p,q \in \mathbb{C}[z]\ \}. \end{aligned}$$

Außerdem ist H nach Lemma 3.4.6 $*$-invariant unter $\pi(A)$, wobei

$$A = \{p(M_z) \mid p \in \mathbb{C}[z_1,\ldots,z_n]\} \subset L(H(\mathcal{B}))$$

die vom n-Shift M_z erzeugte unitale Teilalgebra ist,
und somit gilt

$$K = [\ \pi(\tau_n)H\ ] = [\ \pi(A)H\ ].$$

Sei $K = K_1 \oplus K_0$ die in Abschnitt 3.4 konstruierte Zerlegung von K in zwei π-invariante Teilräume $K_1, K_0 \subset K$. Wir identifizieren wieder K_1 mit $\bigoplus\limits_{i\in I} H(\mathcal{B})$ und erhalten gemäß 3.5

$$K = (\ \bigoplus_{i\in I} H(\mathcal{B})\ ) \oplus K_0$$

und

$$\pi(a) = (\ \bigoplus_{i\in I} a\ ) \oplus (\ \pi(a)|_{K_0}\ ) \qquad (\ a \in \tau_n\ ).$$

Nach Konstruktion ist $W = \pi(M_z)|_{K_0} \in L(K_0)^n$ ein sphärisch unitäres Tupel, derart dass

$$T_j = P_H\pi(M_{z_j})|_H = P_H(\ (\bigoplus_{i\in I} M_{z_j}\ ) \oplus W_j\ )|_H \qquad (j = 1,\ldots,n)$$

erfüllt ist.
Wir schreiben im Folgenden abkürzend

$$V_j = (\bigoplus_{i\in I} M_{z_j}\ ) \oplus W_j \quad \in L(K) \quad (j = 1,\ldots,n). \tag{3.12}$$

Lemma 3.6.1.
Mit obigen Bezeichnungen gilt

$$P_H V_j \overset{(i)}{=} P_H V_j P_H \overset{(ii)}{=} T_j P_H \qquad (j = 1,\ldots,n). \tag{3.13}$$

Beweis.
Wir werden zuerst (i) schwach nachrechnen. Seien dazu $k_1, k_2 \in K$. Dann gilt

$$\begin{aligned} < P_H V_j k_1, k_2 > &= < k_1, \underbrace{V_j^* P_H k_2}_{\in H} > \\ &= < k_1, P_H V_j^* P_H k_2 > \\ &= < P_H V_j P_H k_1, k_2 >, \end{aligned}$$

woraus (i) folgt. Dabei haben wir benutzt, dass H nach Lemma 3.4.6 invariant unter

$$V_j^* = (\bigoplus_{i \in I} M_{z_j}^*) \oplus W_j^* \quad \in L(K) \quad (j = 1, \ldots, n)$$

ist.
Da

$$T_j = P_H \pi(M_{z_j})|_H = P_H((\bigoplus_{i \in I} M_{z_j}) \oplus W_j)|_H \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

ist, gilt (ii) offensichtlich.

□

Definition 3.6.2.
Wir nennen

$$D = D_T = I_H - \sum_{j=1}^{n} T_j T_j^* \quad \in L(H)$$

den Defektoperator von T
und schreiben

$$D_V = I_K - \sum_{j=1}^{n} V_j V_j^* \quad \in L(K)$$

für den entsprechenden Defektoperator von V.

Wir bezeichnen weiterhin mit $P_{\mathbb{C}}$ die Orthogonalprojektion von $H(\mathcal{B})$ auf die konstanten Funktionen $\mathbb{C} \cdot 1$ in $H(\mathcal{B})$.

Lemma 3.6.3.
Mit den oben getroffenen Notationen gilt für die Defektoperatoren D des Tupels $T \in L(H)^n$ und D_V von $V \in L(K)^n$

a) $D = P_H D_V|_H$,

b) $D_V = (\bigoplus_{i \in I} P_{\mathbb{C}}) \oplus 0_{K_0}$.

Beweis.

a) Mit Hilfe von Lemma 3.6.1 folgt

$$\begin{aligned}
P_H D_V|_H &= P_H(I_K - \sum_{j=1}^{n} V_j V_j^*)|_H \\
&= I_H - \sum_{j=1}^{n} P_H V_j V_j^*|_H \\
&\overset{(3.13)}{=} I_H - \sum_{j=1}^{n} P_H V_j T_j^* \\
&\overset{(3.13)}{=} I_H - \sum_{j=1}^{n} T_j T_j^* \\
&= D.
\end{aligned}$$

b) Nach Lemma 1.2.7 gilt

$$P_{\mathbb{C}} = I_{H(\mathcal{B})} - \sum_{j=1}^{n} M_{z_j} M_{z_j}^*.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} D_V &= I_K - \sum_{j=1}^{n} V_j V_j^* \\ &= I_K - \sum_{j=1}^{n} \left(\left(\left(\bigoplus_{i \in I} M_{z_j} \right) \oplus W_j \right) \left(\left(\bigoplus_{i \in I} M_{z_j} \right) \oplus W_j \right)^* \right) \\ &= \bigoplus_{i \in I} \left(I_{H(\mathcal{B})} - \sum_{j=1}^{n} M_{z_j} M_{z_j}^* \right) \oplus \underbrace{\left(I_{K_0} - \sum_{j=1}^{n} W_j W_j^* \right)}_{= 0_{K_0} \text{ nach } (3.10)} \\ &= \left(\bigoplus_{i \in I} P_{\mathbb{C}} \right) \oplus 0_{K_0}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir

$$K = \left(\bigoplus_{i \in I} H(\mathcal{B}) \right) \oplus K_0$$

benutzt.

$\square$

Bemerkung.
Mit $P_{\mathbb{C}}$ ist auch D_V eine Orthogonalprojektion.

Wir haben somit eine explizite Form für den Defektoperator D_V von $V \in L(K)^n$ gefunden. Dabei können wir lediglich über die Indexmenge I noch keine genaueren Aussagen treffen. Dies ist das Ziel des nächsten Lemmas.

Lemma 3.6.4.
Sei $T \in L(H)^n$ eine n-Kontraktion und $V \in L(K)^n$ das gemäß (3.12) *definierte Tupel. Weiterhin sei D der Defektoperator von T und D_V der entsprechende Defektoperator von V. Dann gilt*

$$\overline{D_V H} = \overline{D_V K}.$$

Beweis.
Sei $p \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom und $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \in H(\mathcal{B})$. Dann gilt

$$P_{\mathbb{C}}\ p(M_z) = p(0)\ P_{\mathbb{C}}.$$

Da $P_{\mathbb{C}} f = a_0$ folgt nämlich

$$P_{\mathbb{C}}\ p(M_z) f = P_{\mathbb{C}} M_p f = P_{\mathbb{C}}(pf) = b_0 a_0 = p(0) P_{\mathbb{C}} f,$$

wobei b_0 der 0-te Koeffizient von p ist.
Damit folgt aber auch

$$D_V\ p(V) = p(0) D_V,$$

da

$$\begin{aligned}
D_V\ p(V) &= D_V\ p\left(\ (\ (\bigoplus_{i\in I} M_{z_j}\ )\ \oplus\ W_j\ )_{j=1,\ldots,n}\right)\\
&\overset{(3.6.3)}{=} (\ (\bigoplus_{i\in I} P_{\mathbb{C}}\ )\ \oplus\ 0_{K_0}\ )\ p\left(\ (\ (\bigoplus_{i\in I} M_{z_j}\ )\ \oplus\ W_j\ )_{j=1,\ldots,n}\right)\\
&= \bigoplus_{i\in I}(\ P_{\mathbb{C}}p(M_z)\ )\ \oplus\ 0_{K_0}\\
&= \bigoplus_{i\in I}(\ p(0)P_{\mathbb{C}}\ )\ \oplus\ 0_{K_0}\\
&= p(0)(\ \bigoplus_{i\in I} P_{\mathbb{C}}\ )\ \oplus\ 0_{K_0}\\
&= p(0)D_V.
\end{aligned}$$

Mit $A = \{\ p(M_z) \mid p \in \mathbb{C}[z]\ \}$, $D_V p(V) = p(0)D_V$
und $D_V\pi(p(M_z)) = D_V p(\pi(M_z)) = p(0)D_V$ (da $V = \pi(M_z)$ nach Definition von V),
folgt dass

$$\overline{D_V K} = \overline{D_V\ [\ \pi(A)H\ ]} \subset \overline{D_V H} \subset \overline{D_V K}.$$

Wir haben somit das Gewünschte

$$\overline{D_V H}\ =\ \overline{D_V K}$$

gezeigt.

□

Weiter ist sowohl D (da T eine n-Kontraktion ist) als auch D_V (als Orthogonalprojektion) positiv, und wir können

$$\begin{aligned}
KerD &= \{\ x \in H\ |\ <Dx, x> =\ 0\ \}\\
&= \{\ x \in H\ |\ <P_H D_V x, x> =\ 0\ \}\\
&= \{\ x \in H\ |\ <D_V x, x> =\ 0\ \}\\
&= \{\ x \in H\ |\ D_V x = 0\ \}\\
&= Ker(D_V|_H)
\end{aligned}$$

folgern.
Nach dem Homomorphiesatz gilt dann, zumindest algebraisch,

$$DH\ \cong\ H\big/KerD\quad,\quad D_V H\ \cong\ H\big/Ker(D_V|_H).$$

Da nun $KerD = KerD_V|_H$, gilt also

$$DH\ \cong\ H\big/KerD\ \cong\ D_V H,$$

als Isomorphien zwischen Vektorräumen.

Bemerkung.

- Ist $dim(DH) < \infty$, so ist

$$dim(DH) = dim(D_V H) = dim(\overline{D_V H}) = dim(D_V K) = \#(I),$$

da nach Lemma 3.6.3 bekanntlich $D_V = (\bigoplus_{i \in I} P_{\mathbb{C}}) \ \oplus \ 0_{K_0}$ gilt.

- Ist $dim(DH) = \infty$ so sind auch

$$\#(I) = \infty \quad \text{und} \quad dim(D_V H) = \infty = dim(D_V K).$$

Nach den Bemerkungen im Anschluß an Theorem 4.1 in [11] ist der Hilbertraum $K \supset H$, auf dem die minimale Stinespring-Darstellung definiert ist, separabel, falls dies auch der Hilbertraum H ist, auf dem die ursprüngliche n-Kontraktion $T \in L(H)^n$ lebt.
In diesem Falle ist die Indexmenge I höchstens abzählbar unendlich.
Hat man also einen separablen Hilbertraum H zugrunde liegen, derart dass $dim(DH) = \infty$ ist, so folgt, dass die Indexmenge I eine abzählbar unendliche Menge ist.

Satz 3.6.5. *(Modellsatz für n-Kontraktionen)*
Sei $T = (T_1, \ldots, T_n) \in L(H)^n$ eine n-Kontraktion auf einem Hilbertraum H. Dann existieren zwei Hilberträume K_1 und K_0 mit $H \subset K_1 \oplus K_0$, eine Indexmenge I mit $\#(I) = dim(\overline{DH})$, ein unitärer Operator $U : K_1 \to \bigoplus_{i \in I} H(\mathcal{B})$ und ein sphärisch unitäres Tupel $W \in L(K_0)^n$ auf K_0, so dass T die Kompression von $U^*(\bigoplus_{i \in I} M_z)U \ \oplus W$ auf H ist, das heißt es gilt

$$T_j \ = \ P_H(\ (\ U^* \bigoplus_{i \in I} M_{z_j} \ U \ ) \ \oplus \ W_j \ )|_H \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Außerdem kann man erreichen, dass H dabei invariant unter den Adjungierten der Operatoren $(\ U^* \ \bigoplus_{i \in I} M_{z_j} \ U \ ) \ \oplus \ W_j \ (j = 1, \ldots, n)$ ist. Dabei bezeichnet M_z den n-Shift auf $H(\mathcal{B})$, $P_H : K_1 \oplus K_0 \to H$ die Orthogonalprojektion in $K_1 \oplus K_0$ auf H und D den Defektoperator von T.

Kapitel 4

Eine Anwendung

4.1 Ein Satz von Athavale

Mit Hilfe des Modellsatzes aus Kapitel 3 können wir nun einen alternativen Beweis zu einem Satz von Athavale angeben, der aussagt, dass jede sphärische Isometrie subnormal ist. Dass diese Aussage eine direkte Folgerung aus dem Modellsatz für n-Kontraktionen ist, liegt daran, dass man aus der dem Satz von Athavale zugrundeliegenden Ausgangssituation schließen kann, dass die im Modellsatz benötigte Indexmenge I Mächtigkeit 0 hat. Somit bricht die Zerlegung in einen Shift- und einen sphärisch unitären Anteil aus dem Modellsatz auf den letzteren zusammen und wir erhalten das gewünschte Ergebnis.
Damit wir diese Schlußfolgerungen allerdings ziehen können, müssen wir uns zuerst mit den benötigten Begriffen vertraut machen.

Definition 4.1.1.

$a)$ Zunächst geben wir die Definition von Subnormalität für einzelne Operatoren an.

- Ein Operator $S \in L(H)$ (H Hilbertraum) heißt subnormal, falls es einen Hilbertraum $K \supset H$ und einen normalen Operator $N \in L(K)$ gibt, so dass
$$NH \subset H \qquad \text{und} \qquad S = N|_H.$$
Man nennt ein solches N eine normale Erweiterung von S.
- Für Hilberträume H, K ($H \subset K$) heißt ein Operator $N \in L(K)$ minimale normale Erweiterung von $S \in L(H)$, falls N normale Erweiterung von S ist und K der kleinste reduzierende Unterraum für N ist, der H enthält.

$b)$ Entsprechendes kann man auch für Tupel von Operatoren definieren.

- Für zwei Hilberträume H, K und vertauschende Tupel $S \in L(H)^n$, $N \in L(K)^n$ heißt N normale Erweiterung von S, falls
  - N_i normal
  - $N_i H \subset H$
  - $S_i = N_i|_H$

  für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt.

- N heißt minimale normale Erweiterung von S, falls N normale Erweiterung von S ist und K der kleinste für alle N_i $(i = 1, \ldots, n)$ reduzierende Unterraum ist, der H enthält.
- S heißt subnormal, falls S eine normale Erweiterung hat.

Die folgende Definition ist uns zwar schon ein Begriff, wir wollen sie aber dennoch der Vollständigkeit halber notieren.

Definition 4.1.2.

- Ein vertauschendes Tupel $V \in L(H)^n$ heißt sphärische Isometrie, falls

$$\sum_{i=1}^{n} V_i^* V_i \;=\; I_H.$$

- Falls eine sphärische Isometrie $V \in L(H)^n$ zusätzlich noch normal ist, das heißt, dass jedes V_i $(i = 1, \ldots, n)$ normal ist, so heißt V sphärisch unitär.

Wir sind nun in der Lage, den oben bereits erwähnten Satz von Athavale anzugeben und ihn anschließend mit Hilfe von Satz 3.6.5 zu beweisen.

Korollar 4.1.3. *(Satz von Athavale)*
Seien $T_1, \ldots, T_n \in L(H)$ vertauschende Operatoren auf einem Hilbertraum H mit

$$\sum_{i=1}^{n} T_i^* T_i \;=\; I_H.$$

Dann ist $T = (T_1, \ldots, T_n) \;\in\; L(H)^n$ *subnormal* .

Beweis.
Sei also $T \in L(H)^n$ eine sphärische Isometrie.
Wir definieren

$$V_k \;=\; T_k^* \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Dann ist

$$\sum_{k=1}^{n} V_k V_k^* \;=\; \sum_{k=1}^{n} T_k^* T_k \;=\; I_H.$$

Also ist

$$V = (V_1, \ldots, V_n) \;\in\; L(H)^n$$

eine n-Kontraktion.
Dann existieren nach Satz 3.6.5 Hilberträume K_1 und K_0 mit $H \subset K_1 \oplus K_0$, eine Indexmenge I, ein unitärer Operator $U \in L(\; K_1, \bigoplus_{i \in I} H(\mathcal{B})\;)$ und ein sphärisch unitäres Tupel $W \in L(K_0)^n$ auf K_0, mit

$$V_j \;=\; P_H(\;(\;U^* \bigoplus_{i \in I} M_{z_j}\; U\;)\;\oplus\; W_j\;)|_H \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

und

$$V_j^* h \;=\; (\;(\;U^* \bigoplus_{i \in I} M_{z_j}^*\; U\;)\;\oplus\; W_j^*\;)h \qquad (h \in H,\; 1 \leq j \leq n).$$

Dabei ist $M_z \in L(H(\mathcal{B}))^n$ der n-Shift auf $H(\mathcal{B})$ und $P_H : K_1 \oplus K_0 \to H$ die Orthogonalprojektion in $K_1 \oplus K_0$ auf H.
Außerdem können wir laut Satz 3.6.5 erreichen, dass

$$\#(I) \;=\; dim(\overline{ran(I_H - \sum_{k=1}^{n} V_k V_k^*)}) \;=\; 0$$

ist. Somit gilt

$$V_j \;=\; P_H W_j|_H \qquad \text{und} \qquad V_j^* \;=\; W_j^*|_H \qquad (j = 1, \ldots n)$$

und folglich ist $W^* \in L(K_0)^n$ $(H \subset K_0)$ definitionsgemäß eine normale Erweiterung von $V^* = T$, das heißt T ist subnormal.

□

Wir haben also gezeigt, dass jede sphärische Isometrie subnormal ist, also eine normale Erweiterung hat. Man kann sich nun die Frage stellen, ob man diese Aussage nicht noch verbessern kann. Anlass dazu gibt etwa Kapitel 3.6, in dem durch Wahl einer minimalen Stinespring-Darstellung die bis dahin erhaltenen Ergebnisse ebenfalls noch verbessert werden konnten.
Wir werden im Folgenden nun noch zeigen, dass man auch die Aussage aus dem Satz von Athavale (Korollar 4.1.3) präzisieren kann. Genauer heißt das, wie wir beweisen werden, dass jede sphärische Isometrie eine minimale normale Erweiterung hat und diese sphärisch unitär ist.

Korollar 4.1.4.
Jede sphärische Isometrie hat eine minimale normale Erweiterung, welche sphärisch unitär ist.

Beweis.
Sei $T \in L(H)^n$ wie oben eine sphärische Isometrie und $V = T^*$. Damit ist V offenbar eine n-Kontraktion. Konstruiert man die in Satz 3.6.5 beschriebene Dilatation von V mit Hilfe der minimalen Stinespring-Darstellung

$$\pi \;:\; \tau_n \;\to\; L(K)$$

der durch V gegebenen vollständig positiven Abbildung

$$\rho \;:\; \tau_n \;\to\; L(H)$$

(vergleiche Kapitel 3.6), so genügt π der Minimalitätsbedingung

$$K \;=\; [\;\pi(A)H\;],$$

wobei $A \;= \{\; p(M_z) \mid p \in \mathbb{C}[z] \;\}$ die vom n-Shift erzeugte unitale C^*-Algebra ist.
Mit $W = \pi(M_z) \in L(K)^n$ erhalten wir wie im Beweis zu Athavale, dass W^* eine normale Erweiterung von T ist. Wir wissen außerdem, dass W^* sphärisch unitär ist (vergleiche Satz 3.6.5).
Es bleibt also noch zu zeigen, dass W^* auch minimale normale Erweiterung von T ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass K der kleinste reduzierende Unterraum für W^* ist, der H enthält.

Sei nun also $H \subset M \subset K$ ein Unterraum, der reduzierend für $W^* \in L(K)^n$, das heißt für alle $W_i^* \in L(K)$ $(1 \leq i \leq n)$ ist, so folgt

$$K \ = \ [\ \pi(A)H\ ] \ \subset \ [\ \pi(A)M\ ] \ \subset \ M,$$

da $\pi(M_z) = W$ und M invariant für W ist.
Also ist in diesem Fall das Tupel $W^* \in L(K)^n$ automatisch die minimale normale Erweiterung der sphärischen Isometrie $T \in L(H)^n$.

$\square$

Bemerkung.
Wir haben also gezeigt, dass jede sphärische Isometrie subnormal ist und dass ihre minimale normale Erweiterung sphärisch unitär ist.

Literaturverzeichnis

[1] T. Ando, *On a pair of commutative contractions*, Acta Sci. Math., 24:88-90, 1963.

[2] W. Arveson, *An invitation to C^*-algebras*, Springer Verlag, 1976.

[3] W. Arveson, *Subalgebras of C^*-algebras III: Multivariable operator theory*, Acta Math. 181 (1998), 159-228.

[4] C. Barbian, *Positivitätsbedingungen funktionaler Hilberträume und Anwendungen in der mehrdimensionalen Operatorentheorie*, Diplomarbeit, Universität Saarbrücken, 2001.

[5] J.B. Conway, *A course in Functional Analysis*, Springer Verlag, 1985.

[6] J.B. Conway, *The Theory of Subnormal Operators*, Math. Surveys Monographs, Vol.38. Amer. Math. Soc. Providence, R.I., 1991.

[7] J. Eschmeier, M. Putinar, *Spherical contractions and interpolation problems on the unit ball*, J. reine angew. Math. 542 (2002), 219-236.

[8] N.L. Johnson, S. Kotz, *Distributions in Statistics, Discrete Distributions*, Houghton Mifflin Company, 1969.

[9] V. Müller and F.-H. Vasilescu, *Standard models for some commuting multioperators*, Proc.Amer.Math.Soc. 117 (1993), 979-989.

[10] S. Parrott, *Unitary dilations for commuting contractions*, Pacific J. Math., 34:481-490, 1970.

[11] V.I. Paulsen, *Completely bounded maps and dilations*, Pitman Research Notes in Mathematics Series 146, 1986.

[12] W. Rudin, *Functional Analysis*, Mc Graw Hill International Editions, 1973.

[13] B. Sz.-Nagy and C.Foias, *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Spaces*, North-Holland Publishing Company, 1970.

[14] N.Th. Varopoulos *On an inequality of von Neumann and an application of the metric theory of tensor products to operators theory*, J. Funct. Anal., 16:83-100, 1974.

[15] D. Werner, *Funktionalanalysis*, Springer Verlag, 1995.

[16] K. Zhu, *An Introduction to Operator Algebras*, Studies in advanced mathematics, CRC Press Inc., 1993.

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die ausdrücklich angegebenen Hilfsmittel benutzt habe.
Neunkirchen/Nahe, den 14.August 2003