Über sphärische Isometrien und exakte Sequenzen von Toeplitzalgebren

Diplomarbeit
zur Erlangung des Grades eines
Diplom-Mathematikers
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät I
der Universität des Saarlandes

vorgelegt von

Kevin Claude Everard

nach einem Thema von

Prof. Dr. Jörg Eschmeier

Saarbrücken, April 2008

Hiermit erkläre ich an Eides Statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die ausdrücklich angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Saarbrücken, den 15. April 2008

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Das Studium der Eigenschaften des unilateralen Shifts veranlasste Paul Halmos im Jahre 1950 dazu, das Konzept subnormaler Operatoren einzuführen. Dabei heißt ein Operator S auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ subnormal, wenn eine normale Erweiterung T von S auf einem Hilbertraum $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ existiert. Eine besondere Klasse solcher Operatoren bilden bekanntlich die Isometrien, deren Subnormalität zum Beispiel mit Hilfe der von Neumann-Wold-Zerlegung (vgl. [9, Theorem I.3.6, Theorem I.3.11]) bewiesen werden kann.
In den darauf folgenden Jahren versuchte man nun, diese Theorie auf endliche Tupel von vertauschenden Operatoren zu verallgemeinern. Hierbei ist zu bemerken, dass der Begriff der Isometrie von Tupeln auf mindestens zwei verschiedene Arten erklärt werden kann. So heißt ein vertauschendes Tupel $(T_1, \ldots, T_n)$ von Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ torische Isometrie, falls $T_i^* T_i = 1$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist. Es heißt sphärische Isometrie, falls die Identität $\sum_{i=1}^{n} T_i^* T_i = 1$ erfüllt ist. Die Subnormalität von torischen Isometrien, also von vertauschenden Tupeln von Isometrien, wurde im Jahre 1958 von Takasi Itô in [15] gezeigt, während die Frage nach der Subnormalität endlicher sphärischer Isometrien im Jahre 1990 von Ameer Athavale in [3] positiv beantwortet wurde.
Basierend auf neueren Entwicklungen im Bereich der Dilatationstheorie gelang es William Arveson in [2] mit Hilfe eines Modellsatzes für sphärische Kontraktionen, d.h. endliche kommutative Tupel $(T_1, \ldots, T_n)$ mit $\sum_{i=1}^{n} T_i^* T_i \leq 1$, einen alternativen Beweis der Subnormalität sphärischer Isometrien zu liefern.
Ein Anliegen der vorliegenden Arbeit ist es, diese Ergebnisse etwas weiter zu abstrahieren. Dabei wollen wir versuchen, eine simultane Verallgemeinerung sowohl der torischen als auch der endlichen sphärischen Isometrie für beliebige Familien zu erreichen. Dies gelingt uns, indem wir vertauschende Familien $\mathcal{F} = (S_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ sphärischer Isometrien $S_\alpha = (T_{j,\alpha})_{j \in J_\alpha}$ betrachten. Dabei nennen wir eine kom-

mutative Familie $(S_j)_{j\in J}$ von Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ sphärische Isometrie, falls $\sum_{j\in J} T_j^*T_j = 1$ in der schwachen Operatortopologie gilt.
Bevor wir uns dem Beweis der Subnormalität von kommutativen Familien sphärischer Isometrien zuwenden, erinnern wir im ersten Kapitel an grundlegende Resultate über vollstandig positive Abbildungen, Familien von Familien von Operatoren und lineare Abbildungen zwischen dualen Banachräumen. In Kapitel 2 zeigen wir dann etwas allgemeiner, dass zu einer kommutativen Familie $\mathcal{F} = (S_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ sphärischer Kontraktionen $S_\alpha = (T_{j,\alpha})_{j\in J_\alpha}$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ (das heißt für alle $\alpha \in \Gamma$ ist WOT-$\sum_{j\in J_\alpha} T_{j,\alpha}^* T_{j,\alpha} \leq 1$) ein bis auf unitäre Äquivalenz eindeutig bestimmtes Tripel $(\widehat{\mathcal{H}}, V, \widehat{\mathcal{F}})$ aus einem Hilbertraum $\widehat{\mathcal{H}}$, einer stetig linearen Abbildung $V : \mathcal{H} \to \widehat{\mathcal{H}}$ und einer vertauschenden Familie $\widehat{\mathcal{F}} = ((\widehat{T}_{j,\alpha})_{j\in J_\alpha})_{\alpha\in\Gamma}$ normaler sphärischer Isometrien auf $\widehat{\mathcal{H}}$ derart existiert, dass für alle $\alpha \in \Gamma$ und $j \in J_\alpha$ die Vertauschungsrelation

$$\widehat{T}_{j,\alpha} V = V T_{j,\alpha}$$

erfüllt ist. Im Spezialfall einer kommutativen Familie $\mathcal{F}$ sphärischer Isometrien kann die Abbildung $V : \mathcal{H} \to \widehat{\mathcal{H}}$ als Isometrie gewählt werden, was einen Beweis der Subnormalität von $\mathcal{F}$ liefert.
In den Beweisen sämtlicher Sätze und Lemmata orientieren wir uns indes stark an zwei Arbeiten von Bebe Prunaru aus den Jahren 2007 ([21]) und 2008 ([22]). Hervorzuheben sind besonders die Methoden der Beweisführung Prunarus, denen intensive Untersuchungen des Raumes

$$\mathcal{T}(\mathcal{F}) = \{X \in B(\mathcal{H}) \mid \text{WOT-}\sum_{j\in J_\alpha} T_{j,\alpha}^* X T_{j,\alpha} = X \text{ für alle } \alpha \in \Gamma\}$$

aller $\mathcal{F}$-Toeplitzoperatoren zugrunde liegen. So zeigen wir unter anderem die Existenz einer vollständig positiven kontraktiven Projektion $\Phi : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ deren Bild gerade mit der Menge $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ übereinstimmt und betrachten die minimale Stinespring-Dilatation der Einschränkung Φ_0 von Φ auf die von $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ erzeugte unitale C*-Teilalgebra von $B(\mathcal{H})$.
Die Bezeichnung von Operatoren $X \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ als Toeplitzoperatoren deutet dabei auf eine Analogie zu Arbeiten von Brown und Halmos (vgl. [4]) sowie von Davie und Jewell (vgl. [10]) hin, in denen mit Hilfe ähnlicher Gleichungen Charakterisierungen für klassische Toeplitzoperatoren auf den Hardyräumen $H^2(\mathbb{T})$ bzw. $H^2(S_n)$ gegeben werden. Diesen Zusammenhang versuchen wir in Kapitel 3 weiter zu ergründen. Dort beschäftigen wir uns mit dem verallgemeinerten

Hardy-Raum $H^2(m)$, den wir als Abschluss einer uniformen Algebra $A \subset C(K)$ in $L^2(m)$ definieren. Hierbei bezeichne $m \in M(K)$ ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß, und $M(K)$ sei der Raum aller komplexwertigen, regulären Borelmaße auf dem kompakten Hausdorffraum K. In Anlehnung an die bereits erwähnten Arbeiten [4] und [10] betrachten wir Toeplitzoperatoren T_φ mit Symbol $\varphi \in L^\infty(m)$ auf $H^2(m)$ und charakterisieren diese mit Hilfe der in Kapitel 2 erhaltenen Ergebnisse durch die Gleichung

$$\text{WOT-}\sum_{j \in J_\alpha} T^*_{\varphi_{j,\alpha}} X T_{\varphi_{j,\alpha}} = X,$$

wobei $((T_{\varphi_{j,\alpha}})_{j \in J_\alpha})_{\alpha \in \Gamma}$ eine geeignete Familie sphärischer Isometrien ist.
Schließlich nutzen wir die Sätze aus Kapitel 2, um exakte Sequenzen für die von den Toeplitzoperatoren auf $H^2(m)$ mit Symbol in $C(K)$ bzw. in $L^\infty(m)$ erzeugten Toeplitzalgebren $\mathcal{T}(C(K))$ bzw. $\mathcal{T}(L^\infty(m))$ zu konstruieren. Auch hier gelingt uns eine Verallgemeinerung klassischer Resultate. So werden zum Beispiel in [13] exakte Sequenzen für die Toeplitzalgebren $\mathcal{T}(C(\mathbb{T}))$ und $\mathcal{T}(L^\infty(\mathbb{T}))$ konstruiert, während Jewell und Krantz in ihrer 1979 erschienenen Arbeit [17] eine exakte Sequenz der von den Toeplitzoperatoren auf $H^2(\partial D)$ (D bezeichne ein streng pseudokonvexes Gebiet mit C^2-Rand) mit Symbol in $L^\infty(\partial D)$ erzeugten Toeplitzalgebra erhalten. Auch Lewis A. Coburn befasste sich in [5] mit solchen exakten Sequenzen. Er konstruierte eine exakte Sequenz für die Toeplitzalgebra $\mathcal{T}(C(S_n))$.
In den letzten Zeilen dieser Einleitung möchte ich die Gelegenheit wahrnehmen, mich bei all denen zu bedanken, die mich auf meinem bisherigen Weg begleitet haben. An erster Stelle bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. Jörg Eschmeier für die geduldige und anregende Betreuung während der Entstehung dieser Arbeit und für den ansprechenden Themenvorschlag, der meine mathematischen Interessen genau getroffen hat. Mein Dank gilt außerdem Herrn Dr. Christoph Barbian und Herrn Dipl.-Math. Dominik Faas für die zahlreichen belebenden Diskussionen, sowie Nadine Backes und Michel Ludwig, die mir stets motivierend zur Seite standen.
Ë besonnege Merci gëlt mengen Elteren fir hir bedingungslos Ënnerstëtzung am Laf vu mengem Studium. Si hu mir ëmmer all erdenklech Fräiheete gelooss an hu groussen Interessi u menger Aarbecht gewisen, och wa si net alles verstan hun.

1 Vorbemerkungen

In diesem Kapitel wollen wir zunächst einige elementare Begriffe einführen, die es ermöglichen sollen, grundlegende Sätze und Lemmata zu formulieren. Es sei stets $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum. Wir bezeichnen mit $B(\mathcal{H})$ die Menge aller stetig linearen Abbildungen auf $\mathcal{H}$ und für eine Teilmenge $M \subset B(\mathcal{H})$ sei $C^*(M)$ die von M erzeugte unitale C*-Teilalgebra von $B(\mathcal{H})$. Ist $\mathcal{F} = ((T_{j,\alpha})_{j \in J_\alpha})_{\alpha \in \Gamma}$ eine Familie von Familien stetig linearer Abbildungen auf $\mathcal{H}$, so definieren wir $C^*(\mathcal{F}) = C^*(\{T_{j,\alpha} \mid \alpha \in \Gamma, j \in J_\alpha\})$.

1.1 Vollständig positive Abbildungen

Eine lineare Abbildung zwischen unitalen C*-Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißt positiv, falls sie positive Elemente in $\mathcal{A}$ auf positive Elemente in $\mathcal{B}$ abbildet. Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ C*-Algebren und $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ linear, so definieren wir für $n \in \mathbb{N}$ die lineare Abbildung $\varphi_n : M_n(\mathcal{A}) \to M_n(\mathcal{B})$ durch $\varphi_n((a_{ij})_{i,j}) = (\varphi(a_{ij}))_{i,j}$ und nennen φ n-positiv, falls φ_n positiv ist. Ist φ_n positiv für alle $n \in \mathbb{N}$, so heißt φ vollständig positiv. Für alle $n \in \mathbb{N}$ können wir außerdem die Normen der Abbildungen φ_n betrachten. Ist das Supremum $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_n\|$ endlich, so heißt φ vollständig beschränkt, und wir setzen $\|\varphi\|_{cb} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_n\|$. Ferner nennen wir φ vollständig kontraktiv, falls $\|\varphi\|_{cb} \leq 1$ ist und vollständig isometrisch, falls alle φ_n, $n \in \mathbb{N}$, isometrisch sind.

Beginnen wollen wir mit einer Charakterisierung der Positivität von Matrizen der Form $\begin{pmatrix} P & A \\ A^* & Q \end{pmatrix} \in M_2(B(\mathcal{H}))$, wobei $P, Q \in B(\mathcal{H})$ positiv und $A \in B(\mathcal{H})$ beliebig seien.

Lemma 1.1. *Seien $P, Q, A \in B(\mathcal{H})$, P und Q positiv. Dann sind äquivalent:*

(i) $\begin{pmatrix} P & A \\ A^* & Q \end{pmatrix} \geq 0.$

(ii) Für alle x, y in $\mathcal{H}$ gilt: $|\langle Ax, y\rangle|^2 \leq \langle Py, y\rangle\langle Qx, x\rangle$.

Beweis. Sei zunächst (ii) erfüllt und seien $x, y \in \mathcal{H}$ beliebig. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\langle \begin{pmatrix} P & A \\ A^* & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle &= \langle Px, x\rangle + \langle Ay, x\rangle + \langle x, Ay\rangle + \langle Qy, y\rangle \\
&\geq \langle Px, x\rangle - 2|\langle Ay, x\rangle| + \langle Qy, y\rangle \\
&\geq \langle Px, x\rangle - 2\sqrt{\langle Px, x\rangle\langle Qy, y\rangle} + \langle Qy, y\rangle \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Ist nun (i) erfüllt und sind $x, y \in \mathcal{H}$ beliebig, so erhält man $\langle Py, y\rangle + \langle Ax, y\rangle + \langle y, Ax\rangle + \langle Qx, x\rangle \geq 0$ und damit $-2Re(\langle Ax, y\rangle) \leq \langle Py, y\rangle + \langle Qx, x\rangle$. Ersetzt man jetzt y durch λy mit $|\lambda| = 1$ passend, so ergibt dies

$$|\langle Ax, y\rangle| \leq \frac{\langle Py, y\rangle + \langle Qx, x\rangle}{2}. \tag{1.1}$$

Verschwindet einer der beiden Summanden der rechten Seite (ohne Einschränkung gelte $\langle Py, y\rangle = 0$), so folgt leicht $2|\langle A\lambda x, y\rangle| \leq \lambda^2\langle Qx, x\rangle$ und damit auch $2|\langle Ax, y\rangle| \leq \lambda\langle Qx, x\rangle$ für alle $\lambda > 0$. Für $\lambda \to 0$ ergibt dies schließlich $|\langle Ax, y\rangle| = 0$. Gilt nun $\langle Py, y\rangle \neq 0 \neq \langle Qx, x\rangle$, so folgt aus (1.1) unmittelbar

$$\left|\left\langle A\frac{x}{\sqrt{\langle Qx, x\rangle}}, \frac{y}{\sqrt{\langle Py, y\rangle}}\right\rangle\right| \leq 1$$

und damit $|\langle Ax, y\rangle|^2 \leq \langle Qx, x\rangle\langle Py, y\rangle$. □

Mit Hilfe einer isometrischen Darstellung einer unitalen C*-Algebra $\mathcal{A}$ können wir nun ein ähnliches Resultat für den Fall einer Matrix mit Einträgen in $\mathcal{A}$ folgern.

Korollar 1.2. *Ist $\mathcal{A}$ eine unitale C*-Algebra und sind $a, p, q \in \mathcal{A}$ mit p, q positiv und $\begin{pmatrix} p & a \\ a^* & q \end{pmatrix} \geq 0$, so folgt $a^*a \leq \|p\|q$.*

Beweis. Sei $\pi : \mathcal{A} \to B(\mathcal{K})$ eine isometrische Darstellung. Dann ist sicherlich

$$\begin{pmatrix} \pi(p) & \pi(a) \\ \pi(a)^* & \pi(q) \end{pmatrix} \geq 0$$

und mit Lemma 1.1 folgt $\langle \pi(a)^*\pi(a)x, x\rangle^2 \leq \langle \pi(p)\pi(a)x, \pi(a)x\rangle\langle \pi(q)x, x\rangle$ für alle $x \in \mathcal{H}$. Dies liefert unmittelbar, dass $\langle \pi(a)^*\pi(a)x, x\rangle \leq \|\pi(p)\|\langle \pi(q)x, x\rangle$ gilt. Also ist $\pi(a^*a) \leq \|p\|\pi(q)$, und die Behauptung ist gezeigt. □

Wir können nun die Schwarzsche Ungleichung für 2-positive Abbildungen beweisen.

Korollar 1.3. *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ unitale C*-Algebren und sei $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 2-positiv. Dann gilt $\varphi(a)^*\varphi(a) \leq \|\varphi(1)\|\varphi(a^*a)$ für alle $a \in \mathcal{A}$.*

Beweis. Man sieht leicht, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a^* & a^*a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

positiv ist. Folglich ist nach Voraussetzung auch $\begin{pmatrix} \varphi(1) & \varphi(a) \\ \varphi(a)^* & \varphi(a^*a) \end{pmatrix}$ positiv und mit Korollar 1.2 folgt die Behauptung. □

Insbesondere gilt natürlich im Spezialfall einer kontraktiven, vollständig positiven Abbildung $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen zwei unitalen C*-Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ die Ungleichung $\varphi(a)^*\varphi(a) \leq \varphi(a^*a)$ für alle $a \in \mathcal{A}$. Eine nützliche Charakterisierung der Gleichheit in der Schwarzschen Ungleichung soll als nächstes angeführt werden.

Lemma 1.4. *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ unitale C*-Algebren und $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ eine vollständig positive, kontraktive Abbildung. Dann sind für $a \in \mathcal{A}$ äquivalent:*

(i) $\varphi(a)^*\varphi(a) = \varphi(a^*a)$.

(ii) $\varphi(ba) = \varphi(b)\varphi(a)$ *für alle* $b \in \mathcal{A}$.

Beweis. Sei $a \in \mathcal{A}$ beliebig. Die Implikation von (ii) nach (i) ist offensichtlich, denn ist $\varphi(ba) = \varphi(b)\varphi(a)$ für alle $b \in \mathcal{A}$, so ist insbesondere $\varphi(a^*a) = \varphi(a^*)\varphi(a) = \varphi(a)^*\varphi(a)$. Zum Beweis der umgekehrten Implikation betrachten wir für ein beliebiges $b \in \mathcal{A}$ die Matrix $\begin{pmatrix} b^* & a \\ a^* & 0 \end{pmatrix}$. Die Schwarzsche Ungleichung, angewendet auf φ_2, liefert

$$\varphi_2\left(\begin{pmatrix} b^* & a \\ a^* & 0 \end{pmatrix}\right)^* \varphi_2\left(\begin{pmatrix} b^* & a \\ a^* & 0 \end{pmatrix}\right) \leq \varphi_2\left(\begin{pmatrix} b & a \\ a^* & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b^* & a \\ a^* & 0 \end{pmatrix}\right),$$

also ist

$$\begin{pmatrix} \varphi(b)^* & \varphi(a) \\ \varphi(a)^* & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \varphi(b)^* & \varphi(a) \\ \varphi(a)^* & 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \varphi(bb^*) + \varphi(aa^*) & \varphi(ba) \\ \varphi((ba)^*) & \varphi(a^*a) \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} \varphi(bb^*) - \varphi(b)\varphi(b)^* + \varphi(aa^*) - \varphi(a)\varphi(a)^* & \varphi(ba) - \varphi(b)\varphi(a) \\ (\varphi(ba) - \varphi(b)\varphi(a))^* & \varphi(a^*a) - \varphi(a)^*\varphi(a) \end{pmatrix} \geq 0.$$

Nach Voraussetzung ist jedoch $\varphi(a^*a) - \varphi(a)^*\varphi(a) = 0$, und da das Element $\varphi(bb^*) - \varphi(b)\varphi(b)^* + \varphi(aa^*) - \varphi(a)\varphi(a)^*$ nach der Schwarzschen Ungleichung positiv ist (man beachte, dass φ kontraktiv ist), folgt $\varphi(ba) - \varphi(b)\varphi(a) = 0$ mit Korollar 1.2. Dies war zu zeigen. □

Mit Hilfe dieses Resultates können wir nun ein wohlbekanntes Ergebnis von Richard V. Kadison (siehe [18, Theorem 7]) über vollständig isometrische, surjektive und unitale lineare Abbildungen beweisen.

Korollar 1.5. *Sei $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ eine vollständig isometrische surjektive lineare Abbildung zwischen unitalen C*-Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ mit $\varphi(1) = 1$. Dann ist φ ein Isomorphismus von C*-Algebren.*

Beweis. Die Abbildungen φ und φ^{-1} sind vollständig kontraktiv und unital, also nach [20, Proposition 3.6] vollständig positiv und insbesondere verträglich mit den Involutionen. Wir müssen nur die Multiplikativität der Abbildung φ nachrechnen. Für $a \in \mathcal{A}$ gilt $\varphi(a)^*\varphi(a) \leq \varphi(a^*a)$ nach der Schwarzschen Ungleichung (Korollar 1.3), angewendet auf die Abbildung φ. Genauso erhält man

$$a^*a = \varphi^{-1}(\varphi(a))^*\varphi^{-1}(\varphi(a)) \leq \varphi^{-1}(\varphi(a)^*\varphi(a)) \leq \varphi^{-1}(\varphi(a^*a)) = a^*a$$

für $a \in \mathcal{A}$ mit der Schwarzschen Ungleichung, angewendet auf φ^{-1}. Also folgt $\varphi^{-1}(\varphi(a)^*\varphi(a)) = \varphi^{-1}(\varphi(a^*a))$ und damit $\varphi(a)^*\varphi(a) = \varphi(a^*a)$ für alle $a \in \mathcal{A}$. Eine Anwendung von Lemma 1.4 liefert nun, dass für alle $a, b \in \mathcal{A}$ die Gleichung $\varphi(ba) = \varphi(b)\varphi(a)$ erfüllt ist. Die Abbildung φ ist also multiplikativ. □

Ist $\mathcal{A}$ eine unitale C*-Algebra und $\Phi : \mathcal{A} \to B(\mathcal{H})$ eine vollständig positive Abbildung, so existiert nach dem Dilatationssatz von Stinespring ein Hilbertraum $\mathcal{K}$, ein unitaler *-Homomorphismus $\pi : \mathcal{A} \to B(\mathcal{K})$, und ein beschränkter Operator $V : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ mit $\|\Phi(1)\| = \|V\|^2$, so dass $\Phi(X) = V^*\pi(X)V$ für alle $X \in \mathcal{A}$ gilt. Wir nennen das so erhaltene Tripel $(\pi, V, \mathcal{K})$ eine *Stinespring-Dilatation* für Φ. Gilt zusätzlich

$$\mathcal{K} = \bigvee \pi(\mathcal{A})V\mathcal{H},$$

so heißt die Stinespring-Dilatation $(\pi, V, \mathcal{K})$ *minimal*. In [20, Proposition 4.2.] wird gezeigt, dass zu je zwei minimalen Stinespring-Dilatationen $(\pi_i, V_i, \mathcal{K}_i)$, $i = 1, 2$, für Φ eine unitäre Abbildung $U : \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_2$ existiert mit $UV_1 = V_2$ sowie $U\pi_1 U^* = \pi_2$.

Lemma 1.6. *Sei $\mathcal{A}$ eine unitale C^*-Algebra und sei $\varphi : \mathcal{A} \to B(\mathcal{H})$ eine vollständig positive Abbildung. Sei ferner $(\pi, V, \mathcal{K})$ die minimale Stinespring-Dilatation für φ. Genügen $a \in \mathcal{A}$ und $A \in B(\mathcal{H})$ der Vertauschungsrelation*

$$\varphi(xa) = \varphi(x)A$$

für alle $x \in \mathcal{A}$, so folgt $\pi(a)V = VA$.

Beweis. Erfüllen $a \in \mathcal{A}$ und $A \in B(\mathcal{H})$ die Gleichung $\varphi(xa) = \varphi(x)A$ für alle $x \in \mathcal{A}$, so sieht man zunächst leicht, dass

$$\begin{aligned} \langle \pi(a)Vh, \pi(x)Vk \rangle &= \langle V^*\pi(x^*a)Vh, k \rangle \\ &= \langle \varphi(x^*a)h, k \rangle \\ &= \langle \varphi(x^*)Ah, k \rangle \\ &= \langle V^*\pi(x^*)VAh, k \rangle \\ &= \langle VAh, \pi(x)Vk \rangle \end{aligned}$$

für $h, k \in \mathcal{H}$ gilt. Aufgrund der Minimalität der Stinespring-Dilatation $(\pi, V, \mathcal{K})$ von φ ist aber $\mathcal{K} = \bigvee \pi(\mathcal{A})V\mathcal{H}$, woraus die Behauptung unmittelbar folgt. $\square$

Eine besonders nützliche Aussage erhält man in der Situation des vorigen Lemmas für den Fall, dass $\varphi(a^*a) = \varphi(a)^*\varphi(a)$ für ein gegebenes Element $a \in \mathcal{A}$ gilt. Nach Lemma 1.4 ist nämlich dann $\varphi(xa) = \varphi(x)\varphi(a)$ für alle $x \in \mathcal{A}$, und als Anwendung von Lemma 1.6 erhält man das folgende Korollar.

Korollar 1.7. *Sei $\varphi : \mathcal{A} \to B(\mathcal{H})$ eine vollständig positive Abbildung auf einer unitalen C^*-Algebra $\mathcal{A}$ und sei $(\pi, V, \mathcal{K})$ die minimale Stinespring-Darstellung für φ. Für $a \in \mathcal{A}$ mit $\varphi(a^*a) = \varphi(a)^*\varphi(a)$ ist dann $\pi(a)V = V\varphi(a)$ und damit $\overline{V\mathcal{H}}$ invariant unter $\pi(a)$.*

Seien $S \in B(\mathcal{H})$, $T \in B(\mathcal{K})$ mit Hilberträumen $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$. Gilt die Identität $S = P_{\mathcal{H}}T|_{\mathcal{H}}$, so heißt S die *Kompression* von T. Hierbei bezeichne $P_{\mathcal{H}}$ die Orthogonalprojektion von $\mathcal{K}$ auf $\mathcal{H}$.

Proposition 1.8. *Seien $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ Hilberträume mit $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$ und seien $S \in B(\mathcal{H})$, $T \in B(\mathcal{K})$ mit $S = P_{\mathcal{H}}T|_{\mathcal{H}}$. Dann ist S^*S die Kompression von T^*T genau dann, wenn $T\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$ gilt.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $S = P_{\mathcal{H}}T|_{\mathcal{H}}$. Folglich besitzt T bezüglich der Zerlegung $\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^{\perp}$ eine Matrixdarstellung der Form

$$T = \begin{pmatrix} S & a \\ b & c \end{pmatrix}$$

mit $a \in B(\mathcal{H}^{\perp}, \mathcal{H})$, $b \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H}^{\perp})$ und $c \in B(\mathcal{H}^{\perp})$. Offensichtlich ist $T\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$ genau dann, wenn $b = 0$ erfüllt ist. Eine kurze Rechnung liefert

$$T^*T = \begin{pmatrix} S^*S + b^*b & S^*a + b^*c \\ a^*S + c^*b & a^*a + c^*c \end{pmatrix},$$

und es ist $S^*S = P_{\mathcal{H}}T^*T|_{\mathcal{H}}$ genau dann, wenn $b = 0$ gilt. □

1.2 Familien von Familien von Operatoren

Da sich die vorliegende Arbeit intensiv mit Familien von Familien stetig linearer Operatoren auf $\mathcal{H}$ beschäftigt, sollen in diesem Abschnitt einige grundlegende Begriffe eingeführt werden, die den Umgang mit solchen Familien erleichtern. Abkürzend wollen wir im Verlaufe der Arbeit von 2-*Familien* von Operatoren sprechen, wenn Familien von Familien von Operatoren, also Familien der Form $\mathcal{F} = ((T_{j,\alpha})_{j\in J_\alpha})_{\alpha\in\Gamma}$ mit $T_{j,\alpha} \in B(\mathcal{H})$ für alle $j \in J_\alpha$, $\alpha \in \Gamma$ gemeint sind. Zunächst wollen wir die Kommutanten einer Familie und einer 2-Familie von Operatoren definieren.

Definition 1.9. (i) Für eine Teilmenge $M \subset B(\mathcal{H})$ heißt die Menge $M' = \{Y \in B(\mathcal{H}) \mid TY = YT \text{ für alle } T \in M\}$ der *Kommutant* von M.

(ii) Der Kommutant einer Familie $S = (T_j)_{j\in J}$ von Operatoren in $B(\mathcal{H})$ sei definiert durch $S' = \{T_j \mid j \in J\}'$. Eine Familie $S = (T_j)_{j\in J}$ von Operatoren in $B(\mathcal{H})$ heißt *kommutativ* oder *vertauschend*, falls $T_j \in S'$ für alle $j \in J$ ist.

(iii) Genauso definieren wir den Kommutanten $\mathcal{F}'$ einer Familie $\mathcal{F} = (S_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ von Familien von Operatoren in $B(\mathcal{H})$ durch $\mathcal{F}' = \bigcap_{\alpha\in\Gamma} S'_\alpha$, und nennen eine 2-Familie $\mathcal{F} = ((T_{j,\alpha})_{j\in J_\alpha})_{\alpha\in\Gamma}$ von Operatoren in $B(\mathcal{H})$ kommutativ oder vertauschend, falls $T_{j,\alpha} \in \mathcal{F}'$ für alle $\alpha \in \Gamma$ und $j \in J_\alpha$ gilt.

Für eine kommutative 2-Familie von Operatoren können wir nun die Begriffe der Subnormalität und der minimalen normalen Erweiterung einführen. Die hier aufgeführten Definitionen verallgemeinern erwartungsgemäß die für den Fall eines einzelnen Operators $T \in B(\mathcal{H})$ bekannten Begrifflichkeiten (siehe [9]).

Definition 1.10. (a) Eine kommutative 2-Familie $\mathcal{F} = ((T_{j,\alpha})_{j\in J_\alpha})_{\alpha\in\Gamma}$ von Operatoren in $B(\mathcal{H})$ wollen wir *subnormal* nennen, falls ein Hilbertraum $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}$ und eine kommutative 2-Familie $\widehat{\mathcal{F}} = ((N_{j,\alpha})_{j\in J_\alpha})_{\alpha\in\Gamma}$ normaler Operatoren in $B(\mathcal{K})$ existieren so, dass für alle $j \in J_\alpha$, $\alpha \in \Gamma$ gilt:

(i) $N_{j,\alpha}\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$.

(ii) $T_{j,\alpha} = N_{j,\alpha}|_{\mathcal{H}}$.

In diesem Fall heißt das Paar $(\widehat{\mathcal{F}}, \mathcal{K})$ *normale Erweiterung* von $\mathcal{F}$.

(b) Ist $\mathcal{F} = ((T_{j,\alpha})_{j\in J_\alpha})_{\alpha\in\Gamma}$ eine subnormale 2-Familie von Operatoren in $B(\mathcal{H})$, so heißt eine normale Erweiterung $(\widehat{\mathcal{F}}, \mathcal{K})$ von $\mathcal{F}$ mit einem Hilbertraum $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ und einer 2-Familie $\widehat{\mathcal{F}} = ((N_{j,\alpha})_{j\in J_\alpha})_{\alpha\in\Gamma}$ *minimal*, falls kein echter Teilraum $\mathcal{K}_0 \subsetneq \mathcal{K}$ mit $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}_0$ existiert, der reduzierend für alle $N_{j,\alpha}$, $j \in J_\alpha$, $\alpha \in \Gamma$ ist.

Ein erstes Ergebnis über eine kommutative 2-Familie $\mathcal{F}$ normaler Operatoren in $B(\mathcal{H})$ resultiert aus einer einfachen Anwendung des Satzes von Fuglede-Putnam (siehe [7, Theorem IX.6.7]).

Proposition 1.11. *Sei $\mathcal{F} = ((T_{j,\alpha})_{j\in J_\alpha})_{\alpha\in\Gamma}$ eine vertauschende 2-Familie normaler Operatoren in $B(\mathcal{H})$. Dann folgt $T^*_{j,\alpha} \in \mathcal{F}'$ für alle $\alpha \in \Gamma$ und $j \in J_\alpha$.*

Beweis. Seien $\alpha \in \Gamma$ und $j \in J_\alpha$ beliebig. Da die Familie $\mathcal{F}$ kommutativ ist, gilt $T_{j,\alpha}T_{k,\beta} = T_{k,\beta}T_{j,\alpha}$ für alle $\beta \in \Gamma$ und alle $k \in J_\beta$. Also ist auch $T^*_{j,\alpha}T_{k,\beta} = T_{k,\beta}T^*_{j,\alpha}$ nach dem Satz von Fuglede-Putnam. □

Im folgenden Lemma wollen wir eine nützliche Charakterisierung einer minimalen normalen Erweiterung $(\widehat{\mathcal{F}}, \mathcal{K})$ einer subnormalen 2-Familie $\mathcal{F}$ von Operatoren in $B(\mathcal{H})$ angeben. Das entsprechende 1-dimensionale Resultat findet man in [9, Proposition II.2.4].

Bemerkung 1.12. Für eine 2-Familie $\mathcal{F} = ((T_{j,\alpha})_{j\in J_\alpha})_{\alpha\in\Gamma}$ von Operatoren in $B(\mathcal{H})$ bezeichne $\mathcal{S}(\mathcal{F})$ die Halbgruppe aller endlichen Produkte von Elementen aus $\{T_{j,\alpha} \mid \alpha \in \Gamma, j \in J_\alpha\}$ und $\mathcal{S}^*(\mathcal{F})$ die Halbgruppe aller endlichen Produkte von Elementen aus $\{T_{j,\alpha} \mid \alpha \in \Gamma, j \in J_\alpha\} \cup \{T^*_{j,\alpha} \mid \alpha \in \Gamma, j \in J_\alpha\}$.

Lemma 1.13. *Seien $\mathcal{F} = ((T_{j,\alpha})_{j\in J_\alpha})_{\alpha\in\Gamma}$ eine subnormale 2-Familie von Operatoren in $B(\mathcal{H})$ und $(\widehat{\mathcal{F}}, \mathcal{K})$ mit $\widehat{\mathcal{F}} = ((N_{j,\alpha})_{j\in J_\alpha})_{\alpha\in\Gamma}$ eine normale Erweiterung von $\mathcal{F}$. Dann ist $(\widehat{\mathcal{F}}, \mathcal{K})$ genau dann minimal, wenn*

$$\mathcal{K} = \bigvee \left\{ N^*h \mid h \in \mathcal{H}, N \in \mathcal{S}(\widehat{\mathcal{F}}) \right\}$$

gilt.

Beweis. Wir zeigen, dass der Raum $\mathcal{K}_0 = \bigvee \left\{ N^*h \mid h \in \mathcal{H}, N \in \mathcal{S}(\widehat{\mathcal{F}}) \right\}$ der kleinste reduzierende Teilraum für alle $N_{j,\alpha}$, $j \in J_\alpha$, $\alpha \in \Gamma$ ist, der $\mathcal{H}$ enthält. Seien $\alpha \in \Gamma$ und $j \in J_\alpha$ beliebig. Wir überprüfen zuerst, dass $\mathcal{K}_0$ reduzierend für $N_{j,\alpha}$ ist, indem wir nachrechnen, dass die Elemente $N_{j,\alpha}N^*h$ und $N^*_{j,\alpha}N^*h$ für beliebige $N \in \mathcal{S}(\widehat{\mathcal{F}})$ und $h \in \mathcal{H}$ wieder in $\mathcal{K}_0$ liegen. In der Tat erhält man mit Proposition 1.11 leicht, dass

$$N_{j,\alpha}N^*h = N^*N_{j,\alpha}h$$

für alle $N \in \mathcal{S}(\widehat{\mathcal{F}})$ und $h \in \mathcal{H}$ ist. Die Invarianz von $\mathcal{H}$ unter $N_{j,\alpha}$ liefert $N_{j,\alpha}h \in \mathcal{H}$, also ist $N_{j,\alpha}N^*h \in \mathcal{K}_0$. Dass außerdem $N^*_{j,\alpha}N^*h \in \mathcal{K}_0$ für alle $N \in \mathcal{S}(\widehat{\mathcal{F}})$ und $h \in \mathcal{H}$ gilt, folgt indes unmittelbar aus der Definition von $\mathcal{S}(\widehat{\mathcal{F}})$. Also ist $\mathcal{K}_0$ reduzierend für $N_{j,\alpha}$. Ist nun $\mathcal{K}_1$ ein Hilbertraum mit $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}_1$, der reduzierend für alle $N_{j,\alpha}$, $j \in J_\alpha$, $\alpha \in \Gamma$ ist, so gilt sicherlich $N^*h \in \mathcal{K}_1$ für alle $N \in \mathcal{S}(\widehat{\mathcal{F}})$ und alle $h \in \mathcal{H}$, also folgt schon $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_1$. Als unmittelbare Konsequenz erhält man die Behauptung. □

Wir können nun diese Charakterisierung nutzen, um zu zeigen, dass zwei minimale normale Erweiterungen einer subnormalen 2-Familie von Operatoren in einem gewissen Sinne unitär äquivalent sind. Dies erlaubt es uns, im weiteren Verlauf der Arbeit nur noch von *der* minimalen normalen Erweiterung einer subnormalen 2-Familie zu sprechen.

Lemma 1.14. *Sei $\mathcal{F} = ((T_{j,\alpha})_{j\in J_\alpha})_{\alpha\in\Gamma}$ eine subnormale 2-Familie von Operatoren in $B(\mathcal{H})$. Seien $(\widehat{\mathcal{F}}_1, \mathcal{K}_1)$ und $(\widehat{\mathcal{F}}_2, \mathcal{K}_2)$ mit $\widehat{\mathcal{F}}_1 = ((N_{j,\alpha})_{j\in J_\alpha})_{\alpha\in\Gamma}$ und $\widehat{\mathcal{F}}_2 = ((L_{j,\alpha})_{j\in J_\alpha})_{\alpha\in\Gamma}$ zwei minimale normale Erweiterungen von $\mathcal{F}$. Dann existiert eine unitäre Abbildung $U : \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_2$ mit*

$$UN_{j,\alpha} = L_{j,\alpha}U$$

für alle $j \in J_\alpha$, $\alpha \in \Gamma$.

Beweis. Sei $(\widetilde{\mathcal{F}}, \mathcal{K})$ mit $\widetilde{\mathcal{F}} = ((M_{j,\alpha})_{j\in J_\alpha})_{\alpha\in\Gamma}$ eine beliebige normale Erweiterung von $\mathcal{F}$ und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt sicherlich $XY^* = Y^*X$ für $X, Y \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathcal{F}})$ nach Proposition 1.11. Sind nun für $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Elemente $M_i \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathcal{F}})$ und $h_i \in \mathcal{H}$ beliebig, so folgt mit $T_i = M_i|_{\mathcal{H}}$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Identität

$$\begin{aligned} \|\sum_{i=1}^n M_i^* h_i\|^2 &= \sum_{i,k=1}^n \langle M_i^* h_i, M_k^* h_k\rangle \\ &= \sum_{i,k=1}^n \langle M_k h_i, M_i h_k\rangle \\ &= \sum_{i,k=1}^n \langle T_k h_i, T_i h_k\rangle. \end{aligned}$$

Da $(\widehat{\mathcal{F}}_1, \mathcal{K}_1)$ und $(\widehat{\mathcal{F}}_2, \mathcal{K}_2)$ normale Erweiterungen von $\mathcal{F}$ sind, sieht man damit leicht, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} U_0 : LH\left\{N^*h \mid h \in \mathcal{H}, N \in \mathcal{S}(\widehat{\mathcal{F}}_1)\right\} &\to LH\left\{L^*h \mid h \in \mathcal{H}, L \in \mathcal{S}(\widehat{\mathcal{F}}_2)\right\}, \\ \sum_{i=1}^n N_i^* h_i &\mapsto \sum_{i=1}^n L_i^* h_i \end{aligned}$$

eine wohldefinierte lineare Isometrie ist. Anhand der Definition von von U_0 erkennt man ferner, dass U_0 auch surjektiv ist. Aus der Minimalität von $(\widehat{\mathcal{F}}_1, \mathcal{K}_1)$ und $(\widehat{\mathcal{F}}_2, \mathcal{K}_2)$ folgt mit Lemma 1.13, dass $\mathcal{K}_1 = \bigvee\left\{N^*h \mid h \in \mathcal{H}, N \in \mathcal{S}(\widehat{\mathcal{F}}_1)\right\}$ sowie $\mathcal{K}_2 = \bigvee\left\{L^*h \mid h \in \mathcal{H}, L \in \mathcal{S}(\widehat{\mathcal{F}}_2)\right\}$ gilt. Damit können wir U_0 zu einer unitären Abbildung $U : \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_2$ fortsetzen. Mit Hilfe von Proposition 1.11 rechnet man nun die Identität $UN_{j,\alpha} = L_{j,\alpha}U$ für alle $j \in J_\alpha$, $\alpha \in \Gamma$ leicht nach. $\square$

1.3 Lineare Abbildungen zwischen dualen Banachräumen

Wir wollen zum Abschluss dieses Kapitels noch ein bekanntes Ergebnis über lineare Abbildungen der Form $S : Y' \to X'$ zwischen Dualräumen von Banachräumen X und Y formulieren, welches im Verlauf der Arbeit hilfreich sein wird. Insbesondere sei an dieser Stelle bemerkt, dass wir dieses Resultat haupsächlich auf den Raum $B(\mathcal{H})$ aller beschränkten Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ anwenden werden, da wir ihn bekanntlich als Dualraum der Spurklasse-Operatoren auffassen können.

Proposition 1.15. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und sei $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein in der WOT-Topologie beschränktes Netz in $B(\mathcal{H})$. Für $X \in B(\mathcal{H})$ sind dann äquivalent:*

(a) $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ ist WOT-konvergent gegen X.

(b) $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ ist w^*-konvergent gegen X.

Beweis. Da WOT-beschränkte Mengen in $B(\mathcal{H})$ nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit normbeschränkt sind, folgt die Behauptung direkt aus der Tatsache, dass nach [9, Proposition I.2.5] auf normbeschränkten Mengen die WOT-Topologie und die w^*-Topologie übereinstimmen. □

Eine Anwendung dieser Proposition stellt das nächste Lemma dar.

Lemma 1.16. *Seien X, Y Banachräume und sei $S : Y' \to X'$ stetig linear. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) S ist w^*-stetig.

(b) $S : (ball(Y'), \tau_{w^*}) \to (X', \tau_{w^*})$ ist stetig.

Sind $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ Hilberträume und $X' = B(\mathcal{H})$, $Y' = B(\mathcal{K})$, aufgefasst als Dualräume der Spurklasse-Operatoren auf $\mathcal{H}$ bzw. $\mathcal{K}$, so sind die Aussagen aus (a) und (b) äquivalent zu:

(c) $S : (ball(B(\mathcal{K})), \tau_{WOT}) \to (B(\mathcal{H}), \tau_{WOT})$ ist stetig.

Beweis. Offensichtlich folgt die Stetigkeit von $S : (ball(Y'), \tau_{w^*}) \to (X', \tau_{w^*})$ unmittelbar aus der w^*-Stetigkeit von S. Sei nun $S : (ball(Y'), \tau_{w^*}) \to (X', \tau_{w^*})$ stetig. Wir betrachten die kanonischen Einbettungen $j_X : X \to X''$ und $j_Y : Y \to Y''$. Da für $x \in X, x' \in X', y \in Y, y' \in Y'$ die Gleichungen

$$j_X(x)(x') = x'(x), \quad j_Y(y)(y') = y'(y)$$

erfüllt sind, stimmen für $E \in \{X, Y\}$ die Topologien $\sigma(E', j_E(E))$ und $\sigma(E', E)$ überein. Laut [24, Lemma IV.2.1] genügt es, die Inklusion $S'(j_X(X)) \subset j_Y(Y)$ zu überprüfen, wobei $S' : X'' \to Y''$ die zu S adjungierte Abbildung bezeichne. Sei dazu $x \in X$ beliebig. Dann ist sicherlich $S'(j_X(x)) = j_X(x) \circ S$. Nach Voraussetzung ist die Abbildung $j_X(x) \circ S|_{ball(Y')} : (ball(Y'), \tau_{w^*}) \to \mathbb{C}$ stetig, also ist $Ker(j_X(x) \circ S|_{ball(Y')}) \subset (Y', \tau_{w^*})$ abgeschlossen. Aus der Identität

$$Ker(j_X(x) \circ S|_{ball(Y')}) = Ker(j_X(x) \circ S) \cap ball(Y').$$

ergibt sich nun die w^*-Abgeschlossenheit von $Ker(j_X(x) \circ S) \cap ball(Y')$, und mit dem Satz von Krein-Šmulian (siehe [24, Corollary IV.6.4]) erhält man schließlich die w^*-Abgeschlossenheit von $Ker(j_X(x) \circ S)$. Damit ist die Linearform $j_X(x) \circ S : (Y', \tau_{w^*}) \to \mathbb{C}$ stetig, und mit Hilfe von [7, Theorem IV.3.1] folgt leicht, dass $j_X(x) \circ S \in j_Y(Y)$ gilt.
Sind nun $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ Hilberträume und $X' = B(\mathcal{H})$ sowie $Y' = B(\mathcal{K})$, so folgt die Äquivalenz von (b) und (c) unmittelbar aus Proposition 1.15 in Verbindung mit der Inklusion $\tau_{\mathrm{WOT}} \subset \tau_{w^*}$ und der vorausgesetzten Norm-Stetigkeit von S. $\square$

Korollar 1.17. *Seien $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ zwei Hilberträume und $S : B(\mathcal{K}) \to B(\mathcal{H})$ stetig linear. Ist die Abbildung $S : (B(\mathcal{K}), \tau_{WOT}) \to (B(\mathcal{H}), \tau_{WOT})$ stetig, so ist auch $S : (B(\mathcal{K}), \tau_{w^*}) \to (B(\mathcal{H}), \tau_{w^*})$ stetig.*

Beweis. Dies ist eine direkte Folgerung aus Lemma 1.16, da man aus der WOT-Stetigkeit von $S : B(\mathcal{K}) \to B(\mathcal{H})$ unmittelbar die WOT-Stetigkeit der Abbildung $S : ball(B(\mathcal{K})) \to B(\mathcal{H})$ erhält. $\square$

2 Sphärische Kontraktionen

Wir sind nun in der Lage, uns näher mit einer besonderen Klasse von 2-Familien von Operatoren auf $\mathcal{H}$, den Familien sogenannter sphärischer Kontraktionen, zu befassen. Nachdem wir im ersten Abschnitt elementare Charakteristika sphärischer Kontraktionen behandeln werden, wollen wir im darauf folgenden Abschnitt vollständig positive und kontraktive Projektionen untersuchen, mit deren Hilfe wir im dritten Abschnitt schließlich unter anderem beweisen werden, dass sphärische Isometrien subnormal sind.

2.1 Definition und erste Eigenschaften

In diesem Abschnitt werden einige grundlegende Eigenschaften sphärischer Kontraktionen formuliert. Dabei legen wir ein besonderes Augenmerk auf die Menge der zugehörigen Toeplitzoperatoren. Wir werden zunächst zeigen, dass jeder sphärischen Kontraktion S eine vollständig positive und w^*-stetige Abbildung ϕ_S zugeordnet werden kann, deren Fixpunktmenge gerade mit der Menge aller S-Toeplitzoperatoren übereinstimmt.

Definition 2.1. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum.

(a) Eine kommutative Familie $S = (T_j)_{j\in J}$ mit $T_j \in B(\mathcal{H})$ für alle $j \in J$ heißt *sphärische Kontraktion*, falls

$$\text{WOT-}\sum_{j\in J} T_j^* T_j \leq 1$$

erfüllt ist.

(b) Eine kommutative Familie $S = (T_j)_{j\in J}$ mit $T_j \in B(\mathcal{H})$ für alle $j \in J$ heißt *sphärische Isometrie*, falls die Identität

$$\text{WOT-}\sum_{j\in J} T_j^* T_j = 1$$

gilt.

(c) Ist $S = (T_j)_{j \in J}$ eine sphärische Kontraktion so wollen wir

$$\mathcal{T}(S) = \{X \in B(\mathcal{H}) \mid \text{WOT-}\sum_{j \in J} T_j^* X T_j = X\}$$

die Menge der *S-Toeplitzoperatoren* nennen.

(d) Für eine kommutative Familie $\mathcal{F} = (S_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ sphärischer Kontraktionen $S_\alpha = (T_{j,\alpha})_{j \in J_\alpha}$ auf $\mathcal{H}$ heißt

$$\mathcal{T}(\mathcal{F}) = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} \mathcal{T}(S_\alpha)$$

die Menge aller *$\mathcal{F}$-Toeplitzoperatoren.*

An dieser Stelle sei kurz bemerkt, dass die hier gegebene Definition einer Familie $\mathcal{F} = (S_\alpha)_{\alpha \in \Gamma} = ((T_{j,\alpha})_{j \in J_\alpha})_{\alpha \in \Gamma}$ sphärischer Isometrien gleichzeitig die Begriffe der endlichen sphärischen Isometrien und endlichen torischen Isometrien verallgemeinert, wie sie zum Beispiel in [3] zu finden sind. In der Tat erhält man für $\#\Gamma = n$ und $\#J_\alpha = 1$, $\alpha \in \Gamma$, eine torische Isometrie und für $\#\Gamma = 1$ und $\#J_\alpha = n$, $\alpha \in \Gamma$, eine endliche sphärische Isometrie. Eine erste Proposition liefert die Wohldefiniertheit der Mengen $\mathcal{T}(S)$ und $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ aus Definition 2.1.

Proposition 2.2. *Sei $\mathcal{F} = (S_\alpha)_{\alpha \in \Gamma} = ((T_{j,\alpha})_{j \in J_\alpha})_{\alpha \in \Gamma}$ eine 2-Familie in $B(\mathcal{H})$ derart, dass für alle $\alpha \in \Gamma$ das Netz*

$$\Big(\sum_{j \in F} T_{j,\alpha}^* T_{j,\alpha}\Big)_{F \subset J_\alpha \, endl.}$$

nach oben bechränkt ist (etwa durch $c_\alpha I$, $c_\alpha > 0$ für alle $\alpha \in \Gamma$). Dann konvergiert $\sum_{j \in J_\alpha} T_{j,\alpha}^* X T_{j,\alpha}$ für alle $\alpha \in \Gamma$, $X \in B(\mathcal{H})$ bzgl. der starken Operatortopologie.

Beweis. Seien $\alpha \in \Gamma$ und $X \in B(\mathcal{H})$ beliebig. Da sich jeder beschränkte lineare Operator als Linearkombination positiver Elemente schreiben lässt, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $X \geq 0$ ist. Wir wollen zeigen, dass das Netz $(\sum_{j \in F} T_{j,\alpha}^* X T_{j,\alpha})_{F \subset J_\alpha \text{endl.}}$ ein monoton wachsendes, nach oben beschränktes Netz positiver Operatoren ist. Die Positivität von $\sum_{j \in F} T_{j,\alpha}{}^* X T_{j,\alpha}$ folgt leicht aus $X \geq 0$. Seien nun $F \subset E$ endliche Teilmengen von J_α. Dann folgt

$$\sum_{j \in E \setminus F} \langle T_{j,\alpha}^* X T_{j,\alpha} h, h \rangle = \sum_{j \in E \setminus F} \langle X^{1/2} T_{j,\alpha} h, X^{1/2} T_{j,\alpha} h \rangle \geq 0 \quad (h \in \mathcal{H}).$$

Also ist $\sum_{j\in F} T_{j,\alpha}^* X T_{j,\alpha} \leq \sum_{j\in E} T_{j,\alpha}^* X T_{j,\alpha}$. Ferner gilt nach der Ungleichung von Cauchy-Schwarz die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in F} \langle T_{j,\alpha}^* X T_{j,\alpha} h, h\rangle &= \sum_{j\in F} \langle X T_{j,\alpha} h, T_{j,\alpha} h\rangle \\
&\leq \sum_{j\in F} \|X\| \langle T_{j,\alpha} h, T_{j,\alpha} h\rangle \\
&= \|X\| \langle \sum_{j\in F} T_{j,\alpha}^* T_{j,\alpha} h, h\rangle \\
&\leq \|X\| \langle c_\alpha h, h\rangle \quad (h \in \mathcal{H}).
\end{aligned}$$

Damit ist das Netz $(\sum_{j\in F} T_{j,\alpha}^* X T_{j,\alpha})_{F\subset J_\alpha \text{endl.}}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt. Mit [25, Satz 17.1] folgt die Konvergenz in der starken Operatortopologie. □

Bemerkung. Da in der Situation des Beweises von Proposition 2.2 alle Summen $\sum_{j\in F} T_{j,\alpha}^* X T_{j,\alpha}$ über endliche Teilmengen $F \subset J_\alpha$ positiv sind, erhält man wegen $\|\sum_{j\in F} T_{j,\alpha}^* X T_{j,\alpha}\| \leq \|\sum_{j\in J_\alpha} T_{j,\alpha}^* X T_{j,\alpha}\|$ auch die Normbeschränktheit von $\{\sum_{j\in F} T_{j,\alpha}^* X T_{j,\alpha}\}_{F\subset J_\alpha \text{endl.}}$. Dies liefert zusammen mit Proposition 1.15 die w^*-Konvergenz von $\sum_{j\in J_\alpha} T_{j,\alpha}^* X T_{j,\alpha}$.

Als nächstes wollen wir einer sphärischen Kontraktion $S = (T_j)_{j\in J}$ die nach Proposition 2.2 wohldefinierte lineare Abbildung

$$\phi_S : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H}),\ X \mapsto \text{WOT-}\sum_{j\in J} T_j^* X T_j$$

zuordnen, deren Fixpunktmenge gerade aus den S-Toeplitzoperatoren besteht. Ist S eine sphärische Isometrie, so ist ϕ_S offensichtlich unital, im allgemeinen Fall einer sphärischen Kontraktion S gilt immerhin noch $\phi_S(1) \leq 1$. Wir werden uns nun für den Rest dieses Abschnittes näher mit dieser Abbildung befassen und einige interessante Eigenschaften untersuchen.

Proposition 2.3. *Sei $S = (T_j)_{j\in J}$ eine sphärische Kontraktion. Für $A, B \in S'$ und $X \in B(\mathcal{H})$ ist dann $\phi_S(A^* X B) = A^* \phi_S(X) B$.*

Beweis. Seien $A, B \in S'$ und $X \in B(\mathcal{H})$ beliebig. Dann ist $\langle \phi_S(A^* X B) g, h\rangle = \sum_{j\in J} \langle T_j^* A^* X B T_j g, h\rangle = \sum_{j\in J} \langle T_j^* X T_j B g, A h\rangle = \langle A^* \phi_S(X) B g, h\rangle$ für alle $g, h \in \mathcal{H}$. □

Als Korollar aus der soeben bewiesenen Proposition erhalten wir, dass der Kommutant einer beliebigen sphärischen Isometrie $S = (T_j)_{j\in J}$ immer in der Menge aller S-Toeplitzoperatoren enthalten ist. Insbesondere folgt natürlich auch $T_j \in \mathcal{T}(S)$ für alle $j \in J$.

Korollar 2.4. *Sei $S = (T_j)_{j\in J}$ eine sphärische Isometrie. Dann ist $S' \subset \mathcal{T}(S)$.*

Beweis. Da für eine sphärische Isometrie S die Abbildung ϕ_S unital ist, ist dies eine direkte Folgerung aus Proposition 2.3, angewendet auf den Fall, dass $A = 1$ und $X = 1$ ist. □

Im nächsten Lemma wollen wir die w^*-Stetigkeit und die vollständige Positivität der Abbildung ϕ_S beweisen. Dazu geben wir zuerst noch zwei hilfreiche Propositionen an, die den Beweis des Lemmas erleichtern werden. Beide Eigenschaften werden im Laufe der Arbeit derweil von großem Nutzen sein.

Proposition 2.5. *Seien $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ Hilberträume und $A \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H}), B \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ beliebig. Dann ist die Abbildung $M_{A,B} : B(\mathcal{K}) \to B(\mathcal{H}),\ X \mapsto AXB$ w^*-stetig.*

Beweis. Nach Lemma 1.17 genügt es zu zeigen, dass $M_{A,B}$ WOT-stetig ist. Ist aber $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ ein Netz in $B(\mathcal{K})$ mit $X_\alpha \to 0$ bezüglich der schwachen Operatortopologie, so folgt $\langle AX_\alpha Bg, h\rangle = \langle X_\alpha Bg, A^*h\rangle \to 0$. Dies liefert die Behauptung. □

Proposition 2.6. *Sei $S = (T_j)_{j\in J}$ eine sphärische Kontraktion. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) Die Abbildung $T : \mathcal{H} \to \bigoplus_{j\in J} \mathcal{H},\ h \mapsto (T_j h)_{j\in J}$ ist eine Kontraktion.

(b) Für alle $X \in B(\mathcal{H})$ ist WOT-$\sum_{j\in J} T_j^* X T_j = T^*\big(\bigoplus_{j\in J} X\big)T$.

Beweis. Zunächst wollen wir zeigen, dass T eine Kontraktion ist. Da die Familie S eine sphärische Kontraktion ist, gilt die Abschätzung

$$\|h\|^2 \geq \sum_{j\in J} \langle T_j^* T_j h, h\rangle = \sum_{j\in J} \|T_j h\|^2 = \|Th\|^2$$

für $h \in \mathcal{H}$. Sind nun $g, h \in \mathcal{H}$ und $X \in B(\mathcal{H})$ beliebig, so folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in J} \langle T_j^* X T_j g, h\rangle &= \sum_{j\in J} \langle X T_j g, T_j h\rangle \\
&= \big\langle (X T_j g)_{j\in J}, (T_j h)_{j\in J}\big\rangle_{\bigoplus_{j\in J}\mathcal{H}} \\
&= \big\langle \big(\bigoplus_{j\in J} X\big) Tg, Th\big\rangle \\
&= \big\langle T^*\big(\bigoplus_{j\in J} X\big) Tg, h\big\rangle.
\end{aligned}$$

□

Ist $S = (T_j)_{j\in J}$ in der Situation von Proposition 2.6 eine sphärische Isometrie, so sieht man leicht, dass dann $T : \mathcal{H} \to \bigoplus_{j\in J}\mathcal{H},\ h \mapsto (T_j h)_{j\in J}$ eine Isometrie ist. Wir sind nun in der Lage, die vollständige Positivität und w^*-Stetigkeit der zu einer sphärischen Kontraktion S gehörenden Abbildung ϕ_S zu beweisen. Insbesondere folgt damit auch, dass ϕ_S kontraktiv ist, denn bekanntlich erhält man $\|\phi_S\|_{cb} = \|\phi_S\| = \|\phi_S(1)\|$ aus der vollständigen Positivität von ϕ_S.

Lemma 2.7. *Sei $S = (T_j)_{j\in J}$ eine sphärische Kontraktion. Dann ist die Abbildung ϕ_S w^*-stetig und vollständig positiv.*

Beweis. Mit Hilfe von Proposition 2.6 (b) stellen wir zuerst fest, dass $\phi_S(X) = T^*\big(\bigoplus_{j\in J} X\big)T$ für alle $X \in B(\mathcal{H})$ gilt. Damit erhalten wir unmittelbar

$$\phi_S(X) = M_{T^*,T}\big(\bigoplus_{j\in J} X\big)$$

für alle $X \in B(\mathcal{H})$. Es genügt also, die w^*-Stetigkeit der Abbildung

$$B(\mathcal{H}) \to B\big(\bigoplus_{j\in J}\mathcal{H}\big),\ X \mapsto \bigoplus_{j\in J} X$$

zu prüfen, denn dann folgt die Behauptung mit Proposition 2.5. Nach Lemma 1.16 reicht es jedoch, zu zeigen, dass die Abbildung

$$ball(B(\mathcal{H})) \to B\big(\bigoplus_{j\in J}\mathcal{H}\big),\ X \mapsto \bigoplus_{j\in J} X$$

WOT-stetig ist. Sei dazu $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ ein Netz in $ball(B(\mathcal{H}))$ mit $X_\alpha \to 0$ bezüglich der schwachen Operatortopologie und seien $(x_j)_{j\in J}, (y_j)_{j\in J} \in \bigoplus_{j\in J}\mathcal{H}$. Dann existiert zu gegebenem $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $J(\varepsilon) \subset J$ so, dass

$$\Big|\sum_{j\in J\setminus J(\varepsilon)} \langle X_\alpha x_j, y_j\rangle\Big| \le \Big(\sum_{j\in J\setminus J(\varepsilon)} \|x_j\|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{j\in J\setminus J(\varepsilon)} \|y_j\|^2\Big)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $\alpha \in A$ gilt. Ferner gibt es ein $\alpha(\varepsilon) \in A$ so, dass $\sum_{j \in J(\varepsilon)} |\langle X_\alpha x_j, y_j \rangle| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $\alpha \in A$ mit $\alpha \geq \alpha(\varepsilon)$ ist. Damit erhält man schließlich

$$\big|\big\langle \big(\bigoplus_{j \in J} X_\alpha\big)(x_j), (y_j)\big\rangle\big| = \big|\sum_{j \in J} \langle X_\alpha x_j, y_j \rangle\big| < \varepsilon$$

für alle $\alpha \in A$ mit $\alpha \geq \alpha(\varepsilon)$. Also ist die w^*-Stetigkeit von ϕ_S gezeigt. Die vollständige Positivität von ϕ_S ist erfüllt, da man mit den Bezeichnungen aus Proposition 2.6 leicht sieht, dass ϕ_α die Komposition des *–Homomorphismus

$$B(\mathcal{H}) \to B(\bigoplus_{j \in J} \mathcal{H}), \quad X \mapsto \bigoplus_{j \in J} X$$

und der nach [20, Bemerkungen vor Proposition 3.6] vollständig positiven Abbildung

$$B(\bigoplus_{j \in J} \mathcal{H}) \to B(\mathcal{H}), \quad X \mapsto T^* X T$$

ist. □

Zuletzt sei noch erwähnt, dass im Falle zweier vertauschender sphärischer Kontraktionen S und T auch die zugehörigen Abbildungen ϕ_S und ϕ_T kommutieren. Insbesondere folgt dann auch, dass die zu einer Familie $\mathcal{F} = (S_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ sphärischer Kontraktionen gehörende Familie $(\phi_{S_\alpha})_{\alpha \in \Gamma}$ vertauschend ist.

Proposition 2.8. *Seien $T = (T_j)_{j \in J}$ und $S = (S_k)_{k \in K}$ sphärische Kontraktionen so, dass $T_j S_k = S_k T_j$ für $j \in J, k \in K$ gilt. Dann sind die Abbildungen ϕ_T und ϕ_S vertauschend.*

Beweis. Die Abbildungen ϕ_T und ϕ_S sind nach Bemerkung 2.2 wohldefiniert und nach Lemma 2.7 w^*-stetig. Für $j \in J$ und $X \in B(\mathcal{H})$ erhält man zunächst, dass

$$\begin{aligned}
\langle T_j^* \phi_S(X) T_j g, h \rangle &= \langle \phi_S(X) T_j g, T_j h \rangle \\
&= \sum_{k \in K} \langle S_k^* X S_k T_j g, T_j h \rangle \\
&= \sum_{k \in K} \langle X S_k T_j g, S_k T_j h \rangle \\
&= \sum_{k \in K} \langle X T_j S_k g, T_j S_k h \rangle \\
&= \sum_{k \in K} \langle S_k^* T_j^* X T_j S_k g, h \rangle \\
&= \langle \phi_S(T_j^* X T_j) g, h \rangle \quad (g, h \in \mathcal{H})
\end{aligned}$$

gilt. Dies führt jedoch leicht zu

$$\begin{aligned} \phi_T(\phi_S(X)) &= w^*\text{-} \lim_{\substack{F \subset J \\ F \text{ endl.}}} \sum_{j \in F} T_j^* \phi_S(X) T_j \\ &= w^*\text{-} \lim_{\substack{F \subset J \\ F \text{ endl.}}} \phi_S\big(\sum_{j \in F} T_j^* X T_j\big) \\ &= \phi_S(\phi_T(X)) \end{aligned}$$

für $X \in B(\mathcal{H})$. □

2.2 Vollständig positive kontraktive Projektionen

Wir wollen uns nun etwas ausführlicher mit Abbildungen $\Phi : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ befassen, die vollständig positiv, kontraktiv und idempotent sind. Dabei werden wir feststellen, dass auf dem Bild einer solchen Abbildung Φ stets eine Verknüpfung $\circ$ als Multiplikation definiert werden kann, bezüglich derer $Ran(\Phi)$ eine C*-Algebra mit der von $B(\mathcal{H})$ induzierten Norm und Involution ist. Hervorzuheben ist auch, dass die zum Beweis der Assoziativität der Verknüpfung $\circ$ verwendete Relation

$$\Phi(\Phi(X)Y) = \Phi(\Phi(X)\Phi(Y)) = \Phi(X\Phi(Y)), \quad (X, Y \in B(\mathcal{H}))$$

im weiteren Verlauf der Arbeit ebenfalls sehr hilfreich sein wird. Daher wird in einem Korollar zum folgenden Satz noch einmal explizit darauf verwiesen.

Satz 2.9. *Sei $\Phi : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ eine vollständig positive, kontraktive Abbildung mit $\Phi \circ \Phi = \Phi$. Dann wird $Ran(\Phi)$ zu einer unitalen C*-Algebra bezüglich der Multiplikation*

$$\circ : Ran(\Phi) \times Ran(\Phi) \to Ran(\Phi), \quad X \circ Y = \Phi(XY)$$

sowie der von $B(\mathcal{H})$ induzierten Norm und Involution. Es ist $\Phi(1)$ die Eins dieser C-Algebra.*

Beweis. Zunächst liefert $X, Y \in Ran(\Phi)$ offensichtlich auch $X \circ Y \in Ran(\Phi)$. Da für $X, Y, Z \in Ran(\Phi)$

$$\begin{aligned} (X + Y) \circ Z &= \Phi((X + Y)Z) \\ &= \Phi(XZ + YZ) \\ &= \Phi(XZ) + \Phi(YZ) \\ &= X \circ Z + Y \circ Z \end{aligned}$$

sowie $X \circ (Y+Z) = X \circ Y + X \circ Z$ gilt, ist $\circ$ distributiv. Ist zusätzlich noch $\lambda \in \mathbb{C}$, so ist $\lambda(X \circ Y) = \lambda\Phi(XY) = \Phi((\lambda X)Y) = (\lambda X) \circ Y = X \circ (\lambda Y)$. Wir wollen nun die Assoziativität von $\circ$ überprüfen. Seien dazu $X \in B(\mathcal{H})$ und $A \in Ran(\Phi)$ beliebig. Wir zeigen, dass dann $\Phi(\Phi(X)A) = \Phi(XA)$ sowie $\Phi(A\Phi(X)) = \Phi(AX)$ gilt, denn daraus folgt unmittelbar

$$\Phi(A\Phi(BC)) = \Phi(ABC) = \Phi(\Phi(AB)C) \quad (A, B, C \in Ran(\Phi)).$$

Als vollständig positive, kontraktive Abbildung ist Φ natürlich auch vollständig kontraktiv, denn $\|\Phi\|_{cb} = \|\Phi\| \leq 1$. Wir wenden nun Korollar 1.3 auf die vollständig positive kontraktive Abbildung Φ_2 und auf die Matrix

$$\begin{pmatrix} A^* & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(B(\mathcal{H}))$$

an. Wegen $A \in Ran(\Phi)$ folgt, dass

$$\begin{aligned} 0 &\leq \begin{pmatrix} \Phi(AA^*) & \Phi(AX) \\ \Phi(X^*A^*) & \Phi(X^*X) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Phi(A^*) & \Phi(X) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \Phi(A^*) & \Phi(X) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Phi(AA^*) & \Phi(AX) \\ \Phi(X^*A^*) & \Phi(X^*X) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Phi(A) & 0 \\ \Phi(X)^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi(A)^* & \Phi(X) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Phi(AA^*) & \Phi(AX) \\ \Phi(X^*A^*) & \Phi(X^*X) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} AA^* & A\Phi(X) \\ \Phi(X)^*A^* & \Phi(X)^*\Phi(X) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

gilt. Da Φ vollständig positiv ist, liefert eine Anwendung von Φ_2

$$\begin{aligned} 0 &\leq \begin{pmatrix} 0 & \Phi(AX) - \Phi(A\Phi(X)) \\ \Phi(X^*A^*) - \Phi(\Phi(X)^*A^*) & \Phi(X^*X) - \Phi(\Phi(X)^*\Phi(X)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \Phi(AX) - \Phi(A\Phi(X)) \\ \Phi(AX)^* - \Phi(A\Phi(X))^* & \Phi(X^*X) - \Phi(\Phi(X)^*\Phi(X)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nun ist aber $\Phi(X^*X) - \Phi(\Phi(X)^*\Phi(X)) = \Phi\big(\Phi(X^*X) - \Phi(X)^*\Phi(X)\big)$, und nach der bereits zitierten Schwarzschen Ungleichung ist $\Phi(X^*X) - \Phi(X)^*\Phi(X)$ positiv. Folglich ist Lemma 1.1 anwendbar, und für $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ erhält man

$$|\langle \Phi(AX) - \Phi(A\Phi(X))h_1, h_2 \rangle| \leq 0,$$

was zu $\Phi(AX) - \Phi(A\Phi(X)) = 0$ führt. Also ist $\Phi(AX) = \Phi(A\Phi(X))$ gezeigt. Andererseits ist aber auch $\Phi(XA) = \Phi(A^*X^*)^* = \Phi(A^*\Phi(X^*))^* = \Phi(\Phi(X)A)$. Da Φ idempotent ist, folgt nun

$$\Phi(1) \circ X = \Phi(\Phi(1)X) = \Phi(1 \cdot X) = \Phi(X) = \Phi(X \cdot 1) = \Phi(X\Phi(1)) = X \circ \Phi(1)$$

für $X \in Ran(\Phi)$. Wegen $\Phi(X) = X$ liefert dies unmittelbar

$$\Phi(1) \circ X = X = X \circ \Phi(1)$$

Bleibt noch die C*-Bedingung zu prüfen. Sei dazu $A \in Ran(\Phi)$ beliebig. Dann sieht man leicht, dass $\|A^* \circ A\| = \|\Phi(A^*A)\| \leq \|A^*A\| = \|A\|^2$ ist. Wir wenden auch hier Korollar 1.3 an, das wegen der Voraussetzung $A \in Ran(\Phi)$ in Verbindung mit der Kontraktivität von Φ zu $\Phi(A^*A) \geq \Phi(A)^*\Phi(A) = A^*A$ führt, also ist $\|A^* \circ A\| = \|\Phi(A^*A)\| \geq \|A^*A\| = \|A\|^2$. Schließlich sieht man leicht, dass die übliche Involution auf $B(\mathcal{H})$ eine Involution auf $Ran(\Phi)$ induziert, denn für $X, Y \in Ran(\Phi)$ ist $(X \circ Y)^* = \Phi(XY)^* = \Phi(Y^*X^*) = Y^* \circ X^*$. Damit ist $(Ran(\Phi), \circ)$ eine C*-Algebra. □

Korollar 2.10. *Sei $\Phi : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ eine vollständig positive, kontraktive Abbildung mit $\Phi \circ \Phi = \Phi$. Dann gilt für $X, Y \in B(\mathcal{H})$:*

$$\Phi(\Phi(X)Y) = \Phi(\Phi(X)\Phi(Y)) = \Phi(X\Phi(Y)).$$

Beweis. Dies wurde im Beweis zu Satz 2.9 gezeigt. □

Ist $n \in \mathbb{N}$ beliebig, so induziert der $\mathbb{C}$-Algebren-Isomorphismus

$$\sigma : M_n(B(\mathcal{H})) \to B(\mathcal{H}^n),\ \sigma\big((A_{ij})_{i,j=1}^n\big)(x_i)_{i=1}^n = \Big(\sum_{i=1}^n A_{ij}x_j\Big)_{i=1}^n$$

eine C*-Algebrenstruktur auf $M_n(B(\mathcal{H}))$ (siehe dazu auch [20, Seiten 2-3]). Wir nutzen diesen C*-Isomorphismus nun, um zu beweisen, dass die Identität zwischen $Ran(\Phi)$ und $(Ran(\Phi), \circ)$ eine vollständige Isometrie definiert.

Korollar 2.11. *Sei $\Phi : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ eine vollständig positive, kontraktive Abbildung mit $\Phi \circ \Phi = \Phi$. Dann ist $id : Ran(\Phi) \to (Ran(\Phi), \circ)$ eine vollständige Isometrie.*

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Ist $\Phi : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ vollständig positiv und kontraktiv mit $\Phi^2 = \Phi$, so ist die Abbildung

$$\tilde{\Phi}_n = \sigma \circ \Phi_n \circ \sigma^{-1} : B(\mathcal{H}^n) \to B(\mathcal{H}^n)$$

kontraktiv mit $\tilde{\Phi}_n^2 = \tilde{\Phi}_n$. Da σ und σ^{-1} als C*-Algebrenhomomorphismen natürlich vollständig positiv und kontraktiv sind, und weil mit Φ auch Φ_n vollständig positiv und kontraktiv ist, gilt dasselbe für die Abbildung $\tilde{\Phi}_n$. Nach Satz 2.9

ist dann aber $Ran(\tilde{\Phi}_n) = \sigma(M_n(Ran(\Phi))) \subset B(\mathcal{H}^n)$ eine C*-Algebra mit dem Produkt $A \circ B = \tilde{\Phi}_n(AB)$ sowie mit der von $B(\mathcal{H}^n)$ induzierten Norm und Involution. Dann ist aber auch $M_n(Ran(\Phi))$ eine C*-Algebra mit dem Produkt

$$\begin{aligned}(A_{ij}) \circ_n (B_{ij}) &= \sigma^{-1}\big(\sigma(A_{ij}) \circ \sigma(B_{ij})\big) = \sigma^{-1}\big(\tilde{\Phi}_n(\sigma(A_{ij})\sigma(B_{ij}))\big) \\ &= \Phi_n \circ \sigma^{-1}(\sigma(A_{ij})\sigma(B_{ij})) = \Phi_n((A_{ij})(B_{ij})) \\ &= \big(\Phi\big(\sum_{k=1}^n A_{ik}B_{kj}\big)\big)_{i,j} = \big(\sum_{k=1}^n A_{ik} \circ B_{kj}\big)_{i,j}\end{aligned}$$

sowie mit der von $M_n(B(\mathcal{H}))$ induzierten Norm und Involution. Die nach [1, Korollar zu Theorem 1.3.2] eindeutige C*-Norm auf der $\mathbb{C}$-Algebra $M_n(Ran(\Phi), \circ)$ ist also die Einschränkung der C*-Norm von $M_n(B(\mathcal{H})) \cong B(\mathcal{H}^n)$. Damit ist gezeigt, dass alle Abbildungen

$$id : M_n(Ran(\Phi)) \to M_n(Ran(\Phi), \circ_n) \quad (n \geq 1)$$

Isometrien sind, womit die Behauptung folgt. □

In den folgenden zwei Lemmata wollen wir uns etwas intensiver mit der Einschränkung Φ_0 einer vollständig positiven kontraktiven Projektion Φ auf die von $Ran(\Phi)$ in $B(\mathcal{H})$ erzeugte C*-Teilalgebra beschäftigen. Besonders das Verständnis der minimalen Stinespring-Dilatation $(\pi, V, \mathcal{K})$ von Φ_0 wird es uns unter anderem ermöglichen, die Subnormalität vertauschender Familien sphärischer Isometrien und ein ähnliches Resultat für Familien sphärischer Kontraktionen zu zeigen.

Lemma 2.12. *Sei $\Phi : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ eine vollständig positive, kontraktive Abbildung mit $\Phi \circ \Phi = \Phi$. Es bezeichne $\mathcal{E} = Ran(\Phi)$ und $\Phi_0 : C^*(\mathcal{E}) \to B(\mathcal{H})$ die Einschränkung von Φ auf die von $\mathcal{E}$ in $B(\mathcal{H})$ erzeugte unitale C*-Algebra. Ist $(\pi, V, \mathcal{K})$ die minimale Stinespring-Dilatation von Φ_0, so folgt:*

(a) $Ker(\Phi_0) = Ker(\pi)$.

(b) Die Abbildung $\rho : \pi(C^*(\mathcal{E})) \to B(\mathcal{H})$, $X \mapsto V^*XV$ ist eine vollständige Isometrie.

(c) $Ran(\rho) = Ran(\Phi)$.

(d) Es ist $\rho : \pi(C^*(\mathcal{E})) \to (\mathcal{E}, \circ)$ ein Isomorphismus zwischen unitalen C-Algebren mit Umkehrabbildung $\pi : (\mathcal{E}, \circ) \to \pi(C^*(\mathcal{E}))$. Insbesondere ist $\pi \circ \rho$ die Identität auf $\pi(C^*(\mathcal{E}))$ und $\pi(C^*(\mathcal{E})) = \pi(\mathcal{E})$.*

Beweis. Zunächst stellt man fest, dass $Ker(\Phi_0) \subset C^*(\mathcal{E})$ ein Ideal ist. Seien dazu $X = \Phi(Y) \in \mathcal{E}$ und $A \in Ker(\Phi_0)$. Dann folgt $\Phi_0(AX) = \Phi(A\Phi(Y)) = \Phi(\Phi(A)Y) = \Phi(0) = 0$ nach Korollar 2.10 und wegen $X^* = \Phi(Y)^* = \Phi(Y^*)$ für $Y \in B(\mathcal{H})$ erhält man auch $AX^* \in Ker(\Phi_0)$. Iterieren dieses Argumentes liefert, dass

$$Ker(\Phi_0)X_1 \dots X_n \subset Ker(\Phi_0)$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{E} \cup \mathcal{E}^*$. Da $Ker(\Phi_0) \subset C^*(\mathcal{E})$ abgeschlossen ist, folgt die Inklusion $Ker(\Phi_0)C^*(\mathcal{E}) \subset Ker(\Phi_0)$. Ganz genauso erhalten wir (mit der anderen Identität aus Korollar 2.10), dass auch $C^*(\mathcal{E})Ker(\Phi_0) \subset Ker(\Phi_0)$ gilt. Also ist $Ker(\Phi_0) \subset C^*(\mathcal{E})$ ein Ideal.
Wir wollen nun die Behauptung in (a) zeigen. Die Inklusion $Ker(\pi) \subset Ker(\Phi_0)$ folgt direkt aus der Tatsache, dass $\Phi_0(X) = V^*\pi(X)V = 0$ für $X \in Ker(\pi)$ ist. Seien nun $X \in Ker(\Phi_0)$ und $S, T \in C^*(\mathcal{E})$. Da $Ker(\Phi_0)$ ein Ideal in $C^*(\mathcal{E})$ ist, gilt $T^*XS \in Ker(\Phi_0)$. Für $x, y \in \mathcal{H}$ liefert dies

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \Phi_0(T^*XS)x, y \rangle \\ &= \langle V^*\pi(T^*XS)Vx, y \rangle \\ &= \langle \pi(T^*)\pi(X)\pi(S)Vx, Vy \rangle \\ &= \langle \pi(X)\pi(S)Vx, \pi(T)Vy \rangle. \end{aligned}$$

Aufgrund der Minimalität von π ist aber $\mathcal{K} = \bigvee(\pi(C^*(\mathcal{E}))V\mathcal{H})$. Also folgt $\langle \pi(X)x, y \rangle = 0$ für alle $x, y \in \mathcal{K}$ und wir erhalten $X \in Ker(\pi)$. Wir betrachten nun die Abbildung $\rho : \pi(C^*(\mathcal{E})) \to B(\mathcal{H})$, $X \mapsto V^*XV$. Zunächst stellen wir fest, dass ρ injektiv ist, denn für $X = \pi(Y) \in \pi(C^*(\mathcal{E}))$ mit $\rho(X) = 0$ gilt

$$0 = \rho(X) = V^*\pi(Y)V = \Phi_0(Y),$$

woraus schließlich $Y \in Ker(\Phi_0) = Ker(\pi)$ und $X = \pi(Y) = 0$ folgt.
Bevor wir uns dem Beweis der vollständigen Isometrie von ρ zuwenden, zeigen wir die Teile (c) und (d) der Behauptung. Ersteres folgt unmittelbar aus

$$Ran(\rho) = \{V^*\pi(X)V \mid X \in C^*(\mathcal{E})\} = \{\Phi_0(X) \mid X \in C^*(\mathcal{E})\} = \mathcal{E}.$$

Hieraus folgt auch, dass die Abbildung $\pi \circ \rho$ wohldefiniert ist, denn es ist $Ran(\rho) = \mathcal{E} \subset C^*(\mathcal{E})$. Wegen $\Phi_0 \circ \Phi_0 = \Phi_0$ ist $\rho \circ \pi \circ \rho \circ \pi = \rho \circ \pi$ auf $C^*(\mathcal{E})$. Also gilt $\rho \circ \pi \circ \rho(Y) = \rho(Y)$ für alle $Y \in \pi(C^*(\mathcal{E}))$, und mit der Injektivität von ρ

erhält man schließlich die Identität $\pi \circ \rho = id_{\pi(C^*(\mathcal{E}))}$. Dies impliziert die Surjektivität von $\pi : \mathcal{E} \to \pi(C^*(\mathcal{E}))$ und die Injektivität von $\rho : \pi(C^*(\mathcal{E})) \to \mathcal{E}$. Da die letzte Abbildung wegen $Ran(\rho) = \mathcal{E}$ aber auch surjektiv ist, sind beide Abbildungen bijektiv und zueinander invers. Man sieht leicht, dass für $X \in \pi(C^*(\mathcal{E}))$ die Identität $\rho(X^*) = \rho(X)^*$ erfüllt ist. Außerdem folgt

$$\begin{aligned}
\rho(\pi(X)\pi(Y)) &= \rho(\pi(XY)) \\
&= \Phi(XY) \\
&= X \circ Y \\
&= \Phi(X) \circ \Phi(Y) \\
&= \rho(\pi(X)) \circ \rho(\pi(Y))
\end{aligned}$$

für $X, Y \in \mathcal{E}$, da Φ nach Voraussetzung idempotent ist. Also ist die Abbildung $\rho : \pi(C^*(\mathcal{E})) \to (\mathcal{E}, \circ)$ multiplikativ. Ferner gilt $\rho(1) = V^*V = V^*\pi(1)V = \Phi(1)$, und da $\Phi(1)$ nach Satz 2.9 das Einselement in $(\mathcal{E}, \circ)$ ist, ist ρ unital. Damit ist die Behauptung in (d) gezeigt.
Da sowohl $\rho : \pi(C^*(\mathcal{E})) \to B(\mathcal{H})$ als auch π nach [20, Bemerkungen vor Proposition 3.6] vollständig kontraktive Abbildungen sind, erhält man, dass

$$\begin{aligned}
\|\pi_n(X)\| &= \|(\pi(x_{ij}))_{i,j}\| \\
&= \|(\pi \circ \rho \circ \pi(x_{ij}))_{i,j}\| \\
&= \|\pi_n \circ \rho_n \circ \pi_n(X)\| \\
&\leq \|\rho_n \circ \pi_n(X)\| \\
&\leq \|\pi_n(X)\|
\end{aligned}$$

für alle $X = (x_{ij})_{i,j} \in M_n(C^*(\mathcal{E}))$ gilt. Damit ist aber $\|\rho_n(Y)\| = \|Y\|$ für alle $Y \in \pi_n(M_n(C^*(\mathcal{E}))) = M_n(\pi(C^*(\mathcal{E})))$, also ist $\rho : \pi(C^*(\mathcal{E})) \to B(\mathcal{H})$ vollständig isometrisch. $\square$

Bemerkung. Als C*-Isomorphismus ist die Abbildung $\rho : \pi(C^*(\mathcal{E})) \to (\mathcal{E}, \circ)$ natürlich insbesondere vollständig isometrisch. Da nach Lemma 2.12 (b) auch $\rho : \pi(C^*(\mathcal{E})) \to B(\mathcal{H})$ vollständig isometrisch ist, erhält man einen alternativen Beweis für Korollar 2.11.

Mit Hilfe von Korollar 1.5 formulieren wir nun ein Eindeutigkeitsresultat für vollständig positive kontraktive Projektionen. Wir zeigen, dass je zwei solche Abbildungen Φ und $\widetilde{\Phi}$, deren Bilder gleich sind, schon auf $C^*(Ran(\Phi))$ übereinstimmen.

Korollar 2.13. *Sind* $\Phi : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ *und* $\widetilde{\Phi} : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ *vollständig positive, kontraktive und idempotente Abbildungen mit* $Ran(\Phi) = Ran(\widetilde{\Phi})$*, so stimmen* Φ *und* $\widetilde{\Phi}$ *auf* $C^*(Ran(\Phi))$ *überein.*

Beweis. Sei $\mathcal{E} = Ran(\Phi)$. Wir beweisen zunächst, dass $\Phi(1) = \widetilde{\Phi}(1)$ gilt. Sei dazu $X \in \mathcal{E}$ eine positive Kontraktion. Wegen $X \leq \|X\|1 \leq 1$ ist dann $X = \Phi(X) \leq \Phi(1)$. Es ist aber $Ran(\Phi) = Ran(\widetilde{\Phi})$, und mit dem gleichen Argument für $\widetilde{\Phi}(1)$ statt $\Phi(1)$ erhält man, dass auch $X \leq \widetilde{\Phi}(1)$ für jede positive Kontraktion $X \in \mathcal{E}$ ist. Damit folgt $\Phi(1) = \widetilde{\Phi}(1)$.
Wir betrachten nun die Einschränkungen Φ_0 und $\widetilde{\Phi}_0$ von Φ bzw. $\widetilde{\Phi}$ auf $C^*(\mathcal{E})$. Seien $(\pi, V, \mathcal{K})$ und $(\widetilde{\pi}, \widetilde{V}, \widetilde{\mathcal{K}})$ die minimalen Stinespring-Dilatationen von Φ_0 und $\widetilde{\Phi}_0$. Nach Lemma 2.12 sind dann die Abbildungen $\rho : \pi(C^*(\mathcal{E})) \to B(\mathcal{H})$, $X \mapsto V^*XV$ und $\widetilde{\rho} : \widetilde{\pi}(C^*(\mathcal{E})) \to B(\mathcal{H})$, $X \mapsto \widetilde{V}^*X\widetilde{V}$ vollständige Isometrien mit $Ran(\rho) = \mathcal{E} = Ran(\widetilde{\rho})$, und es ist $\pi \circ \rho$ die Identität auf $\pi(C^*(\mathcal{E}))$ sowie $\widetilde{\pi} \circ \widetilde{\rho}$ die Identität auf $\widetilde{\pi}(C^*(\mathcal{E}))$. Außerdem erhält man $\pi(C^*(\mathcal{E})) = \pi(\mathcal{E})$ und $\widetilde{\pi}(C^*(\mathcal{E})) = \widetilde{\pi}(\mathcal{E})$. Für $A = \widetilde{\rho}(X)$ mit $X \in \widetilde{\pi}(C^*(\mathcal{E}))$ gilt ferner

$$\|\widetilde{\pi}(A)\| = \|\widetilde{\pi}(\widetilde{\rho}(X))\| = \|X\| = \|\widetilde{\rho}(X)\| = \|A\|,$$

die Abbildung $\widetilde{\pi}|_{\mathcal{E}}$ ist also vollständig isometrisch. Wir definieren nun die Abbildung

$$\tau = \widetilde{\pi} \circ \rho : \pi(C^*(\mathcal{E})) \to \widetilde{\pi}(C^*(\mathcal{E})).$$

Wegen $\rho \circ \pi|_{\mathcal{E}} = id_{\mathcal{E}}$ ist dann $\tau(\pi(X)) = \widetilde{\pi}(X)$ für alle $X \in \mathcal{E}$, und da ρ und $\widetilde{\pi}|_{\mathcal{E}}$ vollständig isometrisch sind, gilt das gleiche auch für τ. Ferner rechnet man leicht nach, dass τ surjektiv und unital ist[1]. Also ist τ nach Korollar 1.5 ein *-Isomorphismus, und damit ist schon $\tau \circ \pi = \widetilde{\pi}$ auf $C^*(\mathcal{E})$. Wegen $\widetilde{\rho} \circ \widetilde{\pi}|_{\mathcal{E}} = id_{\mathcal{E}}$ ist außerdem $\widetilde{\rho} \circ \tau = \rho$. Also gilt für alle $X \in C^*(\mathcal{E})$ die Identität

$$\begin{aligned}\Phi(X) &= \rho(\pi(X)) \\ &= \widetilde{\rho}(\tau(\pi(X))) \\ &= \widetilde{\rho}(\widetilde{\pi}(X)) \\ &= \widetilde{\Phi}(X).\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

[1]Die Surjektivität folgt aus $\tau(\pi(C^*(\mathcal{E}))) = \widetilde{\pi}(\rho(\pi(C^*(\mathcal{E})))) = \widetilde{\pi}(\mathcal{E}) = \widetilde{\pi}(C^*(\mathcal{E}))$. Wegen $\tau(1) = \widetilde{\pi}(\rho(1)) = \widetilde{\pi}(\rho(\pi(1))) = \widetilde{\pi}(\Phi(1)) = \widetilde{\pi}(\widetilde{\Phi}(1)) = \widetilde{\pi}(\widetilde{\rho}(\widetilde{\pi}(1))) = \widetilde{\pi}(1) = 1$ ist τ auch unital.

Im Falle der w^*-Abgeschlossenheit des Bildes $\mathcal{E} = Ran(\Phi)$ lässt sich eine weitere bedeutsame Eigenschaft der minimalen Stinespring-Dilatation $(\pi, V, \mathcal{K})$ von Φ_0 beweisen. Es ist nämlich dann auch $\pi(C^*(\mathcal{E})) \subset B(\mathcal{K})$ w^*-abgeschlossen. Dies erlaubt es uns, das Bild der *-Darstellung π als von Neumann-Unteralgebra von $B(\mathcal{K})$ aufzufassen.

Lemma 2.14. *Seien Φ, π, $\mathcal{E}$, ρ wie in Lemma 2.12. Ist $Ran(\Phi) \subset B(\mathcal{H})$ w^*-abgeschlossen, so ist auch $\pi(C^*(\mathcal{E})) \subset B(\mathcal{K})$ w^*-abgeschlossen, also eine von Neumann-Unteralgebra von $B(\mathcal{K})$. Ferner ist in diesem Fall $\rho : \pi(C^*(\mathcal{E})) \to \mathcal{E}$ ein w^*-Homomöorphismus.*

Beweis. Nach Lemma 2.12 (d) ist die Abbildung $\pi|_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \pi(C^*(\mathcal{E}))$ als Umkehrabbildung von $\rho : \pi(C^*(\mathcal{E})) \to \mathcal{E}$ natürlich bijektiv. Da ρ isometrisch ist und somit

$$\|\pi(A)\| = \|\pi(\rho(X))\| = \|X\| = \|\rho(X)\| = \|A\|$$

für $A = \rho(X)$ mit $X \in \pi(C^*(\mathcal{E}))$ gilt, folgt, dass $\pi|_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \pi(C^*(\mathcal{E}))$ ein isometrischer Isomorphismus ist. Wir versehen nun $\pi(C^*(\mathcal{E}))$ mit der Topologie

$$\tau = \{\Omega \subset \pi(C^*(\mathcal{E})) \mid \text{es gibt } U \subset (\mathcal{E}, \tau_{w^*}) \text{ offen mit } \Omega = \pi(U)\}.$$

Dann ist $\pi(C^*(\mathcal{E})) \subset B(\mathcal{H})$ eine abstrakte von Neumann-Algebra mit Prädual $T(\mathcal{H})/{}^{\perp}\mathcal{E}$, denn es existieren isometrische Isomorphismen

$$\left(T(\mathcal{H})/{}^{\perp}\mathcal{E}\right)' \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \xrightarrow{\pi|_{\mathcal{E}}} \pi(C^*(\mathcal{E})).$$

Hierbei bezeichne $T(\mathcal{H})$ die Menge aller Spurklasseoperatoren auf $\mathcal{H}$. Insbesondere ist die Multiplikation auf $\pi(C^*(\mathcal{E}))$ getrennt τ-stetig nach [23, Theorem 1.7.8]. Wir wollen nun die w^*-Stetigkeit von $\pi|_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to B(\mathcal{K})$ beweisen. Nach Lemma 1.16 genügt es zu zeigen, dass $\pi : ball(\mathcal{E}) \to B(\mathcal{K})$ w^*-stetig ist. Sei also $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein Netz in $ball(\mathcal{E})$ mit $X_\alpha \to 0$ bezüglich τ_{w^*}. Dann gilt sicherlich auch $\pi(X_\alpha) \to 0$ in $(\pi(C^*(\mathcal{E})), \tau)$, und da die Multiplikation auf $\pi(C^*(\mathcal{E}))$ getrennt τ-stetig ist, folgt $S\pi(X_\alpha)T \to 0$ in $(\pi(C^*(\mathcal{E})), \tau)$ für alle $S, T \in \pi(C^*(\mathcal{E}))$. Also erhält man $\pi(Z_2^*)\pi(X_\alpha)\pi(Z_1) \to 0$ in $(\pi(C^*(\mathcal{E})), \tau)$, und damit ist schließlich

$$\rho(\pi(Z_2^*)\pi(X_\alpha)\pi(Z_1)) \to 0 \quad \text{in } (\mathcal{E}, \tau_{w^*})$$

für alle $Z_1, Z_2 \in C^*(\mathcal{E})$. Da τ_{w^*} stärker ist als die schwache Operatortopologie, folgt

$$\langle \pi(X_\alpha)\pi(Z_1)Vh_1, \pi(Z_2)Vh_2 \rangle \to 0 \quad (Z_1, Z_2 \in C^*(\mathcal{E}), h_1, h_2 \in \mathcal{H}).$$

Nun ist aber $(\pi(X_\alpha))_{\alpha\in A}$ ein durch 1 normbeschränktes Netz in $\pi(C^*(\mathcal{E}))$, und aufgrund der Minimalität von π erhält man $\langle \pi(X_\alpha)k_1, k_2\rangle \to 0$ für alle $k_1, k_2 \in \mathcal{K}$, also $\pi(X_\alpha) \to 0$ bezüglich WOT. Dann ist aber auch $\pi(X_\alpha) \to 0$ in $(B(\mathcal{K}), \tau_{w^*})$ nach Proposition 1.15. Wir können als nun die w^*-Abgeschlossenheit von $\pi(C^*(\mathcal{E}))$ zeigen. Nach dem Satz von Krein-Šmulian genügt es, zu beweisen, dass $ball(\pi(C^*(\mathcal{E})))$ w^*-abgeschlossen in $B(\mathcal{K})$ ist. Da aber $\pi|_{\mathcal{E}}$ ein isometrischer Isomorphismus ist, gilt

$$ball(\pi(C^*(\mathcal{E}))) = ball(\pi(\mathcal{E})) = \pi(ball(\mathcal{E})).$$

Nach dem Satz von Alaoglu-Bourbaki ist $ball(\mathcal{E})$ w^*-kompakt in $B(\mathcal{H})$, und weil $\pi|_{\mathcal{E}}$ w^*-stetig ist, ist $\pi(ball(\mathcal{E}))$ w^*-kompakt, also insbesondere w^*-abgeschlossen. Folglich ist $\pi(C^*(\mathcal{E})) \subset B(\mathcal{K})$ eine von Neumann-Unteralgebra. Da w^*-stetige isometrische Isomorphismen zwischen zwei dualen Banachräumen bekanntlich w^*-Homöomorphismen sind, ist $\pi : \mathcal{E} \to \pi(C^*(\mathcal{E}))$ ein w^*-Homöomorphismus. Dann ist aber auch $\rho : \pi(C^*(\mathcal{E})) \to \mathcal{E}$ als Umkehrabbildung dieser Abbildung ein w^*-Homöomorphismus. □

Bemerkung. In der Situation von Lemma 2.14 wird $\rho : \pi(C^*(\mathcal{E})) \to (\mathcal{E}, \circ)$ zu einem W*-Algebrenisomorphismus mit Umkehrabbildung $\pi : (\mathcal{E}, \circ) \to \pi(C^*(\mathcal{E}))$.

Wir wollen nun zeigen, dass zu einer gegebenen vertauschenden Familie $(\phi_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ vollständig positiver, kontraktiver und w^*-Stetiger Abbildungen auf $B(\mathcal{H})$ stets eine vollständig positive kontraktive Projektion $\Phi : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ existiert, deren Bild gerade die gemeinsame Fixpunktmenge der Familie $(\phi_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ ist. Da wir gemäß Lemma 2.7 jeder sphärischen Kontraktion S eine vollständig positive, kontraktive und w^*-stetige Abbildung ϕ_S zuordnen können, deren Fixpunktmenge gerade mit der Menge aller S-Toeplitzoperatoren übereinstimmt, liefert uns das folgende Lemma ein fundamentales Hilfsmittel zur Konstruktion einer vollständig positiven, kontraktiven Projektion, deren Bild mit der Menge $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ aller Toeplitzoperatoren einer Familie $\mathcal{F}$ sphärischer Kontraktionen übereinstimmt.

Lemma 2.15. *Sei $(\phi_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ eine kommutative Familie vollständig positiver, kontraktiver und w^*-stetiger Abbildungen auf $B(\mathcal{H})$. Dann existiert eine vollständig positive, kontraktive Abbildung $\Phi : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ mit $\Phi \circ \Phi = \Phi$ und*

$$Ran(\Phi) = \{X \in B(\mathcal{H}) \mid \phi_\alpha(X) = X \text{ für alle } \alpha \in \Gamma\}.$$

Gilt zusätzlich $\phi_\alpha(1) = 1$ für alle $\alpha \in \Gamma$, so ist auch Φ unital.

Beweis. Sei S die von $\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ erzeugte kommutative Halbgruppe aller endlichen Produkte von Elementen aus $\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$. Da alle ϕ_α vollständig positive, kontraktive und w^*-stetige Abbildungen sind, gilt dasselbe für die Abbildungen $\psi \in S$. Ferner rechnet man leicht nach, dass

$$\begin{aligned} & \{X \in B(\mathcal{H}) \mid \phi_\alpha(X) = X \text{ für alle } \alpha \in \Gamma\} \\ = \; & \{X \in B(\mathcal{H}) \mid \psi(X) = X \text{ für alle } \psi \in S\} \end{aligned}$$

gilt. Wir betrachten nun die Abbildung

$$\gamma : S \times B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H}),\ (\psi, X) \mapsto \psi(X).$$

Da S kommutativ ist, gilt nach [12, Théorème 2], dass S mittelbar ist. Also existiert ein invariantes Mittel $\mu : \ell^\infty(S) \to \mathbb{C}$, das heißt, ein positives lineares Funktional mit $\mu(1) = 1$ und $\mu(f_\psi) = \mu(f)$ für alle $\psi \in S$, wobei $f_\psi(x) = f(x\psi)$ für $x \in S$. Man beachte dazu, dass S mit der diskreten Topologie versehen ist, weshalb $\ell^\infty(S) = C(S)$ gilt. Sei nun $T \in B(\mathcal{H})$ beliebig. Wir definieren die sesquilineare Abbildung

$$[\cdot,\cdot]_T : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C},\ (\xi, \eta) \mapsto [\xi, \eta]_T = \mu(\langle \gamma(\cdot\,, T)\xi, \eta\rangle).$$

Da die Abbildungen aus S Kontraktionen sind, ist für $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ und $\psi \in S$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\langle \gamma(\psi, T)\xi, \eta\rangle| &\leq \|\gamma(\psi, T)\| \cdot \|\xi\| \cdot \|\eta\| \\ &= \|\psi(T)\| \cdot \|\xi\| \cdot \|\eta\| \\ &\leq \|T\| \cdot \|\xi\| \cdot \|\eta\| \end{aligned}$$

erfüllt. Folglich ist $\sup_{\psi\in S} |\langle \gamma(\psi, T)\xi, \eta\rangle| \leq \|T\| \cdot \|\xi\| \cdot \|\eta\|$ und damit

$$\langle \gamma(\cdot\,, T)\xi, \eta\rangle \in \ell^\infty(S)$$

für alle $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Also ist $[\cdot,\cdot]_T$ wohldefiniert. Die Sesquilinearität folgt leicht aus der Linearität von μ und $\gamma(\psi, T)$ $(\psi \in S)$ und aus der Sesquilinearität von $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Da zusätzlich $|[\xi, \eta]_T| \leq \|T\| \cdot \|\xi\| \cdot \|\eta\|$ für $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ gilt, ist $[\cdot,\cdot]_T$ auch beschränkt und nach [7, Prop. II.2.2] existiert genau ein $\Phi(T) \in B(\mathcal{H})$ mit $\|\Phi(T)\| \leq \|T\|$ und

$$\langle \Phi(T)\xi, \eta\rangle = [\xi, \eta]_T \quad (\xi, \eta \in \mathcal{H}).$$

Die induzierte Abbildung $\Phi : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H}), T \mapsto \Phi(T)$ ist linear und kontraktiv. Wir wollen zeigen, dass Φ vollständig positiv ist. Ist also $n \in \mathbb{N}$ beliebig und $(T_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n(B(\mathcal{H}))$ eine positive Matrix, so sieht man mit der Linearität von μ leicht, dass

$$\begin{aligned}
\langle \Phi_n(T_{ij})(x_i)_{i=1}^n, (x_i)_{i=1}^n \rangle &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \Phi(T_{ij})x_j, x_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu(\langle \gamma(\cdot\,, T_{ij})x_j, x_i \rangle) \\
&= \mu(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \gamma(\cdot\,, T_{ij})x_j, x_i \rangle)
\end{aligned}$$

für $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{H}$ gilt. Da μ positiv ist, bleibt somit zu zeigen, dass

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \big\langle \gamma(\psi, T_{ij})x_j, x_i \big\rangle \geq 0$$

für alle $\psi \in S$ ist. Dies folgt aber leicht aus der vollständigen Positivität von allen $\psi \in S$, denn es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \gamma(\psi, T_{ij})x_j, x_i \rangle &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \psi(T_{ij})x_j, x_i \rangle \\
&= \langle \psi_n((T_{ij})_{i,j})(x_i), (x_i) \rangle \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Folglich ist Φ eine vollständig positive Abbildung. Ist ferner $T \in B(\mathcal{H})$ mit $\psi(T) = T$ für alle $\psi \in S$, so gilt wegen $\gamma(\psi, T) = \psi(T)$ auch $\gamma(\cdot\,, T) \equiv T$, also folgt

$$\begin{aligned}
\langle \Phi(T)\xi, \eta \rangle &= \mu\big(\langle \gamma(\cdot\,, T)\xi, \eta \rangle\big) \\
&= \mu\big(\psi \mapsto \langle T\xi, \eta \rangle\big) \\
&= \langle T\xi, \eta \rangle \mu(1) \\
&= \langle T\xi, \eta \rangle \quad (\xi, \eta \in \mathcal{H}).
\end{aligned}$$

Damit ist $\Phi(T) = T$ und insbesondere auch $T \in Ran(\Phi)$ gezeigt. Seien nun $T \in B(\mathcal{H})$ und $t \in S$ beliebig. Da $t : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ w^*-stetig ist, existiert eine $\|.\|$-stetige lineare Abbildung $\psi_t : T(\mathcal{H}) \to T(\mathcal{H})$ mit $tr(t(T)L) = tr(T\psi_t(L))$ für alle $L \in T(\mathcal{H})$. Ist ferner L ein selbstadjungierter Operator endlichen Ranges und $\{e_i \mid i = 1, \dots, r\}$ eine Orthonormalbasis von $Ran(L)$, so ergänzen wir $\{e_i \mid i = 1, \dots, r\}$ zu einer Orthonormalbasis $\{e_j \mid j \in I\}$ von $\mathcal{H}$ und erhalten

$$\begin{aligned} tr(\Phi(T)L) &= \sum_{j\in I} \big\langle \Phi(T)Le_j, e_j \big\rangle \\ &= \sum_{j\in I} \big\langle e_j, L\Phi(T)^* e_j \big\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{r} \big\langle e_i, L\Phi(T)^* e_i \big\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{r} \big[Le_i, e_i\big]_T \\ &= \sum_{i=1}^{r} \mu\big(\langle \gamma(\cdot\,, T)Le_i, e_i\rangle\big) \\ &= \mu\big(\sum_{i=1}^{r} \langle \gamma(\cdot\,, T)Le_i, e_i\rangle\big) \\ &= \mu\big(tr(\gamma(\cdot\,, T)L)\big). \end{aligned}$$

Da die linke und die rechte Seite dieser Gleichung linear in L sind, gilt die Formel $tr(\Phi(T)L) = \mu\big(tr(\gamma(\cdot\,, T)L)\big)$ für alle Operatoren $L \in B(\mathcal{H})$ endlichen Ranges. Zu beliebigem $L \in T(\mathcal{H})$ existiert aber eine Folge $(L_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Operatoren endlichen Ranges mit $\|L - L_k\|_1 \to 0$ für $k \to \infty$. Wegen

$$\begin{aligned} \|\gamma(\psi, T)L - \gamma(\psi, T)L_k\|_1 &\le \|\gamma(\psi, T)\|\|L - L_k\|_1 \\ &\le \|T\|\|L - L_k\|_1 \quad (\psi \in S, k \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

folgt schließlich

$$\begin{aligned} tr\big(\Phi(T)L\big) &= \lim_{k\to\infty} tr\big(\Phi(T)L_k\big) \\ &= \lim_{k\to\infty} \mu\big(tr(\gamma(\cdot\,, T)L_k)\big) \\ &= \mu\big(tr(\gamma(\cdot\,, T)L)\big) \end{aligned}$$

für alle $L \in T(\mathcal{H})$, woraus man leicht

$$tr\big(t(\Phi(T))L\big) = tr\big(\Phi(T)\psi_t(L)\big) = \mu\big(tr(\gamma(\cdot\,, T)\psi_t(L))\big) = \mu\big(tr(\gamma(t, \gamma(\cdot\,, T))L)\big)$$

für $L \in T(\mathcal{H})$ erhält. Hierbei steht $tr\big(\gamma(t, \gamma(\cdot\,, T))L\big)$ für die Funktion

$$S \to \mathbb{C},\ s \mapsto tr\big(t(s(T))L\big) = tr\big((ts)(T)L\big).$$

Da μ ein invariantes Mittel auf $\ell^\infty(S)$ ist, ergibt dies

$$tr\big(t(\Phi(T))L\big) = \mu\big(tr(\gamma(\cdot\,,T)L)\big) = tr(\Phi(T)L) \quad (L \in T(\mathcal{H})),$$

was äquivalent zu $t(\Phi(T)) = \Phi(T)$ ist, da $(B(\mathcal{H}), T(\mathcal{H}), tr)$ ein Dualsystem ist. Wie oben gesehen folgt hieraus auch, dass $\Phi(\Phi(T)) = \Phi(T)$ ist. Sind zusätzlich alle Abbildungen ϕ_α, $\alpha \in \Gamma$ unital, so folgt leicht $1 \in Ran(\Phi)$, also ist $\Phi(1) = 1$. Damit sind alle Behauptungen bewiesen. □

Ist $(\phi_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ eine Familie kommutierender, vollständig positiver, kontraktiver und w^*-stetiger Abbildungen auf $B(\mathcal{H})$ und Φ wie in Lemma 2.15, so existiert genau dann ein $X \neq \{0\}$ mit $\phi_\alpha(X) = X$ für alle $\alpha \in \Gamma$, wenn $\Phi(1) \neq 0$ ist. Dies erhält man unmittelbar aus der Tatsache, dass

$$Ran(\Phi) = \{X \in B(\mathcal{H}) \mid \phi_\alpha(X) = X \text{ für alle } \alpha \in \Gamma\}$$

und $\|\Phi\| = \|\Phi(1)\|$ ist. Außerdem ist zu bemerken, dass die Abbildung Φ nach Korollar 2.13 auf der von den gemeinsamen Fixpunkten der Familie $(\phi_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ erzeugten unitalen C*-Algebra eindeutig bestimmt ist.
Für eine Indexmenge Γ definieren wir die Menge

$$N = N_\Gamma = \{j : \Gamma \to \mathbb{N} \mid j(\alpha) = 0 \text{ für fast alle } \alpha \in \Gamma\}.$$

Bezüglich der partiellen Ordnung $j_1 \leq j_2$, falls $j_1(\alpha) \leq j_2(\alpha)$ für alle $\alpha \in \Gamma$, ist die Menge N nach oben gerichtet. Ist $(\phi_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ eine Familie kommutierender, vollständig positiver, kontraktiver und w^*-stetiger Abbildungen auf $B(\mathcal{H})$, so schreiben wir

$$\phi^j = \prod_{\alpha\in\Gamma} \phi_\alpha^{j(\alpha)}$$

für $j \in N$. Sind $j, k \in N$ beliebig, so ist offensichtlich $\phi^{j+k} = \phi^j \phi^k$.

Lemma 2.16. *Sei $(\phi_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ eine vertauschende Familie vollständig positiver, kontraktiver und w^*-stetiger Abbildungen auf $B(\mathcal{H})$. Dann existiert der Grenzwert*

$$Q = SOT\text{-}\lim_j \phi^j(1).$$

Ferner gilt speziell in der Situation von Lemma 2.15

$$\Phi(1) = SOT\text{-}\lim_j \phi^j(1).$$

Beweis. Wie im Beweis von Lemma 2.15 bezeichne $S = \{\phi^j \mid j \in N\}$ die kommutative Halbgruppe aller endlichen Produkte von Elementen aus $\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$. Da für $j_1 \leq j_2$ die Abschätzung $\phi^{j_2}(1) = \phi^{j_1}(\phi^{j_2-j_1}(1)) \leq \phi^{j_1}(1)$ gilt, ist $(\phi^j(1))_{j\in N}$ ein monoton fallendes Netz positiver Kontraktionen. Also existiert der Grenzwert

$$Q = \text{SOT-}\lim_j \phi^j(1).$$

Sei nun $\mu : \ell^\infty(S) \to \mathbb{C}$ ein invariantes Mittel. Nach dem Beweis von Lemma 2.15 ist für $\xi \in \mathcal{H}$ die Funktion

$$f = f_\xi : S \to \mathbb{C}, \quad s \mapsto \langle s(1)\xi, \xi\rangle$$

beschränkt. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Definition von Q existiert ein $j_0 \in N$ so, dass für alle $j \in N$ mit $j \geq j_0$ die Abschätzung

$$\langle Q\xi, \xi\rangle \leq \langle \phi^j(1)\xi, \xi\rangle \leq \langle Q\xi, \xi\rangle + \varepsilon$$

erfüllt ist. Insbesondere gilt

$$\langle Q\xi, \xi\rangle \leq \langle \phi^{k+j_0}(1)\xi, \xi\rangle \leq \langle Q\xi, \xi\rangle + \varepsilon$$

für alle $k \in N$. Also ist

$$\langle Q\xi, \xi\rangle \leq f_{j_0}(s) \leq \langle Q\xi, \xi\rangle + \varepsilon$$

nach Definition von S. Folglich erhält man

$$\langle Q\xi, \xi\rangle \leq \mu(f) = \mu(f_{j_0}) \leq \langle Q\xi, \xi\rangle + \varepsilon$$

durch Anwenden von μ. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, liefert dies $\mu(f) = \langle Q\xi, \xi\rangle$. Also gilt in der Situation von Lemma 2.15 die Identität $\Phi(1) = \text{SOT-}\lim_j \phi^j(1)$. □

Nach Proposition 2.3 erfüllt die von einer sphärischen Kontraktion S induzierte vollständig positive Abbildung ϕ_S die Vertauschungsrelation

$$\phi_S(A^*XB) = A^*\phi_S(X)B$$

für $A, B \in S'$ und $X \in B(\mathcal{H})$. Wie wir in der folgenden Proposition zeigen werden, übertragen sich Vertauschungsrelationen dieser Art auf die in Lemma 2.15 konstruierte Projektion Φ.

Proposition 2.17. *Seien* $(\phi_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ *eine Familie kommutierender, vollständig positiver, kontraktiver und* w^**-stetiger Abbildungen* $\phi_\alpha : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ *und* $\Phi : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ *wie in Lemma 2.15. Sind* $A, B \in B(\mathcal{H})$ *so, dass* $\phi_\alpha(AXB) = A\phi_\alpha(X)B$ *für alle* $X \in B(\mathcal{H})$ *und* $\alpha \in \Gamma$ *gilt, so ist auch*

$$\Phi(AXB) = A\Phi(X)B$$

für alle $X \in B(\mathcal{H})$.

Beweis. Seien $X \in B(\mathcal{H})$ beliebig und S die von $\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ erzeugte Halbgruppe aller endlichen Produkte von Elementen aus $\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$. Dann folgt aus der Voraussetzung leicht, dass $\psi(AXB) = A\psi(X)B$ für alle $\psi \in S$ gilt. Wir betrachten die im Beweis von Lemma 2.15 auftretenden Abbildungen $\gamma : S\times B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ und $\mu : \ell^\infty(S) \to \mathbb{C}$. Hier folgt unmittelbar $\gamma(\cdot\,, AXB) = A\gamma(\cdot\,, X)B$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\langle\Phi(AXB)\xi, \eta\rangle &= \mu\left(\langle\gamma(\cdot\,, AXB)\xi, \eta\rangle\right)\\
&= \mu\left(\langle A\gamma(\cdot\,, X)B\xi, \eta\rangle\right)\\
&= \mu\left(\langle\gamma(\cdot\,, X)B\xi, A^*\eta\rangle\right)\\
&= \langle\Phi(X)B\xi, A^*\eta\rangle\\
&= \langle A\Phi(X)B\xi, \eta\rangle
\end{aligned}$$

für alle $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. □

2.3 Kommutative Familien sphärischer Kontraktionen

Wir kommen nun zu den Hauptresultaten der vorliegenden Arbeit. In Abschnitt 2.1 wurde gezeigt, dass wir einer sphärischen Kontraktion S eine vollständig positive, kontraktive und w^*-stetige Abbildung ϕ_S zuordnen können, deren Fixpunktmenge mit den S-Toeplitzoperatoren übereinstimmt. Wir wollen uns in diesem Abschnitt mit vertauschenden Familien $\mathcal{F} = (S_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ sphärischer Kontraktionen und den zugehörigen Abbildungen ϕ_{S_α}, $\alpha \in \Gamma$ befassen. Anhand der in Abschnitt 2.2 bewiesenen Ergebnisse können wir die Existenz einer vollständig positiven kontraktiven Projektion Φ folgern, deren Bild genau die gemeinsame Fixpunktmenge aller ϕ_{S_α}, $\alpha \in \Gamma$, ist. Letzteres ist aber definitionsgemäß gerade die Menge $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ aller $\mathcal{F}$-Toeplitzoperatoren der Familie $\mathcal{F} = (S_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$. Diese Beobachtungen sind Gegenstand des folgenden Lemmas.

Lemma 2.18. *Sei $\mathcal{F} = (S_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ eine kommutierende Familie sphärischer Kontraktionen auf $\mathcal{H}$ mit $S_\alpha = (T_{j,\alpha})_{j\in J_\alpha}$ für $\alpha \in \Gamma$. Dann existiert eine vollständig postive, kontraktive Abbildung $\Phi : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ mit $\Phi \circ \Phi = \Phi$ und $Ran(\Phi) = \mathcal{T}(\mathcal{F})$ so, dass für $X \in B(\mathcal{H})$ und $A, B \in \mathcal{F}'$ die Gleichung $\Phi(A^*XB) = A^*\Phi(X)B$ erfüllt ist. Ist $\mathcal{F}$ sogar eine kommutierende Familie sphärischer Isometrien, so ist Φ unital.*

Beweis. Wir betrachten für $\alpha \in \Gamma$ die unitale Abbildung $\phi_\alpha = \phi_{S_\alpha}$. Nach Lemma 2.7 sind alle Abbildungen ϕ_α, $\alpha \in \Gamma$, w^*-stetig und vollständig positiv. Da die Familie $(S_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ kommutiert, ist mit Proposition 2.8 auch $(\phi_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ vertauschend, und weil $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ gerade die gemeinsame Fixpunktmenge der Familie $(\phi_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ ist, folgt mit Lemma 2.15 nun die Existenz einer vollständig positiven Abbildung $\Phi : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ mit $\Phi \circ \Phi = \Phi$ und $Ran(\Phi) = \mathcal{T}(\mathcal{F})$. Sind ferner $A, B \in \mathcal{F}'$ und $X \in B(\mathcal{H})$, so erhält man mit Proposition 2.3, dass $\phi_\alpha(A^*XB) = A^*\phi_\alpha(X)B$ für alle $\alpha \in \Gamma$ gilt. Mit Proposition 2.17 erhält man schließlich $\Phi(A^*XB) = A^*\Phi(X)B$. Im Falle einer kommutierenden Familie $\mathcal{F}$ sphärischer Isometrien sind bekanntlich alle ϕ_α, $\alpha \in \Gamma$, unital und mit Lemma 2.15 folgt das gleiche auch für Φ. □

Bemerkung 2.19. Sofern nicht anders angegeben, seien im folgenden stets $\mathcal{F} = (S_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ eine kommutierende Familie sphärischer Kontraktionen $S_\alpha = (T_{j,\alpha})_{j\in J_\alpha}$ auf $\mathcal{H}$ und $\Phi : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ eine wie im Beweis von Lemma 2.18 konstruierte Abbildung. Nach Korollar 2.13 ist die Einschränkung Φ_0 von Φ auf die von $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ erzeugte unitale C*-Unteralgebra $C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F}))$ von $B(\mathcal{H})$ unabhängig von der Wahl von Φ. Wir betrachten die minimale Stinespring-Dilatation $(\pi, V, \widehat{\mathcal{H}})$ von Φ_0 und erhalten

$$\Phi_0(X) = V^*\pi(X)V$$

für $X \in C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F}))$. Da π unital ist, folgt daraus leicht, dass $\Phi(1) = \Phi_0(1) = V^*V$ gilt. Insbesondere sind die Voraussetzungen aus Lemma 2.12 erfüllt, und da $Ran(\Phi) = \mathcal{T}(\mathcal{F})$ als Menge aller gemeinsamen Fixpunkte einer Familie von w^*-stetigen Abbildungen auch w^*-abgeschlossen ist, ist Lemma 2.14 ebenfalls anwendbar. Folglich ist die Abbildung

$$\rho : \pi(C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F}))) \to B(\mathcal{H}), \quad \pi(X) \mapsto V^*\pi(X)V \quad (X \in C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F}))),$$

eine w^*-stetige vollständige Isometrie mit $Ran(\rho) = \mathcal{T}(\mathcal{F})$ sowie $\pi \circ \rho = id$ auf $\pi(C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F})))$, und $\pi(C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F})))$ ist eine von Neumann-Unteralgebra von $B(\widehat{\mathcal{H}})$.

Als nächstes wollen wir zeigen, dass im Fall $\mathcal{T}(\mathcal{F}) \neq \{0\}$ zu $\mathcal{F}$ eine Familie $\widehat{\mathcal{F}} = ((\widehat{T}_{j,\alpha})_{j\in J_\alpha})_{\alpha\in\Gamma}$ normaler sphärischer Isometrien auf $\widehat{\mathcal{H}}$ existiert so, dass V für alle $\alpha \in \Gamma$ und $j \in J_\alpha$ die Operatoren $T_{j,\alpha}$ und $\widehat{T}_{j,\alpha}$ vertauscht. Insbesondere werden wir hieraus folgern, dass kommutative Familien sphärischer Isometrien subnormal sind.

Satz 2.20. *Ist $\mathcal{T}(\mathcal{F}) \neq \{0\}$, so existiert eine vertauschende Familie $\widehat{\mathcal{F}} = (\widehat{S}_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ normaler sphärischer Isometrien $\widehat{S}_\alpha = (\widehat{T}_{j,\alpha})_{j\in J_\alpha}$ auf $\widehat{\mathcal{H}}$ so, dass die Vertauschungsrelation*

$$\widehat{T}_{j,\alpha}V = VT_{j,\alpha}$$

für alle $\alpha \in \Gamma$ und $j \in J_\alpha$ erfüllt ist.

Beweis. Sei also $\mathcal{T}(\mathcal{F}) \neq \{0\}$. Wie wir bereits im Anschluss an Lemma 2.15 beobachtet haben, ist dann $Q = \Phi(1) \neq 0$. Wir definieren nun $\widehat{T}_{j,\alpha} = \pi(QT_{j,\alpha})$ für $j \in J_\alpha$, $\alpha \in \Gamma$ (man beachte dazu, dass nach Proposition 2.3 alle $QT_{j,\alpha} \in \mathcal{T}(\mathcal{F}) \subset C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F}))$ sind). Entsprechend setzen wir $\widehat{S}_\alpha = (\widehat{T}_{j,\alpha})_{j\in J_\alpha}$ und $\widehat{\mathcal{F}} = (\widehat{S}_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$. Wir wollen zeigen, dass $\widehat{S}_\alpha$ für jedes $\alpha \in \Gamma$ eine sphärische Isometrie ist. Seien dazu $\alpha \in \Gamma$ und $j \in J_\alpha$ beliebig. Da bekanntlich $\pi \circ \rho = id_{\pi(C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F})))}$ ist, folgt

$$\pi(\Phi(X)) = \pi(\rho(\pi(X))) = \pi(X) \quad (X \in C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F}))),$$

und mit Korollar 2.10 sieht man leicht, dass

$$\begin{aligned}
\widehat{T}^*_{j,\alpha}\pi(X)\widehat{T}_{j,\alpha} &= \pi(T^*_{j,\alpha}QXQT_{j,\alpha}) \\
&= \pi(\Phi(T^*_{j,\alpha}QXQT_{j,\alpha})) \\
&= \pi(T^*_{j,\alpha}\Phi(QXQ)T_{j,\alpha}) \\
&= \pi(T^*_{j,\alpha}\Phi(X)T_{j,\alpha})
\end{aligned}$$

für alle $X \in C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F}))$ gilt. Mit $X = 1$ liefert dies für jede endliche Teilmenge F von J_α die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in F}\widehat{T}^*_{j,\alpha}\widehat{T}_{j,\alpha} &= \sum_{j\in F}\pi(T^*_{j,\alpha}QT_{j,\alpha}) \\
&\leq \sum_{j\in F}\pi(T^*_{j,\alpha}T_{j,\alpha}) \\
&= \pi(\sum_{j\in F}T^*_{j,\alpha}T_{j,\alpha}) \\
&\leq \pi(1) = 1,
\end{aligned}$$

da $Q \leq 1$ und π ein unitaler $*$-Homomorphismus ist. Also ist $\sum_{j\in J_\alpha} \widehat{T}_{j,\alpha}^* \widehat{T}_{j,\alpha}$ nach Proposition 2.2 SOT-konvergent, und es folgt

$$\sum_{j\in J_\alpha} \widehat{T}_{j,\alpha}^* \widehat{T}_{j,\alpha} \leq 1.$$

Sei nun $X \in C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F}))$ und $F \subset J_\alpha$ endlich. Dann folgt die Existenz von $Z = w^*\text{-}\sum_{j\in J_\alpha} \widehat{T}_{j,\alpha}^* \pi(X) \widehat{T}_{j,\alpha}$ erneut mit Proposition 2.2 und der anschließenden Bemerkung, und da $\pi(C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F}))) \subset B(\widehat{\mathcal{H}})$ eine von Neumann-Unteralgebra ist, ist $Z \in \pi(C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F})))$. Eine Anwendung von Lemma 2.18 liefert

$$\begin{aligned}
\rho\big(\sum_{j\in F} \widehat{T}_{j,\alpha}^* \pi(X) \widehat{T}_{j,\alpha}\big) &= \rho\Big(\pi\big(\sum_{j\in F} T_{j,\alpha}^* \Phi(X) T_{j,\alpha}\big)\Big) \\
&= \Phi\big(\sum_{j\in F} T_{j,\alpha}^* \Phi(X) T_{j,\alpha}\big) \\
&= \sum_{j\in F} T_{j,\alpha}^* \Phi(X) T_{j,\alpha}.
\end{aligned}$$

Durch Übergang zum Limes über alle endlichen Teilmengen von J_α erhält man daraus mit der w^*-Stetigkeit von ρ schließlich

$$\begin{aligned}
\rho(Z) &= \rho\big(w^*\text{-}\lim_{F\subset J_\alpha} \sum_{j\in F} \widehat{T}_{j,\alpha}^* \pi(X) \widehat{T}_{j,\alpha}\big) \\
&= w^*\text{-}\lim_{F\subset J_\alpha} \sum_{j\in F} T_{j,\alpha}^* \Phi(X) T_{j,\alpha} \\
&= \phi_\alpha(\Phi(X)) \\
&= \Phi(X) = \rho(\pi(X)),
\end{aligned}$$

und mit der Injektivität von ρ folgt $Z = \pi(X)$. Also gilt

$$w^*\text{-}\sum_{j\in J_\alpha} \widehat{T}_{j,\alpha}^* \pi(X) \widehat{T}_{j,\alpha} = \pi(X).$$

Indem man $X = 1_{\mathcal{H}}$ wählt, sieht man außerdem, dass $w^*\text{-}\sum_{j\in J_\alpha} \widehat{T}_{j,\alpha}^* \widehat{T}_{j,\alpha} = 1_{\widehat{\mathcal{H}}}$ gilt, also ist $\widehat{S}_\alpha$ eine sphärische Isometrie. Ist nun $\pi(X)$ eine Orthogonalprojektion, so ist $Ker(\pi(X))$ ein invarianter Teilraum für alle $\widehat{T}_{j,\alpha}$, $j \in J_\alpha$, $\alpha \in \Gamma$, denn für alle $\alpha \in \Gamma$ und $h \in Ker(\pi(X))$ gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in J_\alpha} \|\pi(X)\widehat{T}_{j,\alpha} h\|^2 &= \sum_{j\in J_\alpha} \big\langle \pi(X)\widehat{T}_{j,\alpha} h, \pi(X)\widehat{T}_{j,\alpha} h\big\rangle \\
&= \sum_{j\in J_\alpha} \big\langle \widehat{T}_{j,\alpha}^* \pi(X) \widehat{T}_{j,\alpha} h, h\big\rangle \\
&= \langle \pi(X) h, h\rangle = 0
\end{aligned}$$

und es folgt $\pi(X)\widehat{T}_{j,\alpha}h = 0$ für alle $j \in J_\alpha$, $\alpha \in \Gamma$. Wir wollen als nächstes zeigen, dass alle $\widehat{T}_{j,\alpha}$ im Zentrum der von Neumann-Algebra $\pi(C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F})))$ liegen. Zunächst sieht man leicht, dass $\pi(X)\widehat{T}_{j,\alpha} = \widehat{T}_{j,\alpha}\pi(X)$ für alle Orthogonalprojektionen $\pi(X) \in \pi(C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F})))$ gilt, denn sowohl $Ker(\pi(X))$ als auch $Ran(\pi(X)) = Ker(\pi(1-X))$ sind invariant unter allen $\widehat{T}_{j,\alpha}$, $\alpha \in \Gamma, j \in J_\alpha$. Mit [8, Propostition 13.3] erhält man außerdem, dass

$$\overline{LH\{\pi(X) \in \pi(C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F}))) \mid \pi(X) \text{ Orthogonalprojektion }\}}^{\|\cdot\|} = \pi(C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F})))$$

gilt, woraus die Behauptung unmittelbar folgt. Insbesondere sind alle Operatoren $\widehat{T}_{j,\alpha}$, $j \in J_\alpha$, $\alpha \in \Gamma$, vertauschend und normal. Da ferner für alle $X \in C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F}))$ und alle $A \in \mathcal{F}'$ die Vertauschungsrelation $\Phi(XQA) = \Phi(XQ)A = \Phi(X)A$ erfüllt ist, liefert Lemma 1.6 die Identität

$$\pi(QA)V = VA$$

für alle $A \in \mathcal{F}'$. Unmittelbar erhält man nun $\widehat{T}_{j,\alpha}V = VT_{j,\alpha}$ für alle $\alpha \in \Gamma$ und $j \in J_\alpha$. Damit ist die Behauptung gezeigt. $\square$

Korollar 2.21. *Sei $\mathcal{F} = (S_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ eine vertauschende Familie sphärischer Isometrien auf $\mathcal{H}$ mit $S_\alpha = (T_{j,\alpha})_{j\in J_\alpha}$ für $\alpha \in \Gamma$. Dann existiert ein Hilbertraum $\widehat{\mathcal{H}} \supset \mathcal{H}$ und eine kommutierende Familie $\widehat{\mathcal{F}} = (\widehat{S}_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ normaler sphärischer Isometrien $\widehat{S}_\alpha = (\widehat{T}_{j,\alpha})_{j\in J_\alpha}$ auf $\widehat{\mathcal{H}}$, die $\mathcal{H}$ invariant lässt und so, dass $T_{j,\alpha} = \widehat{T}_{j,\alpha}|_{\mathcal{H}}$ für alle $\alpha \in \Gamma$ und $j \in J_\alpha$ gilt. Insbesondere ist $\mathcal{F}$ subnormal.*

Beweis. Wir betrachten erneut für $\alpha \in \Gamma$ die Abbildungen $\phi_\alpha = \phi_{S_\alpha}$. Da die Familie $\mathcal{F} = (S_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ eine kommutative Familie sphärischer Isometrien ist, sind alle ϕ_α, $\alpha \in \Gamma$, unital. Also ist auch die Abbildung $\Phi : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ aus Lemma 2.18 unital, insbesondere ist $\mathcal{T}(\mathcal{F}) = Ran(\Phi) \neq \{0\}$. Folglich existieren nach Satz 2.20 ein Hilbertraum $\widehat{\mathcal{H}}$ und eine kommutative Familie $\widehat{\mathcal{F}} = (\widehat{S}_\alpha)_{\alpha\in\Gamma} = ((\widehat{T}_{j,\alpha})_{j\in J_\alpha})_{\alpha\in\Gamma}$ normaler sphärischer Isometrien auf $\widehat{\mathcal{H}}$ so, dass die Vertauschungsrelation

$$\widehat{T}_{j,\alpha}V = VT_{j,\alpha}$$

für alle $\alpha \in \Gamma$ und $j \in J_\alpha$ erfüllt ist. Wegen $V^*V = V^*\pi(1)V = \Phi(1) = 1$ ist V eine Isometrie, und wir können $\mathcal{H}$ vermöge V mit $V\mathcal{H}$ identifizieren. Es folgt die Behauptung. $\square$

Das folgende Lemma liefert eine Minimalitätsaussage für die im Beweis von Satz 2.20 konstruierte Familie $\widehat{\mathcal{F}}$ normaler sphärischer Isometrien auf $\widehat{\mathcal{H}}$. Wir zeigen, dass der Hilbertraum $\widehat{\mathcal{H}}$ der kleinste reduzierende Teilraum für $\widehat{\mathcal{F}}$ mit $V\mathcal{H} \subset \widehat{\mathcal{H}}$ ist. Im Falle einer vertauschenden Familie $\mathcal{F}$ sphärischer Isometrien erhält man damit gerade die Minimalität der normalen Erweiterung $(\widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathcal{H}})$ von $\mathcal{F}$.

Lemma 2.22. *Für die im Beweis von Satz 2.20 konstruierte Familie $\widehat{\mathcal{F}}$ normaler sphärischer Isometrien auf $\widehat{\mathcal{H}}$ gelten:*

(a) $\widehat{\mathcal{H}}$ ist der kleinste reduzierende Teilraum für $\widehat{\mathcal{F}}$, der $V\mathcal{H}$ enthält.

*(b) Das Bild $\pi(C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F})))$ der *-Darstellung π stimmt mit dem in $B(\widehat{\mathcal{H}})$ gebildeten Kommutanten der unitalen C^*-Algebra $C^*(\widehat{\mathcal{F}})$ überein.*

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass ein Teilraum $\mathcal{K}$ von $\widehat{\mathcal{H}}$ genau dann $\widehat{\mathcal{F}}$ reduziert, wenn er $C^*(\widehat{\mathcal{F}})$ reduziert. Ist nun $\mathcal{K}$ der kleinste reduzierende Teilraum von $\widehat{\mathcal{H}}$ für $C^*(\widehat{\mathcal{F}})$ mit $V\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$, so ist zu zeigen, dass dann $\widehat{\mathcal{H}} = \mathcal{K}$ gilt. Wir definieren dazu die Abbildung

$$\rho_{\mathcal{K}} : \pi(C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F}))) \to B(\mathcal{K}),\ \pi(X) \mapsto P_{\mathcal{K}}\pi(X)|_{\mathcal{K}}.$$

Nach dem Beweis von Lemma 2.12 ist $\pi(C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F}))) \subset \widehat{\mathcal{F}}' = C^*(\widehat{\mathcal{F}})'$, und da $\mathcal{K}$ reduzierend für $C^*(\widehat{\mathcal{F}})$, folgt

$$Ran(\rho_{\mathcal{K}}) = P_{\mathcal{K}}\pi(C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F})))|_{\mathcal{K}} \subset (C^*(\widehat{\mathcal{F}})|_{\mathcal{K}})'.$$

Ferner ist $\rho_{\mathcal{K}}$ nach [20, Bemerkungen vor Proposition 3.6] vollständig positiv und nach [20, Proposition 3.6] auch vollständig kontraktiv, denn bekanntlich ist $\|\rho_{\mathcal{K}}\|_{cb} = \|\rho_{\mathcal{K}}(1)\| = 1$. Wir betrachten nun die vollständig kontraktive Abbildung

$$\rho_{\mathcal{H}} : (C^*(\widehat{\mathcal{F}})|_{\mathcal{K}})' \to B(\mathcal{H}),\ Y \mapsto V^*YV$$

und zeigen, dass $Ran(\rho_{\mathcal{H}}) \subset \mathcal{T}(\mathcal{F})$ ist. Seien dazu $Y \in (C^*(\widehat{\mathcal{F}})|_{\mathcal{K}})'$ und $\alpha \in \Gamma$ beliebig. Da $\widehat{T}_{j,\alpha}V = VT_{j,\alpha}$ für alle $j \in J_\alpha$ gilt, folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in J_\alpha} \langle T_{j,\alpha}^* V^*YVT_{j,\alpha}x, y\rangle &= \sum_{j\in J_\alpha} \langle YVT_{j,\alpha}x, VT_{j,\alpha}y\rangle \\
&= \sum_{j\in J_\alpha} \langle Y\widehat{T}_{j,\alpha}Vx, \widehat{T}_{j,\alpha}Vy\rangle \\
&= \sum_{j\in J_\alpha} \langle \widehat{T}_{j,\alpha}YVx, \widehat{T}_{j,\alpha}Vy\rangle \\
&= \langle YVx, Vy\rangle \\
&= \langle V^*YVx, y\rangle
\end{aligned}$$

für $x, y \in \mathcal{H}$. Außerdem erhalten wir $\rho_{\mathcal{H}}\rho_{\mathcal{K}} = \rho$, denn für alle $Y \in \pi(C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F})))$ ist wegen $V\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$ die Identität

$$\begin{aligned} \big\langle(\rho_{\mathcal{H}}\rho_{\mathcal{K}}(Y))x, y\big\rangle &= \big\langle V^* P_{\mathcal{K}} Y|_{\mathcal{K}} V x, y\big\rangle \\ &= \big\langle YVx, Vy\big\rangle \\ &= \big\langle \rho(Y)x, y\big\rangle \end{aligned}$$

für alle $x, y \in \mathcal{H}$ erfüllt. Bekanntlich ist aber $\rho = \rho_{\mathcal{H}}\rho_{\mathcal{K}}$ eine vollständige Isometrie, und da $\rho_{\mathcal{H}}$ und $\rho_{\mathcal{K}}$ vollständig kontraktiv sind, ist auch $\rho_{\mathcal{K}}$ vollständig isometrisch. Wir wollen als nächstes zeigen, dass die Abbildung

$$\rho_{\mathcal{K}} : \pi(C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F}))) \to (C^*(\widehat{\mathcal{F}})|_{\mathcal{K}})'$$

auch surjektiv ist. Da $\rho : \pi(C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F}))) \to \mathcal{T}(\mathcal{F})$ surjektiv ist und die Inklusion $Ran(\rho_{\mathcal{H}}) \subset \mathcal{T}(\mathcal{F})$ erfüllt ist, reicht es zu zeigen, dass die Abbildung $\rho_{\mathcal{H}}$ injektiv ist. Sei also $Y \in (C^*(\widehat{\mathcal{F}})|_{\mathcal{K}})'$ mit $\rho_{\mathcal{H}}(Y) = V^*YV = 0$. Die vorausgesetzte Minimalitätsbedingung für $\mathcal{K}$ bedeutet genau, dass

$$\bigvee C^*(\widehat{\mathcal{F}})V\mathcal{H} = \mathcal{K}$$

ist. Also genügt es zu zeigen, dass

$$\langle YRVx, SVy\rangle = 0$$

ist für alle $x, y \in \mathcal{H}$ und $R, S \in \mathcal{S}^*(\widehat{\mathcal{F}})$ (siehe Bemerkung 1.12). Da $\mathcal{S}^*(\widehat{\mathcal{F}})$ kommutativ ist und da Y mit den Einschränkungen aller Operatoren in $\mathcal{S}^*(\widehat{\mathcal{F}})$ vertauscht, dürfen wir annehmen, dass $R, S \in \mathcal{S}(\widehat{\mathcal{F}})$ gilt. Operatoren in $\mathcal{S}(\widehat{\mathcal{F}})$ bilden aber $V\mathcal{H}$ in sich ab, also gibt es $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathcal{H}$ mit $RVx = V\tilde{x}$ und $SVy = V\tilde{y}$. Folglich ist

$$\langle YRVx, SVy\rangle = \langle YV\tilde{x}, V\tilde{y}\rangle = \langle V^*YV\tilde{x}, \tilde{y}\rangle = 0,$$

und es folgt die Injektivität von $\rho_{\mathcal{H}}$, also die Surjektivität von $\rho_{\mathcal{K}}$. Mit Korollar 1.5 ergibt sich weiterhin, dass $\rho_{\mathcal{K}} : \pi(C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F}))) \to (C^*(\widehat{\mathcal{F}})|_{\mathcal{K}})'$ als unitale und surjektive vollständige Isometrie ein $*$-Isomorphismus ist. Insbesondere ist $\mathcal{K}$ invariant unter $\pi(C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F})))$, denn für $X \in \pi(C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F})))$ und $A = P_{\mathcal{K}}X|_{\mathcal{K}}$ folgt aus

$$A^*A = \rho_{\mathcal{K}}(X)^*\rho_{\mathcal{K}}(X) = \rho_{\mathcal{K}}(X^*X) = P_{\mathcal{K}}(X^*X)|_{\mathcal{K}}$$

mit Proposition 1.8, dass $X\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ gilt. Die Minimalität von π liefert dann aber $\widehat{\mathcal{H}} = \mathcal{K}$, da $\widehat{\mathcal{H}}$ der einzige reduzierende Teilraum für $\pi(C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F})))$ ist, der $V\mathcal{H}$ enthält. Insbesondere erhält man die Identität $\pi(C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F}))) = C^*(\widehat{\mathcal{F}})'$. $\square$

Der Übersicht halber fassen wir die Situation kurz zusammen. Wir betrachten eine vertauschende Familie $\mathcal{F} = (S_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ sphärischer Kontraktionen $S_\alpha = (T_{j,\alpha})_{j\in J_\alpha}$ auf $\mathcal{H}$ und die zugehörigen Abbildungen $\phi_\alpha = \phi_{S_\alpha}$, $\alpha \in \Gamma$. Ist $\mathcal{T}(\mathcal{F}) \neq \{0\}$ und $Q = \text{SOT-}\lim_j \phi^j(1)$ wie in Lemma 2.16, so haben wir bisher gezeigt, dass dann ein Tripel $(\widehat{\mathcal{H}}, V, \widehat{\mathcal{F}})$ bestehend aus

(i) einem Hilbertraum $\widehat{\mathcal{H}}$,

(ii) einer stetig linearen Abbildung $V : \mathcal{H} \to \widehat{\mathcal{H}}$ mit $V^*V = Q$ und

(iii) einer kommutativen Familie $\widehat{\mathcal{F}} = (\widehat{S}_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ normaler sphärischer Isometrien $\widehat{S}_\alpha = (\widehat{T}_{j,\alpha})_{j\in J_\alpha}$ auf $\widehat{\mathcal{H}}$ existiert so, dass $\widehat{T}_{j,\alpha}V = V\widehat{T}_{j,\alpha}$ für alle $\alpha \in \Gamma$ und $j \in J_\alpha$ ist und $\widehat{\mathcal{H}}$ der kleinste reduzierende Teilraum für $\widehat{\mathcal{F}}$ ist, der $V\mathcal{H}$ enthält.

Wir zeigen nun, dass dieses Tripel bis auf unitäre Äquivalenz eindeutig bestimmt ist. Ist $\mathcal{H}$ ein beliebiger Hilbertraum und $\mathcal{F} = ((T_{j,\alpha})_{j\in J_\alpha})_{\alpha\in\Gamma}$ eine beliebige kommutative 2-Familie von Operatoren in $B(\mathcal{H})$, so definieren wir die Mengen $I = \{(j,\alpha) \mid \alpha \in \Gamma, j \in J_\alpha\}$ und $N_I = \{\sigma : I \to \mathbb{N} \mid \sigma(i) = 0 \text{ für fast alle } i \in I\}$. Für $\sigma \in N_I$ setzen wir

$$T^\sigma = \prod_{i\in I} T_i^{\sigma(i)} \in B(\mathcal{H}).$$

Offensichtlich gilt dann für die Halbgruppe $\mathcal{S}(\mathcal{F})$ aller endlichen Produkte von Elementen aus $\{T_{j,\alpha} \mid \alpha \in \Gamma, j \in J_\alpha\}$ (vgl. Bemerkung 1.12) die Identität $\mathcal{S}(\mathcal{F}) = \{T^\sigma \mid \sigma \in N_I\}$.

Satz 2.23. *Seien $(\widehat{\mathcal{H}}_1, V_1, \widehat{\mathcal{F}}_1)$ mit $\widehat{\mathcal{F}}_1 = ((N_{j,\alpha})_{j\in J_\alpha})_{\alpha\in\Gamma}$ und $(\widehat{\mathcal{H}}_2, V_2, \widehat{\mathcal{F}}_2)_{\alpha\in\Gamma}$ mit $\widehat{\mathcal{F}}_2 = ((L_{j,\alpha})_{j\in J_\alpha})$ zwei Tripel mit den zuvor beschriebenen Eigenschaften (i)-(iii). Dann existiert ein unitärer Operator $W : \widehat{\mathcal{H}}_1 \to \widehat{\mathcal{H}}_2$ mit $WV_1 = V_2$ und*

$$WN_{j,\alpha} = L_{j,\alpha}W$$

für alle $\alpha \in \Gamma$ und $j \in J_\alpha$.

Beweis. Um die Existenz von W zu zeigen, orientieren wir uns am Beweis von Lemma 1.14. Sei $(\widetilde{\mathcal{H}}, \widetilde{V}, \widetilde{\mathcal{F}})$ mit $\widetilde{\mathcal{F}} = ((M_{j,\alpha})_{j\in J_\alpha})_{\alpha\in\Gamma}$ ein beliebiges Tripel mit den Eigenschaften (i)-(iii) und sei $n \in \mathbb{N}$. Nach Proposition 1.11 gilt dann

$XY^* = Y^*X$ für alle $X, Y \in \mathcal{S}(\widetilde{\mathcal{F}})$. Sind nun für $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Elemente $\sigma_i \in N_I$ und $h_i \in \mathcal{H}$ beliebig, so folgt

$$\begin{aligned}
\|\sum_{i=1}^{n}(M^{\sigma_i})^*\widetilde{V}h_i\|^2 &= \sum_{i,k=1}^{n}\langle (M^{\sigma_i})^*\widetilde{V}h_i, (M^{\sigma_k})^*\widetilde{V}h_k\rangle \\
&= \sum_{i,k=1}^{n}\langle M^{\sigma_k}\widetilde{V}h_i, M^{\sigma_i}\widetilde{V}h_k\rangle \\
&= \sum_{i,k=1}^{n}\langle \widetilde{V}T^{\sigma_k}h_i, \widetilde{V}T^{\sigma_i}h_k\rangle \\
&= \sum_{i,k=1}^{n}\langle \widetilde{V}^*\widetilde{V}T^{\sigma_k}h_i, T^{\sigma_i}h_k\rangle.
\end{aligned}$$

Für die beiden Tripel $(\widehat{\mathcal{H}}_1, V_1, \widehat{\mathcal{F}}_1)$ und $(\widehat{\mathcal{H}}_2, V_2, \widehat{\mathcal{F}}_2)$ ergibt sich hieraus wegen $V_1^*V_1 = Q = V_2^*V_2$ leicht, dass die Abbildung

$$\begin{aligned}
W_0 : LH\left\{N^*h \mid h \in \mathcal{H}, N \in \mathcal{S}(\widehat{\mathcal{F}}_1)\right\} &\to LH\left\{L^*h \mid h \in \mathcal{H}, L \in \mathcal{S}(\widehat{\mathcal{F}}_2)\right\}, \\
\sum_{i=1}^{n}(N^{\sigma_i})^*V_1h_i &\mapsto \sum_{i=1}^{n}(L^{\sigma_i})^*V_2h_i
\end{aligned}$$

eine wohldefinierte lineare Isometrie ist. Außerdem ist W_0 surjektiv und es ist $W_0V_1 = V_2$. Genau wie im Beweis von Lemma 1.13 folgt derweil, dass $\widehat{\mathcal{H}}_1 = \bigvee\left\{N^*V_1h \mid h \in \mathcal{H}, N \in \mathcal{S}(\widehat{\mathcal{F}}_1)\right\}$ und $\widehat{\mathcal{H}}_2 = \bigvee\left\{L^*V_2h \mid h \in \mathcal{H}, L \in \mathcal{S}(\widehat{\mathcal{F}}_2)\right\}$ gilt. Also können wir W_0 zu einer unitären Abbildung $W : \widehat{\mathcal{H}}_1 \to \widehat{\mathcal{H}}_2$ fortsetzen, die $WV_1 = V_2$ erfüllt. Mit Hilfe von Proposition 1.11 rechnet man nun die Identität $WN_{j,\alpha} = L_{j,\alpha}W$ für alle $j \in J_\alpha$, $\alpha \in \Gamma$ leicht nach. □

Als nächstes wollen wir eine vollständig kontraktive, unitale und multiplikative Abbildung Θ konstruieren, die die Vertauschungsrelation aus Satz 2.20 auf den Kommutanten der Familie $\mathcal{F}$ erweitert.

Lemma 2.24. *Sei $\widehat{\mathcal{F}}$ die im Beweis von Satz 2.20 konstruierte Familie normaler sphärischer Isometrien auf $\widehat{\mathcal{H}}$. Dann existiert eine vollständig kontraktive, unitale und multiplikative Abbildung*

$$\Theta : \mathcal{F}' \to \widehat{\mathcal{F}}',$$

die der Vertauschungsrelation $\Theta(A)V = VA$, $A \in \mathcal{F}'$ genügt.

Beweis. Sei $Q = \Phi(1)$. Mit Lemma 2.18 stellen wir zunächst fest, dass

$$QA = \Phi(A) \in Ran(\Phi) \subset C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F}))$$

für alle $A \in \mathcal{F}'$ sowie $Ran(\Phi) = \mathcal{T}(\mathcal{F})$ gilt. Im Beweis von Satz 2.20 wurde gezeigt, dass alle $\widehat{T}_{j,\alpha}$, $j \in J_\alpha$, $\alpha \in \Gamma$ im Zentrum der von Neumann-Algebra $\pi(C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F})))$ liegen, und dass alle $A \in \mathcal{F}'$ die Identität $\pi(QA)V = VA$ erfüllen. Folglich ist die Abbildung

$$\Theta : \mathcal{F}' \to \widehat{\mathcal{F}}', \quad A \mapsto \pi(QA)$$

wohldefiniert, unital und vollständig kontraktiv, und es gilt $\Theta(A)V = VA$ für alle $A \in \mathcal{F}'$. Wir zeigen noch die Multiplikativität von Θ. Seien dazu $X, Y \in \mathcal{F}'$ beliebig. Dann ist offensichtlich auch $XY \in \mathcal{F}'$, und wir erhalten

$$\begin{aligned}(\Theta(XY) - \Theta(X)\Theta(Y))V &= \Theta(XY)V - \Theta(X)\Theta(Y)V \\ &= VXY - \Theta(X)VY \\ &= VXY - VXY = 0.\end{aligned}$$

Also ist auch $V^*(\Theta(XY) - \Theta(X)\Theta(Y))V = 0$, und da die Abbildung

$$\rho : \pi(C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F}))) \to B(\mathcal{H}), \quad Y \mapsto V^*YV$$

nach Lemma 2.12 insbesondere injektiv ist, folgt $\Theta(XY) - \Theta(X)\Theta(Y) = 0$. Dies liefert die Multiplikativität von Θ. □

Nach Lemma 1.14 wissen wir, dass minimale normale Erweiterungen einer subnormalen 2-Familie von Operatoren in $B(\mathcal{H})$ bis auf unitäre Äquivalenz eindeutig bestimmt sind. Wir können anhand dieses Resultates nun noch einige Folgerungen für die minimale normale Erweiterung einer vertauschenden Familie $\mathcal{F} = (S_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ sphärischer Isometrien beweisen, die im folgenden Satz zusammengefasst sind.

Satz 2.25. *Seien $\mathcal{F} = (S_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ eine kommutierende Familie sphärischer Isometrien auf $\mathcal{H}$ mit $S_\alpha = (T_{j,\alpha})_{j \in J_\alpha}$ für $\alpha \in \Gamma$ und $(N, \mathcal{K})$ eine minimale normale Erweiterung von $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}$ mit $N = (N_\alpha)_{\alpha \in \Gamma} = ((N_{j,\alpha})_{j \in J_\alpha})_{\alpha \in \Gamma}$. Sei ferner $\Phi : B(\mathcal{H}) \to B(\mathcal{H})$ die im Beweis von Lemma 2.18 definierte vollständig positive, unitale Projektion mit $Ran(\Phi) = \mathcal{T}(\mathcal{F})$. Dann existiert eine unitale *-Darstellung $\pi : C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F})) \to B(\mathcal{K})$ mit:*

(a) $\pi(T_{j,\alpha}) = N_{j,\alpha}$ *für alle* $j \in J_\alpha$, $\alpha \in \Gamma$.

(b) Ist $P_\mathcal{H} : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ *die Orthogonalprojektion von* $\mathcal{K}$ *auf* $\mathcal{H}$, *so gilt*

$$\Phi(X) = P_\mathcal{H}\pi(X)|_\mathcal{H}$$

für alle $X \in C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F}))$.

(c) Ihr Bild $\pi(C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F})))$ *stimmt mit dem in* $B(\mathcal{K})$ *gebildeten Kommutanten der unitalen* C^**-Algebra* $C^*(N)$ *überein.*

(d) $Ker(\pi)$ *stimmt mit dem von allen Operatoren der Form* $XY - \Phi(XY)$, $X, Y \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ *erzeugten abgeschlossenen zweiseitigen Ideal von* $C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F}))$ *überein.*

(e) Die Abbildung

$$\rho : \pi(C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F}))) \to B(\mathcal{H}),\ \pi(X) \mapsto P_\mathcal{H}\pi(X)|_\mathcal{H}$$

ist eine vollständige Isometrie mit $Ran(\rho) = \mathcal{T}(\mathcal{F})$ *und* $\pi \circ \rho = id_{\pi(C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F})))}$.

(f) Seien $C^*(\mathcal{F})$ *die von* $\mathcal{F}$ *in* $B(\mathcal{H})$ *erzeugte unitale* C^**-Algebra und* $\mathcal{C}$ *das von allen* $XY - YX$ *mit* $X, Y \in C^*(\mathcal{F})$ *erzeugte abgeschlossene Ideal in* $C^*(\mathcal{F})$. *Ist* π_0 *die Einschränkung von* π *auf* $C^*(\mathcal{F})$ *und* ρ_0 *die Einschränkung von* ρ *auf* $C^*(N)$, *so existiert eine kurze exakte Sequenz*

$$0 \to \mathcal{C} \hookrightarrow C^*(\mathcal{F}) \stackrel{\pi_0}{\to} C^*(N) \to 0.$$

Ferner ist ρ_0 *vollständig isometrisch und* $\pi_0 \circ \rho_0 = id_{C^*(N)}$.

(g) Ein Operator $X \in B(\mathcal{H})$ *kommutiert mit* $\mathcal{F}$ *genau dann, wenn sowohl* $X \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ *als auch* $X^*X \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ *gilt. In diesem Fall existiert ein eindeutig bestimmter Operator* $\widehat{X} \in N'$, *der* $\mathcal{H}$ *invariant lässt und dessen Einschränkung auf* $\mathcal{H}$ *mit* X *übereinstimmt. Ferner ist die Abbildung* $X \mapsto \widehat{X}$ *normerhaltend.*

Beweis. Nach Lemma 2.22 ist die im Beweis von Korollar 2.21 konstruierte normale Erweiterung $\widehat{\mathcal{F}}$ von $\mathcal{F}$ minimal. Da minimale normale Erweiterungen nach Lemma 1.14 bis auf unitäre Äquivalenz eindeutig bestimmt sind, genügt es zu zeigen, dass die in Bemerkung 2.19 gewählte *-Darstellung π die Eigenschaften (a)-(g) besitzt. Wir identifizieren $\mathcal{H}$ vermöge der Isometrie $V : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ mit $V\mathcal{H}$.

Die Teile (a), (b), (c) und (e) folgen entweder direkt aus den Konstruktionen oder wurden bereits bewiesen (siehe Lemma 2.12 und Lemma 2.22).
Wir wollen nun (d) beweisen. Da $\Phi_0 : C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F})) \to B(\mathcal{H})$ eine Projektion ist, folgt

$$Ker(\pi) = Ker(\Phi_0) = Ran(1 - \Phi_0) = \{X - \Phi(X) \mid X \in C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F}))\}$$

mit Lemma 2.12 (a). Sei I das von $XY - \Phi(XY)$ mit $X, Y \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ erzeugte abgeschlossene Ideal in $C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F}))$. Da $Ker(\pi)$ ein Ideal ist, folgt $I \subset Ker(\pi)$ unmittelbar aus der Tatsache, dass $XY - \Phi(XY) \in Ran(1 - \Phi_0) = Ker(\pi)$ für $X, Y \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ ist. Ist umgekehrt $X \in C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F}))$, so genügt es zu zeigen, dass $X - \Phi(X) \in I$ gilt. Nun ist aber $\mathcal{T}(\mathcal{F})^* = \mathcal{T}(\mathcal{F})$, und wir erhallten

$$C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F})) = \bigvee\{T_1 \dots T_n \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } T_1, \dots, T_n \in \mathcal{T}(\mathcal{F})\}.$$

Also reicht es, die Behauptung für $X = T_1 \cdots T_n$ mit $T_1, \dots, T_n \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$, $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen. Für ein solches X gilt aber

$$\begin{aligned}
& T_1 \cdots T_n - \Phi(T_1 \cdots T_n) \\
= \; & T_1 \cdots T_n - T_1 \cdots T_{n-1}\Phi(T_n) \\
& + T_1 \cdots T_{n-1}\Phi(T_n) - T_1 \cdots T_{n-2}\Phi(T_{n-1}T_n) \\
& + \cdots + T_1\Phi(T_2 \cdots T_n) - \Phi(T_1 \cdots T_n) \\
= \; & T_1 \cdots T_{n-1}\big(T_n - \Phi(T_n)\big) \\
& + T_1 \cdots T_{n-2}\big(T_{n-1}\Phi(T_n) - \Phi(T_{n-1}T_n)\big) \\
& + \cdots + T_1 \cdots T_{n-k}\big(T_{n-k+1}\Phi(T_{n-k+2} \cdots T_n) - \Phi(T_{n-k+1} \cdots T_n)\big) \\
& + \cdots + T_1\Phi(T_2 \cdots T_n) - \Phi(T_1 \cdots T_n).
\end{aligned}$$

Man beachte nun, dass $T_n - \Phi(T_n) \in I$ ist und wegen $T_n \in Ran(\Phi)$ erhält man auch $T_{n-1}\Phi(T_n) - \Phi(T_{n-1}T_n) = T_{n-1}T_n - \Phi(T_{n-1}T_n) \in I$. Ferner folgt mit $T_{n-k+1} \in Ran(\Phi)$ und Korollar 2.10 leicht

$$\begin{aligned}
& T_{n-k+1}\Phi(T_{n-k+2} \cdots T_n) - \Phi(T_{n-k+1} \cdots T_n) \\
= \; & T_{n-k+1}\Phi(T_{n-k+2} \cdots T_n) - \Phi(\Phi(T_{n-k+1})T_{n-k+2} \cdots T_n) \\
= \; & T_{n-k+1}\Phi(T_{n-k+2} \cdots T_n) - \Phi(T_{n-k+1}\Phi(T_{n-k+2} \cdots T_n)) \in I
\end{aligned}$$

für alle $k \in \{2, \dots, n\}$. Da $T_1 \cdots T_k \in C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F}))$ für $k \in \{1, \dots, n-1\}$ gilt, folgt schließlich $T_1 \cdots T_n - \Phi(T_1 \cdots T_n) \in I$. Damit ist Teil (d) gezeigt.

Um (f) zu beweisen, zeigen wir zuerst, dass $\Phi(C^*(\mathcal{F})) = C^*(\mathcal{F}) \cap \mathcal{T}(\mathcal{F})$ erfüllt ist. Offensichtlich gelten die Inklusionen $\Phi(C^*(\mathcal{F})) \subset Ran(\Phi) = \mathcal{T}(\mathcal{F})$ und $C^*(\mathcal{F}) \cap \mathcal{T}(\mathcal{F}) \subset \Phi(C^*(\mathcal{F}))$, da für ein Element $X \in C^*(\mathcal{F}) \cap Ran(\Phi)$ schon $X = \Phi(X) \in \Phi(C^*(\mathcal{F}))$ ist. Somit bleibt $\Phi(C^*(\mathcal{F})) \subset C^*(\mathcal{F})$ zu zeigen. Aus dem Beweis von Satz 2.20 wissen wir, dass die Operatoren $\pi(T_{j,\alpha})$ mit $\alpha \in \Gamma$ und $j \in J_\alpha$ eine vertauschende Familie normaler Operatoren bilden. Folglich erhält man

$$\begin{aligned}
\Phi(T_1 \cdots T_n) &= V^* \pi(T_1) \cdots \pi(T_n) V \\
&= V^* \prod_{k \in N_n^*} \pi(T_k) \prod_{k \in N_n} \pi(T_k) V \\
&= \Phi\Big(\prod_{k \in N_n^*} T_k \prod_{k \in N_n} T_k \Big) \\
&= \prod_{k \in N_n^*} T_k \prod_{k \in N_n} T_k
\end{aligned}$$

für $T_1, \ldots, T_n \in \mathcal{F} \cup \mathcal{F}^*$ mit Lemma 2.18, da $\prod_{k \in N_n} T_k \in \mathcal{F}'$ ist. Hierbei ist $N_n = \{k \in \{1, \ldots, n \mid T_k \in \mathcal{F}\}\}$ und $N_n^* = \{1, \ldots, n\} \setminus N_n$. Also folgt $\Phi(C^*(\mathcal{F})) \subset C^*(\mathcal{F})$ mit der Linearität und der Stetigkeit von Φ. Zusammen mit der in Lemma 2.12 bewiesenen Identität $Ker(\Phi_0) = Ker(\pi)$ erhält man unmittelbar $Ker(\pi_0) = \{X - \Phi(X) \mid X \in C^*(\mathcal{F})\}$. Da $\pi_0(C^*(\mathcal{F}))$ kommutativ und π_0 ein $*$-Homomorphismus ist, gilt $\pi_0(XY - YX) = \pi_0(X)\pi_0(Y) - \pi_0(Y)\pi_0(X) = 0$ für alle $X, Y \in C^*(\mathcal{F})$, was leicht $\mathcal{C} \subset Ker(\pi_0)$ ergibt. Sei nun $X \in C^*(\mathcal{F})$ ein endliches Produkt der Form $X = T_1 \cdots T_n$ mit $T_1, \ldots, T_n \in \mathcal{F} \cup \mathcal{F}^*$. Wir zeigen durch Induktion nach n, dass dann $X - \Phi(X) \in \mathcal{C}$ ist. Dabei ist zu beachten, dass in jedem Fall $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}^*$ kommutativ sind und

$$\Phi(X) = \prod_{k \in N_n^*} T_k \prod_{k \in N_n} T_k$$

gilt, wobei N_n und N_n^* wie oben definiert sind. Für $X = T_1 \in \mathcal{F} \cup \mathcal{F}^*$ ist die Behauptung klar, denn in diesem Fall ist $X = \Phi(X)$, also $X - \Phi(X) = 0 \in \mathcal{C}$. Sei nun also $n > 1$ und die Behauptung für alle $k \leq n$ schon gezeigt. Dann ist $X = T_1 \cdots T_{n+1}$ mit $T_1, \ldots, T_{n+1} \in \mathcal{F} \cup \mathcal{F}^*$ und entsprechend

$$\Phi(X) = \prod_{k \in N_{n+1}^*} T_k \prod_{k \in N_{n+1}} T_k.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle. Ist einerseits $T_1 \notin \mathcal{F}$, so folgt mit Lemma 2.18, dass $X - \Phi(X) = T_1 \cdot \big(T_2 \cdots T_{n+1} - \Phi(T_2 \cdots T_{n+1})\big)$ gilt, also ist $X - \Phi(X) \in \mathcal{C}$

nach Induktionsvoraussetzung. Ist andererseits $T_1 \in \mathcal{F}$, so setze $Y = T_2 \cdots T_{n+1}$ und erhalte $\Phi(X) = \Phi(Y)T_1$ mit der Kommutativität von $\mathcal{F}$. Folglich können wir

$$\begin{aligned} X - \Phi(X) &= T_1 Y - \Phi(Y)T_1 \\ &= T_1 Y - T_1\Phi(Y) + T_1\Phi(Y) - \Phi(Y)T_1 \\ &= T_1(Y - \Phi(Y)) + T_1\Phi(Y) - \Phi(Y)T_1 \in \mathcal{C} \end{aligned}$$

schreiben, da $Y - \Phi(Y) \in \mathcal{C}$ nach Induktionsvoraussetzung und $T_1\Phi(Y) - \Phi(Y)T_1 \in \mathcal{C}$ wegen $\Phi(C^*(\mathcal{F})) \subset C^*(\mathcal{F})$ gilt. Als Einschränkung einer vollständig isometrischen Abbildung ist $\rho_0 : C^*(\widehat{\mathcal{F}}) \to B(\mathcal{H})$ vollständig isometrisch. Wegen $C^*(\widehat{\mathcal{F}}) = \pi(C^*(\mathcal{F}))$ folgt $\rho(C^*(\widehat{\mathcal{F}})) = \rho(\pi(C^*(\mathcal{F}))) = \Phi(C^*(\mathcal{F})) \subset C^*(\mathcal{F})$. Also gilt $\pi_0 \circ \rho_0 = id_{C^*(\widehat{\mathcal{F}})}$.

Zum Schluss wollen wir Teil (g) zeigen. Ist zunächst $X \in \mathcal{F}'$, so erhalten wir $X \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ und $X^*X \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ direkt mit Proposition 2.3. Sei nun $X \in B(\mathcal{H})$ mit $X, X^*X \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$. Dann ist $\widehat{X} = \pi(X) \in \widehat{\mathcal{F}}'$, denn alle $\widehat{T}_{j,\alpha}$, $j \in J_\alpha$, $\alpha \in \Gamma$, liegen bekanntlich im Zentrum von $\pi(C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F})))$. Aus $X \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ erhält man $X = \Phi(X) = V^*\widehat{X}V$, also ist

$$\|X\| = \|\Phi(X)\| = \|\rho(\widehat{X})\| = \|\widehat{X}\|.$$

Da auch $X^*X \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ gilt, ist X^*X die Kompression von $\widehat{X}^*\widehat{X}$ und es folgt $\widehat{X}V\mathcal{H} \subset V\mathcal{H}$ nach Proposition 1.8. Zusammen mit der Invarianz von $V\mathcal{H}$ unter allen $\widehat{T}_{j,\alpha}$, $j \in J_\alpha$, $\alpha \in \Gamma$ ergibt dies

$$\begin{aligned} XT_{j,\alpha} &= V^*\widehat{X}VV^*\widehat{T}_{j,\alpha}V \\ &= V^*\widehat{X}\widehat{T}_{j,\alpha}V \\ &= V^*\widehat{T}_{j,\alpha}\widehat{X}V \\ &= V^*\widehat{T}_{j,\alpha}VV^*\widehat{X}V \\ &= T_{j,\alpha}X \end{aligned}$$

für alle $\alpha \in \Gamma$ und $j \in J_\alpha$, da bekanntlich $\widehat{X} \in \widehat{\mathcal{F}}'$ gilt. Ist $S \in B(\widehat{\mathcal{H}})$ ein weiterer Operator mit $S \in \widehat{\mathcal{F}}'$, und $SV\mathcal{H} \subset V\mathcal{H}$ sowie $X = V^*SV$, so folgt mit der Normalität von $\widehat{T}_{j,\alpha}$ mit dem Satz von Fuglede-Putnam auch $S\widehat{T}^*_{j,\alpha} = \widehat{T}^*_{j,\alpha}S$ für alle $\alpha \in \Gamma$ und $j \in J_\alpha$. Also ist $S \in C^*(\widehat{\mathcal{F}})' = \pi(C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F})))$ nach Teil (c), und wegen $\rho(S) = \rho(\widehat{X})$ erhält man $S = \widehat{X}$ unmittelbar aus der Injektivität der Abbildung ρ. $\square$

3 Anwendungen auf uniforme Algebren

In diesem Kapitel wollen wir mit Hilfe der Ergebnisse aus Abschnitt 2.3 Beispiele exakter Sequenzen von verallgemeinerten Toeplitzalgebren für uniforme Algebren auf kompakten Hausdorffräumen konstruieren. Sei daher im Folgenden stets K ein kompakter Hausdorffraum und $C(K)$ die Banachalgebra der komplexwertigen stetigen Funktionen auf K. Ferner bezeichnen wir mit $M(K)$ den Raum aller komplexwertigen, regulären Borelmaße auf K und mit $M(K)_1^+$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße in $M(K)$. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz ist bekanntlich $M(K) = C(K)^*$ bis auf isometrische Isomorphie (vgl. [7, Appendix C]).

3.1 Der verallgemeinerte Hardy-Raum $H^2(m)$

Ist $A \subset C(K)$ eine normabgeschlossene Unteralgebra, die die konstanten Funktionen enthält und die Punkte trennt, so heißt A eine *uniforme Algebra*. Da wir in diesem Kapitel Toeplitzoperatoren auf verallgemeinerten Hardy-Räumen zu einer uniformen Algebra untersuchen wollen, müssen wir zunächst den Begriff des Hardy-Raumes in diesem abstrakten Kontext einführen und spezifizieren, was wir unter einem Toeplitzoperator T_φ mit Symbol φ auf einem verallgemeinerten Hardy-Raum verstehen.

Definition 3.1. Sei $A \subset C(K)$ eine uniforme Algebra und $m \in M(K)_1^+$. Wir nennen $H^2(m) = \overline{A}^{L^2(m)}$ den *verallgemeinerten Hardy-Raum* zu A und definieren $H^\infty(m) = H^2(m) \cap L^\infty(m)$. Zusätzlich betrachten wir für $\varphi \in L^\infty(m)$ den Multiplikationsoperator

$$M_\varphi : L^2(m) \to L^2(m), \quad f \mapsto \varphi f$$

mit Symbol $\varphi \in L^\infty(m)$. Der *Toeplitzoperator* T_φ mit Symbol $\varphi \in L^\infty(m)$ ist definiert durch $T_\varphi = P_{H^2(m)} M_\varphi|_{H^2(m)}$, das heißt es ist

$$T_\varphi : H^2(m) \to H^2(m), \quad f \mapsto P_{H^2(m)}(\varphi f).$$

Hierbei bezeichnet $P_{H^2(m)}$ die Orthogonalprojektion von $L^2(m)$ auf $H^2(m)$.

In der folgenden Proposition wollen wir grundlegende Eigenschaften der Abbildungen $M : L^\infty(m) \to B(L^2(m))$, $\varphi \mapsto M_\varphi$ und $T : H^\infty(m) \to B(H^2(m))$, $\varphi \mapsto T_\varphi$ angeben. Es sei kurz bemerkt, dass der überwiegende Teil des Beweises elementar ist und daher dem Leser überlassen wird.

Proposition 3.2. *Sei $A \subset C(K)$ eine uniforme Algebra und $m \in M(K)_1^+$.*

*(a) Die Abbildung $M : L^\infty(m) \to B(L^2(m))$, $\varphi \mapsto M_\varphi$ ist ein unitaler, isometrischer und w^*-stetiger *-Homomorphismus. Insbesondere ist ihr Bild $Ran(M) \subset B(L^2(m))$ eine w^*-abgeschlossene selbstadjungierte Teilalgebra.*

(b) Die Abbildung $T : H^\infty(m) \to B(H^2(m))$, $\varphi \mapsto T_\varphi$ ist ein unitaler, kontraktiver Algebrenhomomorphismus.

Beweis. Wir beweisen nur die w^*-Stetigkeit von M. Nach Lemma 1.16 genügt es zu zeigen, dass die Einschränkung von M auf die abgeschlossene Einheitskugel von $L^\infty(m)$ w^*-stetig ist. Sei $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein Netz in $L^\infty(m)$ mit $\|\varphi\|_{L^\infty(m)} \leq 1$ für alle $\lambda \in \Lambda$ und $\varphi_\lambda \to \varphi$ in $(L^\infty(m), \tau_{w^*})$ für ein $\varphi \in L^\infty(m)$. Für alle $f, g \in L^2(m)$ gilt dann sicherlich

$$\begin{aligned} \langle M_{\varphi_\lambda} f, g\rangle &= \int_K \varphi_\lambda f \overline{g}\, dm \\ &\overset{\lambda}{\to} \int_K \varphi f \overline{g}\, dm \\ &= \langle M_\varphi f, g\rangle, \end{aligned}$$

also ist $M_\varphi = \text{WOT-}\lim_\lambda M_{\varphi_\lambda}$. Da das Netz $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ jedoch normbeschränkt war, folgt schon $M_\varphi = w^*\text{-}\lim_\lambda M_{\varphi_\lambda}$ mit Proposition 1.15. □

Wir geben nun eine nützliche Charakterisierung von $H^\infty(m)$ an und zeigen, dass der Raum $H^\infty(m)$ genau aus den Elementen $\varphi \in L^\infty(m)$ besteht, für die $\varphi H^2(m) \subset H^2(m)$ gilt. Wir stellen also fest, dass genau dann $\varphi \in H^\infty(m)$ gilt, wenn $H^2(m)$ ein invarianter Teilraum für den Multiplikationsoperator M_φ ist. Insbesondere beweisen wir, dass $H^\infty(m) \subset L^\infty(m)$ eine w^*-Abgeschlossene Unteralgebra ist.

Lemma 3.3. *Seien $A \subset C(K)$ eine uniforme Algebra und $m \in M(K)_1^+$. Dann gilt die Identität*

$$H^\infty(m) = \{\varphi \in L^\infty(m) \mid \varphi H^2(m) \subset H^2(m)\},$$

und $H^\infty(m)$ ist eine w^*-abgeschlossene Teilalgebra von $L^\infty(m)$.

Beweis. Sei zunächst $\varphi \in H^\infty(m)$. Nach Definition ist bekanntlich $H^\infty(m) = H^2(m) \cap L^\infty(m)$, also ist insbesondere $\varphi \in L^\infty(m)$. Da der Multiplikationsoperator $M_\varphi : L^2(m) \to L^2(m)$ stetig ist, genügt es zu zeigen, dass $\varphi f \in H^2(m)$ für alle $f \in A$ ist. Wegen $\varphi \in H^2(m)$ existiert eine Folge $(\varphi_n)_n$ in A mit $\varphi_n \to \varphi$ für $n \to \infty$ in $L^2(m)$. Ist nun $f \in A$ beliebig, so folgt wegen $A \subset L^\infty(m)$ schließlich

$$\varphi f = M_f \varphi = M_f(\lim_{n\to\infty} \varphi_n) = \lim_{n\to\infty} M_f \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \varphi_n f$$

mit der Stetigkeit von M_f. Dies liefert aber sofort, dass $\varphi f \in \overline{A}^{L^2(m)} = H^2(m)$ ist, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\varphi_n f \in A$.
Sei nun umgekehrt $\varphi \in L^\infty(m)$ so, dass $\varphi f \in H^2(m)$ für alle $f \in H^2(m)$ ist. Wir müssen zeigen, dass dann $\varphi \in H^2(m)$ folgt. Dies erhält man aber leicht aus der Tatsache, dass $1 \in H^2(m)$ und damit nach Voraussetzung auch $\varphi = \varphi \cdot 1 \in H^2(m)$ gilt.
Anhand der damit Bewiesenen Charakterisierung von $H^\infty(m)$ sieht man leicht, dass $H^\infty(m) \subset L^\infty(m)$ eine Teilalgebra ist. Die w^*-Abgeschlossenheit von $H^\infty(m) \subset L^\infty(m)$ folgt unmittelbar aus der in Proposition 3.2 bewiesenen w^*-Stetigkeit der Abbildung $M : L^\infty(m) \to B(H^2(m)),\ \psi \mapsto M_\psi$, da die Menge

$$\{T \in B(L^2(m)) \mid TH^2(m) \subset H^2(m)\} \subset B(L^2(m))$$

w^*-abgeschlossen ist. □

3.2 Sphärische Multifunktionen und zugehörige Toeplitzoperatoren

Wir wollen nun eine besondere Klasse von Familien von Funktionen in $C(K)$ untersuchen, die sogenannten sphärischen Multifunktionen. Wie sich herausstellen wird, bildet die zu einer Familie sphärischer Multifunktionen $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ gehörige Familie $\mathcal{F} = (S_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ von Familien von Toeplitzoperatoren gerade eine vertauschende Familie sphärischer Isometrien.

Definition 3.4. Eine Familie $\mathcal{F} = (\varphi_j)_{j\in J}$ von Funktionen in $C(K)$ heißt *sphärische Multifunktion*, falls die Indexmenge J höchstens abzählbar unendlich ist und falls für alle $x \in K$ die Identität

$$\sum_{j\in J} |\varphi_j(x)|^2 = 1$$

gilt. Eine Familie $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ sphärischer Multifunktionen $\mathcal{F}_\alpha = (\varphi_{j,\alpha})_{j\in J_\alpha}$ heißt *separierend* oder *punktetrennend*, falls zu je zwei Punkten $x, y \in K$ mit $x \neq y$ ein $\alpha \in \Gamma$ und ein $j \in J_\alpha$ existieren mit $\varphi_{j,\alpha}(x) \neq \varphi_{j,\alpha}(y)$.

Im folgenden sei stets $A \subset C(K)$ eine normabgeschlossene Unteralgebra, $m \in M(K)_1^+$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf K und $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ eine punktetrennende Familie von sphärischen Multifunktionen $\mathcal{F}_\alpha = (\varphi_{j,\alpha})_{j\in J_\alpha}$ mit $\varphi_{j,\alpha} \in A$ für alle $\alpha \in \Gamma$, $j \in J_\alpha$. Für $\alpha \in \Gamma$ sei außerdem $S_\alpha = (T_{\varphi_{j,\alpha}})_{j\in J_\alpha}$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{F}$ die Familie $(S_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$. In Anlehnung an Kapitel 2 schreiben wir abkürzend $T_{j,\alpha}$ für den Toeplitzoperator mit Symbol $\varphi_{j,\alpha}$. Ein erstes Ergebnis dieses Abschnittes liefert die angekündigte Verbindung von Familien sphärischer Multifunktionen zu Familien sphärischer Isometrien.

Lemma 3.5. *$\mathcal{F}$ ist eine kommutierende Familie sphärischer Isometrien.*

Beweis. Seien $\alpha \in \Gamma$ und $j \in J_\alpha$ beliebig. Wegen $A \subset H^\infty(m)$ ist insbesondere $\varphi_{j,\alpha} \in H^\infty(m)$ und damit $M_{\varphi_{j,\alpha}} H^2(m) \subset H^2(m)$ nach Lemma 3.3. Offensichtlich ist $(\sum_{j\in F} T_{j,\alpha}^* T_{j,\alpha})_{F\subset J_\alpha \text{endl.}}$ ein monoton wachsendes Netz selbstadjungierter Operatoren. Da für eine endliche Teilmenge $F \subset J_\alpha$ mit der Invarianz von $H^2(m)$ unter $M_{\varphi_{j,\alpha}}$ außerdem

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in F} \langle T_{j,\alpha}^* T_{j,\alpha} f, f\rangle &= \sum_{j\in F} \langle P_{H^2(m)} M_{\varphi_{j,\alpha}}^* P_{H^2(m)} M_{\varphi_{j,\alpha}} f, f\rangle \\
&= \sum_{j\in F} \langle M_{\varphi_{j,\alpha}} f, M_{\varphi_{j,\alpha}} f\rangle \\
&= \sum_{j\in F} \int_K |\varphi_{j,\alpha}|^2 \cdot |f(x)|^2 \, dm(x) \\
&= \int_K \sum_{j\in F} |\varphi_{j,\alpha}|^2 \cdot |f(x)|^2 \, dm(x) \\
&\leq \langle f, f\rangle
\end{aligned}$$

für alle $f \in H^2(m)$ folgt, ist das Netz $\{\sum_{j\in F} T_{j,\alpha}^* T_{j,\alpha}\}_{F\subset J_\alpha \text{endl.}}$ nach oben durch die Identität beschränkt. Mit Proposition 2.2 folgt die Konvergenz bezüglich der starken Operatortopologie.

Sind nun $f, g \in L^2(m)$ und ist $J_\alpha = \{j_\nu \mid \nu \in \mathbb{N}\}$ abzählbar unendlich, so stellen wir fest, dass

$$\sum_{\nu=1}^{k} |\varphi_{j_\nu,\alpha}(x)|^2 f(x)\overline{g(x)} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x)\overline{g(x)}$$

punktweise für $x \in K$ sowie

$$\Big|\sum_{\nu=1}^{k} |\varphi_{j_\nu,\alpha}(x)|^2 f(x)\overline{g(x)}\Big| \leq |f(x)| \cdot |g(x)|$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x \in K$ gilt. Also erhält man

$$\sum_{j\in J_\alpha} \int_K |\varphi_{j,\alpha}(x)|^2 f(x)\overline{g(x)}\, dm(x) = \int_K f(x)\overline{g(x)} dm(x)$$

mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz. Dies liefert letztlich, dass für alle $f, g \in H^2(m)$ die Identität

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in J_\alpha} \big\langle T_{j,\alpha}^* T_{j,\alpha} f, g\big\rangle &= \sum_{j\in J_\alpha} \big\langle M_{\varphi_{j,\alpha}} f, M_{\varphi_{j,\alpha}} g\big\rangle \\
&= \sum_{j\in J_\alpha} \int_K |\varphi_{j,\alpha}(x)|^2 f(x)\overline{g(x)}\, dm(x) \\
&= \int_K f(x)\overline{g(x)} dm(x) \\
&= \langle f, g\rangle
\end{aligned}$$

gilt. Jedes S_α ist demnach eine sphärische Isometrie. Die Kommutativität der Familie $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ folgt unterdessen leicht aus der Invarianz von $H^2(m)$ unter $M_{\varphi_{j,\alpha}}$ und der Kommutativität von A. □

Ist $m \in M(K)$ ein positives reguläres Borelmaß auf K, so erhalten wir mit [6, Proposition 7.4.2.], dass $\overline{C(K)}^{L^2(m)} = L^2(m)$ gilt. Mit Hilfe dieses Resultates können wir nun die minimale normale Erweiterung der vertauschenden Familie $\mathcal{F} = ((T_{\varphi_{j,\alpha}})_{j\in J_\alpha})_{\alpha\in\Gamma}$ bestimmen. Wir stellen fest, dass diese gerade aus den Multiplikationsoperatoren mit Symbol $\varphi_{j,\alpha}$, $j \in J_\alpha$, $\alpha \in \Gamma$ besteht.

Lemma 3.6. *Es ist $(\widehat{\mathcal{F}}, L^2(m))$ mit $\widehat{\mathcal{F}} = (\widehat{S}_\alpha)_{\alpha\in\Gamma} = ((M_{\varphi_{j,\alpha}})_{j\in J_\alpha})_{\alpha\in\Gamma}$ die minimale normale Erweiterung der Familie $\mathcal{F}$.*

Beweis. Genau wie im Beweis von Lemma 3.5 folgt, dass die Familie $\widehat{\mathcal{F}}$ eine kommutierende Familie sphärischer Isometrien auf $L^2(m)$ ist. Da für alle $\alpha \in \Gamma$

und $j \in J_\alpha$ die Multiplikationsoperatoren $M_{\varphi_{j,\alpha}} \in B(L^2(m))$ normal sind und alle $\varphi_{j,\alpha} \in H^\infty(m)$ liegen, ist $(\widehat{\mathcal{F}}, L^2(m))$ eine normale Erweiterung von $\mathcal{F}$, denn nach Lemma 3.3 ist $H^2(m)$ invariant für alle $M_{\varphi_{j,\alpha}}$. Wir wollen nun die Minimalität überprüfen. Da nach Voraussetzung zu $x, y \in K$ mit $x \neq y$ Indizes $\alpha \in \Gamma$ und $j \in J_\alpha$ mit $\varphi_{j,\alpha}(x) \neq \varphi_{j,\alpha}(y)$ existieren, folgt

$$C^*\left(\{\varphi_{j,\alpha} \mid \alpha \in \Gamma, j \in J_\alpha\}\right) = C(K) \tag{3.1}$$

mit dem Satz von Stone-Weierstraß. Nach Lemma 1.13 genügt es zu zeigen, dass

$$L^2(m) = \bigvee \left\{ M^* f \mid M \in \mathcal{S}(\widehat{\mathcal{F}}), f \in H^2(m) \right\}$$

ist, wobei $\mathcal{S}(\widehat{\mathcal{F}})$ wie in Abschnitt 1.2 die Menge aller endlichen Produkte von Elementen aus $\{M_{\varphi_{j,\alpha}} \mid j \in J_\alpha, \alpha \in \Gamma\}$ bezeichne. Da $H^2(m)$ alle endlichen Produkte der $\varphi_{j,\alpha}$, $j \in J_\alpha$, $\alpha \in \Gamma$ enthält, liegen alle endlichen Summen von endlichen Produkten der $\varphi_{j,\alpha}$ und $\overline{\varphi}_{k,\beta}$ in

$$S = LH \left\{ M^* f \mid M \in \mathcal{S}(\widehat{\mathcal{F}}), f \in H^2(m) \right\}.$$

Da diese jedoch dicht in $C(K)$ liegen, ist wegen $\overline{C(K)}^{L^2(m)} = L^2(m)$ auch $S \subset L^2(m)$ dicht. Also ist $\widehat{\mathcal{F}}$ die minimale normale Erweiterung der Familie $\mathcal{F}$. □

3.3 Charakterisierungen von Toeplitzoperatoren

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Frage, wann ein gegebener Operator $X \in B(H^2(m))$ ein Toeplitzoperator mit Symbol in $L^\infty(m)$ bzw. $H^\infty(m)$ ist. In beiden Fällen lässt sich eine einfache Charakterisierung angeben und beweisen, die ein klassisches Resultat von Brown und Halmos (siehe [4]) für Toeplitzoperatoren über dem Einheitskreis in $\mathbb{C}$ verallgemeinert. Zur Vorbereitung benötigen wir jedoch zuerst noch zwei maßtheoretische Ergebnisse, die in den folgenden beiden Propositionen zusammengefasst sind.

Proposition 3.7. *Seien $m \in M(K)_1^+$ und $f \in L^1(m)$. Definiert man auf den Borelmengen $A \subset K$ das komplexe Maß μ durch $\mu(A) = \int_A f\, dm$, so ist jede beschränkte Borel-messbare Funktion $g : K \to \mathbb{C}$ integrierbar bezüglich μ, und es gilt*

$$\int_K g\, d\mu = \int_K f g\, dm.$$

Beweis. Sei $\mu = \sum_{i=1}^4 \epsilon_i \mu_i$ die Jordan-Zerlegung von μ. Definitionsgemäß gilt dann

$$\int_K g\, d\mu = \sum_{i=1}^4 \int_K g\, d\mu_i.$$

Für messbare Funktionen $g : K \to \mathbb{C}$ mit nur endlich vielen Werten folgt die behauptete Formel direkt aus dieser Definition. Der allgemeine Fall folgt, indem man ausnutzt, dass jede beschränkte messbare Funktion $g : K \to \mathbb{C}$ der gleichmäßige Limes einer Folge messbarer Funktionen mit nur endlich vielen Werten ist. $\square$

Wir zeigen als nächstes, dass der Raum $C(K)$ der stetigen Funktionen auf K in $(L^\infty(m), \tau_{w^*})$ dicht liegt.

Lemma 3.8. *Für $m \in M(K)_1^+$ ist $\overline{C(K)}^{w^*} = L^\infty(m)$.*

Beweis. Wir nehmen an, $\overline{C(K)}^{w^*}$ wäre ein echter Teilraum von $L^\infty(m)$, und führen diese Annahme zu einem Widerspruch. Ist $\overline{C(K)}^{w^*} \subsetneq L^\infty(m)$, so existiert nach dem Satz von Hahn-Banach eine Funktion $f \in L^1(m) \setminus \{0\}$ so, dass $\int fg\, dm = 0$ für alle $g \in C(K)$ gilt. Nach Proposition 3.7 ist dann aber $\int g\, dm_f = 0$ für alle $g \in C(K)$, wobei m_f das durch $m_f(A) = \int_A f\, dm$ definierte komplexe Borelmaß sei. Da m_f nach [6, Proposition 7.3.7] regulär ist, folgt aus dem Eindeutigkeitsteil des Rieszschen Darstellungssatzes (vgl. [6, Theorem 7.3.5]), dass $m_f = 0$ ist. Also ist $f = 0$ in $L^1(m)$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Wahl von f. Die Annahme war also falsch. $\square$

Jetzt sind wir in der Lage, eine Charakterisierung für Toeplitzoperatoren mit Symbol in $L^\infty(m)$ anzugeben. Wir zeigen, dass solche Operatoren genau mit den $\mathcal{F}$-Toeplitzoperatoren der oben definierten Familie $\mathcal{F} = ((T_{\varphi_{j,\alpha}})_{j \in J_\alpha})_{\alpha \in \Gamma}$ sphärischer Isometrien übereinstimmen. Insbesondere erklärt dieser Umstand auch die Wahl der in Definition 2.1 eingeführten Bezeichnungen.

Satz 3.9. *Sei $m \in M(K)_1^+$ beliebig. Ein linearer Operator $X \in B(H^2(m))$ ist genau dann ein Toeplitzoperator mit Symbol in $L^\infty(m)$, wenn für alle $\alpha \in \Gamma$ die Identität*

$$WOT\text{-}\sum_{j \in J_\alpha} T^*_{\varphi_{j,\alpha}} X T_{\varphi_{j,\alpha}} = X \tag{3.2}$$

gilt.

Beweis. Sei zunächst $X \in B(H^2(m))$ so, dass (3.2) erfüllt ist. Gemäß Definition 2.1 gilt dann $X \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$, und nach Lemma 2.18 existiert eine vollständig positive, unitale Projektion $\Phi : B(H^2(m)) \to B(H^2(m))$ mit $Ran(\Phi) = \mathcal{T}(\mathcal{F})$. Außerdem existiert nach Satz 2.25 eine *-Darstellung $\pi : C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F})) \to B(L^2(m))$, deren Bild mit dem in $B(L^2(m))$ gebildeten Kommutanten von $C^*(\widehat{\mathcal{F}})$ übereinstimmt und so, dass $X = \Phi(X) = P_{H^2(m)}\pi(X)|_{H^2(m)}$ gilt. Folglich kommutiert $\pi(X)$ mit allen $T \in C^*(\widehat{\mathcal{F}})$. Da die Abbildung $M : L^\infty(m) \to B(L^2(m)),\ \varphi \mapsto M_\varphi$ jedoch nach Proposition 3.2 ein unitaler *-Homomorphismus ist, erhält man

$$M\left(C^*\left(\{\varphi_{j,\alpha} \mid \alpha \in \Gamma, j \in J_\alpha\}\right)\right) = C^*(\widehat{\mathcal{F}}),$$

und da die Gleichung (3.1) gilt, kommutiert $\pi(X)$ mit allen M_φ, $\varphi \in C(K)$. Also vertauscht $\pi(X)$ mit jedem Operator in

$$\mathscr{M} = \overline{\{M_\varphi \mid \varphi \in C(K)\}}^{w^*} \subset B(L^2(m)).$$

Da $M : L^\infty(m) \to B(L^2(m))$ nach Proposition 3.2 w^*-stetig ist und da $C(K)$ nach Lemma 3.8 w^*-dicht in $L^\infty(m)$ ist, folgt

$$L^\infty(m) = \overline{C(K)}^{w^*} \subset M^{-1}(\mathscr{M}).$$

Damit vertauscht $\pi(X)$ mit jedem Operator in der Menge $\{M_\varphi \mid \varphi \in L^\infty(m)\}$, und nach [7, Theorem IX.6.6] ist dann $\pi(X) = M_\psi$ für eine geeignete Funktion $\psi \in L^\infty(m)$. Wir erhalten also, dass $X = P_{H^2(m)}M_\psi|_{H^2(m)} = T_\psi$ gilt. Sei nun umgekehrt $X = T_\psi$ für ein $\psi \in L^\infty(m)$. Wir wollen zeigen, dass X dann für alle $\alpha \in \Gamma$ die Gleichung (3.2) erfüllt. Seien dazu $f, g \in H^2(m)$ und $\alpha \in \Gamma$ beliebig. Da $H^2(m)$ bekanntlich ein invarianter Teilraum für $M_{\varphi_{j,\alpha}}, j \in J_\alpha$ ist, gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in J_\alpha} \left\langle T_{j,\alpha}^* X T_{j,\alpha} f, g\right\rangle &= \sum_{j\in J_\alpha} \langle T_\psi T_{j,\alpha} f, T_{j,\alpha} g\rangle \\
&= \sum_{j\in J_\alpha} \langle T_\psi \varphi_{j,\alpha} f, \varphi_{j,\alpha} g\rangle \\
&= \sum_{j\in J_\alpha} \left\langle P_{H^2(m)}(\psi\varphi_{j,\alpha} f), \varphi_{j,\alpha} g\right\rangle \\
&= \sum_{j\in J_\alpha} \langle \psi\varphi_{j,\alpha} f, \varphi_{j,\alpha} g\rangle.
\end{aligned}$$

Für alle $j \in J_\alpha$ ist aber $\langle \psi\varphi_{j,\alpha} f, \varphi_{j,\alpha} g\rangle = \int \psi\varphi_{j,\alpha} f \overline{\varphi}_{j,\alpha} \overline{g}\, dm$, und mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt

$$\sum_{j\in J_\alpha} \int \psi(x) f(x) |\varphi_{j,\alpha}(x)|^2 \overline{g(x)}\, dm(x) = \int \psi(x) f(x) \overline{g(x)}\, dm(x)$$

analog zum Beweis von Lemma 3.5. Also ist

$$\sum_{j\in J_\alpha} \langle T_{j,\alpha}^* X T_{j,\alpha} f, g\rangle = \int \psi(x) f(x)\overline{g(x)}\, dm(x) = \langle \psi f, g\rangle = \langle T_\psi f, g\rangle,$$

und da $f, g \in H^2(m)$ beliebig waren, folgt die Behauptung. $\square$

In der folgenden Bemerkung wollen wir kurz einige Ergebnisse anführen, die wir in den Beweisen der nächsten Sätze nutzen wollen. Diese Resultate wurden im Beweis des vorigen Satzes mitgezeigt, jedoch wurde nicht ausdrücklich darauf hingewiesen.

Bemerkung 3.10. Im Beweis von Satz 3.9 wurde mitbewiesen, dass für die Abbildung $\pi : C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F})) \to B(L^2(m))$ die Identität

$$\pi(C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F}))) = C^*(\widehat{\mathcal{F}})' = \{M_\varphi \mid \varphi \in C(K)\}' = \{M_\varphi \mid \varphi \in L^\infty(m)\}$$

erfüllt ist. Da nach Teil (e) von Satz 2.25 die Abbildung

$$\rho : \{M_\varphi \mid \varphi \in L^\infty(m)\} \to B(H^2(m)), \quad M_\varphi \mapsto P_{H^2(m)} M_\varphi|_{H^2(m)} = T_\varphi$$

injektiv ist und da $\rho(M_\varphi) = T_\varphi = \Phi(T_\varphi) = P_{H^2(m)}\pi(T_\varphi)|_{H^2(m)} = \rho(\pi(T_\varphi))$ für $\varphi \in L^\infty(m)$ gilt, folgt insbesondere, dass

$$\pi(T_\varphi) = M_\varphi$$

für alle $\varphi \in L^\infty(m)$ ist.

Für die sphärische Isometrie $\mathcal{F} = ((T_{\varphi_{j,\alpha}})_{j\in J_\alpha})_{\alpha\in\Gamma}$ zeigen wir nun mit Hilfe von Proposition 1.8 die Identität $\mathcal{F}' = \{T_\psi \mid \psi \in H^\infty(m)\}$. Dies liefert die angekündigte Charakterisierung für Toeplitzoperatoren mit Symbol in $H^\infty(m)$.

Lemma 3.11. *Sei $m \in M(K)_1^+$ beliebig. Ein beschränkter linearer Operator $X \in B(H^2(m))$ ist genau dann ein Toeplitzoperator mit Symbol in $H^\infty(m)$, wenn $X \in \mathcal{F}'$ gilt.*

Beweis. Sei zunächst $X = T_\psi$ für ein $\psi \in H^\infty(m)$. Da für $\alpha \in \Gamma$ und $j \in J_\alpha$ auch $\varphi_{j,\alpha} \in H^\infty(m)$ ist, impliziert Lemma 3.3, dass $X \in \mathcal{F}'$ ist. Ist nun $X \in \mathcal{F}'$, so sind $X, X^*X \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ nach Satz 2.25, und wir können Satz 3.9 anwenden. Folglich existiert ein $\psi \in L^\infty(m)$ so, dass $X = T_\psi$ ist. Wir wollen nun zeigen, dass $\psi H^2(m) \subset H^2(m)$ gilt, denn dann erhält man

$$\psi \in L^\infty(m) \cap H^2(m) = H^\infty(m)$$

unmittelbar aus Lemma 3.3. Dazu betrachten wir die Abbildung Φ aus Lemma 2.18 sowie den *-Homomorphismus π aus Satz 2.25 und stellen fest, dass nach Bemerkung 3.10 wegen $Ran(\Phi) = \mathcal{T}(\mathcal{F})$ und $X^*X \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ die Identität

$$\begin{aligned} X^*X &= T_{\overline{\psi}}T_\psi \\ &= \Phi(T_{\overline{\psi}}T_\psi) \\ &= P_{H^2(m)}\pi(T_{\overline{\psi}}T_\psi)|_{H^2(m)} \\ &= P_{H^2(m)}\pi(T_\psi)^*\pi(T_\psi)|_{H^2(m)} \\ &= P_{H^2(m)}M_\psi^* M_\psi|_{H^2(m)} \end{aligned}$$

erfüllt ist. Aus $X = T_\psi = P_{H^2(m)}M_\psi|_{H^2(m)}$ und $X^*X = P_{H^2(m)}M_\psi^*M_\psi|_{H^2(m)}$ folgt nun unmittelbar $M_\psi H^2(m) \subset H^2(m)$ mit Proposition 1.8, und die Behauptung ist gezeigt. □

3.4 Exakte Sequenzen von Toeplitzalgebren

An dieser Stelle wollen wir noch einmal kurz an die im Anschluss zu Definition 3.4 erklärten allgemeinen Voraussetzungen erinnern. Es sei weiterhin A eine normabgeschlossene Unteralgebra von $C(K)$, $m \in M(K)_1^+$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf K und $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ eine punktetrennende Familie von sphärischen Multifunktionen, $\mathcal{F}_\alpha = (\varphi_{j,\alpha})_{j\in J_\alpha}$ mit $\varphi_{j,\alpha} \in A$ für alle $\alpha \in \Gamma$, $j \in J_\alpha$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{F}$ die Familie $(S_\alpha)_{\alpha\in\Gamma} = ((T_{\varphi_{j,\alpha}})_{j\in J_\alpha})_{\alpha\in\Gamma}$ und schreiben abkürzend $T_{j,\alpha}$ für den Toeplitzoperator mit Symbol $\varphi_{j,\alpha}$.
Ist $B \subset L^\infty(m)$ eine unitale Unteralgebra, so sei $\mathcal{T}(B)$ die von allen Toeplitzoperatoren T_φ mit $\varphi \in B$ erzeugte unitale C*-Unteralgebra von $B(H^2(m))$. C*-Teilalgebren dieses Typs nennen wir Toeplitzalgebren. Zur besseren Übersicht führen wir nun noch einige abkürzende Bezeichnungen ein. Das in $\mathcal{T}(B)$ abgeschlossene Ideal, welches von allen $T_\varphi T_\psi - T_\psi T_\varphi$, $\varphi, \psi \in B$, erzeugt wird bezeichnen wir mit $\mathcal{C}(B)$ und schreiben $\mathcal{SC}(B)$ für das in $\mathcal{T}(B)$ abgeschlossene Ideal, welches von allen $T_\varphi T_\psi - T_{\varphi\psi}$, $\varphi, \psi \in B$, erzeugt wird. Der folgende Satz liefert eine exakte Sequenz für die von den Toeplitzoperatoren mit Symbol in $L^\infty(m)$ erzeugte Toeplitzalgebra.

Satz 3.12. *Es existiert eine kurze exakte Sequenz von C*-Algebren*

$$0 \to \mathcal{SC}(L^\infty(m)) \hookrightarrow \mathcal{T}(L^\infty(m)) \xrightarrow{\chi} L^\infty(m) \to 0$$

so, dass $\chi(T_\psi) = \psi$ für alle $\psi \in L^\infty(m)$ ist. Insbesondere ist die Spektralinklusion $essran(\psi) \subset \sigma(T_\psi)$ für alle $\psi \in L^\infty(m)$ erfüllt.

Beweis. Wir betrachten erneut die Abbildungen Φ aus Lemma 2.18 und π aus Satz 2.25. Aus Teil (d) von Satz 2.25 erhalten wir, dass $Ker(\pi)$ mit dem von $XY - \Phi(XY)$, $X, Y \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ in $C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F}))$ erzeugten abgeschlossenen Ideal übereinstimmt. Letzteres ist nach Satz 3.9 jedoch gerade das von $T_\varphi T_\psi - \Phi(T_\varphi T_\psi)$, $\varphi, \psi \in L^\infty(m)$ in $C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F}))$ erzeugte abgeschlossene Ideal. Für $\varphi, \psi \in L^\infty(m)$ erhält man aber

$$\begin{aligned}
\Phi(T_\varphi T_\psi) &= P_{H^2(m)}\pi(T_\varphi T_\psi)|_{H^2(m)} \\
&= P_{H^2(m)}\pi(T_\varphi)\pi(T_\psi)|_{H^2(m)} \\
&= P_{H^2(m)}M_\varphi M_\psi|_{H^2(m)} \\
&= P_{H^2(m)}M_{\varphi\psi}|_{H^2(m)} \\
&= T_{\varphi\psi}
\end{aligned}$$

mit Satz 2.25 und Bemerkung 3.10, was schließlich zu $Ker(\pi) = \mathcal{SC}(L^\infty(m))$ führt. Nach Bemerkung 3.10 wissen wir jedoch, dass

$$\pi(C^*(\mathcal{T}(\mathcal{F}))) = \{M_\varphi \mid \varphi \in L^\infty(m)\} = M(L^\infty(m))$$

gilt, und da $M : L^\infty(m) \to M(L^\infty(m))$ nach Proposition 3.2 bekanntlich ein isometrischer *-Isomorphismus ist, können wir die Abbildung

$$M^{-1} : M(L^\infty(m)) \to L^\infty(m), M_\varphi \mapsto \varphi$$

definieren. Wir setzen außerdem $\chi = M^{-1} \circ \pi$. Dann ist $Ker(\chi) = Ker(\pi)$ da M^{-1} bijektiv ist und $Ran(\chi) = L^\infty(m)$. Ferner ist

$$\chi(T_\psi) = M^{-1} \circ \pi(T_\psi) = M^{-1}(M_\psi) = \psi$$

für alle $\psi \in L^\infty(m)$, und die behauptete Spektralinklusion folgt unmittelbar aus der Beobachtung, dass

$$essran(\psi) = \sigma_{L^\infty(m)}(\psi) = \sigma_{L^\infty(m)}(\chi(T_\psi)) \subset \sigma(T_\psi) \tag{3.3}$$

gilt. Einen Beweis der wohlbekannten ersten Identität in (3.3) findet man etwa in [7, Proposition VIII.1.14]. $\square$

Sei $m \in M(K)_1^+$. Nach [6, Proposition 7.4.1] ist die Vereinigung $\mathscr{U}$ aller offenen Teilmengen U von K mit $m(U) = 0$ erneut eine offene m-Nullmenge. Wir bezeichnen mit $supp(m)$ das Komplement von $\mathscr{U}$ in K. Die Menge $supp(m)$ heißt der *Träger* des Maßes m. Nach dem Fortsetzungssatz von Tietze gibt es zu jeder stetigen Funktion $f \in C(supp(m))$ eine stetige Funktion $\hat{f} \in C(K)$ mit $\hat{f}|_{supp(m)} = f$. Wir definieren nun die Abbildungen

$$j : C(K) \to L^\infty(m),\ f \mapsto [f]$$

und

$$i : C(supp(m)) \to L^\infty(m),\ f \mapsto [\hat{f}] = j(\hat{f}).$$

Die Abbildung i ist wohldefiniert, da alle Fortsetzungen von f außerhalb der m-Nullmenge $K \setminus supp(m)$ übereinstimmen.

Proposition 3.13. *Die Abbildung $i : C(supp(m)) \to L^\infty(m),\ f \mapsto [\hat{f}]$ ist ein injektiver *-Homomorphismus.*

Beweis. Offensichtlich ist i ein *-Homomorphismus. Sei $f \in C(supp(m))$ mit $i(f) = 0$. Nach Definition der Abbildung i können wir folgern, dass $\hat{f} = 0$ fast überall bezüglich m ist, und wir müssen zeigen, dass dann schon $f = 0$ ist. Dazu nehmen wir an, es existiere ein $x \in supp(m)$ mit $f(x) = \hat{f}(x) \neq 0$. Aus der Stetigkeit von $\hat{f}$ erhält man dann, dass es eine offene Umgebung U von x gibt mit $\hat{f}(y) \neq 0$ für alle $y \in U$. Da jedoch $x \in supp(m)$ ist, folgt leicht, dass $m(V) > 0$ für jede offene Umgebung V von x gilt. Also ist insbeondere $m(U) > 0$ und damit $\hat{f} \neq 0$ auf einer Menge echt positiven Maßes, was ein Widerspruch zu $\hat{f} = 0$ m-fast überall darstellt. Die Annahme war also falsch und wir folgern, dass $f = 0$ gewesen ist. □

Proposition 3.14. *Die Bilder der Abbildungen $j : C(K) \to L^\infty(m),\ f \mapsto [f]$ und $i : C(supp(m)) \to L^\infty(m),\ f \mapsto [\hat{f}] = j(\hat{f})$ stimmen überein.*

Beweis. Die Inklusion $Ran(i) \subset Ran(j)$ erhält man unmittelbar aus der Definition von i. Ist nun $[f] \in Ran(j)$, so existiert ein $g \in C(K)$ mit $j(g) = [f]$. Die Abbildung $h = g|_{supp(m)} : supp(m) \to \mathbb{C}$ ist stetig und für die mit dem Fortsetzungssatz von Tietze erhaltene Abbildung $\hat{h}$ gilt sicherlich

$$\hat{h}|_{supp(m)} = h = g|_{supp(m)}.$$

Aus $m(K \setminus supp(m)) = 0$ folgt schließlich, dass $\hat{h} = g$ m-fast überall ist, also ist $j(g) = j(\hat{h}) = i(h) \in Ran(i)$. □

Mit Hilfe von Satz 2.25 können wir eine weitere exakte Sequenz für die von den Toeplitzoperatoren mit Symbol in $C(K)$ erzeugte Toeplitzalgebra konstruieren. Damit wir diesen Satz erneut anwenden können, benötigen wir noch zwei Lemmata, die eine Verbindung zu Teil (f) des Satzes herstellen sollen.

Lemma 3.15. *Sei $\mathcal{A}$ eine unitale C*-Algebra und sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ eine selbstadjungierte Teilmenge mit $\mathcal{A} = C^*(\mathcal{E})$. Dann stimmen die von den Mengen*

$$\{XY - YX \mid X, Y \in \mathcal{E}\} \quad \textit{bzw.} \quad \{XY - YX \mid X, Y \in \mathcal{A}\}$$

erzeugten abgeschlossenen Ideale $\mathcal{I}_0$ bzw. $\mathcal{I}$ überein.

Beweis. Da die Inklusion $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}$ klar ist, beweisen wir nur, dass $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}_0$ gilt. Dazu definieren wir die Menge

$$M = \{X \in \mathcal{A} \mid XY - YX \in \mathcal{I}_0 \text{ für alle } Y \in \mathcal{E}\} \subset \mathcal{A}$$

und zeigen, dass $M \subset \mathcal{A}$ eine unitale C*-Teilalgebra ist, die $\mathcal{E}$ enthält. Offensichtlich ist $1 \in M$ und $\mathcal{E} \subset M$. Ebenso leicht rechnet man nach, dass $M \subset \mathcal{A}$ eine abgeschlossene Teilalgebra ist[1]. Ist nun $X \in M$ beliebig, so liefert die Selbstadjungiertheit von $\mathcal{E}$, dass

$$X^*Y - YX^* = (Y^*X - XY^*)^* = -(XY^* - Y^*X)^* \in \mathcal{I}_0$$

für alle $Y \in \mathcal{E}$ ist. Damit ist $M \subset \mathcal{A}$ eine unitale C*-Teilalgebra mit $\mathcal{E} \subset M$, und nach Voraussetzung gilt schon $M = \mathcal{A}$. Genauso stellen wir fest, dass

$$N = \{Y \in \mathcal{A} \mid XY - YX \in \mathcal{I}_0 \text{ für alle } X \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{A}$$

eine unitale C*-Teilalgebra ist, und wegen $M = \mathcal{A}$ ist $\mathcal{E}$ auch in N enthalten. Folglich ist auch $N = \mathcal{A}$ und die Inklusion $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}_0$ ist gezeigt. □

Als nächstes wollen wir zeigen, dass die C*-Teilalgebren

$$C^*(\mathcal{F}) = C^*(\{T_{\varphi_{j,\alpha}} \mid \alpha \in \Gamma, j \in J_\alpha\}) \text{ und } \mathcal{T}(C(K)) = C^*(\{T_f \mid f \in C(K)\})$$

von $B(H^2(m))$ identisch sind. Anhand dieses Resultates lässt sich im darauffolgenden Satz die angekündigte exakte Sequenz herleiten.

[1] Seien $X, Z \in M$ beliebig. Da das Element $XZY - YXZ = XZY - XYZ + XYZ - YXZ = X(ZY - YZ) + (XY - YX)Z$ für alle $Y \in \mathcal{E}$ in $\mathcal{I}_0$ liegt, folgt die Abgeschlossenheit von M unter der Multiplikation.

Lemma 3.16. *Es gilt die Identität $\mathcal{T}(C(K)) = C^*(\mathcal{F})$.*

Beweis. Da die Funktionen $\varphi_{j,\alpha}$ für alle $\alpha \in \Gamma$ und $j \in J_\alpha$ in $C(K)$ liegen, ist die Inklusion $C^*(\mathcal{F}) \subset \mathcal{T}(C(K))$ klar. Zum Beweis der umgekehrten Inklusion zeigen wir zunächst, dass

$$B = \{f \in C(K) \mid T_f \in C^*(\mathcal{F})\} \subset C(K)$$

eine unitale C*-Unteralgebra ist. Die lineare, unitale Abbildung

$$T|_{C(K)} : C(K) \to B(H^2(m)),\ f \mapsto T_f$$

ist stetig und verträglich mit den Involutionen. Also ist $B \subset C(K)$ ein abgeschlossener linearer Teilraum, und mit $f \in B$ ist auch $\overline{f} \in B$. Seien nun $f, g \in B$. Nach dem Beweis zu Satz 3.12 ist dann $T_{fg} = \Phi(T_f T_g) \in \Phi(C^*(\mathcal{F}))$, wobei Φ die Abbildung aus Lemma 2.18 bezeichne. Aus dem Beweis von Teil (f) des Satzes 2.25 erhält man aber die Inklusion $\Phi(C^*(\mathcal{F})) \subset C^*(\mathcal{F})$, welche unmittelbar $fg \in B$ liefert. Also ist $B \subset C(K)$ eine unitale C*-Teilalgebra. Da offensichtlich $\varphi_{j,\alpha} \in B$ für alle $j \in J_\alpha$ und $\alpha \in \Gamma$ ist, ist B punktetrennend, und mit dem Satz von Stone-Weierstraß erhält man $B = C(K)$. Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Wir sind nun in der Lage, eine kurze exakte Sequenz für die von den Toeplitzoperatoren mit Symbol in $C(K)$ erzeugte Toeplitzalgebra $\mathcal{T}(C(K))$ anzugeben.

Satz 3.17. *Es existiert eine kurze exakte Sequenz von C*-Algebren*

$$0 \to \mathcal{C}(C(K)) \hookrightarrow \mathcal{T}(C(K)) \stackrel{\chi_0}{\to} C(supp(m)) \to 0$$

so, dass $\chi_0(T_\psi) = \psi|_{supp(m)}$ für alle $\psi \in C(K)$ gilt.

Beweis. Wir betrachten erneut die beiden Abbildungen $j : C(K) \to L^\infty(m)$ und $i : C(supp(m)) \to L^\infty(m)$. Sowohl i als auch j sind *-Homomorphismen und nach Proposition 3.14 ist $Ran(i) = Ran(j)$. Dies liefert unmittelbar, dass

$$\begin{aligned} C^*(\widehat{\mathcal{F}}) &= C^*(\{M(j(\varphi_{j,\alpha})) \mid \alpha \in \Gamma, j \in J_\alpha\}) \\ &= M(j(C(K))) \\ &= M(i(C(supp(m)))) \end{aligned}$$

für die minimale normale Erweiterung $\widehat{\mathcal{F}}$ von $\mathcal{F}$ aus Lemma 3.6 gilt. Damit ist

$$(M \circ i)^{-1} = (M \circ i : C(supp(m)) \to C^*(\widehat{\mathcal{F}}))^{-1}$$

ein *-Isomorphismus von $C^*(\widehat{\mathcal{F}})$ auf $C(supp(m))$. Mit Hilfe von Lemma 3.16 sieht man leicht, dass die Abbildung π nach Teil (f) von Satz 2.25 einen surjektiven *-Homomorphismus

$$\pi_0 : \mathcal{T}(C(K)) = C^*(\mathcal{F}) \to C^*(\widehat{\mathcal{F}}), \quad X \mapsto \pi(X)$$

induziert. Da die Menge $\{T_\psi \mid \psi \in C(K)\}$ selbstadjungiert ist, erhalten wir mit Lemma 3.15 die Identität $Ker(\pi_0) = \mathcal{C}(C(K))$, denn nach Satz 2.25 (f) ist $Ker(\pi_0)$ gerade das von $\{XY - YX \mid X, Y \in C^*(\mathcal{F})\}$ in $C^*(\mathcal{F})$ erzeugte abgeschlossene Ideal. Also wird durch

$$\chi_0 = (M \circ i)^{-1} \circ \pi_0 : \mathcal{T}(C(K)) \to C(supp(m))$$

ein surjektiver *-Homomorphismus definiert mit

$$Ker(\chi_0) = Ker(\pi_0) = \mathcal{C}(C(K)).$$

Nach Bemerkung 3.10 und der Definition der Abbildung i gilt schließlich

$$\chi_0(T_\psi) = (M \circ i)^{-1} M_{j\psi} = (M \circ i)^{-1} M_{i(\psi|_{supp(m)})} = \psi|_{supp(m)}$$

für alle $\psi \in C(K)$. □

Als nächstes wollen wir versuchen, eine hinreichende Bedingung für die Existenz punktetrennender Familien sphärischer Multifunktionen innerhalb einer uniformen Algebra zu formulieren. Die folgende Proposition erweist sich derweil im Beweis des nächsten Satzes als hilfreich.

Proposition 3.18. *Seien $A \subset C(K)$ eine uniforme Algebra und $f \in C(K)$ mit $f(x) > 0$ für alle $x \in K$. Existieren zu jedem $\varepsilon > 0$ und $\varphi \in C(K)$ mit $\varphi > 0$ endlich viele $g_{\varphi,1}, \ldots, g_{\varphi,m_\varphi}$ in A mit*

$$\|\varphi - \sum_{k=1}^{m_\varphi} |g_{\varphi,k}|^2\|_\infty < \varepsilon,$$

so gibt es schon eine Folge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in A mit $f = \sum_{k=1}^\infty |g_k|^2$ gleichmäßig auf K.

Beweis. Sei $f : K \to \mathbb{C}$ stetig mit $f > 0$ auf K, wir setzen $n_0 = 1$. Durch Induktion über $k \in \mathbb{N}$ konstruieren wir streng monoton wachsende Folgen $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ und eine Folge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in A so, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$0 < f - \sum_{j=1}^{m_k} |g_j|^2 < \frac{1}{n_k}$$

erfüllt ist. Da $f > 0$ auf K ist, existiert ein $n_1 > n_0 = 1$ mit $f - \frac{1}{2n_1} > 0$. Nach Voraussetzung finden wir $m_1 \in \mathbb{N}$ und $g_1, \ldots, g_{m_1} \in A$ mit

$$\|f - \frac{1}{2n_1} - \sum_{\nu=1}^{m_1} |g_\nu|^2\|_\infty < \frac{1}{2n_1},$$

also ist

$$0 < f - \sum_{\nu=1}^{m_1} |g_\nu|^2 < \frac{1}{n_1}.$$

Sind nun die Folgenglieder $n_1, \ldots, n_k$, $m_1, \ldots, m_k$ und $g_1, \ldots, g_{m_k}$ bereits konstruiert, so existiert wegen $f - \sum_{j=1}^{m_k} |g_j|^2 > 0$ ein $n_{k+1} > n_k$ derart, dass $f - \sum_{j=1}^{m_k} |g_j|^2 - \frac{1}{2n_{k+1}} > 0$ gilt. Nach Voraussetzung existieren wiederum ein $m_{k+1} > m_k$ und $g_{m_k+1}, \ldots, g_{m_{k+1}} \in A$ mit

$$\|f - \sum_{j=1}^{m_k} |g_j|^2 - \frac{1}{2n_{k+1}} - \sum_{j=m_k+1}^{m_{k+1}} |g_j|^2\|_\infty < \frac{1}{2n_{k+1}}.$$

Also ist die Abschätzung

$$0 < f - \sum_{j=1}^{m_{k+1}} |g_j|^2 < \frac{1}{n_{k+1}}$$

erfüllt, und die Folgenglieder n_{k+1}, m_{k+1} und $g_{m_k+1}, \ldots, g_{m_{k+1}}$ sind konstruiert. Nach Konstruktion konvergiert die Folge $(\sum_{j=1}^{m_k} |g_j|^2)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf K gegen f. Damit besitzt f die gleichmäßig konvergente Reihendarstellung

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} |g_j|^2$$

auf K. □

Mit Hilfe der separierenden Familie $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ sphärischer Multifunktionen und der exakten Sequenz aus Satz 3.12 wurde für alle $\psi \in L^\infty(m)$ die Spektralinklusion $essran(\psi) \subset \sigma(T_\psi)$ gezeigt. Wir wollen nun beweisen, dass innerhalb einer uniformen Algebra schon eine punktetrennende Familie sphärischer Multifunktionen existiert, wenn jedes Maß $m \in M(K)_1^+$ und jede Funktion $\psi \in L^\infty(m)$ der beschriebenen Spektralinklusion genügt.

Satz 3.19. *Ist $A \subset C(K)$ eine uniforme Algebra so, dass $essran(\psi) \subset \sigma(T_\psi)$ für alle $m \in M(K)_1^+$ und alle $\psi \in L^\infty(m)$ erfüllt ist, so enthält A eine separierende Familie $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ sphärischer Multifunktionen.*

Beweis. Unter den gegebenen Voraussetzungen existiert nach [16, Proposition 3] zu $0 < f \in C(K)$ und $\varepsilon > 0$ eine endliche Summe der Form $\sum_{k=1}^{n} |g_k|^2$ mit $g_k \in A$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$ so, dass

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} |g_k|^2\|_\infty < \varepsilon.$$

Also existiert nach Proposition 3.18 schon eine Folge $(g_k)_{k \geq 1}$ in A derart, dass f die gleichmäßig konvergente Reihendarstellung $f = \sum_{k=1}^{\infty} |g_k|^2$ besitzt. Dies wollen wir benutzen, um die separierende Familie sphärischer Multifunktionen zu konstruieren. Wir definieren die Menge $\Gamma = \{f \in A \mid |f| < 1 \text{ auf } K\}$ und betrachten eine beliebige Funktion $f \in \Gamma$. Dann ist die Funktion $1 - |f|^2$ echt positiv auf K, und es existiert eine Folge $(g_{k,f})_{k \geq 1}$ in A mit

$$1 - |f|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |g_{k,f}|^2$$

auf K. Setzt man nun $g_{0,f} = f$, so ist $F_f = (g_{k,f})_{k \geq 0}$ eine sphärische Multifunktion. Wir zeigen nun, dass die Familie $(F_f)_{f \in \Gamma}$ separierend ist. Da die uniforme Algebra A punktetrennend ist, trennt auch Γ die Punkte von K. Sind nun $x, y \in K$ beliebig mit $x \neq y$, so existiert ein $f \in \Gamma$ mit $f(x) \neq f(y)$, also mit $g_{0,f}(x) \neq g_{0,f}(y)$, woraus die Behauptung unmittelbar folgt. $\square$

Da sich für uniforme Algebren die hinreichende Bedingung für die Existenz einer separierenden Familie sphärischer Multifunktionen aus Satz 3.19 im allgemeinen nur schwer verifizieren lässt, wollen wir an dieser Stelle noch einige Beispiele kompakter Hausdorffräume K und uniformer Algebren $A \subset C(K)$ angeben, für die man die Existenz sphärischer Multifunktionen leicht zeigen kann.

Bemerkung 3.20. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für eine offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ sei die Menge $A(\Omega)$ definiert durch

$$A(\Omega) = \{f \in C(\overline{\Omega}) \mid f|_\Omega \text{ analytisch }\},$$

und für $j \in \{1, \ldots, n\}$ bezeichnen wir mit z_j die Funktion $z = (z_1, \ldots, z_n) \mapsto z_j$.

(a) Ist $K = S_n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z| = 1\}$, so ist $A = A(\mathbb{B}_n)|_{S_n} \subset C(S_n)$ eine uniforme Algebra. Das Tupel $(z_1, \ldots, z_n)$ ist eine separierende sphärische Multifunktion, denn es ist

$$\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 = 1$$

für alle $z = (z_1, \ldots, z_n) \in S_n$.

(b) Ist $K = \mathbb{T}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_j| = 1 \text{ für alle } j \in \{1, \dots, n\}\}$, so ist $A = A(\mathbb{D}^n)|_{\mathbb{T}^n} \subset C(\mathbb{T}^n)$ eine uniforme Algebra. Das Tupel $\frac{1}{\sqrt{n}}(z_1, \dots, z_n)$ ist eine separierende sphärische Multifunktion, denn es ist

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 = 1$$

für alle $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{T}^n$.

(c) Wir können das erste Beispiel noch verallgemeinern. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein streng pseudokonvexes Gebiet mit C^2-Rand und $K = \partial\Omega$. Nach klassischen Sätzen von Fornæss und Løw (siehe [14], [19] oder [11, Korollar 2.1.3]) existiert ein $N \in \mathbb{N}$ und eine injektive Abbildung $f \in A(\Omega)^N$ mit $f(\partial\Omega) \subset S_N$. Folglich ist $A = A(\Omega)|_{\partial\Omega}$ eine uniforme Algebra und $f|_{\partial\Omega}$ eine separierende sphärische Multifunktion für A.

Abschließend sei noch kurz bemerkt, dass, wie in der Einleitung schon erwähnt wurde, die exakten Sequenzen aus den Sätzen 3.12 und 3.17 für die Beispiele aus Bemerkung 3.20 zumindest für spezielle Maße $m \in M(K)_1^+$ bereits in der Literatur behandelt wurden (siehe zum Beispiel [17] und [5]).

Literaturverzeichnis

[1] William Arveson, *An Invitation to C*-Algebras*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 39, Springer Verlag, New York, 1976.

[2] William Arveson, *Subalgebras of C*-algebras III: Multivariable operator theory*, Acta Math. **181** (1998), 159-228.

[3] Ameer Athavale, *On the intertwining of joint isometries*, J. Operator Theory **23** (1990), no. 2, 339-350.

[4] Arlen Brown, Paul R. Halmos, *Algebraic properties of Toeplitz operators*, J. Reine Angew. Math. **213** (1964), 89-102.

[5] Lewis A. Coburn, *Singular integral operators and Toeplitz operators on odd spheres*, Indiana Univ. Math. J. **23** (1974), 433-439.

[6] Donald L. Cohn, *Measure Theory*, Birkhäuser, Boston, 1980.

[7] John B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 96, Springer Verlag, New York, 1985.

[8] John B. Conway, *A Course in Operator Theory*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 21, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[9] John B. Conway, *The Theory of Subnormal Operators*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 36., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

[10] Alexander M. Davie, Nicholas P. Jewell, *Toeplitz operators in several complex variables*, J. Functional Analysis **26** (1977), 356-368.

[11] Michael Didas, *Dual algebras generated by von Neumann n-tuples over strictly pseudoconvex domains*, Dissertationes Math. **425**, 2004.

[12] Jacques Dixmier, *Les moyennes invariantes dans les semi-groupes et leurs applications*, Acta Sci. Math. Szeged **12** (1950), 213-227.

[13] Ronald G. Douglas, *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*, Pure and applied Mathematics, Vol. 49, Academic Press, New York, 1972.

[14] John Erik Fornæss, *Embedding strictly pseudoconvex domains in convex domains*, Amer. J. Math. **98** (1976), 529-569.

[15] Takasi Itô, *On the commutative family of subnormal operators*, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I **14** (1958), 1-15.

[16] Jan Janas, *Toeplitz spectral inclusion and generalized in modulus property*, Proc. Amer. Math. Soc. **104** (1988), 231-234.

[17] Nicholas P. Jewell, Steven G. Krantz, *Toeplitz operators and related function algebras on certain pseudoconvex domains*, Trans. Amer. Math. Soc. **252** (1979), 297-312.

[18] Richard V. Kadison, *Isometries of operator algebras*, Ann. of Math. **54** (1951), 325-338.

[19] Erik Løw, *Embeddings and proper holomorphic maps of strictly pseudoconvex domains into polydiscs and balls*, Math. Z. **190** (1985), 401-410.

[20] Vern Paulsen, *Completely Bounded Maps and Operator Algebras*, Cambridge Studies In Advanced Mathematics, Vol. 78, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[21] Bebe Prunaru, *Some Exact Sequences for Toeplitz Algebras of Spherical Isometries*, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 3621-3630.

[22] Bebe Prunaru, *Toeplitz operators associated to commuting row contractions*, J. Functional Analysis **254** (2008), 1626-1641.

[23] Shôichirô Sakai, *C*-Algebras and W*-Algebras*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Vol. 60, Springer Verlag, New York, 1971.

[24] Helmut H. Schaefer, *Topological Vector Spaces*, Macmillan Series in Advanced Mathematics and Theoretical Physics, The Macmillan Company, New York, 1967.

[25] Kehe Zhu, *An Introduction to Operator Algebras*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Inc., Boca Raton, FL, 1993.