UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

# Index und Homotopieklassen stetiger Abbildungen auf kompakten Mengen in $\mathbb{C}$

**Bachelorarbeit**

zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science
im Studiengang Mathematik
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät I
- Mathematik und Informatik -
der Universität des Saarlandes

von

**Valerie Klauk**

betreut durch

**Prof. Dr. Jörg Eschmeier**

Saarbrücken, 2015

# Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich die Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Saarbrücken, den 30.04.2015

Valerie Klauk

# Inhaltsverzeichnis

# Einleitung

Der Index ist eine der am häufigsten betrachteten Invarianten in der Funktionentheorie. Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Index $\operatorname{ind}_\gamma(z)$ eines geschlossenen Weges $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ bezüglich eines Punkts $z \notin \operatorname{Im}\gamma$. Dabei untersuchen wir, wie sich die stetige Verformung von Wegen, die wir als Homotopie bezeichnen, auf den Index auswirkt. Sind $S \subset \mathbb{R}^n$ und $A \subset \mathbb{C}$, so wird durch Homotopie eine Äquivalenzrelation auf der Menge $C(S,A)$ der stetigen Abbildungen zwischen $S$ und $A$ definiert.
Ist $K \subset \mathbb{C}$ kompakt, so kann die Menge der Homotopieklassen mit der Quotientengruppe $C\left(K, \mathbb{C} \setminus \{0\}\right) / \exp C\left(K\right)$ identifiziert werden. Dieser Quotient identifiziert Funktionen, die sich nur um einen Faktor unterscheiden, der einen stetigen Logarithmus besitzt.
Die Struktur der multiplikativen Gruppe $C\left(K, \mathbb{C} \setminus \{0\}\right) / \exp\ C(K)$ werden wir erfassen können, indem wir einen Zusammenhang zwischen dem Index, Homotopien und der Existenz stetiger Logarithmen herstellen. So werden wir sehen, dass
$C\left(K, \mathbb{C} \setminus \{0\}\right) / \exp\ C(K)$ isomorph zur additiven Gruppe $\bigoplus_{C \in \mathfrak{C}} \mathbb{Z}$ ist, falls die Menge $\mathfrak{C}$ der beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus K$ nichtleer ist. Ist zu $C \in \mathfrak{C}$ ein Punkt $p_C \in C$ gegeben, so definiert die Abbildung

$$\begin{aligned} d :\ \bigoplus_{C \in \mathfrak{C}} \mathbb{Z} &\to C\left(K, \mathbb{C} \setminus \{0\}\right) / \exp C\left(K\right), \\ \left(n_C\right)_{C \in \mathfrak{C}} &\mapsto \left[\prod_{C \in \mathfrak{C}} \left(z - p_C\right)^{n_C}\right] \end{aligned}$$

einen Gruppenisomorphismus. Dieses Ergebnis, das üblicherweise als der Homotopiesatz für kompakte Mengen in $\mathbb{C}$ bezeichnet wird, beweisen wir in Kapitel 3 dieser Arbeit.

Zum Abschluss der Arbeit folgt als Anwendung dieses Resultats ein Kapitel über Fredholmoperatoren und Abbildungsgrade. Dabei definieren wir den (Fredholm-) Index eines Fredholmoperators $T : X \to Y$ als die Differenz

$$\operatorname{ind}(T) = \dim\left(\ker T\right) - \dim\left(Y / \operatorname{Im} T\right).$$

Wie der Index

$$\operatorname{ind}_\gamma : \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b]) \to \mathbb{Z}$$

eines geschlossenen Weges $\gamma$ definiert auch der Fredholmindex eine stetige, lokalkonstante Abbildung

$$\operatorname{ind} : \operatorname{Fred}(X,Y) \to \mathbb{Z},$$

die konstant 0 auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathrm{Fred}(X, Y)$ ist.

Das Ziel des letzten Kapitels wird es sein, eine Formel zur Berechnung des Index eines linearen, stetigen, wesentlich normalen Operators $T$ auf einem Hilbertraum $H$ zu beweisen.
Für eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{C}$, eine stetige Funktion $f : K \to \mathbb{C}$, eine beschränkte Zusammenhangskomponente $C$ von $\mathbb{C} \setminus K$ und einen Punkt $y \in \mathbb{C} \setminus f(\partial C)$ führen wir den Abbildungsgrad $\deg(f, C, y)$ von $f$ um $y$ bezüglich $C$ ein, um zu zeigen, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \rho: \ & C(K, \mathbb{C} \setminus \{0\}) \,/\, \exp C(K) \to \bigoplus_{C \in \mathfrak{C}} \mathbb{Z}, \\ & [f] \mapsto (\deg(f, C, 0))_{C \in \mathfrak{C}} \end{aligned}$$

die Umkehrabbildung des Gruppenisomorphismus $d$ ist. Für einen wesentlich normalen Operator $T \in \mathcal{L}(H)$ sei

$$\Phi_T : C(\sigma_e(T)) \to C^*([T]),\, f \mapsto f([T])$$

der stetige Funktionalkalkül von $[T]$ in der Calkin-Algebra $\mathcal{C}(H)$. Für jede Funktion $f \in C(\sigma_e(T))$ sei außerdem ein Operator $\widehat{f}(T) \in \mathcal{L}(H)$ gewählt mit $\left[\widehat{f}(T)\right] = f([T])$. Wir zeigen, dass der Fredholmindex mit $K = \sigma_e(T)$ einen wohldefinierten Gruppenisomorphismus

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}: \ & C(K, \mathbb{C} \setminus \{0\}) \,/\, \exp C(K) \to \mathbb{Z}, \\ & [f] \mapsto \mathrm{ind}\, \widehat{f}(T) \end{aligned}$$

induziert und beweisen schließlich mit Hilfe des kommutierenden Diagramms

$$\begin{tikzcd} C(K, \mathbb{C} \setminus \{0\}) / \exp C(K) \arrow[r, "\mathrm{ind}"] \arrow[d, "\rho"'] & \mathbb{Z} \\ \bigoplus_{C \in \mathfrak{C}} \mathbb{Z} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

für alle $f \in C(\sigma_e(T))$ und $w \notin f(\sigma_e(T))$ die Indexformel

$$\mathrm{ind}\left(w - \widehat{f}(T)\right) = \sum_{C \in \mathfrak{C}} \deg(f, C, w)\, \mathrm{ind}_C(T).$$

Dabei bezeichnen wir für eine Zusammenhangskomponente $C$ von $\mathbb{C} \setminus \sigma_e(T)$ mit $\mathrm{ind}_C(T)$ den Wert, den die lokalkonstante Funktion ind auf $C$ annimmt.

# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Personen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Allen voran bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. Jörg Eschmeier für ein interessantes Thema und die Unterstützung während der Entstehung dieser Arbeit. Für eine hervorragende Betreuung möchte ich mich auch bei Sebastian Langendörfer bedanken, der mir bei sämtlichen Problemen jederzeit mit Rat und Tat zur Seite stand und meine Arbeit Korrektur las. Auch den übrigen Mitarbeitern des Lehrstuhls Eschmeier, Dominik Schillo und Daniel Kraemer, gilt mein Dank für die Aufmerksamkeit im Bachelorseminar sowie die Bereitwilligkeit meine Fragen zu verschiedensten Themen zu beantworten.

Desweiteren möchte ich mich bei Markus Alt, Ricarda Dick und vielen weiteren Kommilitonen bedanken, die mich während des Bachelorstudiums begleitet haben, immer ein offenes Ohr für mich hatten und ohne die viele Vorlesungen nur halb so viel Spaß gemacht hätten.

# 1 Grundlagen

Im ersten Kapitel stellen wir zwei wichtige Sätze bereit, die wir später noch verwenden werden.

## 1.1 Lokale Existenz stetiger Logarithmen

Der folgende Satz (vgl. [Bur79] Theorem 3.19), den wir voraussetzen wollen, liefert die Grundlage für das spätere Kapitel über die Existenz stetiger Logarithmen.

**Satz 1.1.1.** *Sei $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $L : D_{|c|}(c) \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, sodass $e^{L(z)} = z$ für alle $z \in D_{|c|}(c)$ gilt.*

Wir nennen eine solche Funktion $L$ einen stetigen Logarithmus.

## 1.2 Homotopiefortsetzungssatz von Borsuk

Neben dem aus der Topologie bekannten Satz von Tietze werden wir im späteren Kapitel über Homotopie einen weiteren Fortsetzungssatz benötigen, den Homotopiefortsetzungssatz von Borsuk. Dieser erlaubt es, stetige, nullstellenfreie Funktionen unter gewissen Voraussetzungen stetig und nullstellenfrei fortzusetzen.

**Satz 1.2.1** (Homotopiefortsetzungssatz von Borsuk)**.** *Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und sei $\emptyset \neq A \subset B$ kompakt. Weiter seien $f : A \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $g : B \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ stetige Funktionen. Außerdem existiere eine stetige Funktion*

$$h : A \times [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ mit } \begin{cases} h(x,0) = f(x) \\ h(x,1) = g(x) \end{cases} \quad \text{für alle } x \in A.$$

*Dann gibt es eine stetige Fortsetzung $F : B \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ von $f$.*

*Beweis.* Sei $C = (A \times [0,1]) \cup (B \times \{1\})$. Wir setzen $h$ durch $h_0(x,1) = g(x)$ für alle $x \in B$ zu einer stetigen Funktion $h_0 : C \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ fort. Dem Satz von Tietze (angewendet auf den Real- und Imaginärteil von $h_0$) zufolge existiert eine stetige Fortsetzung $H : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{C}$ von $h_0$. Dann ist die Menge $H^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ offen und wegen $H(C) = h_0(C) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $C \subset H^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei

$$A_k = \{x \in \mathbb{R}^n ; d(x,A) \leq \frac{1}{k}\}.$$

Dann ist

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{x \in \mathbb{R}^n ; d(x,A) = 0\} = \overline{A} = A,$$

also

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \times [0,1] \subset H^{-1}\left(\mathbb{C} \setminus \{0\}\right).$$

Wir nehmen an, es gibt kein $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass die Inklusion

$$A_{k_0} \times [0,1] \subset H^{-1}\left(\mathbb{C} \setminus \{0\}\right)$$

gilt. Dann ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Menge

$$M_k = (A_k \times [0,1]) \cap \left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus H^{-1}\left(\mathbb{C} \setminus \{0\}\right)\right)$$

nichtleer. Da die Mengen $M_k$ absteigend sind, hat die Familie $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die endliche Durchschnittseigenschaft.
Weiterhin sind diese Mengen abgeschlossene Teilmengen der kompakten Menge $A_1 \times [0,1]$, woraus $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} M_k \neq \emptyset$ und damit der Widerspruch

$$A \times [0,1] \not\subset H^{-1}\left(\mathbb{C} \setminus \{0\}\right)$$

folgt. Es existiert also ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$A_{k_0} \times [0,1] \subset H^{-1}\left(\mathbb{C} \setminus \{0\}\right).$$

Für jedes $x \in B$ gilt dann

$$(x, \min\{1, k_0\, d\,(x,A)\}) \in (A_{k_0} \times [0,1]) \cup (B \times \{1\}) \subset H^{-1}\left(\mathbb{C} \setminus \{0\}\right),$$

denn für $x \in A_{k_0}$ ist $\min\{1, k_0 d\,(x,A)\} = k_0 d\,(x,A) \in [0,1]$ und für $x \in B \setminus A_{k_0}$ ist $\min\{1, k_0\, d\,(x,A)\} = 1$.
Damit ist

$$\begin{aligned} F:\ & B \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ & x \mapsto H\left(x, \min\{1, k_0 d\,(x,A)\}\right) \end{aligned}$$

die gewünschte stetige Fortsetzung von $f$. □

# 2 Index, Homotopie und Existenz stetiger Logarithmen

Wir beginnen nun mit den Vorbereitungen, um im folgenden Kapitel den Homotopiesatz beweisen zu können. Wir gehen dabei vor wie in [Bur79], Chapter IV, §2-4.

## 2.1 Index

In diesem Abschnitt definieren wir den Index. Anschaulich gibt der Index eines geschlossenen Weges bezüglich eines Punkts an, wie oft man beim Durchlaufen des Weges gegen den Uhrzeigersinn um den Punkt "herumläuft", d.h. wie oft sich der Weg um diesen Punkt windet.
Um den Index als Funktion eines Punktes definieren zu können, benötigen wir den folgenden Satz.

**Satz 2.1.1.** *Seien $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig und $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $z_0 \notin \operatorname{Im}\gamma$. Dann existieren eine Kreisscheibe $D_0 = D_\epsilon(z_0) \subset \mathbb{C} \setminus \operatorname{Im}\gamma$ und eine stetige Funktion $\phi : [a, b] \times D_0 \to \mathbb{C}$ so, dass $\gamma(t) - z = e^{\phi(t,z)}$ für alle $(t, z) \in [a, b] \times D_0$ gilt.*
*Ist $\gamma \in C^k([a, b])$ für ein $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und ist $\phi : [a, b] \times D_0 \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion wie oben, so ist für jedes $z \in D_0$ die Funktion $\phi_z : [a, b] \to \mathbb{C}, t \mapsto \phi(t, z)$ in $C^k([a, b])$.*

*Beweis.* Wähle $r > 0$ so, dass $D_{2r}(z_0)$ disjunkt zu $\operatorname{Im}\gamma$ ist und setze $D_0 = D_r(z_0)$. Da $\gamma$ gleichmäßig stetig ist, gibt es $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ so, dass $\operatorname{diam}(\gamma[t_{j-1}, t_j]) < r$ für alle $j = 1, ..., n$ gilt.
Wir definieren

$$\Gamma : [a, b] \times D_0 \to \mathbb{C} \setminus \{0\},\ \Gamma(t, z) = \gamma(t) - z$$

und betrachten die Mengen

$$D_j = D_{2r}(\Gamma(t_{j-1}, z_0)) \qquad (j = 1, ..., n).$$

Nach Wahl von $r$ gilt

$$|\Gamma(t, z_0)| = |\gamma(t) - z_0| \geq 2r$$

für alle $t \in [a, b]$.
Sei $j \in \{1, ..., n\}$. Dann existiert wegen $D_j \subset D_{|\Gamma(t_{j-1},z_0)|}(\Gamma(t_{j-1}, z_0))$ nach Satz 1.1.1

ein stetiger Logarithmus $L_j$ in $D_j$.
Für alle $(t,z) \in [t_{j-1}, t_j] \times D_0$ gilt außerdem

$$\begin{aligned}|\Gamma(t,z) - \Gamma(t_{j-1}, z_0)| &= |\gamma(t) - z - \gamma(t_{j-1}) + z_0| \\ &\leq |\gamma(t) - \gamma(t_{j-1})| \ + \ |z - z_0| \\ &\leq \operatorname{diam}(\gamma[t_{j-1}, t_j]) \ + \ |z - z_0| \\ &< 2r.\end{aligned}$$

Also bildet $\Gamma$ die Menge $[t_{j-1}, t_j] \times D_0$ nach $D_j$ ab. Wir können also für alle $j = 1, ..., n$ die stetige Funktion $\phi_j = L_j \circ \Gamma|_{[t_{j-1}, t_j] \times D_0}$ definieren.
Wir bemerken außerdem, dass für alle $z \in D_0$ wegen $\Gamma(t_j, z) \in D_j \cap D_{j+1}$ gilt:

$$e^{L_j(\Gamma(t_j,z))} = \Gamma(t_j, z) = e^{L_{j+1}(\Gamma(t_j,z))} \qquad (j = 1, ..., n-1).$$

Für alle $z \in D_0$ und $j = 1, ..., n-1$ ist damit

$$L_j(\Gamma(t_j, z)) - L_{j+1}(\Gamma(t_j, z)) = 2\pi i N_j(z) \ \ (*)$$

für ein $N_j(z) \in \mathbb{Z}$. Da $D_0$ zusammenhängend ist, sind die stetigen Funktionen $N_j : D_0 \to \mathbb{Z}$ konstant.
Nun können wir $\phi : [a,b] \times D_0 \to \mathbb{C}$ definieren durch

$$\phi(t,z) = \begin{cases} \phi_1(t,z), & \text{falls } (t,z) \in [t_0, t_1] \times D_0, \\ \phi_j(t,z) + 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{j-1} N_k(z), & \text{falls } (t,z) \in [t_{j-1}, t_j] \times D_0 \text{ für ein } j \in \{2, ..., n\}. \end{cases}$$

Wegen $(*)$ ist $\phi$ wohldefiniert.
Zudem ist $\phi$ stetig und für alle $(t,z) \in [t_{j-1}, t_j] \times D_0$ und $j = 1, ..., n$ gilt

$$e^{\phi(t,z)} = e^{\phi_j(t,z)} = e^{L_j(\Gamma(t,z))} = \Gamma(t,z) = \gamma(t) - z.$$

Sei $D_0 = D_\epsilon(z_0) \subset \mathbb{C} \setminus \operatorname{Im}\gamma$ und sei $\phi : [a,b] \times D_0 \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit $\gamma(t) - z = e^{\phi(t,z)}$ für alle $(t,z) \in [a,b] \times D_0$. Für $(t,z) \in [a,b] \times D_0$ kann nach Satz 1.1.1 ein Logarithmus L durch eine Potenzreihe in einer Umgebung von $\gamma(t) - z$ definiert werden. Wie oben folgt dann, dass sich $\phi(\cdot, z)$ in einer zusammenhängenden Umgebung $U$ von $t$ nur um eine Konstante von $L \circ (\gamma - z)|_U$ unterscheidet. Da $L$ durch eine Potenzreihe dargestellt wird, ist $L$ unendlich oft stetig differenzierbar. Dann folgt mit der Kettenregel aus $\gamma \in C^k([a,b])$ für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, dass $L \circ (\gamma - z)|_U \in C^k(U)$ gilt. Damit ist auch $\phi(\cdot, z)|_U \in C^k(U)$, also insgesamt $\phi(\cdot, z) \in C^k([a,b])$. □

Wir nennen die Funktion $\phi$ aus Satz 2.1.1 einen stetigen Logarithmus der Funktion $\gamma - z$.

**Definition 2.1.2.** *Sei $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg und $z \notin \operatorname{Im}\gamma$. Der Index von $\gamma$ bezüglich $z$ ist definiert als*

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\phi(b) - \phi(a)\right),$$

*wobei $\phi : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein stetiger Logarithmus der Funktion $\gamma - z$ auf $[a, b]$ ist.*

Die Existenz eines stetigen Logarithmus in der obigen Definition folgt aus Satz 2.1.1. Um die Wohldefiniertheit zu zeigen, seien $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ und $\Phi, \Psi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ stetige Logarithmen von $\gamma - z_0$. Es gelte also $e^\Phi = \gamma - z_0 = e^\Psi$. Dann ist $\frac{1}{2\pi i}(\Phi - \Psi)$ eine stetige, ganzzahlige Funktion auf der zusammenhängende Menge $[a, b]$ und damit konstant. Es gilt also

$$\phi(b) - \phi(a) = \Psi(b) - \Psi(a).$$

Ist $\gamma$ sogar stückweise stetig differenzierbar, so können wir den Index von $\gamma$ in einem Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Im}\gamma$ auch mit einem Kurvenintegral berechnen.

**Satz 2.1.3.** *Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein stückweise stetig differenzierbarer, geschlossener Weg, so gilt*

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\xi - z}\, d\xi$$

*für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Im}\gamma$.*

*Beweis.* Sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Im}\gamma$. Wähle eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$, so dass $\gamma$ auf jedem Intervall $[t_{j-1}, t_j]$ $(j = 1, ..., n)$ stetig differenzierbar ist. Nach Satz 2.1.1 gibt es eine stetige Funktion $\phi : [a, b] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma - z_0 = e^\phi$, so dass $\phi$ auf jedem Intervall $[t_{j-1}, t_j]$ für $j = 1, ..., n$ stetig differenzierbar ist. Differenzieren von $\gamma - z_0 = e^\phi$ auf diesen Intervallen ergibt

$$\gamma'(t) = \frac{d}{dt}\left(\gamma(t) - z_0\right) = \phi'(t)e^{\phi(t)} = \phi'(t)\left(\gamma(t) - z_0\right)$$

für alle $t \in [t_{j-1}, t_j]$ und $j \in \{1, ..., n\}$. Daher gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\xi - z_0}\, d\xi &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi i}\int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} \phi'(t) dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n}\left(\phi(t_j) - \phi(t_{j-1})\right) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\left(\phi(b) - \phi(a)\right) \\
&= \operatorname{ind}_\gamma(z_0).
\end{aligned}$$

$\square$

Im folgenden Satz führen wir einige Eigenschaften des Index auf.

**Satz 2.1.4.** *Sei* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *ein geschlossener Weg. Dann ist* $\operatorname{ind}_\gamma$ *eine stetige, ganzzahlige Funktion auf* $\mathbb{C} \setminus \gamma\,[a,b]$*. Insbesondere ist sie konstant auf den Zusammenhangskomponenten von* $\mathbb{C} \setminus \gamma\,[a,b]$*. Außerdem ist* $\operatorname{ind}_\gamma \equiv 0$ *auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente.*

*Beweis.* Sei $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$. Um zu sehen, dass $\operatorname{ind}_\gamma(z_0)$ eine ganze Zahl ist, bemerken wir, dass für jede Funktion $\phi$ wie in Definition 2.1.2

$$e^{\phi(b)-\phi(a)} = \frac{e^{\phi(b)}}{e^{\phi(a)}} = \frac{\gamma(b) - z_0}{\gamma(a) - z_0} = 1$$

gilt, da $\gamma$ geschlossen ist. Somit gilt $\frac{1}{2\pi i}(\phi(b) - \phi(a)) \in \mathbb{Z}$.
Nach Satz 2.1.3 gibt es eine Kreisscheibe $D_0$ um $z_0$ und eine stetige Funktion
$\phi : [a,b] \times D_0 \longrightarrow \mathbb{C}$, welche

$$e^{\phi(t,z)} = \gamma(t) - z$$

für alle $(t,z) \in [a,b] \times D_0$ erfüllt. Für alle $z \in D_0$ gilt dann

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\phi(b,z) - \phi(a,z)\right),$$

also ist $\operatorname{ind}_\gamma$ stetig in $z_0$. Sei nun $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \sup\limits_{t\in[a,b]} |\gamma(t)|$. Nach Satz 1.1.1 existiert ein stetiger Logarithmus $L : D_1(-1) \to \mathbb{C}$. Definiere

$$\Psi : [a,b] \to \mathbb{C}, t \mapsto L\left(\frac{\gamma(t)}{z} - 1\right)$$

und wähle $w \in \mathbb{C}$ mit $z = e^w$. Weiter sei $\phi = \Psi + w$.
Dann folgt

$$e^{\phi(t)} = e^w e^{\Psi(t)} = z\left(\frac{\gamma(t)}{z} - 1\right) = \gamma(t) - z$$

für alle $t \in [a,b]$. Nach Definition des Index und der Wahl von $\Psi$ ist dann

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}(\phi(b) - \phi(a)) = \frac{1}{2\pi i}(\Psi(b) - \Psi(a)) = 0,$$

da $\gamma$ geschlossen ist.
Somit verschwindet $\operatorname{ind}_\gamma(z)$ für $z \in \mathbb{C}$ mit hinreichend großem Betrag. Da die stetige Funktion $\operatorname{ind}_\gamma$ auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$ konstant ist, folgt die Behauptung. □

Der Index ist also konstant auf den Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Im}\gamma$, d.h. $\operatorname{ind}_\gamma(z)$ ist stetig als Funktion von $z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Im}\gamma$. Im nächsten Satz zeigen wir, dass der Index in einem geeignetem Sinn sogar als stetig in $\gamma$ und $z$ angesehen werden kann. Zuerst benötigen wir noch ein Hilfslemma.

**Lemma 2.1.5.** *Für zwei geschlossene Wege $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt*

$$\operatorname{ind}_{\gamma_1\gamma_2}(0) = \operatorname{ind}_{\gamma_1}(0) + \operatorname{ind}_{\gamma_2}(0).$$

*Beweis.* Seien $\phi$ und $\psi$ stetige Logarithmen für $\gamma_1$ beziehungsweise $\gamma_2$. Wegen $e^{\phi} = \gamma_1$ und $e^{\psi} = \gamma_2$ gilt $e^{\phi+\psi} = \gamma_1\gamma_2$ und damit ist $\phi + \psi$ ein stetiger Logarithmus von $\gamma_1\gamma_2$. Es folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}_{\gamma_1\gamma_2}(0) &= \frac{1}{2\pi i}(\phi(b) - \phi(a) + \psi(b) - \psi(a)) \\ &= \operatorname{ind}_{\gamma_1}(0) + \operatorname{ind}_{\gamma_2}(0).\end{aligned}$$

□

Wir benutzen im Folgenden die Bezeichnung

$$B_\delta(\gamma_0) = \{\gamma \in C([a,b]); \gamma(a) = \gamma(b) \text{ und } \|\gamma - \gamma_0\|_{[a,b]} < \delta\}.$$

**Satz 2.1.6.** *Seien $\gamma_0 \in C[a,b]$ und $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Im}\gamma_0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass*

$$z \notin \operatorname{Im}\gamma \text{ und } \operatorname{ind}_\gamma(z) = \operatorname{ind}_{\gamma_0}(z_0)$$

*für alle $(\gamma, z) \in B_\delta(\gamma_0) \times D_\delta(z_0)$ gilt.*

*Beweis.* Seien $\gamma_0 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig und $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Im}\gamma_0$.
Da $\operatorname{Im}\gamma_0 \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen ist, existiert ein $\epsilon > 0$ mit $D_\epsilon(z_0) \subset \mathbb{C} \setminus \operatorname{Im}\gamma_0$. Da $\operatorname{ind}_{\gamma_0}$ lokal konstant ist, folgt

$$\operatorname{ind}_{\gamma_0}(z_0) = \operatorname{ind}_{\gamma_0}(z) \qquad (*)$$

für alle $z \in D_\epsilon(z_0)$.
Wir definieren $\tilde{\delta} = \min\{|\gamma_0(t) - z|; t \in [a,b], z \in \overline{D_{\frac{\epsilon}{2}}}(z_0)\}$ und $\delta = \min\left\{\tilde{\delta}, \frac{\epsilon}{4}\right\}$. Dann gilt $0 < \delta < \frac{\epsilon}{2}$.
Sei nun $(\gamma, z) \in B_\delta(\gamma_0) \times D_\delta(z_0)$. Definiere $\tilde{\gamma} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ durch $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma - z}{\gamma_0 - z}$.
Dann ist $\tilde{\gamma}$ ein geschlossener Weg. Außerdem gilt

$$|\tilde{\gamma}(t) - 1| = \left|\frac{\gamma(t) - z - (\gamma_0(t) - z)}{\gamma_0(t) - z}\right| = \left|\frac{\gamma(t) - \gamma_0(t)}{\gamma_0(t) - z}\right| \leq \frac{\|\gamma - \gamma_0\|_{[a,b]}}{\delta} < 1$$

für alle $t \in [a,b]$, also ist $\tilde{\gamma}([a,b]) \subset D_1(1)$. Hieraus folgt, dass $z \notin \operatorname{Im}\gamma$ ist und $\mathbb{C} \setminus D_1(1)$ zur unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \tilde{\gamma}[a,b]$ gehört. Nach Satz 2.1.4 gilt dann

$$\operatorname{ind}_{\tilde{\gamma}}(0) = 0.$$

Mit Definition 2.1.2, Lemma 2.1.5 und $(*)$ folgt

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind}_{\gamma}(z) &= \operatorname{ind}_{\gamma-z}(0) \\
&= \operatorname{ind}_{\tilde{\gamma}(\gamma_0-z)}(0) \\
&= \underbrace{\operatorname{ind}_{\tilde{\gamma}}(0)}_{=0} + \operatorname{ind}_{\gamma_0-z}(0) \\
&= \operatorname{ind}_{\gamma_0}(z_0).
\end{aligned}$$

□

Insbesondere folgt aus Satz 2.1.6, dass für $z \in \mathbb{C}$ die Funktion

$$\operatorname{ind}_{\cdot}(z) : \{\gamma \in C([a,b]), \gamma(a) = \gamma(b), z \notin \gamma([a,b])\} \to \mathbb{Z},\ \gamma \mapsto \operatorname{ind}_{\gamma}(z)$$

stetig bezüglich der von $\left(C([a,b]), \|\cdot\|_{[a,b]}\right)$ induzierten Relativtopologie ist.

## 2.2 Homotopie

Wir untersuchen nun, wie sich die stetige Verformung eines Weges (die wir durch sogenannte Homotopien beschreiben wollen) auf seinen Index auswirkt.
Dazu definieren wir zunächst alle notwendigen Begriffe.

**Definition 2.2.1.** *Sei $A \subset \mathbb{C}$.*

*(i) Wir nennen geschlossene Wege $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to A$ homolog in $A$, falls $\operatorname{ind}_{\gamma_0}(z) = \operatorname{ind}_{\gamma_1}(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus A$ gilt.*

*(ii) Wir nennen einen geschlossenen Weg $\gamma_0 : [a,b] \to A$ nullhomolog in $A$, falls $\gamma_0$ homolog in $A$ zu einem konstanten Weg ist, d.h. falls $\operatorname{ind}_{\gamma_0}(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus A$ gilt.*

*(iii) Falls jeder geschlossene Weg in $A$ nullhomolog in $A$ ist, so nennen wir $A$ einfach zusammenhängend.*

**Definition 2.2.2.** *Seien $S \subset \mathbb{R}^n, A \subset \mathbb{C}$ und $f_0, f_1 : S \to A$ stetige Funktionen.*

*(i) Eine Homotopie von $f_0$ zu $f_1$ in $A$ ist eine stetige Funktion $h : [0,1] \times S \to A$, so dass*

$$h(0,x) = f_0(x), h(1,x) = f_1(x)$$

*für alle $x \in S$ gilt.*
*Wir schreiben auch $f_t(x) = h(t,x)$ für $(t,x) \in [0,1] \times S$.*
*Außerdem nennen wir $f_0$ homotop zu $f_1$ in $A$, falls ein solches $h$ existiert.*

*(ii)* *$f_0$ heißt nullhomotop in $A$, falls eine Homotopie in $A$ zu einer konstanten Funktion existiert.*

**Bemerkung 2.2.3.** Homotopie ist eine Äquivalenzrelation. Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ und $f_0 : S \to A \subset \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann ist $H : [0,1] \times S \to A, H(t,x) = f_0(x)$ eine Homotopie von $f_0$ zu sich selbst in $A$. Ist $f_1 : S \to A$ eine weitere stetige Funktion und $h : [0,1] \times S \to A$ eine Homotopie in A von $f_0$ zu $f_1$, so ist $h' : [0,1] \times S \to A$ definiert durch $h'(t,x) = h(1-t,x)$ eine Homotopie von $f_1$ zu $f_0$ in $A$.
Zum Nachweis der Transitivität der Relation sei $f_0$ homotop zu $f_1$ und $f_1$ homotop zu einer stetigen Funktion $f_2 : S \to A$. Da $f_0$ homotop zu $f_1$ ist, gibt es eine Homotopie $h_1 : [0,1] \times S \to A$ mit $h_1(0,x) = f_0(x)$ und $h_1(1,x) = f_1(x)$ für alle $x \in S$. Da $f_1$ homotop zu $f_2$ ist, gibt es eine Homotopie $h_2 : [0,1] \times S \to A$ mit $h_2(0,x) = f_1(x)$ und $h_2(1,x) = f_2(x)$ für alle $x \in S$. Wir betrachten dann die Funktion

$$h_3 : [0,1] \times S \to A, (t,x) \mapsto \begin{cases} h_1(2t,x), & \text{falls } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ h_2(2t-1,x), & \text{falls } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}.$$

Dann ist $h_3$ ist wohldefiniert, da $h_1(1,x) = f_1(x) = h_2(0,x)$ für alle $x \in S$ gilt und stetig, da $h_3$ eine Zusammensetzung aus stetigen Funktionen ist, die auf abgeschlossenen Mengen definiert sind und auf dem Durchschnitt der Definitionsbereiche übereinstimmen.
Außerdem gilt

$$h_3(0,x) = h_1(0,x) = f_0(x)$$
$$h_3(1,x) = h_2(1,x) = f_2(x)$$

für alle $x \in S$, also ist $f_0$ homotop zu $f_2$ in $A$.

**Definition 2.2.4.** *Sei $A \subset \mathbb{C}$.*

*(i)* *Seien $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to A$ geschlossene Wege. Die Wege $\gamma_0, \gamma_1$ heißen homotop in $A$ als geschlossene Wege, wenn eine Homotopie $h$ zwischen $\gamma_0$ und $\gamma_1$ in $A$ existiert so, dass jeder Weg $\gamma_t = h(t,\cdot)$ geschlossen ist, d.h. es gilt $h(t,a) = h(t,b)$ für alle $t \in [0,1]$.*

*(ii)* *Sei $\gamma_0 : [a,b] \to A$ ein geschlossener Weg. Wir nennen $\gamma_0 : [a,b] \to A$ als geschlossenen Weg nullhomotop in $A$, falls $\gamma_0$ homotop in $A$ als geschlossener Weg zu einem konstanten Weg ist.*

*(iii)* *Falls jeder geschlossene Weg in $A$ als geschlossener Weg nullhomotop in $A$ ist, sagen wir $A$ ist schleifenhomotop-zusammenhängend.*

**Satz 2.2.5.** *Seien $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to A \subset \mathbb{C}$ geschlossene Wege, die als geschlossene Wege homotop in $A$ sind. Dann sind $\gamma_0$ und $\gamma_1$ homolog in $A$.*

*Beweis.* Sei $H : [0,1] \times [a,b] \to A$ stetig mit

$$H(0,x) = \gamma_0(x), H(1,x) = \gamma_1(x) \text{ sowie } H(t,a) = H(t,b)$$

für alle $t \in [0,1]$ und $x \in [a,b]$.
Für jedes $\tau \in [0,1]$ ist dann die Funktion

$$\gamma_\tau : [a,b] \to A,\ t \mapsto H(\tau, t)$$

ein geschlossener Weg und $\tau \mapsto \gamma_\tau$ ist eine stetige Abbildung von $[0,1]$ nach $C[a,b]$. Aus Satz 2.1.6 folgt, dass für jedes $z \in \mathbb{C} \backslash A$ die Abbildung $\tau \mapsto \operatorname{ind}_{\gamma_\tau}(z)$ lokal konstant, also stetig ist. Da sie nur ganzzahlige Werte annimmt und ihr Definitionsbereich das zusammenhängende Intervall $[0,1]$ ist, ist sie konstant. Daher gilt

$$\operatorname{ind}_{\gamma_0}(z) = \operatorname{ind}_{\gamma_1}(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus A$, sodass $\gamma_0$ und $\gamma_1$ homolog in $A$ sind. □

Folgendes Ergebnis werden wir später noch benutzen:

**Satz 2.2.6.** *Jede sternförmige Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist schleifenhomotop-zusammenhängend.*

*Beweis.* Sei $S \subset \mathbb{C}$ sternförmig bezüglich $z_0$ und $\gamma : [a,b] \to S$ ein geschlossener Weg. Wir definieren

$$H : [0,1] \times [a,b] \to S,\ H(t,x) = (1-t)\,\gamma(x) + tz_0.$$

Dann gelten

$$H(0,x) = \gamma(x),\, H(1,x) = z_0 \text{ und } H(t,a) = H(t,b)$$

für alle $t \in [0,1]$. Also ist $\gamma$ als geschlossener Weg homotop in $S$ zu dem konstanten Weg $z_0$. Damit ist $\gamma$ als geschlossener Weg nullhomotop in $S$ und da $\gamma$ ein beliebiger geschlossener Weg war, ist $S$ schleifenhomotop-zusammenhängend. □

## 2.3 Existenz stetiger Logarithmen

Wir untersuchen nun, unter welchen Voraussetzungen nullstellenfreie, stetige Funktionen einen stetigen Logarithmus besitzen. Eines der wichtigsten Ergebnisse zeigt, dass eine solche Funktion, wenn sie auf einer kompakten Menge definiert ist, genau dann einen stetigen Logarithmus besitzt, wenn sie in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ homotop zu einem konstanten Weg ist.

**Satz 2.3.1.** *Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine stetige Funktion. Dann sind äquivalent:*

*(i)* $\operatorname{ind}_{f \circ \gamma}(0) = 0$ *für alle geschlossenen Wege in $U$,*

*(ii) $f$ hat einen stetigen Logarithmus in $U$.*

*Beweis.* (ii)⇒(i): Seien $\gamma : [a,b] \to U$ ein geschlossener Weg und $\phi : U \to \mathbb{C}$ ein stetiger Logarithmus von $f$. Es gilt $e^{\phi(\gamma(t))} = f(\gamma(t))$ für alle $t \in [a,b]$, also ist $\phi \circ \gamma$ stetiger Logarithmus von $f \circ \gamma$. Somit gilt

$$\operatorname{ind}_{f\circ\gamma}(0) = \frac{1}{2\pi i}\left((\phi \circ \gamma)(b) - (\phi \circ \gamma)(a)\right) = 0,$$

da $\gamma$ geschlossen ist.
(i)⇒(ii): Wir können ohne Einschränkung voraussetzen, dass $U$ zusammenhängend ist. Sei $z_0 \in U$. Wir wählen $w_0 \in \mathbb{C}$ mit $e^{w_0} = f(z_0)$. Für jedes $z \in U$ sei $\gamma_z : [0,1] \to U$ ein Weg von $z_0$ zu $z$, d.h. es gelten $\gamma_z(0) = z_0$ und $\gamma_z(1) = z$.
Sei $\phi_z$ ein stetiger Logarithmus von $f \circ \gamma_z$ (Satz 2.1.1). Dann gilt $(f \circ \gamma_z)(1) = e^{\phi_z(1)}$ und $e^{\phi_z(0)} = (f \circ \gamma_z)(0) = f(z_0) = e^{w_0}$. Ohne Einschränkung sei $\phi_z$ für alle $z \in U$ der stetige Logarithmus, für den $w_0 = \phi_z(0)$ gilt.
Definiere $\varphi : U \to \mathbb{C}, z \mapsto \phi_z(1)$. Damit gilt

$$e^{\varphi(z)} = e^{\phi_z(1)} = f(\gamma_z(1)) = f(z)$$

für alle $z \in U$, also ist $\varphi$ ein Logarithmus von $f$.
Wir zeigen nun die Stetigkeit von $\varphi$. Sei dazu $z_1 \in U$. Wähle $r > 0$ mit $\overline{D}_r(z_1) \subset U$ und $f\left(\overline{D}_r(z_1)\right) \subset D_{|f(z_1)|}(f(z_1))$. Nach Satz 1.1.1 existiert ein stetiger Logarithmus $L : D_{|f(z_1)|}(f(z_1)) \to \mathbb{C}$. Wegen

$$e^{\phi_{z_1}(1)} = f(\gamma_{z_1}(1)) = f(z_1) = e^{L(f(z_1))}$$

können wir $L$ so wählen, dass $L(f(z_1)) = \phi_{z_1}(1)$ gilt. Sei nun $z \in D_r(z_1)$ und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ die Strecke von $z_1$ zu $z$. Insbesondere gelten dann $\gamma(0) = z_1, \gamma(1) = z$ und $f(\operatorname{Im}\gamma) \subset D_{|f(z_1)|}(f(z_1))$.
Wir betrachten weiter

$$\Gamma : [0,3] \to \mathbb{C},\ \Gamma(t) = \begin{cases} \gamma_z(1-t), & \text{falls } 0 \le t \le 1 \\ \gamma_{z_1}(t-1), & \text{falls } 1 \le t \le 2 \\ \gamma(t-2), & \text{falls } 2 \le t \le 3 \end{cases}.$$

Dann ist $\Gamma$ wohldefiniert wegen $\gamma_z(0) = z_0 = \gamma_{z_1}(0)$ und $\gamma_{z_1}(1) = z_1 = \gamma(0)$, außerdem wegen $\gamma_z(1) = z = \gamma(1)$ ein geschlossener Weg. Als Zusammensetzung stetiger Funktionen, die auf abgeschlossenen Mengen definiert sind und auf dem Durchschnitt der Definitionsbereiche übereinstimmen, ist $\Gamma$ zudem stetig.
Definiere außerdem

$$\phi : [0,3] \to \mathbb{C},\ \phi(t) = \begin{cases} \phi_z(1-t), & \text{falls } 0 \le t \le 1 \\ \phi_{z_1}(t-1), & \text{falls } 1 \le t \le 2 \\ L(f(\gamma(t-2))), & \text{falls } 2 \le t \le 3 \end{cases}.$$

Wegen $\phi_z(0) = w_0 = \phi_{z_1}(0)$ und $\phi_{z_1}(1) = L(f(z_1)) = L(f(\gamma(0)))$ ist $\phi$ wohldefiniert und wegen

$$
\begin{aligned}
(f\circ\Gamma)(t) &= \begin{cases} (f\circ\gamma_z)\,(1-t)\,, & \text{falls } 0\le t\le 1,\\ (f\circ\gamma_{z_1})\,(t-1)\,, & \text{falls } 1\le t\le 2,\\ (f\circ\gamma)\,(t-2)\,, & \text{falls } 2\le t\le 3 \end{cases}\\
&= \begin{cases} e^{\phi_z(1-t)}, & \text{falls } 0\le t\le 1,\\ e^{\phi_{z_1}(t-1)}, & \text{falls } 1\le t\le 2,\\ e^{L(f(\gamma(t-2)))}, & \text{falls } 2\le t\le 3 \end{cases}\\
&= e^{\phi(t)}
\end{aligned}
$$

für alle $t\in[0,3]$ ist $\phi$ ein stetiger Logarithmus von $f\circ\Gamma$.
Nach Voraussetzung ist $0 = 2\pi i\,\mathrm{ind}_{f\circ\Gamma}(0) = \phi(3)-\phi(0) = L(f(z)) - \phi_z(1)$.
Wegen $\phi_z(1) = \varphi(z)$ stimmen $\varphi$ und $L\circ f$ auf $D_r(z_1)$ überein, also ist $\varphi$ stetig in $D_r(z_1)$. Da $z_1\in U$ beliebig war, ist $\varphi$ stetig. □

**Korollar 2.3.2.** *Sei $U\subset\mathbb{C}$ offen. Falls $U$ schleifenhomotop-zusammenhängend ist (insbesondere falls $U$ sternförmig ist), so hat jede stetige Funktion $f: U\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ einen stetigen Logarithmus.*

*Beweis.* Sei $f: U\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ eine stetige Funktion und $\gamma: [a,b]\to\mathbb{C}$ ein geschlossener Weg in $U$. Nach Voraussetzung existiert eine Homotopie $h: [0,1]\times[a,b]\to U$ geschlossener Wege von $\gamma$ zu einem konstanten Weg. Dann gilt etwa $h(0,t)=\gamma(t)$ und $h(1,t)=z_0$ für alle $t\in[a,b]$.
Dann ist $(f\circ h)(0,t) = f(\gamma(t))$ und $(f\circ h)(1,t) = f(z_0)$, also ist $H = f\circ h$ eine Homotopie von $f\circ\gamma$ zu einem konstanten Weg in $f(U)\subset\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Somit ist $f\circ\gamma$ als geschlossener Weg nullhomotop in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ und damit nach 2.2.5 nullhomolog in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Also ist auch $\mathrm{ind}_{f\circ\gamma}(0)=0$ und nach dem letzten Satz hat $f$ einen stetigen Logarithmus in $U$. □

**Lemma 2.3.3.** *(a) Jede stetige Funktion $f: [-1,1]\times[-1,1]\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ hat einen stetigen Logarithmus.*

*(b) Jede stetige Funktion $f: \overline{D_1}(0)\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ hat einen stetigen Logarithmus.*

*Beweis.* (a) Seien $K=[-1,1]\times[-1,1], U=(-1,1)\times(-1,1)$ und $f: K\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ stetig.
Dem Satz von Tietze zufolge existiert eine stetige Fortsetzung $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ von $f$. Da $K\subset F^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ kompakt und $F^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{0\})\subset\mathbb{C}$ offen ist, existiert ein $r>1$ mit

$$K\subset rU\subset F^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{0\})\,,$$

also gilt auch

$$F(rU)\subset\mathbb{C}\setminus\{0\}\,.$$

Da $rU$ sternförmig ist, folgt die Existenz eines stetigen Logarithmus von $F$ in $rU$ aus Korollar 2.3.2. Somit existiert auch ein stetiger Logarithmus von $f$ in $K$.

(b) Mit $K = \overline{D_1}(0)$ und $U = D_1(0)$ ist der Beweis analog zum Beweis von (a).

□

Den folgenden Satz (vgl. [Bur79], Exercise 3.26) wollen wir im Beweis des nächsten Lemmas benutzen.

**Satz 2.3.4.** *Sei $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit $g(0) = g(1)$. Dann definiert $\varphi : \partial D_1(0) \to \mathbb{C}$,*

$$\varphi(z) = g(t), \text{ falls } t \in [0,1] \text{ ist mit } e^{2\pi it} = z,$$

*eine stetige Funktion auf $\partial D_1(0)$.*

**Lemma 2.3.5.** *Sei $f : \partial D_1(0) \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ stetig. Dann existieren ein $n \in \mathbb{Z}$ und eine stetige Funktion $\varphi : \partial D_1(0) \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^n e^{\varphi(z)}$ für alle $z \in \partial D_1(0)$.*

*Beweis.* Sei $f : \partial D_1(0) \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ stetig.
Definiere

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, \ \gamma(t) = f\left(e^{2\pi it}\right).$$

Offensichtlich ist $\gamma$ ein geschlossener Weg.
Sei $\phi : [0,1] \to \mathbb{C}$ stetig mit $\gamma(t) = e^{\phi(t)}$ für alle $t \in [0,1]$.
Da $\gamma$ geschlossen ist, gilt $\phi(1) - \phi(0) = 2\pi in$ für ein $n \in \mathbb{Z}$ und daher ist

$$\operatorname{ind}_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i}(\phi(1) - \phi(0)) = n.$$

Weiter sei $\psi : [0,1] \to \mathbb{C}, t \mapsto \frac{1}{2\pi i}\phi(t)$. Dann gilt $\psi(1) - \psi(0) = n$.
Zudem ist

$$e^{-2\pi int} f\left(e^{2\pi it}\right) = e^{2\pi i(\psi(t) - nt)}. \qquad (*)$$

Die stetige Funktion $[0,1] \to \mathbb{C}, t \mapsto 2\pi i(\psi(t) - nt)$ hat bei $t = 0$ sowie bei $t = 1$ den Wert $2\pi i\psi(0)$. Nach Satz 2.3.4 existiert dann eine stetige Funktion $\varphi : \partial D_1(0) \to \mathbb{C}$ mit $\varphi(e^{2\pi it}) = 2\pi i(\psi(t) - nt)$ für alle $t \in [0,1]$.
Mit $(*)$ folgt dann

$$e^{-2\pi int} f\left(e^{2\pi it}\right) = e^{\varphi\left(e^{2\pi it}\right)}$$

für alle $t \in [0,1]$ und somit

$$f(z) = z^n e^{\varphi(z)}$$

für alle $z \in \partial D_1(0)$. □

**Lemma 2.3.6.** *Seien $Q = (-1,1) \times (-1,1)$ und $f : \partial Q \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ stetig. Dann existieren ein $n \in \mathbb{Z}$ und eine stetige Funktion $\varphi : \partial Q \to \mathbb{C}$ mit $f(w) = w^n e^{\varphi(w)}$ für alle $w \in \partial Q$.*

*Beweis.* Definiere $\psi : \partial Q \to \partial D_1(0)$ durch $\psi(w) = \frac{w}{|w|}$ für $w \in \partial Q$. Wir werden zeigen, dass $\psi$ ein Homöomorphismus ist. Für $w, z \in \partial Q$ folgt aus $\frac{w}{|w|} = \frac{z}{|z|}$, dass $w = \left|\frac{w}{z}\right| z$ gilt. Wegen $\partial Q = \{x \in \mathbb{C}; \|x\|_{\max} = 1\}$ folgt

$$\left|\frac{w}{z}\right| = \left\|\left|\frac{w}{z}\right| z\right\|_{\max} = \|w\|_{\max} = 1.$$

Also ist $w = z$ und $\psi$ injektiv.
Sei nun $z \in \partial D_1(0)$. Dann ist $w = \frac{z}{\|z\|_{\max}} \in \partial Q$ und wegen $|w| = \frac{1}{\|z\|_{\max}}$ ist $\frac{w}{|w|} = \frac{z}{|w|\|z\|_{\max}} = z$. Damit ist $\psi$ auch surjektiv und insgesamt als bijektive stetige Abbildung zwischen kompakten Hausdorffräumen ein Homöomorphismus.
Nach 2.3.5 gibt es für $f \circ \psi^{-1}$ ein $n \in \mathbb{Z}$ und eine stetige Funktion $\phi : \partial D_1(0) \to \mathbb{C}$ mit $f(\psi^{-1}(z)) = z^n e^{\phi(z)}$ für alle $z \in \partial D_1(0)$.
Damit gilt

$$f(w) = \psi(w)^n e^{\phi(\psi(w))} = w^n e^{\phi(\psi(w)) - n \log|w|}$$

für alle $w \in \partial Q$. Mit $\varphi : \partial Q \to \mathbb{C}, w \mapsto \phi(\psi(w)) - n \log|w|$ folgt die Behauptung. □

**Satz 2.3.7.** *Für $C \subset \mathbb{C}$ kompakt und $f : C \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ stetig sind äquivalent:*

*(i) $f$ ist homotop in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ zu einer konstanten Abbildung,*

*(ii) $f$ hat eine Fortsetzung zu einer stetigen Funktion $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und*

*(iii) $f$ hat einen stetigen Logarithmus.*

*Beweis.* (i) $\Rightarrow$ (ii): Folgt direkt aus Satz 1.2.1.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Nach Korollar 2.3.2 hat hat $F$ einen stetigen Logarithmus, somit auch $f$.
(iii) $\Rightarrow$ (i): Sei $h : C \to \mathbb{C}$ ein stetiger Logarithmus von $f$. Dann ist

$$H : [0,1] \times C \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, (t, z) \mapsto e^{th(z)}$$

eine Homotopie zwischen dem konstanten Weg 1 und $e^h = f$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. □

**Satz 2.3.8.** *Seien $C \subset \mathbb{C}$ kompakt und $f_0, f_1 : C \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ stetige Funktionen, die homotop in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sind. Dann hat $f_0$ genau dann einen stetigen Logarithmus, wenn $f_1$ einen stetigen Logarithmus hat.*

*Beweis.* Falls $f_0$ einen stetigen Logarithmus hat, so ist $f_0$ nach Satz 2.3.7 homotop zu einer konstanten Abbildung in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Da $f_1$ homotop zu $f_0$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist, ist wegen der Transitivität der Homotopie (Bemerkung 2.2.3) auch $f_1$ homotop zu einer konstanten Abblidung in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Eine erneute Anwendung von Satz 2.3.7 zeigt dann, dass $f_1$ einen stetigen Logarithmus hat. □

Wir wollen im Folgenden stetige, nullstellenfreie Funktionen auf einer kompakten Menge $K$ identifizieren, wenn sie sich nur um einen Faktor unterscheiden, der einen stetigen

Logarithmus besitzt. Dazu betrachten wir die multiplikative Gruppe $C\left(K, \mathbb{C}\setminus\{0\}\right)$ und ihre Untergruppe

$$\exp C\left(K\right) = \left\{f \in C\left(K, \mathbb{C}\setminus\{0\}\right); \exists g \in C\left(K\right) : f = e^{g}\right\}.$$

Die Quotientengruppe

$$C\left(K, \mathbb{C}\setminus\{0\}\right) / \exp C\left(K\right)$$

erfüllt dann das Gewünschte.
Sind $f, g \in C\left(K, \mathbb{C}\setminus\{0\}\right)$ gegeben, so sind diese homotop in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ genau dann, wenn $\frac{f}{g}$ homotop zur konstanten Funktion 1 in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ist. Nach Satz 2.3.7 und seinem Beweis ist das äquivalent dazu, dass $\frac{f}{g}$ einen stetigen Logarithmus hat, also gilt dann $\left[\frac{f}{g}\right] = [1]$ in $C\left(K, \mathbb{C}\setminus\{0\}\right) / \exp C\left(K\right)$. Damit sind die Elemente von $C\left(K, \mathbb{C}\setminus\{0\}\right) / \exp C\left(K\right)$ genau die Homotopieklassen von $C\left(K, \mathbb{C}\setminus\{0\}\right)$.

# 3 Der Homotopiesatz

In diesem Kapitel verwenden wir nun die Resultate des vorangegangenen Kapitels, um letztendlich den in der Einleitung beschriebenen Homotopiesatz zu beweisen. Zuvor benötigen wir noch einige weitere Ergebnisse.

**Lemma 3.1.** *Seien $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ stetig. Falls $0$ in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus f(K)$ liegt, so ist $f$ homotop zu einer konstanten Abbildung in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Insbesondere hat $f$ dann nach Satz 2.3.7 einen stetigen Logarithmus.*

*Beweis.* Wähle $r > \sup_{x \in K} |f(x)|$. Da $0$ und $r$ dann beide in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus f(K)$ liegen, existiert ein Weg

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus f(K)$$

mit $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(1) = r$.
Definiere $h : [0,2] \times K \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ durch

$$h(t,z) = \begin{cases} f(z) - \gamma(t), & \text{falls } (t,z) \in [0,1] \times K, \\ (2-t) f(z) - r, & \text{falls } (t,z) \in [1,2] \times K. \end{cases}$$

Wegen $\gamma(1) = r$ ist $h$ wohldefiniert. Außerdem ist $h$ stetig als Zusammensetzung stetiger Funktionen, die auf abgeschlossenen Mengen definiert sind und auf dem Durchschnitt der Definitionsbereiche übereinstimmen.
Wegen

$$\begin{aligned} h(0,z) &= f(z) \text{ und} \\ h(2,z) &= -r \end{aligned}$$

für alle $z \in K$ ist $h$ eine Homotopie von $f$ zu der konstanten Abbildung $-r$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. □

**Satz 3.2.** *Seien $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ stetig. Dann existieren endlich viele Punkte $p_1, ..., p_N \in \mathbb{C} \setminus K$ und ganze Zahlen $n_1, ..., n_N \in \mathbb{Z}$ so, dass die Funktion*

$$F : K \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, z \mapsto f(z) \prod_{j=1}^{N} (z - p_j)^{n_j}$$

*einen stetigen Logarithmus hat.*

*Beweis.* Ohne Einschränkung sei $K \subset (0,1) \times (0,1)$. Sei $Q = [0,1] \times [0,1]$.
Dem Satz von Tietze zufolge existiert eine stetige Fortsetzung $f_0 : Q \to \mathbb{C}$ von $f$.
Sei $L = f_0^{-1}(\{0\})$. Dann ist $L \subset Q$ abgeschlossen und disjunkt zu $K$.
Da $K$ kompakt ist, existiert ein $r > 0$ mit $|z - w| \geq r$ für alle $z \in K, w \in L$.
Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m > \frac{\sqrt{2}}{r}$. Betrachte für $j, k = 1, ..., m$ die Quadrate

$$Q_{jk} = \left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right] \times \left[\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}\right]$$

mit Mittelpunkten $p_{jk} = \frac{j-\frac{1}{2}}{m} + i\ \frac{k-\frac{1}{2}}{m}$. Wir setzen

$$\mathfrak{K} = \{(j,k) : 1 \leq j, k \leq m \text{ mit } Q_{jk} \cap K \neq \emptyset\}$$

und

$$\mathfrak{L} = \{(j,k) : 1 \leq j, k \leq m \text{ mit } Q_{jk} \cap K = \emptyset\}.$$

Mit $K_1 = \bigcup_{(j,k) \in \mathfrak{K}} Q_{jk}$ gilt dann $K \subset K_1$, außerdem ist $K_1$ abgeschlossen. Nach Wahl von $m$ und $r$ gilt außerdem $K_1 \subset Q \setminus L$, denn für $x \in K_1 \cap L$, etwa $x \in Q_{jk} \cap L$ $((j,k) \in \mathfrak{K})$ gäbe es ein $z \in Q_{jk} \cap K$ und es würde der Widerspruch

$$r \leq |x - z| \leq \frac{\sqrt{2}}{m}$$

folgen.
Wir definieren $f_1 = f_0|_{K_1}$. Seien $I_1, ..., I_n$ diejenigen Mengen der Form

$$\left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right] \times \left\{\frac{k}{m}\right\} \qquad (j = 1, ..., m, k = 0, ..., m)$$

oder

$$\left\{\frac{j}{m}\right\} \times \left[\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}\right] \qquad (j = 0, ..., m, k = 1, ..., m),$$

die nicht ganz zu $K_1$ gehören. Da von $I_1$ höchstens die Endpunkte zu $K_1$ gehören und da $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ wegzusammenhängend ist, existiert eine stetige Fortsetzung

$$K_1 \cup I_1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

von $f_1$. Durch sukzessives Fortsetzen erhält man eine stetige Fortsetzung

$$f_2 :\ K_2 = K_1 \cup \bigcup_{j,k=1}^{m} \partial Q_{jk} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

von $f_1$. Weiter wenden wir Lemma 2.3.6 auf die Funktionen

$$f_2|_{\partial Q_{jk}} : \partial Q_{jk} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

an und erhalten für jedes $(j,k) \in \mathfrak{L}$ ein $n_{jk} \in \mathbb{Z}$ sowie eine stetige Funktion $\phi_{jk}$ : $\partial Q_{jk} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit

$$f_2|_{\partial Q_{jk}}(z) = (z - p_{jk})^{n_{jk}} e^{\phi_{jk}(z)}$$

für alle $z \in \partial Q_{jk}$. Für jedes $(j,k) \in \mathfrak{L}$ hat damit die Funktion

$$f_2|_{\partial Q_{jk}}(\cdot)\,(\cdot - p_{jk})^{-n_{jk}} : \partial Q_{jk} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

einen stetigen Logarithmus.
Nach Satz 2.3.7 existiert dann für jedes $(j,k) \in \mathfrak{L}$ eine stetige Fortsetzung

$$F_{jk} : Q_{jk} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}\,.$$

Wir definieren dann $F_0$ auf $Q$ durch

$$\begin{aligned} F_0 :\ & Q \to \mathbb{C} \setminus \{0\}\,, \\ & z \mapsto \begin{cases} f_2(z) \prod\limits_{(j,k)\in\mathfrak{L}} (z - p_{jk})^{-n_{jk}}\,, & \text{falls } z \in K_2, \\ F_{j'k'}(z) \prod\limits_{(j,k)\in\mathfrak{L}\setminus\{(j',k')\}} (z - p_{jk})^{-n_{jk}}\,, & \text{falls } z \in Q_{j'k'}, (j',k') \in \mathfrak{L} \end{cases} \end{aligned}$$

für alle $z \in Q$. Dann ist $F_0$ stetig und nullstellenfrei, hat also wegen Lemma 2.3.3(a) einen stetigen Logarithmus auf $Q$.
Mit

$$F : K \to \mathbb{C} \setminus \{0\},\ z \mapsto F_0(z) = f(z) \prod_{(j,k)\in\mathfrak{L}} (z - p_{jk})^{-n_{jk}}$$

folgt die Behauptung. □

**Korollar 3.3.** *Seien $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $\mathfrak{C}$ die Menge der beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus K$. Für jedes $C \in \mathfrak{C}$ sei ein Punkt $p_C \in C$ gegeben. Für jede stetige Funktion $f : K \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existieren dann endlich viele Zusammenhangskomponenten $C_1, ..., C_M \in \mathfrak{C}$ und ganze Zahlen $n_1, ..., n_M \in \mathbb{Z}$ so, dass die Funktion*

$$F : K \to \mathbb{C} \setminus \{0\},\ z \mapsto f(z) \prod_{j=1}^{M} \left(z - p_{C_j}\right)^{n_j}$$

*einen stetigen Logarithmus hat.*
*$\mathfrak{C} = \emptyset$ ist erlaubt, wenn man leere Produkte als 1 interpretiert.*

*Beweis.* Nach dem vorherigen Satz existieren $p_1, ..., p_N \in \mathbb{C} \setminus K$ und $n_1, ..., n_N \in \mathbb{Z}$ so, dass die Funktion $\tilde{F} : K \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, z \mapsto f(z) \prod\limits_{j=1}^{N} (z - p_j)^{n_j}$ einen stetigen Logarithmus hat.
Sei $j \in \{1, ..., N\}$. Falls $p_j$ in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus K$ liegt, so hat die Funktion $K \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, z \mapsto z - p_j$ nach Lemma 3.1 einen stetigen Logarithmus und damit auch die Funktion $K \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, z \mapsto (z - p_j)^{-n_j}$.

Sonst sei $C_j \in \mathfrak{C}$ mit $p_j \in C_j$.
Wir zeigen nun, dass im letzteren Fall die Funktion $g : K \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, z \mapsto \frac{z-p_{C_j}}{z-p_j}$ einen stetigen Logarithmus hat.
Wähle dazu einen Weg $\gamma : [0,1] \to C_j$ mit $\gamma(0) = p_{C_j}$ und $\gamma(1) = p_j$.
Wir definieren weiter $H : [0,1] \times K \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, (t,z) \mapsto \frac{z-\gamma(t)}{z-p_j}$.
Wegen $H(0,z) = g(z)$ und $H(1,z) = 1$ ist $H$ dann eine Homotopie von $g$ zum konstanten Weg 1 in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Nach Satz 2.3.8 hat g dann einen stetigen Logarithmus.
Wir erhalten $F : K \to \mathbb{C} \setminus \{0\},\ z \mapsto f(z) \prod_{j=1}^{M} \left(z - p_{C_j}\right)^{n_j}$ aus der Behauptung, indem wir $\tilde{F}$ mit $g^{n_j}$ multiplizieren, falls $p_j \in C$ für ein $C \in \mathfrak{C}$ ist, und mit $(z-p_j)^{-n_j}$, falls $p_j$ in der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C} \setminus K$ liegt und verwenden, dass auch das Produkt von Funktionen, die einen stetigen Logarithmus besitzen, einen stetigen Logarithmus besitzt. □

**Lemma 3.4.** *Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt so, dass die Menge $\mathfrak{C}$ der beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus K$ nichtleer ist. Außerdem seien $C \in \mathfrak{C}, p_C \in C$ und $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Dann hat die Funktion $g_C : K \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, z \mapsto (z-p_C)^n$ keine stetige, nullstellenfreie Fortsetzung auf die Menge $K \cup C$.*

*Beweis.* Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass $p_C = 0$ gilt. Angenommen, es gäbe eine Zahl $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ so, dass die Funktion $g_C$ eine stetige Fortsetzung zu einer Funktion $G : K \cup C \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ hätte. Dann wäre $G(z) = z^n$ für alle $z \in K$. Wähle nun ein $r > \sup_{z \in C} |z|$ und definiere die Funktion

$$h : \overline{D}_r(0) \to \mathbb{C},\ z \mapsto \begin{cases} z^n, & \text{falls } z \in \overline{D}_r(0) \setminus C, \\ G(z), & \text{falls } z \in \overline{C}. \end{cases}$$

Da $C$ als Zusammenhangskomponente offen ist, gilt

$$\overline{C} \cap \left(\overline{D}_r(0) \setminus C\right) = \overline{C} \setminus C = \partial C.$$

Wir zeigen nun $\partial C \subset K$, um die Wohldefiniertheit von h zu folgern.
Angenommen, es gibt ein $x \in \partial C \cap \mathbb{C} \setminus K$. Dann liegt $x$ also in einer Zusammenhangskomponente $\tilde{C} \neq C$ von $\mathbb{C} \setminus K$. Dann haben $C$ und $\tilde{C}$ aber nichtleeren Schnitt und dies ist ein Widerspruch, da es sich um zwei verschiedene Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus K$ handelt.
Außerdem ist $h$ stetig als Zusammensetzung stetiger Funktionen, welche auf abgeschlossenen Mengen definiert sind, auf deren Durchschnitt sie übereinstimmen. Zudem ist $h$ nullstellenfrei, da $0 \in C$ und $G$ nullstellenfrei ist. Nach Lemma 2.3.3(b) existiert dann ein stetiger Logarithmus $\varphi$ von $h$. Insbesondere gilt also

$$z^n = h(z) = e^{\varphi(z)}$$

für alle $z \in \partial D_r(0)$. Mit dem geschlossenen Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \partial D_{r^n}(0), t \mapsto r^n e^{int}$ gilt dann

$$e^{\varphi\left(re^{it}\right)} = \left(re^{it}\right)^n = \gamma(t)$$

für alle $t \in [0, 2\pi]$. Nach Definition des Index gilt dann einerseits

$$\operatorname{ind}_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i}\left(\varphi\left(re^{2\pi i}\right) - \varphi(r)\right) = 0,$$

andererseits folgt aus Satz 2.1.3

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}_\gamma(0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\xi}\, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{inr^n e^{in\xi}}{r^n e^{in\xi}}\, d\xi \\ &= n.\end{aligned}$$

Somit folgt der Widerspruch $n = 0$. □

**Satz 3.5** (Homotopiesatz). *Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt so, dass die Menge $\mathfrak{C}$ der beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus K$ nichtleer ist. Für jedes $C \in \mathfrak{C}$ sei außerdem $p_C \in C$. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} d: \bigoplus_{C\in\mathfrak{C}} \mathbb{Z} &\to C(K, \mathbb{C}\setminus\{0\}) / \exp C(K), \\ (n_C)_{C\in\mathfrak{C}} &\mapsto \left[\prod_{C\in\mathfrak{C}} (z - p_C)^{n_C}\right]\end{aligned}$$

*ein Gruppenisomorphismus.*

*Beweis.* Wegen

$$\begin{aligned} d\left((n_C + m_C)_{C\in\mathfrak{C}}\right) &= \left[\prod_{C\in\mathfrak{C}} (z - p_C)^{n_C + m_C}\right] \\ &= \left[\prod_{C\in\mathfrak{C}} (z - p_C)^{n_C}\right]\left[\prod_{C\in\mathfrak{C}} (z - p_C)^{m_C}\right]\end{aligned}$$

für alle $(n_C)_{C\in\mathfrak{C}}, (m_C)_{C\in\mathfrak{C}} \in \bigoplus_{C\in\mathfrak{C}} \mathbb{Z}$ ist $d$ ein Homomorphismus.

Die Surjektivität von $d$ folgt leicht aus Korollar 3.3.
Sei dazu $[F] \in C(K, \mathbb{C}\setminus\{0\}) / \exp C(K)$. Dann ist $F : K \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ stetig, also existieren $C_1, ..., C_M \in \mathfrak{C}$ und $n_1, ..., n_M \in \mathbb{Z}$ so, dass die Funktion

$$K \to \mathbb{C}\setminus\{0\},\ z \mapsto F(z)\prod_{j=1}^{M}\left(z - p_{C_j}\right)^{n_j}$$

einen stetigen Logarithmus hat. Es folgt also

$$\left[F\prod_{j=1}^{M}\left(z - p_{C_j}\right)^{n_j}\right] = [1]$$

und daher

$$[F] = \left[\prod_{j=1}^{M}\left(z - p_{C_j}\right)^{-n_j}\right].$$

Für die Injektivität sei $(n_C)_{C\in\mathcal{C}} \in \bigoplus_{C\in\mathcal{C}} \mathbb{Z}$ mit $d\left((n_C)_{C\in\mathcal{C}}\right) = [1]$. Es seien $C_1, ..., C_M \in \mathfrak{C}$ paarweise verschieden mit $n_C = 0$ für alle $C \in \mathfrak{C} \setminus \{C_1, ..., C_M\}$. Wegen

$$\left[\prod_{j=1}^{M}\left(z - p_{C_j}\right)^{n_{C_j}}\right] = d\left((n_C)_{C\in\mathcal{C}}\right) = [1]$$

ist dann

$$f : K \to \mathbb{C} \setminus \{0\}\,, z \mapsto \prod_{j=1}^{M}\left(z - p_{C_j}\right)^{n_{C_j}}$$

in $\exp C\,(K)$. Wir können also eine stetige Funktion $\phi : K \to \mathbb{C}$ mit

$$\prod_{j=1}^{M}\left(z - p_{C_j}\right)^{n_{C_j}} = f(z) = e^{\phi(z)} \qquad (*)$$

für alle $z \in K$ wählen. Betrachten wir nun die Faktoren $\left(z - p_{C_j}\right)^{n_{C_j}}$ von $f$. Angenommen, es gibt ein $j_0 \in \{1, ..., M\}$ mit $n_{C_{j_0}} \neq 0$. Für alle $z \in K$ folgt dann aus $(*)$, dass

$$\left(z - p_{C_{j_0}}\right)^{n_{C_{j_0}}} = \prod_{j\in\{1,...,M\}\setminus\{j_0\}}\left(z - p_{C_j}\right)^{-n_{C_j}} e^{\phi(z)}$$

gilt. Hierbei lässt sich die rechte Seite stetig zu einer nullstellenfreien Funktion auf $K \cup C_{j_0}$ fortsetzen, denn für $j \in \{1, ..., M\} \setminus \{j_0\}$ ist $p_{C_j} \notin C_{j_0}$ und $\phi$ besitzt nach dem Satz von Tietze eine stetige Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$. Somit hat auch $\left(z - p_{C_{j_0}}\right)^{n_{C_{j_0}}}$ eine stetige, nullstellenfreie Fortsetzung zu einer Funktion auf $K \cup C_{j_0}$, im Widerspruch zum vorherigen Lemma. Also ist $n_{C_j} = 0$ für alle $j \in \{1, ..., M\}$ und der Kern von $d$ trivial. □

Im Fall, dass die Menge $\mathfrak{C}$ der beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus K$ leer ist, ist die multiplikative Gruppe $C(K, \mathbb{C}\setminus\{0\})/\exp C(K)$ nach Korollar 3.3 trivial. Damit ist die Aussage von Satz 3.5 auch in diesem Fall richtig.

# 4 Fredholmindex und die Indexformel

## 4.1 Fredholmoperatoren

Im Folgenden seien $X, Y$ Banachräume über dem Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$. Mit $\mathcal{L}(X, Y)$ bezeichnen wir die Menge der linearen, beschränkten Operatoren von $X$ nach $Y$ und mit $\mathcal{K}(X, Y)$ die kompakten Operatoren in $\mathcal{L}(X, Y)$. Da $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X, X) \subset \mathcal{L}(X)$ ein Ideal ist, können wir den Quotienten $\mathcal{C}(X) = \mathcal{L}(X) / \mathcal{K}(X)$ betrachten. Wir nennen $\mathcal{C}(X)$ die Calkin-Algebra und bemerken, dass $\mathcal{C}(X)$ versehen mit der Quotientennorm eine Banachalgebra ist, da das Ideal $\mathcal{K}(X) \subset \mathcal{L}(X)$ abgeschlossen ist.
Wir setzen den folgenden Satz aus der Funktionalanalysis voraus.

**Satz 4.1.1.** *Sei $T \in \mathcal{K}(X)$. Dann gilt*

*(a) Falls* $\dim X = \infty$ *ist, so ist* $0 \in \sigma(T)$.

*(b) Für $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ ist $\lambda \in \sigma_p(T)$ und $\lambda$ ist ein isolierter Punkt in $\sigma(T)$. Außerdem ist* $\operatorname{Im} \lambda - T$ *abgeschlossen und es gelten*

$$\dim \ker(\lambda - T) < \infty, \quad \dim X / \operatorname{Im}(\lambda - T) < \infty.$$

**Lemma 4.1.2.** *Sei $A$ eine (unitale) Banachalgebra und $I \subsetneq A$ ein abgeschlossenes Ideal. Dann ist $A/I$ bezüglich der Quotientennorm* $\|a + I\| = \operatorname{dist}(a, I)$ *eine (unitale) Banachalgebra.*

*Beweis.* Da $I \subset A$ insbesondere ein abgeschlossener Teilraum ist, ist $A/I$ versehen mit der Quotientennorm ein Banachraum. Für $x, y \in A$ gilt

$$\begin{aligned} \|(x+I)(y+I)\| &= \|xy + I\| \\ &= \inf_{a \in I} \|xy - a\| \\ &\leq \inf_{a,b \in I} \|(x-a)(y-b)\| \\ &\leq \inf_{a,b \in I} \|x-a\| \, \|y-b\| \\ &= \inf_{a \in I} \|x-a\| \inf_{b \in I} \|y-b\| \\ &= \|x+I\| \, \|y+I\| \, . \end{aligned}$$

Hat $A$ ein Einselement 1, so ist $I \cap A^{-1} = \emptyset$, da $I$ ein echtes Ideal ist, und daher gilt $1 \geq \|1 + I\| \geq 1$. $\square$

**Definition 4.1.3.** *(i) Ein Operator $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ heißt Fredholmsch, falls $\dim(\ker T) < \infty$ und $\dim(Y/\operatorname{Im} T) < \infty$ gelten. Wir schreiben $\operatorname{Fred}(X,Y)$ für die Menge der Fredholmschen Operatoren $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.*

*(ii) Für $T \in \operatorname{Fred}(X,Y)$ heißt*

$$\operatorname{ind}(T) = \dim(\ker T) - \dim(Y/\operatorname{Im} T)$$

*der Index von $T$.*

**Lemma 4.1.4.** *Sei $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ mit $\dim(Y/\operatorname{Im} T) < \infty$. Dann ist $\operatorname{Im} T \subset Y$ abgeschlossen.*

*Beweis.* Ohne Einschränkung sei $T$ injektiv, sonst betrachten wir $T/\ker T$ statt $T$. Wir wählen eine Basis $([Y_1], ..., [Y_r])$ von $Y/\operatorname{Im} T$ und schreiben $N = \operatorname{LH}(Y_1, ..., Y_r)$. Dann ist $Y = \operatorname{Im} T \oplus N$ und die Abbildung

$$\rho : (X \oplus N, \|(x,n)\| = \|x\| + \|n\|) \to Y, \ (x,n) \mapsto Tx + n$$

ist stetig linear und bijektiv zwischen Banachräumen, und daher auch ein topologischer Isomorphismus. Da $X \oplus \{0\} \subset X \oplus N$ abgeschlossen ist, ist dann auch $\operatorname{Im} T = \rho(X \oplus \{0\}) \subset Y$ abgeschlossen. □

**Satz 4.1.5.** *Für einen kompakten Operator $T \in \mathcal{K}(X)$ und ein $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ist $\lambda - T$ Fredholmsch.*

*Beweis.* Für $\lambda \in \sigma(T)$ folgt die Aussage aus Satz 4.1.1(b). Falls $\lambda \notin \sigma(T)$ gilt, also $\lambda - T$ invertierbar ist, folgt $\ker(\lambda - T) = \{0\}$ sowie $\operatorname{Im}(\lambda - T) = X$ und damit $X/\operatorname{Im}(\lambda - T) = \{0\}$. Also ist $\lambda - T$ Fredholmsch. □

Im nächsten Satz sehen wir, dass ein Operator $T \in \mathcal{L}(X)$ genau dann ein Fredholmoperator ist, wenn er modulo kompakter Operatoren in der Calkin-Algebra invertierbar ist.

**Satz 4.1.6** (Atkinson's Theorem, 1951)**.** *Für einen Operator $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ sind äquivalent:*

*(i) $T$ ist Fredholmsch,*

*(ii) es existiert ein Operator $S \in \mathcal{L}(Y,X)$ mit $ST - \mathbf{1}_X \in \mathcal{K}(X)$ und $TS - \mathbf{1}_Y \in \mathcal{K}(Y)$,*

*(iii) es existieren Operatoren $S, \tilde{S} \in \mathcal{L}(Y,X)$ so, dass $[ST] \in \mathcal{C}(X)$ linksinvertierbar und $\left[T\tilde{S}\right] \in \mathcal{C}(Y)$ rechtsinvertierbar ist.*

*Für $X = Y$ folgt insbesondere, dass $T \in \mathcal{L}(X)$ genau dann Fredholmsch ist, wenn $[T]$ in $\mathcal{C}(X)$ invertierbar ist.*

*Beweis.* (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $T$ Fredholmsch. Dann existieren abgeschlossene Teilräume $N \subset X, M \subset Y$ mit $X = \ker T \oplus N, Y = \operatorname{Im} T \oplus M$. Nach dem Graphensatz sind die Projektionen $P_{\operatorname{Im} T} \in \mathcal{L}(Y)$ von $Y$ auf $\operatorname{Im} T$ längs $M$, $P_M = \mathbf{1} - P_{\operatorname{Im} T}$ und die entsprechend zu der Zerlegung $X = \ker T \oplus N$ definierte Projektion $P_{\ker T} \in \mathcal{L}(X)$ von $X$ auf $\ker T$ stetig. Nach Lemma 4.1.4 ist die Abbildung $\tilde{T} : N \to \operatorname{Im} T, x \mapsto Tx$ stetig linear und bijektiv zwischen Banachräumen, also ein topologischer Isomorphismus. Betrachte

$$S : Y \to X,\ y \mapsto \tilde{T}^{-1}\left(P_{\operatorname{Im} T} y\right).$$

Dann ist $S$ stetig linear und man kann nachrechnen, dass $\mathbf{1}_X - ST = P_{\ker T}$ und $\mathbf{1}_Y - TS = P_M$ gelten. Damit sind $\mathbf{1}_X - ST$ und $\mathbf{1}_Y - TS$ als stetige Projektionen auf endlich-dimensionale Teilräume insbesondere kompakt.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): folgt direkt.
(iii) $\Rightarrow$ (i): Seien $S, \tilde{S}$ wie in (iii). Ohne Einschränkung seien $\mathbf{1}_X - ST \in \mathcal{K}(X)$ und $\mathbf{1}_Y - T\tilde{S} \in \mathcal{K}(Y)$. Dann ist nach Satz 4.1.1

$$\ker T \subset \ker ST = \ker\left(\mathbf{1}_X - (\mathbf{1}_X - ST)\right) \subset X$$

endlich dimensional und

$$\operatorname{Im} T \supset \operatorname{Im} T\tilde{S} = \operatorname{Im}\left(\mathbf{1}_Y - (\mathbf{1}_Y - T\tilde{S})\right) \subset Y$$

endlich kodimensional. $\square$

**Lemma 4.1.7.** *(a) Seien $E, F, G$ endlich-dimensionale $K$-Vektorräume und sei*

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} G \longrightarrow 0$$

*eine exakte Sequenz linearer Operatoren, d.h. $\alpha, \beta$ sind linear, $\alpha$ ist injektiv, $\beta$ ist surjektiv und* $\operatorname{Im} \alpha = \ker \beta$. *Dann gilt* $\dim F = \dim E + \dim G$.

*(b) Sind $E, F$ Banachräume, so ist $\mathcal{L}(E,F)^{-1} = \{T \in \mathcal{L}(E,F) : T \text{ bijektiv}\} \subset \mathcal{L}(E,F)$ offen.*

*Beweis.* (a) $E \xrightarrow{\alpha} \operatorname{Im} \alpha = \ker \beta$ ist ein Vektorraumisomorphismus. Mit der Dimensionsformel aus der linearen Algebra folgt dann

$$\begin{aligned}\dim F &= \dim \ker \beta + \dim \operatorname{Im} \beta \\ &= \dim \operatorname{Im} \alpha + \dim G \\ &= \dim E + \dim G.\end{aligned}$$

(b) Sei $S \in \mathcal{L}(E,F)$ bijektiv. Da $S$ dann ein topologischer Isomorphismus ist, ist auch $\rho : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E,F),\ T \mapsto ST$ ein topologischer Isomorphismus und daher ist $\mathcal{L}(E,F)^{-1} = \rho\left(\mathcal{L}(E)^{-1}\right) \subset \mathcal{L}(E,F)$ offen. $\square$

**Satz 4.1.8.** *Die Menge* $\mathrm{Fred}(X,Y) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ *ist offen und* $\mathrm{ind} : \mathrm{Fred}(X,Y) \to \mathbb{Z}, T \mapsto \mathrm{ind}(T)$ *ist lokal konstant.*

*Beweis.* Sei $S \in \mathrm{Fred}(X,Y)$ und seien $N \subset X, M \subset Y$ abgeschlossene Teilräume mit $X = \ker S \oplus N$ und $Y = \mathrm{Im}\, S \oplus M$. Dann ist die Abbildung

$$N \oplus M \to Y,\ (n,m) \mapsto Sn + m$$

ein topologischer Isomorphismus zwischen Banachräumen, wobei $N \oplus M$ mit der Norm $\|(n,m)\| = \|n\| + \|m\|$ versehen sei. Für $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ mit $\|T - S\|$ ausreichend klein (Lemma 4.1.7) ist dann die Abbildung

$$N \oplus M \to Y,\ (n,m) \mapsto Tn + m$$

ein topologischer Isomorphismus. Wir fixieren ein solches $T$. Wegen $N \cap \ker T = \{0\}$ ist die Abbildung

$$\ker T \to X/N,\ x \mapsto x + N$$

injektiv und wegen $X/N \cong \ker S$ gilt

$$\dim \ker T \leq \dim \ker S.$$

Da $TN \oplus M = Y = \mathrm{Im}\, S \oplus M$ ist, sind $Y/\mathrm{Im}\, S \cong M \cong Y/TN$ als Vektorräume isomorph. Aus der Surjektivität der Abbildung

$$Y/TN \to Y/\mathrm{Im}\, T,\ y + TN \mapsto y + \mathrm{Im}\, T$$

folgt

$$\dim Y/\mathrm{Im}\, T \leq \dim Y/\mathrm{Im}\, S.$$

Also ist $T$ Fredholmsch. Wir wählen einen endlich-dimensionalen Teilraum $C \subset X$ mit

$$X = C \oplus N \oplus \ker T.$$

Dann folgt $\mathrm{Im}\, T = TC \oplus TN$. Mit $\alpha : TC \to Y/TN,\ y \mapsto y + TN$ und $\beta : Y/TN \to Y/\mathrm{Im}\, T,\ y + TN \mapsto y + \mathrm{Im}\, T$ ist

$$0 \longrightarrow TC \xrightarrow{\alpha} Y/TN \xrightarrow{\beta} Y/\mathrm{Im}\, T \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz endlich-dimensionaler $K$-Vektorräume. Mit Lemma 4.1.7(a) folgt dann

$$\dim Y/\mathrm{Im}\, S = \dim Y/TN = \dim TC + \dim Y/\mathrm{Im}\, T$$

und damit

$$\begin{aligned} \dim \ker S - \dim Y/\mathrm{Im}\, S &= \dim X/N - \dim Y/\mathrm{Im}\, S \\ &= \dim C \oplus \ker T - \dim Y/\mathrm{Im}\, S \\ &= \dim \ker T - \dim Y/\mathrm{Im}\, T. \end{aligned}$$

□

**Korollar 4.1.9.** *(a) Seien $S, T \in \operatorname{Fred}(X,Y)$ und $\gamma : [0,1] \to \operatorname{Fred}(X,Y)$ stetig mit $\gamma(0) = S$ und $\gamma(1) = T$. Dann ist $\operatorname{ind}(S) = \operatorname{ind}(T)$.*

*(b) Seien $T \in \operatorname{Fred}(X,Y)$ und $K \in \mathcal{K}(X,Y)$. Dann ist $T + K \in \operatorname{Fred}(X,Y)$ und es gilt $\operatorname{ind}(T+K) = \operatorname{ind}(T)$.*

*Beweis.* (a) Nach Satz 4.1.8 ist die Abbildung $[0,1] \to \mathbb{Z}, t \mapsto \operatorname{ind}\gamma(t)$ lokal konstant, also stetig. Nach dem Zwischenwertsatz ist sie damit konstant.
(b) Nach Satz 4.1.6 ist $T + K \in \operatorname{Fred}(X,Y)$. Wenden wir nun (a) auf $\gamma : [0,1] \to \operatorname{Fred}(X,Y), \gamma(t) = T + tK$ an, so erhalten wir $\operatorname{ind}(T+K) = \operatorname{ind}(T)$. □

**Satz 4.1.10.** *Seien $X, Y, Z$ Banachräume und $T \in \operatorname{Fred}(X,Y)$, $S \in \operatorname{Fred}(Y,Z)$. Dann ist $ST \in \operatorname{Fred}(X,Z)$ und es gilt $\operatorname{ind}(ST) = \operatorname{ind}(S) + \operatorname{ind}(T)$.*

*Beweis.* Mit $\widehat{S} : Y/\operatorname{Im} T \to \operatorname{Im} S/\operatorname{Im} ST$, $\widehat{S}([y]) = [Sy]$ sind die Sequenzen

$$0 \longrightarrow \ker S \cap \operatorname{Im} T \xrightarrow{\mathrm{i}} \ker S \xrightarrow{\mathrm{q}} (\ker S + \operatorname{Im} T)/\operatorname{Im} T \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow (\ker S + \operatorname{Im} T)/\operatorname{Im} T \xrightarrow{\mathrm{i}} Y/\operatorname{Im} T \xrightarrow{\widehat{S}} \operatorname{Im} S/\operatorname{Im} ST \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \operatorname{Im} S/\operatorname{Im} ST \xrightarrow{\mathrm{i}} Z/\operatorname{Im} ST \xrightarrow{\mathrm{q}} Z/\operatorname{Im} S \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \ker T \xrightarrow{\mathrm{i}} T^{-1}(\ker S) \xrightarrow{\mathrm{T}} \ker S \cap \operatorname{Im} T \longrightarrow 0$$

exakt und bestehen aus endlich-dimensionalen Vektorräumen. Mit Bemerkung 4.1.7(a) folgt dann

$$\begin{aligned}
\dim \ker S \cap \operatorname{Im} T &= \dim \ker S - \dim (\ker S + \operatorname{Im} T)/\operatorname{Im} T \\
&= \dim \ker S - \dim Y/\operatorname{Im} T + \dim \operatorname{Im} S/\operatorname{Im} ST \\
&= \dim \ker S - \dim Y/\operatorname{Im} T + \dim Z/\operatorname{Im} ST - \dim Z/\operatorname{Im} S
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\dim \ker S \cap \operatorname{Im} T &= \dim T^{-1}(\ker S) - \dim \ker T \\
&= \dim \ker ST - \dim \ker T,
\end{aligned}$$

also insgesamt

$$\operatorname{ind}(S) + \operatorname{ind}(T) = \operatorname{ind}(ST).$$

□

**Definition 4.1.11.** *Für $T \in \mathcal{L}(X)$ heißt $\sigma_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda - T \notin \operatorname{Fred}(X)\}$ das wesentliche Spektrum von $T$ und $\rho_e(T) = \mathbb{K} \setminus \sigma_e(T)$ die wesentliche Resolventenmenge.*

**Satz 4.1.12.** *Sei $T \in \mathcal{L}(X)$. Dann gilt*

*(a) $\sigma_e(T) = \sigma_{\mathcal{C}(X)}([T])$ ist kompakt.*

*Ist $X$ ein Banachraum über $\mathbb{C}$ mit $\dim_{\mathbb{C}}(X) = \infty$, so gilt außerdem* *(b)* $\sigma_e(T) \neq \emptyset$,

*(c)* $\rho_e(T) \to \mathbb{Z}, \lambda \mapsto \operatorname{ind}(\lambda - T)$ *ist konstant auf den Zusammenhangskomponenten von* $\sigma_e(T)$ *und* $\equiv 0$ *auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente.*

*Beweis.* (a) $\sigma_e(T) = \sigma_{\mathcal{C}(X)}([T])$ folgt aus Satz 4.1.6. Damit folgt die Kompaktheit aus den Eigenschaften des Spektrums einer Banachalgebra.

(b) Als unitale komplexe Banachalgebra hat $\mathcal{C}(X)$ nichtleeres Spektrum.

(c) Nach Korollar 4.1.9(a) ist $\rho_e(T) \to \mathbb{Z}, \lambda \mapsto \operatorname{ind}(\lambda - T)$ konstant auf den Zusammenhangskomponenten von $\sigma_e(T)$. Für $\lambda \in \rho(T)$ folgt wie im Beweis von Satz 4.1.5, dass $\dim\ker(\lambda - T) = 0 = \dim X/\operatorname{Im}(\lambda - T)$ und daher $\operatorname{ind}(\lambda - T) = 0$ gilt. Wegen $\mathbb{C} \setminus \overline{D_{\|T\|}}(0) \subset \rho(T)$ gilt also $\operatorname{ind}(\lambda - T) = 0$ auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente.

□

Zum Abschluss des Abschnitts über Fredholmoperatoren ziehen wir noch folgendes Korollar aus Satz 4.1.5.

**Korollar 4.1.13.** *Es sei* $\dim_{\mathbb{K}}(X) = \infty$ *und* $T \in \mathcal{K}(X)$*. Dann ist* $\sigma_e(T) = \{0\}$ *und* $\operatorname{ind}(\lambda - T) = 0$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

## 4.2 Der Abbildungsgrad

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine beschränkte offene Menge und $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit $f|_\Omega \in C^\infty(\Omega)$. Außerdem bezeichne $J_f(x)$ die Jacobi-Matrix von $f$ an der Stelle $x \in \Omega$ und $k_f = \{x \in \Omega : \det J_f(x) = 0\}$ die Menge der *kritischen Punkte von* $f$. Ein $y \in \mathbb{C}$ mit $f^{-1}(y) \cap k_f = \emptyset$ heißt *regulärer Wert* von $f$.
Sei nun $y \in \mathbb{C} \setminus f(\partial\Omega)$ ein regulärer Wert von $f$. Nach Satz 3 §6.IV in [Dei74] ist $f^{-1}(y)$ endlich, also können wir den *analytischen Abbildungsgrad* von $f$ auf $\Omega$ bezüglich $y$ als

$$d(f, \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn}\det(J_f(x))$$

definieren. Wir wollen die Definition auf beliebiges $y \in \mathbb{C} \setminus f(\partial\Omega)$ ausdehnen. Zunächst folgt aus dem Lemma von Sard (vgl. [Ruz04], §4.1.2 Satz 1.6), dass $f(k_f)$ eine Lebesgue-Nullmenge ist, also gibt es zu $y \in \mathbb{C} \setminus f(\partial\Omega)$ ein $\tilde{y} \in \mathbb{C} \setminus f(\partial\Omega)$ mit $|y - \tilde{y}| < \operatorname{dist}(y, f(\partial\Omega))$, so dass $\tilde{y}$ ein regulärer Wert von $f$ ist. Wir definieren dann

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega, \tilde{y}).$$

Die Wohldefiniertheit folgt dabei etwa aus Hilfssatz 1, §7 in [Dei74].
Man kann den analytischen Abbildungsgrad auch für Funktionen $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$ und

$y \in \mathbb{C} \setminus f(\partial\Omega)$ definieren.
Wir setzen die in der folgenden Proposition aufgeführten Eigenschaften des Abbildungsgrades voraus (vgl. [Dei74], §8.II):

**Proposition 4.2.1.** *Sei* $M = \{(f, \Omega, y)\,; \Omega \subset \mathbb{C}$ *offen und beschränkt,* $f \in C\left(\overline{\Omega}, \mathbb{C}\right), y \in \mathbb{C} \setminus f(\partial\Omega)\}$ *und* $d : M \to \mathbb{Z}$ *der analytische Abbildungsgrad. Dann gilt für* $(f, \Omega, y) \in M$ *und* $g \in C\left(\overline{\Omega}, \mathbb{C}\right)$*:*

*(a)* $d(id, \Omega, z) = 1$ *für alle* $z \in \Omega$ *und* $d(f, \Omega, y) = 0$*, falls* $y \notin f\left(\overline{\Omega}\right)$ *ist,*

*(b)* $d(H(\cdot, t), \Omega, y(t))$ *ist unabhängig von* $t \in [0, 1]$*, wenn* $H : \overline{\Omega} \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ *und* $y : [0, 1] \to \mathbb{C}$ *stetig sind mit* $y(t) \notin H(\partial\Omega, t)$ *für alle* $t \in [0, 1]$*,*

*(c)* $d(g, \Omega, y) = d(f, \Omega, y)$*, falls* $g|_{\partial\Omega} = f|_{\partial\Omega}$ *ist,*

*(d)* $d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y)$*, falls* $\Omega_1 \subset \Omega$ *offen und* $y \notin f\left(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1\right)$ *ist,*

*(e)* $d(f, \Omega, y) = d\left(f \circ h, h^{-1}(\Omega), y\right) \operatorname{sgn} \det(J_h)$*, falls* $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ein* $C^1$*-Diffeomorphismus ist.*

**Definition 4.2.2.** *Sei* $K \subset \mathbb{C}$ *kompakt,* $f : K \to \mathbb{C}$ *stetig,* $C$ *eine beschränkte Zusammenhangskomponente von* $\mathbb{C} \setminus K$ *und* $y \in \mathbb{C} \setminus f(\partial C)$*. Der Abbildungsgrad* $\deg(f, C, y)$ *von* $f$ *um* $y$ *bezüglich* $C$ *wird definiert durch*

$$\deg(f, C, y) = d\left(\tilde{f}, C, y\right),$$

*wobei* $\tilde{f}$ *eine stetige Fortsetzung von* $f|_{\partial C}$ *auf* $\overline{C}$ *ist (Proposition 4.2.1).*
*Ist* $f \in C(K, \mathbb{C} \setminus \{0\})$*, so bezeichne* $\deg(f, C) = \deg(f, C, 0)$ *und falls* $\mathbb{C} \setminus K$ *nur eine beschränkte Zusammenhangskomponente* $C$ *besitzt, sei* $\deg(f) = \deg(f, C, 0)$.

Man beachte, dass $\partial C \subset K$ ist in der Situation von Definition 4.2.2 und dass $d\left(\tilde{f}, C, y\right)$ nach Proposition 4.2.1(c) nicht von der Wahl der stetigen Fortsetzung $\tilde{f} : \overline{C} \to \mathbb{C}$ von $f|_{\partial C}$ abhängt.

**Lemma 4.2.3.** *Sei* $K \subset \mathbb{C}$ *kompakt so, dass die Menge* $\mathfrak{C}$ *der beschränkten Zusammenhangskomponenten von* $\mathbb{C} \setminus K$ *nichtleer ist. Für jedes* $C \in \mathfrak{C}$ *sei außerdem* $p_C \in C$*. Dann definiert die Abbildung*

$$\begin{aligned} \rho :\ & C(K, \mathbb{C} \setminus \{0\}) / \exp C(K) \to \bigoplus_{C \in \mathfrak{C}} \mathbb{Z}, \\ & [f] \mapsto (\deg(f, C, 0))_{C \in \mathfrak{C}} \end{aligned}$$

*die Umkehrabbildung von*

$$\begin{aligned} d :\ & \bigoplus_{C \in \mathfrak{C}} \mathbb{Z} \to C(K, \mathbb{C} \setminus \{0\}) / \exp C(K), \\ & (n_C)_{C \in \mathfrak{C}} \mapsto \left[\prod_{C \in \mathfrak{C}} (z - p_C)^{n_C}\right]. \end{aligned}$$

*Beweis.* Für die Wohldefiniertheit von $\rho$ zeigen wir, dass nur endlich viele $C_1, ..., C_r \in \mathfrak{C}$ mit $\deg(f, C, 0) \neq 0$ existieren. Hierzu wählen wir mit dem Fortsetzungssatz von Tietze eine stetige Fortsetzung $F : \widehat{K} \to \mathbb{C}$ von $f$ auf der kompakten Menge $\widehat{K} = K \cup \bigcup_{C \in \mathfrak{C}} C$. Die offene Überdeckung $F^{-1}(\{0\}) \subset \bigcup_{C \in \mathfrak{C}} C$ besitzt dann eine endliche Teilüberdeckung $F^{-1}(\{0\}) \subset C_1 \cup ... \cup C_r$. Mit den Eigenschaften 4.2.1(a) und (c) des Abbildungsgrades erhalten wir dann, dass $\deg(f, C, 0) = \deg(F, C, 0) = 0$ ist für alle $C \in \mathfrak{C} \setminus \{C_1, ..., C_r\}$.
Sind $f, g : K \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ stetig mit $\frac{f}{g} = e^{\varphi}$ für eine stetige Funktion $\varphi \in C(K)$, so wähle man eine stetige Fortsetzung $\phi \in C(\widehat{K})$ von $\varphi$ auf $\widehat{K}$ und setze $G = Fe^{-\phi} \in C(\widehat{K})$. Dann ist $g = G|_K$ und $F = e^{\phi}G$. Mit Proposition 4.2.1(b) angewendet auf die Homotopien

$$H : \overline{C} \times [0,1] \to \mathbb{C}, \ (z,t) \mapsto e^{t\phi(z)}G(z) \qquad (C \in \mathfrak{C})$$

erhält man

$$d(g, C, 0) = d(H(0, \cdot)) = d(H(1, \cdot), C, 0) = d(F, C, 0) = d(f, C, 0).$$

Damit ist $(\deg(f, C, 0))_{C \in \mathfrak{C}}$ unabhängig von der Wahl des Repräsentanten einer Äquivalenzklasse $[f] \in C(K, \mathbb{C} \setminus \{0\}) / \exp C(K)$ ist.
Wir zeigen nun, dass $\rho = d^{-1}$ ist. Da $d$ dem Homotopiesatz (Satz 3.5) zufolge einen Gruppenisomorphimus definiert, reicht es, $\rho \circ d = id$ zu zeigen. Hierzu seien paarweise verschiedene $C_1, ..., C_r \in \mathfrak{C}$ und Punkte $p_i \in C_i$ sowie ganze Zahlen $n_i \in \mathbb{Z}$ für $1 \leq i \leq r$ gewählt. Wir rechnen nun

$$\deg\left(\prod_{i=1}^{r} (z - p_i)^{n_i}, C_j, 0\right) = n_j$$

für $j \in \{1, ..., r\}$ nach. Sei dazu R $> 0$ mit $\overline{D}_R(p_j) \subset C_j$. Mit Proposition 4.2.1(d) gilt

$$\deg\left(\prod_{i=1}^{r} (z - p_i)^{n_i}, C_j, 0\right) = \deg\left(\prod_{i=1}^{r} (z - p_i)^{n_i}, D_R(p_j), 0\right).$$

Da $\prod_{i=1, i \neq j}^{r} (z - p_i)^{n_i}$ nach Satz 2.3.7 und Korollar 2.3.2 auf $\overline{D_R}(p_j)$ homotop in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ zur konstanten Funktion 1 ist, folgt mit Proposition 4.2.1(b)

$$\deg\left(\prod_{i=1}^{r} (z - p_i)^{n_i}, C_j, 0\right) = \deg\left((z - p_j)^{n_j}, D_R(p_j), 0\right).$$

Für $n_j \geq 0$ folgt mit der Definition des Abbildungsgrades, dass

$$\deg\left((z - p_j)^{n_j}, D_R(p_j), 0\right) = n_j$$

gilt. Ist $n_j < 0$, so folgt mit Proposition 4.2.1(e) und $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, h(z) = Rz + p_j$, dass

$$\deg\left((z - p_j)^{n_j}, D_R(p_j), 0\right) = \deg\left((Rz)^{n_j}, D_1(0), 0\right)$$

und mit Proposition 4.2.1(c), dass

$$\deg\left((Rz)^{n_j}, D_1(0), 0\right) = \deg\left(R^{n_j}\overline{z}^{|n_j|}, D_1(0), 0\right)$$

gilt. Für Funktionen $g \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$ mit $g|_\Omega \in C^\infty(\Omega)$ und $0 \notin g(\partial\Omega)$ folgt mit der Formel $\det J_{\overline{g}}(z) = -\det J_g(z)$ und der Definition des Abbildungsgrades

$$\deg(\overline{g}, \Omega, 0) = -\deg(g, \Omega, 0).$$

Also gilt

$$\deg\left((z-p_j)^{n_j}, D_R(p_j), 0\right) = -\deg\left(R^{n_j} z^{|n_j|}, D_1(0), 0\right) = -|n_j| = n_j$$

auch für negative Zahlen $n_j \in \mathbb{Z}$. Somit ist $\rho = d^{-1}$. □

## 4.3 Die Indexformel

Um Operatoren betrachten zu können, die bis auf kompakte Störungen normal sind, führen wir das Konzept der wesentlichen Normalität ein.

**Definition 4.3.1.** *Sei $H$ ein Hilbertraum. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(H)$ heißt wesentlich normal, falls $[T] \in \mathcal{C}(H)$ normal ist, also falls $[T]^*[T] = [T][T]^*$ gilt.*

Im Folgenden sei $T \in \mathcal{L}(H)$ ein wesentlich normaler Operator auf einem Hilbertraum $H$ und

$$\Phi_T : C(\sigma_e(T)) \to C^*([T]), f \mapsto f([T])$$

sei der stetige Funktionalkalkül von $[T] \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$. Für jede Funktion $f \in C(\sigma_e(T))$ sei ein Operator $\widehat{f}(T) \in \mathcal{L}(H)$ gewählt mit $\left[\widehat{f}(T)\right] = f([T])$.

**Lemma 4.3.2.** *Der Fredholmindex induziert einen wohldefinierten Gruppenhomomorphismus*

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}: \ & C(K, \mathbb{C}\setminus\{0\}) / \exp C(K) \to \mathbb{Z}, \\ & [f] \mapsto \operatorname{ind} \widehat{f}(T) \end{aligned}$$

*auf der kompakten Menge $K = \sigma_e(T)$.*

*Beweis.* Für $f \in C(K, \mathbb{C}\setminus\{0\})$ gilt mit dem spektralen Abbildungssatz

$$\begin{aligned} \sigma_e\left(\widehat{f}(T)\right) &= \sigma(f([T])) \\ &= f(\sigma([T])) \\ &= f(\sigma_e(T)). \end{aligned}$$

Es folgt $0 \notin \sigma_e\left(\widehat{f}(T)\right)$, da $f$ nullstellenfrei ist und damit ist $\widehat{f}(T)$ Fredholmsch.
Sind $f_1, f_2 \in C\left(K, \mathbb{C}\setminus\{0\}\right)$ mit $[f_1]=[f_2]$, so gibt es eine stetige Funktion $g \in C(K)$ mit $f_2 = f_1 e^g$. Dann definiert

$$\widehat{\gamma} : [0,1] \to \mathcal{C}(H),\ \widehat{\gamma}(t) = \Phi_T\left(f_1 e^{tg}\right)$$

eine stetige Abbildung mit

$$\begin{aligned} \widehat{\gamma}(0) &= \Phi_T(f_1) = f_1\left([T]\right) \\ \text{und } \widehat{\gamma}(1) &= \Phi_T(f_2) = f_2\left([T]\right), \end{aligned}$$

deren Werte invertierbare Elemente in der Calkin-Algebra $\mathcal{C}(H)$ sind. Nach dem Satz von Bartle und Graves (vgl. [Kab14], S. 217 Theorem 9.29) hat die Quotientenabbildung $\pi : \mathcal{L}(H) \to \mathcal{C}(H)$ eine stetige Rechtsinverse $r : \mathcal{C}(H) \to \mathcal{L}(H)$. Wir betrachten nun die stetige Abbildung

$$\gamma : [0,1] \to \mathcal{L}(H),\ \gamma(t) = r\left(\widehat{\gamma}(t)\right).$$

Sei $t \in [0,1]$. Es ist $r\left(\widehat{\gamma}(t)\right) = r\left(\left(f_1 e^{tg}\right)([T])\right)$. Mit dem spektralen Abbildungssatz erhalten wir außerdem

$$\begin{aligned} \sigma_e\left(\widehat{(f_1 e^{tg})}(T)\right) &= \sigma\left(\left(f_1 e^{tg}\right)([T])\right) \\ &= \left(f_1 e^{tg}\right)\left(\sigma\left([T]\right)\right) \\ &= \left(f_1 e^{tg}\right)\sigma_e(T). \end{aligned}$$

Damit gilt $0 \notin \sigma_e\left(\widehat{(f_1 e^{tg})}(T)\right) = \sigma_e(\gamma(t))$, da $f_1 e^{\cdot g}$ nullstellenfrei ist. Nach Satz 4.1.6 ist $\gamma\left([0,1]\right) \subset \mathrm{Fred}(H)$. Wegen

$$\begin{aligned} \pi(\gamma(0)) &= \pi\left(r\left(\widehat{\gamma}(0)\right)\right) = f_1\left([T]\right) \\ \text{und } \pi(\gamma(1)) &= \pi\left(r\left(\widehat{\gamma}(1)\right)\right) = f_2\left([T]\right) \end{aligned}$$

ist

$$\begin{aligned} \gamma(0) - \widehat{f_1}(T) &\in \mathcal{K}(H) \\ \text{und } \gamma(1) - \widehat{f_2}(T) &\in \mathcal{K}(H). \end{aligned}$$

Mit der Homotopieinvarianz des Fredholmindex (Korollar 4.1.9 (a)) und der Invarianz unter kompakten Störungen (Korollar 4.1.9 (b)) erhält man

$$\operatorname{ind}\widehat{f_1}(T) = \operatorname{ind}\widehat{f_2}(T).$$

Damit ist ind wohldefiniert.
Für $f_1, f_2 \in C(K, \mathbb{C}\setminus\{0\})$ gilt

$$\begin{aligned} \left[\widehat{(f_1 f_2)}(T)\right] &= (f_1 f_2)\left([T]\right) \\ &= f_1\left([T]\right) f_2\left([T]\right) \\ &= \left[\widehat{f_1}(T)\right]\left[\widehat{f_2}(T)\right] \\ &= \left[\widehat{f_1}(T)\widehat{f_2}(T)\right] \text{ in } \mathcal{C}(H). \end{aligned}$$

Also folgt aus Korollar 4.1.9 (b) und Satz 4.1.10, dass

$$\mathrm{ind} : C(K, \mathbb{C} \setminus \{0\}) / \exp C(K) \to \mathbb{Z}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. □

Für eine Zusammenhangskomponente $C$ von $\mathbb{C} \setminus \sigma_e(T)$ setzen wir

$$\mathrm{ind}_C(T) = \mathrm{ind}(z - T)$$

für ein beliebiges $z \in C$ (vgl. Satz 4.1.8). Wir bezeichnen mit $\mathfrak{C}$ die Menge der beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus \sigma_e(T)$.

**Satz 4.3.3** (Indexformel)**.** *Es gilt die Indexformel*

$$\mathrm{ind}\left(w - \widehat{f}\,(T)\right) = \sum_{C \in \mathfrak{C}} \deg\,(f, C, w)\, \mathrm{ind}_C\,(T)$$

*für alle $f \in C(\sigma_e(T))$ und $w \notin f(\sigma_e(T))$.*

*Beweis.* Ist $\mathfrak{C} = \emptyset$, so folgt aus Lemma 4.3.2, dass $\mathrm{ind}\,\widehat{f}(T) = 0$ ist für alle $f \in C\,(\sigma_e(T), \mathbb{C} \setminus \{0\})$. Sei also $\mathfrak{C} \neq 0$. Wir nehmen $w = 0$ an, da wir andernfalls $f$ durch $f - w$ ersetzen und benutzen, dass $\deg\,(f, C, w) = \deg\,(f - w, C, 0)$ ist.
Sei $\chi : \bigoplus_{C \in \mathfrak{C}} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ der eindeutige Gruppenhomomorphismus, für den das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
C(K, \mathbb{C} \setminus \{0\}) / \exp C(K) \arrow[r, "\mathrm{ind}"] \arrow[d, "\rho"'] & \mathbb{Z} \\
\bigoplus_{C \in \mathfrak{C}} \mathbb{Z} \arrow[ur, "\chi"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Für $C_0 \in \mathfrak{C}$ sei $i_{C_0} = \chi\left((\delta_{C,C_0})_{C \in \mathfrak{C}}\right) \in \mathbb{Z}$. Mit Lemma 4.3.2 und Lemma 4.2.3 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{ind}\left(-\widehat{f}(T)\right) &= \mathrm{ind}\left(\widehat{f}(T)\right) \\
&= \mathrm{ind}\,([f]) \\
&= \chi\left((\deg(f, C, 0))_{C \in \mathfrak{C}}\right) \\
&= \sum_{C \in \mathfrak{C}} i_c \deg(f, C, 0).
\end{aligned}$$

Für $C_0 \in \mathfrak{C}$ und $p \in C_0$ folgt mit Proposition 4.2.1(a) schließlich

$$\begin{aligned}
\mathrm{ind}_{C_0}(T) &= \mathrm{ind}\,([z - p]) \\
&= \chi\,(\rho\,([z - p])) \\
&= \chi\left((\deg\,(z, C, p))_{C \in \mathfrak{C}}\right) \\
&= \chi\left((\delta_{C,C_0})_{C \in \mathfrak{C}}\right) \\
&= i_{C_0}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Indexformel bewiesen. $\square$

In [Ré04] wird eine Version der obigen Indexformel für wesentlich vertauschende Operatortupel $T = (T_1, ..., T_n) \in \mathcal{L}(E)^n$ stetiger Operatoren auf Banachräumen bewiesen, die einen wesentlich stetigen Funktionalkalkül besitzen.

# Literaturverzeichnis


[Bur79] Burckel, R. B.: *An Introduction to Classical Complexe Analysis*. Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1979

[Dei74] Deimling, K.: *Nichtlineare Gleichungen und Abbildungsgrade*. Springer, Heidelberg, 1974

[Kab14] Kaballo, W.: *Aufbaukurs Funktionalanalysis und Operatortheorie*. Springer, Spektrum, 2014

[Ré04] Réolon, E.: *Zur Spektraltheorie vertauschender Operatortupel: Fredholmtheorie und subnormale Operatortupel*. Dissertation, Universität des Saarlandes, 2004

[Ruz04] Ruzicka, M.: *Nichtlineare Funktionalanalysis*. Springer, 2004