UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Dilatationssätze für m-Hyperkontraktionen

Masterarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
Master of Science
im Studiengang Mathematik
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät I
- Mathematik und Informatik -
der Universität des Saarlandes

von

Valerie Klauk

betreut durch

Prof. Dr. Jörg Eschmeier

Saarbrücken, 2016

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich die Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Saarbrücken, den 13.09.2016

Valerie Klauk

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Im Jahr 1949 bewies Beurling in [10], dass ein abgeschlossener Teilraum $\mathcal{S} \subset H^2(\mathbb{D})$ des Hardy-Raums $H^2(\mathbb{D})$ genau dann ein invarianter Teilraum für den Shift $M_z \in \mathcal{L}(H^2(\mathbb{D}))$ ist, wenn eine innere Funktion $\theta \in H^\infty(\mathbb{D})$ existiert mit

$$\mathcal{S} = \theta H^2(\mathbb{D}) = \left\{\theta f : f \in H^2(\mathbb{D})\right\}.$$

Im ersten Teil dieser Arbeit verallgemeinern wir den Satz von Beurling zunächst auf beliebige reine vertauschende Zeilenkontraktionen $T \in \mathcal{L}(H)^n$, d.h. auf Tupel $T = (T_1, ..., T_n)$ vertauschender, stetiger, linearer Operatoren $T_1, ..., T_n$ auf einem separablen Hilbertraum H mit den Eigenschaften

$$\sum_{i=1}^{n} T_i T_i^* \leq \mathrm{id}_H$$

und

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_T^k(\mathrm{id}_H)x = 0$$

für alle $x \in H$, wobei σ_T die positive Abbildung

$$\sigma_T \colon \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H),\ X \mapsto \sum_{i=1}^{n} T_i X T_i^*$$

ist.

Statt den Hardyraum betrachten wir allgemeiner den $\mathcal{E}$-wertigen Drury-Arveson Raum $\mathscr{H}(\mathbb{B}, \mathcal{E})$ auf der Einheitskugel $\mathbb{B} \subset \mathbb{C}^n$, den funktionalen Hilbertraum mit reproduzierendem Kern

$$K \colon \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{E}),\ (z, w) \mapsto \frac{\mathrm{id}_{\mathcal{E}}}{1 - \langle z, w\rangle}.$$

Als Verallgemeinerung des Satzes von Beurling bewiesen McCullough und Trent im Jahr 2000 in [20], dass ein abgeschlossener Teilraum $\mathcal{S} \subset \mathscr{H}(\mathbb{B}, \mathcal{E})$ genau dann ein invarianter Teilraum für den n-Shift $M_z \in \mathcal{L}\left(\mathscr{H}(\mathbb{B}, \mathcal{E})\right)^n$ ist, wenn ein Hilbertraum $\mathcal{D}$ und ein partiell isometrischer Multiplikationsoperator $M_\theta \colon \mathscr{H}(\mathbb{B}, \mathcal{D}) \to \mathscr{H}(\mathbb{B}, \mathcal{E})$ existieren mit $\mathcal{S} = \theta\mathscr{H}(\mathbb{B}, \mathcal{D})$. In [23] bemerkte Sarkar, dass von Müller-Vasilescu ([21]) und Arveson ([4]) bewiesene Dilatationssätze für Zeilenkontraktionen benutzt werden können, um einen neuen, einfachen Beweis des Satzes von McCullough und Trent zu geben. Gleichzeitig erlaubt es diese Methode, Sätze vom Beurling-Typ für abstrakte Zeilenkontraktionen $T \in \mathcal{L}(H)^n$ anstelle von $M_z \in \mathcal{L}\left(\mathscr{H}(\mathbb{B}, \mathcal{E})\right)^n$ zu beweisen.

Im zweiten Teil dieser Arbeit zeigen wir, dass dieselbe Methode benutzt werden kann, um Versionen des Satzes von Beurling für m-Hyperkontraktionen $T \in \mathcal{L}(H)^n$ herzuleiten. Dabei ersetzt man den Drury-Arveson Raum durch die funktionalen Hilberträume $\mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E})$, $m \in \mathbb{N}^*$, mit reproduzierendem Kern

$$K_m \colon \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{E}),\ (z, w) \mapsto \frac{\mathrm{id}_{\mathcal{E}}}{(1 - \langle z, w\rangle)^m}\ .$$

Man nennt ein vertauschendes Tupel $T \in \mathcal{L}(H)^n$ eine *m-Hyperkontraktion*, wenn die Bedingungen

$$\Delta_T^{(k)} \geq 0$$

mit dem Operator

$$\Delta_T^{(k)} = \left(\mathrm{id}_{\mathcal{L}(H)} - \sigma_T\right)^k (\mathrm{id}_H)$$

für $k = 1, ..., m$ erfüllt sind. Im Spezialfall $T = M_z \in \mathcal{L}\left(\mathscr{H}(\mathbb{B}, \mathcal{E})\right)^n$ erhält man Sätze von Beurling-Typ, die auf C. Barbian ([6] oder [8]) zurückgehen.
Die Arbeit ist hierzu wie folgt unterteilt.

Im ersten Kapitel beschäftigen wir uns mit funktionalen Hilberträumen, bevor wir uns bis auf Weiteres auf den Drury-Arveson Raum $\mathscr{H}(\mathbb{B}, \mathcal{E})$ konzentrieren. Wir führen dann Zeilenkontraktionen und als spezielles Beispiel einer vertauschenden Zeilenkontraktion den *n-Shift* $M_z = (M_{z_1}, ..., M_{z_n}) \in \mathcal{L}(\mathscr{H}(\mathbb{B}, \mathcal{E}))^n$ auf $\mathscr{H}(\mathbb{B}, \mathcal{E})$ ein.

Im zweiten Kapitel führen wir reine Zeilenkontraktionen ein. Das einfachste Beispiel einer reinen Zeilenkontraktion ist wieder der n-Shift $M_z \in L\left(\mathscr{H}(\mathbb{B}, H)\right)^n$ auf dem Drury-Arveson Raum. Allgemeiner ist eine Zeilenkontraktion auf einem H-wertigen funktionalen Hilbertraum $\mathcal{E} \subset H^\Lambda$ mit einer Menge $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$ rein, falls die Bedingung

$$\overline{\mathrm{LH}\left\{K(\cdot, \lambda)x \colon \lambda \in \Lambda \cap \mathbb{B}, x \in H\right\}} = \mathcal{E}$$

erfüllt ist. Neben dem n-Shift auf dem Drury-Arveson Raum erhalten wir damit, dass auch die Shifts auf dem Hardy-Raum, dem Bergman-Raum und den gewichteten Bergman-Räumen rein sind.
Wir erhalten außerdem, dass jede reine vertauschende Zeilenkontraktion auf gewisse Weise auf den n-Shift M_z zurückzuführen ist, denn ein Tupel $T \in \mathcal{L}(H)^n$ ist genau dann eine reine vertauschende Zeilenkontraktion, wenn ein Hilbertraum $\mathcal{E}$ und eine Isometrie

$$\pi_T \colon H \to \mathscr{H}(\mathbb{B}, \mathcal{E})$$

existieren mit der Eigenschaft

$$\pi_T T_i^* = M_{z_i}^* \pi_T$$

für $i = 1, ..., n$. Eine solche Abbildung π_T nennen wir *Dilatation* von T.
Wir erhalten damit die von Sarkar bewiesene Version des Satzes von Beurling. Ist $H(\mathcal{E}) \subset \mathcal{O}(\mathbb{B}, \mathcal{E})$ ein funktionaler Hilbertraum aus analytischen Funktionen so, dass $M_z \in \mathcal{L}(H(\mathcal{E}))^n$ eine Zeilenkontraktion ist, so ist $\mathcal{S} \subset H(\mathcal{E})$ genau dann ein abgeschlossener invarianter Teilraum für $M_z \in \mathcal{L}(H(\mathcal{E}))^n$, wenn ein Hilbertraum $\mathcal{D}$ und eine analytische Funktion $\theta : \mathbb{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ existieren so, dass

$$M_\theta \colon \mathscr{H}(\mathbb{B}, \mathcal{D}) \to H(\mathcal{E}), \ f \mapsto \theta f$$

eine partielle Isometrie ist mit $\operatorname{Im} M_\theta = S$.

Im dritten Kapitel verallgemeinern wir die Ergebnisse über den Drury-Arveson Raum auf die Räume $\mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E})$, $m \in \mathbb{N}^*$. Da die Anforderungen an eine Zeilenkontraktion $T \in \mathcal{L}(H)^n$ nicht ausreichen, um unsere Sätze auf die Räume $\mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E})$ zu erweitern,

führen wir an dieser Stelle (*Zeilen-*)*m-Hyperkontraktionen* ein.
Wir erhalten nun die Resultate über den Drury-Arveson Raum $\mathscr{H}(\mathbb{B},\mathcal{E})$ und Zeilenkontraktionen $T \in \mathcal{L}(H)^n$ aus Kapitel 2 für die funktionalen Hilberträume $\mathscr{H}_m(\mathbb{B},\mathcal{E})$ und m-Hyperkontraktionen $T \in \mathcal{L}(H)^n$.

Im vierten Kapitel definieren wir m-Dilatationen für m-Hyperkontraktionen $T \in \mathcal{L}(H)^n$ als Isometrien

$$\pi\colon H \to \mathscr{H}_m(\mathbb{B},\mathcal{E}),$$

die die Tupel $T^* \in \mathcal{L}(H)^n$ und $M_z^* \in \mathcal{L}\left(\mathscr{H}_m(\mathbb{B},\mathcal{E})\right)^n$ komponentenweise vertauschen. Wir betrachten nun spezielle m-Dilatationen, nämlich solche m-Dilatationen $\pi\colon H \to \mathscr{H}_m(\mathbb{B},\mathcal{E})$ einer reinen vertauschenden m-Hyperkontraktion $T \in \mathcal{L}(H)^n$, für die der einzige für M_z reduzierende Teilraum von $\mathscr{H}_m(\mathbb{B},\mathcal{E})$, der πH enthält, der Raum $\mathscr{H}_m(\mathbb{B},\mathcal{E})$ selbst ist. Wir nennen π dann *minimale* m-Dilatation. Ziel des Kapitels ist es zu zeigen, dass für ein Paar $\pi_i\colon H \to \mathscr{H}_m(\mathbb{B},\mathcal{E}_i), i = 1, 2,$ minimaler m-Dilatationen einer reinen vertauschenden m-Hyperkontraktion $T \in \mathcal{L}(H)^n$ auf dem Hilbertraum H ein unitärer Operator $U \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)$ existiert mit

$$\pi_2 = \left(\mathrm{id}_{\mathscr{H}_m(\mathbb{B},\mathbb{C})} \otimes U\right) \pi_1,$$

das heißt, für den das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathscr{H}_m(\mathbb{B},\mathcal{E}_2) \\
\mathscr{H}_m(\mathbb{B},\mathcal{E}_1) \arrow[ur, "\mathrm{id}_{\mathscr{H}_m(\mathbb{B},\mathbb{C})} \otimes U"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Dieses Ergebnis bewiesen Bhattacharjee, Eschmeier, Keshari und Sarkar 2015 in [11] für minimale Dilatationen reiner vertauschender Zeilenkontraktionen.
Sei $\mathcal{F}$ ein weiterer Hilbertraum. Definieren wir mit

$$\mathcal{E} = \overline{\Delta_T^{(m)^{1/2}} H} \subset H$$

die kanonische m-Dilatation

$$\pi_T^{(m)}\colon H \to \mathscr{H}_m(\mathbb{B},\mathcal{E}),\ h \mapsto \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{(m+|\alpha|-1)!}{\alpha!(m-1)!} \Delta_T^{(m)\frac{1}{2}} T^{*\alpha} h z^\alpha,$$

so ist $\pi_T^{(m)}$ minimal und wir können zeigen, dass jede beliebige m-Dilatation $\pi\colon H \to \mathscr{H}_m(\mathbb{B},\mathcal{F})$ von T die Form

$$\pi = \left(\mathrm{id}_{\mathscr{H}_m(\mathbb{B},\mathbb{C})} \otimes V\right) \pi_T^{(m)}$$

hat mit einer geeigneten Isometrie $V \in \mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei Herrn Prof. Dr. Jörg Eschmeier für ein interessantes Thema und eine ausgezeichnete Betreuung während der Entstehung dieser Arbeit bedanken.
Ein besonderer Dank gilt außerdem meinem Betreuer Dominik Schillo, der mit ständigem Korrekturlesen und seiner Hilfe beim Lösen vieler Probleme keine Mühen scheute und damit wesentlich zum Erfolg dieser Arbeit beitrug.

1 Grundlagen

1.1 Funktionale Hilberträume

Zuerst definieren wir vektorwertige funktionale Hilberträume. Dabei gehen wir vor wie in [2].
Sei H ein Hilbertraum, Λ eine beliebige Menge und id_H die identische Abbildung

$$\mathrm{id}_H\colon H \to H, \;\; h \mapsto h$$

auf H.
Die Menge aller Abbildungen von Λ nach H bezeichnen wir mit H^Λ. Zudem sei $\mathcal{L}(H)$ die Menge aller stetigen, linearen Abbildungen von H nach H.

Definition 1.1.1. *Ein Hilbertraum $\mathcal{F} \subset H^\Lambda$ heißt* funktional*, falls die Punktauswertungen*

$$\delta_\lambda\colon \mathcal{F} \to H, \;\; f \mapsto f(\lambda)$$

für alle $\lambda \in \Lambda$ stetig sind.

Um mit funktionalen Hilberträumen arbeiten zu können, müssen wir wissen, was positiv definite Abbildungen sind. Diese definieren wir im Folgenden.

Definition 1.1.2. *Eine Abbildung $K\colon \Lambda \times \Lambda \to \mathcal{L}(H)$, die für alle endlichen Folgen $(\lambda_i)_{i=1}^n$ in Λ und $(h_i)_{i=1}^n$ in H*

$$\sum_{i,j=1}^n \langle K(\lambda_i, \lambda_j) h_j, h_i \rangle \geq 0$$

erfülllt, heißt positiv definit.

Bemerkung 1.1.3. a) Mit der Identifikation $\mathbb{C} \cong \mathcal{L}(\mathbb{C})$, wobei jede komplexe Zahl $\alpha \in \mathbb{C}$ als Multiplikationsoperator $L_\alpha\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \alpha z$ betrachtet wird, ist eine Funktion $K\colon \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{C}$ genau dann im obigen Sinne positiv definit, wenn

$$\sum_{i,j=1}^n K(\lambda_i, \lambda_j) z_j \overline{z_i} \geq 0$$

für alle endlichen Folgen $(\lambda_i)_{i=1}^n$ in Λ und $(z_i)_{i=1}^n$ in $\mathbb{C}$ gilt.

b) Eine Abbildung $K\colon \Lambda \times \Lambda \to \mathcal{L}(H)$ ist genau dann positiv definit, wenn alle endlichen Operatormatrizen

$$(K(\lambda_i, \lambda_j))_{i,j=1}^n \in M\left(n, \mathcal{H}\right) \cong \mathcal{L}(H^n)$$

$(n \geq 1, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \Lambda)$ positive Operatoren auf H^n definieren. Da positive Operatoren selbstadjungiert sind, erfüllen positiv definite Abbildungen $K(\lambda, \mu)^* = K(\mu, \lambda)$ für alle $\lambda, \mu \in \Lambda$.

Die Beweise der folgenden Sätze finden sich im ersten Kapitel von [6].

Satz 1.1.4. *Sei $\mathcal{F} \subset H^\Lambda$ ein Hilbertraum. Es sind äquivalent:*

(i) Der Raum $\mathcal{F}$ ist ein funktionaler Hilbertraum.

(ii) Es existiert eine Abbildung $K\colon \Lambda \times \Lambda \to \mathcal{L}(H)$ so, dass

$$K(\cdot, \mu)x \in \mathcal{F}$$

für alle $x \in H$ und $\mu \in \Lambda$ sowie

$$\langle f, K(\cdot, \mu)x\rangle_{\mathcal{F}} = \langle f(\mu), x\rangle_H$$

für alle $x \in H$, $\mu \in \Lambda$ und $f \in \mathcal{F}$ gilt.

In diesem Fall gilt $K(\lambda, \mu) = \delta_\lambda \delta_\mu^*$ für alle $\mu, \lambda \in \Lambda$. Insbesondere ist die Abbildung K eindeutig bestimmt.

Man nennt die Abbildung K den reproduzierenden Kern des funktionalen Hilbertraums $\mathcal{F}$. Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen reproduzierenden Kernen funktionaler Hilberträume $\mathcal{F} \subset H^\Lambda$ und positiv definiten Abbildungen $K\colon \Lambda \times \Lambda \to \mathcal{L}(H)$.

Lemma 1.1.5. *Ist $\mathcal{F} \subset H^\Lambda$ ein funktionaler Hilbertraum mit reproduzierendem Kern K, so ist K positiv definit und $\mathcal{F}$ ist der Abschluss der linearen Hülle aller Abbildungen der Form $K(\cdot, \mu)x$ mit $\mu \in \Lambda$ und $x \in H$.*

Umgekehrt kann man aus jeder positiv definiten Abbildung einen funktionalen Hilbertraum konstruieren.

Satz 1.1.6. *Ist $K\colon \Lambda \times \Lambda \to \mathcal{L}(H)$ positiv definit, so existiert genau ein funktionaler Hilbertraum $\mathcal{F}_K \subset H^\Lambda$ mit reproduzierendem Kern K.*

Wir geben nun ein Ergebnis über das Hilbertraum-Tensorprodukt eines funktionalen Hilbertraums mit dem zugrundeliegenden Hilbertraum an, welches wir später noch benötigen.

Satz 1.1.7. *Sei $K\colon \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{C}$ positiv definit und $\mathcal{F}_K$ der funktionale Hilbertraum mit reproduzierendem Kern K. Dann ist die Abbildung*

$$K\colon \Lambda \times \Lambda \to \mathcal{L}(H), K_H(\lambda, \mu) = K(\lambda, \mu)\,\mathrm{id}_H$$

positiv definit und es existiert ein eindeutiger unitärer Operator $V\colon \mathcal{F}_K \otimes H \to \mathcal{F}_{K_H}$ mit

$$V\,(f \otimes x) = f \cdot x$$

für alle $f \in \mathcal{F}_K$ und $x \in H$.

Zuletzt erinnern wir an die Definition einer vollständig positiven Abbildung.

Definition 1.1.8. *Sei A eine unitale C^*-Algebra.*

*(i) Ein *-abgeschlossener linearer Teilraum $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ mit $1 \in \mathcal{S}$ heißt* Operatorsystem *in $\mathcal{A}$.*

(ii) Die Menge

$$M_n(\mathcal{A}) = \{(a_{i,j})_{i,j=1}^n | a_{i,j} \in \mathcal{A}\}$$

aller n-dimensionalen Matrizen mit Einträgen in $\mathcal{A}$ heißt n-dimensionale Matrixalgebra *über $\mathcal{A}$.*

Auf der Algebra $M_n(\mathcal{A})$ gibt es eine eindeutige Norm so, dass $M_n(\mathcal{A})$ zusammen mit dieser Norm und der kanonischen Involution eine C^*-Algebra ist.

Definition 1.1.9. *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ unitale C^*-Algebren, $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ ein Operatorsystem und $M_n(\mathcal{S})$ die Menge der $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in $\mathcal{S}$. Für eine lineare Abbildung $\phi \colon \mathcal{S} \to \mathcal{B}$ definieren wir für $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung*

$$\phi_n \colon M_n(\mathcal{S}) \to M_n(\mathcal{B}), \ (a_{i,j})_{i,j=1}^n \mapsto (\phi(a_{i,j}))_{i,j=1}^n.$$

Die Abbildung ϕ heißt vollständig positiv*, falls ϕ_n positiv ist für alle $n \in \mathbb{N}$.*

1.2 Der Drury-Arveson Raum

In diesem Kapitel führen wir nun einen speziellen funktionalen Hilbertraum über der Einheitskugel im $\mathbb{C}^n$ ein, den Drury-Arveson Raum.
Sei dazu $n \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{C}^n$ und $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| < 1\}$ die offene euklidische Einheitskugel. Für $\alpha \in \mathbb{N}^n$ und $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$ benutzen wir außerdem die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \sum_{i=1}^n \alpha_i, \\ \alpha! &= \prod_{i=1}^n \alpha_i!, \\ \gamma_\alpha &= \frac{|\alpha|!}{\alpha!}, \\ z^\alpha &= \prod_{i=1}^n z_i^{\alpha_i}. \end{aligned}$$

Definieren wir nun den Drury-Arveson Raum.

Definition 1.2.1. *Die Menge*

$$\mathscr{H}(\mathbb{B}, H) = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \,\middle|\, a_\alpha \in H, \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\|a_\alpha\|^2}{\gamma_\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\},$$

wobei $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$ zunächst nur als formale Potenzreihe verstanden sei, bildet mit dem Skalarprodukt

$$\left\langle \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha, \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} b_\alpha z^\alpha \right\rangle_{\mathscr{H}(\mathbb{B},H)} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\langle a_\alpha, b_\alpha \rangle_H}{\gamma_\alpha}$$

einen Hilbertraum und heißt Drury-Arveson Raum*.*

Wir zeigen nun, dass der Hilbertraum $\mathscr{H}(\mathbb{B}, H)$ aufgefasst werden kann als ein H-wertiger funktionaler Hilbertraum über $\mathbb{B}$ mit reproduzierendem Kern

$$K\colon \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathcal{L}(H), \quad (z,w) \mapsto (1 - \langle z, w\rangle)^{-1} \operatorname{id}_H .$$

Zunächst beweisen wir einige wichtige Identitäten.

Proposition 1.2.2. *Seien $z, w \in \mathbb{B}$. Dann gilt*

$$(1 - \langle z, w\rangle)^{-1} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \gamma_\alpha z^\alpha \overline{w}^\alpha \tag{1.1}$$

mit $\overline{w}^\alpha = \overline{(w^\alpha)}$. Insbesondere ist

$$(1 - \|z\|^2)^{-1} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \gamma_\alpha |z^\alpha|^2. \tag{1.2}$$

Beweis: Für $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$ mit $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| < 1$ gilt mit dem Satz über die geometrische Reihe

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} x_{i_1} \cdots x_{i_k} \right).$$

Die innere Summe wollen wir nun mit Hilfe von Multiexponenten $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ausdrücken. Definiert man für $(i_1, ..., i_k) \in \{1, ..., n\}^k$ und $\nu = 1, ..., n$

$$\alpha_\nu = \text{Anzahl}\left(\{j \in \{1, ..., k\}; i_j = \nu\}\right),$$

so ist $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ein Tupel mit $|\alpha| = k$ und $x_{i_1} \cdot ... \cdot x_{i_k} = x^\alpha$. Ist $\alpha \in \mathbb{N}^n$, so gibt es

$$\begin{aligned}
\binom{k}{\alpha_1}\binom{k-\alpha_1}{\alpha_2} \cdots \binom{k - \sum\limits_{i=1}^{n-1} \alpha_i}{\alpha_n} &= \frac{k!}{\alpha_1!(k-\alpha_1)!} \frac{(k-\alpha_1)!}{\alpha_2!(k-\alpha_1-\alpha_2)!} \cdots \frac{(k-(|\alpha|-\alpha_n))!}{\alpha_n!(k-|\alpha|)!} \\
&= \frac{|\alpha|!}{\prod\limits_{i=1}^{n} \alpha_i!} \\
&= \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \\
&= \gamma_\alpha
\end{aligned}$$

verschiedene Tupel $(i_1, ..., i_k) \in \{1, ..., n\}^k$, in denen für jedes $\nu = 1, ..., n$ die Zahl ν genau α_ν-mal vorkommt. Also ist

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} x_{i_1} \cdots x_{i_k} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha| = k} \gamma_\alpha x^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \gamma_\alpha x^\alpha.$$

Mit $x_i = z_i \overline{w_i}$ ist

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| = \sum_{i=1}^{n} |z_i||w_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |w_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} < 1$$

für $z = (z_1, ..., z_n), w = (w_1, ..., w_n) \in \mathbb{B}$. Also gilt die erste Formel.
Mit $w = z$ erhalten wir nun

$$\left(1 - \|z\|^2\right)^{-1} = (1 - \langle z, z\rangle)^{-1} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \gamma_\alpha z^\alpha \overline{z}^\alpha = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \gamma_\alpha |z^\alpha|^2$$

und damit Formel (1.2). □

Damit können wir den Drury-Arveson Raum wie folgt charakterisieren.

Proposition 1.2.3. *Alle Elemente im Drury-Arveson Raum definieren holomorphe H-wertige Funktionen auf der offenen n-dimensionalen euklidischen Einheitskugel. Fasst man die Elemente von $\mathscr{H}(\mathbb{B}, H)$ als H-wertige Funktionen auf $\mathbb{B}$ auf, so wird $\mathscr{H}(\mathbb{B}, H) \subset H^{\mathbb{B}}$ zu einem funktionalen Hilbertraum bezüglich des Skalarprodukts aus Definition 1.2.1.*

Beweis: Sei $f = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \in \mathscr{H}(\mathbb{B}, H)$ beliebig. Wir zeigen nun, dass die Reihe $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$ auf $\mathbb{B}$ punktweise absolut konvergiert. Sei dazu $z \in \mathbb{B}$, also $\|z\| < 1$.
Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung liefert zusammen mit Formel (1.2) aus Proposition 1.2.2

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \|a_\alpha z^\alpha\| &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \left\| \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma_\alpha}} a_\alpha\right) (\sqrt{\gamma_\alpha} z^\alpha) \right\| \\ &\leq \left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{\|a_\alpha\|^2}{\gamma_\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \gamma_\alpha |z^\alpha|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f\| \left(1 - \|z\|^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Daher konvergiert $f = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$ punktweise auf $\mathbb{B}$. Da jede punktweise konvergente H-wertige Potenzreihe auf $\mathbb{B}$ kompakt gleichmäßig konvergiert, ist

$$f\colon \mathbb{B} \to H, \;\; z \mapsto \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$$

eine holomorphe, H-wertige Funktion mit

$$a_\alpha = \frac{\partial^\alpha f(0)}{\alpha!}$$

für $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Damit erhalten wir auch, dass die Punktauswertungen

$$\mathscr{H}(\mathbb{B}, H) \to H, \;\; f \mapsto f(z)$$

für $z \in \mathbb{B}$ stetig sind, weshalb $\mathscr{H}(\mathbb{B}, H) \subset H^{\mathbb{B}}$ ein funktionaler Hilbertraum ist. □

Wir zeigen nun, dass

$$K\colon \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathcal{L}(H), \quad (z, w) \mapsto (1 - \langle z, w\rangle)^{-1} \, \mathrm{id}_H$$

der reproduzierende Kern des funktionalen Hilbertraums $\mathscr{H}(\mathbb{B}, H)$ ist.

Proposition 1.2.4. *Für $w \in \mathbb{B}$, $x \in H$ und $f \in \mathscr{H}(\mathbb{B}, H)$ gilt*

(i) $K(\cdot, w)x \in \mathscr{H}(\mathbb{B}, H)$,

(ii) $\langle f, K(\cdot, w)x\rangle_{\mathscr{H}(\mathbb{B},H)} = \langle f(w), x\rangle_H$.

Beweis. Für $w, z \in \mathbb{B}$ und $x \in H$ gilt nach Proposition 1.2.2 und Formel (1.1)

$$\begin{aligned} K(z, w)x &= (1 - \langle z, w\rangle)^{-1} \operatorname{id}_H(x) \\ &= (1 - \langle z, w\rangle)^{-1} x \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \gamma_\alpha z^\alpha \overline{w}^\alpha x \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} (\gamma_\alpha x \overline{w}^\alpha) z^\alpha. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\|\gamma_\alpha x \overline{w}^\alpha\|^2}{\gamma_\alpha} &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \gamma_\alpha \left|\overline{w}^\alpha\right|^2 \|x\|^2 \\ &= \|x\|^2 (1 - \|w\|^2)^{-1} \\ &< \infty \end{aligned}$$

ist $K(\cdot, w)x \in \mathscr{H}(\mathbb{B}, H)$.
Sei nun $f = \sum\limits_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \in \mathscr{H}(\mathbb{B}, H)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \langle f, K(\cdot, w)x\rangle_{\mathscr{H}(\mathbb{B},H)} &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\langle a_\alpha, \gamma_\alpha x \overline{w}^\alpha\rangle_H}{\gamma_\alpha} \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \langle a_\alpha w^\alpha, x\rangle_H \\ &= \langle \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha w^\alpha, x\rangle_H \\ &= \langle f(w), x\rangle_H. \end{aligned}$$

□

Satz 1.2.5. *Der Drury-Arveson Raum $\mathscr{H}(\mathbb{B}, H)$ ist ein H-wertiger funktionaler Hilbertraum über $\mathbb{B}$ mit reproduzierendem Kern*

$$K\colon \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathcal{L}(H), \quad (z, w) \mapsto (1 - \langle z, w\rangle)^{-1} \operatorname{id}_H.$$

Beweis: Nach Proposition 1.2.3 ist $\mathscr{H}(\mathbb{B}, H)$ ein H-wertiger funktionaler Hilbertraum über $\mathbb{B}$. Nach Proposition 1.2.4 und Satz 1.1.4 ist

$$K\colon \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathcal{L}(H),\ (z, w) \mapsto (1 - \langle z, w\rangle)^{-1} \operatorname{id}_H$$

der reproduzierende Kern von $\mathscr{H}(\mathbb{B}, H)$. □

Für $f = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \in \mathscr{H}(\mathbb{B}, H)$ bildet die Familie $(a_\alpha z^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ ein Orthogonalsystem in dem Hilbertraum $\mathscr{H}(\mathbb{B}, H)$. Die Reihe $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$ konvergiert in $\mathscr{H}(\mathbb{B}, H)$, da

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \|a_\alpha z^\alpha\|^2 = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{\|a_\alpha\|^2}{\gamma_\alpha} < \infty$$

ist. Also konvergiert die darstellende Reihe $f = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$ sowohl als Potenzreihe als auch im Hilbertraum $\mathscr{H}(\mathbb{B}, H)$ gegen f.

1.3 Zeilenkontraktionen und der *n*-Shift

In diesem Abschnitt wollen wir nun Zeilenkontraktionen, und als spezielles Beispiel den n-Shift auf dem Drury-Arveson Raum, einführen.

Definition 1.3.1. *Ein Tupel $T \in \mathcal{L}(H)^n$ stetiger, linearer Operatoren auf einem Hilbertraum H mit*

$$\sum_{i=1}^n T_i T_i^* \leq \mathrm{id}_H$$

heißt Zeilenkontraktion *oder* n-Kontraktion*.*

In einigen Fällen ist es einfacher eine äquivalente Charakterisierung von Zeilenkontraktionen nachzurechnen. Diese liefert der nachfolgende Satz.

Satz 1.3.2. *Sei $T \in \mathcal{L}(H)^n$. Dann sind äquivalent:*

(i) Das Tupel T ist eine Zeilenkontraktion

(ii) Die Abbildung

$$\varphi\colon H^n \to H,\ \ (x_i)_{i=1}^n \mapsto \sum_{i=1}^n T_i x_i$$

ist eine Kontraktion.

(iii) Die Abbildung

$$\tilde{\varphi}\colon H \to H^n,\ \ x \mapsto (T_i^* x)_{i=1}^n$$

ist eine Kontraktion.

Beweis: Wir zeigen, dass die zu

$$\varphi\colon H^n \to H,\ \ (x_i)_{i=1}^n \mapsto \sum_{i=1}^n T_i x_i.$$

adjungierte Abbildung durch

$$\varphi^*\colon H \to H^n,\ \ x \mapsto (T_i^* x)_{i=1}^n$$

gegeben ist. Seien also $x \in H$, $y = (y_i)_{i=1}^n \in H^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle \varphi^*(x), y\rangle_{H^n} &= \langle x, \varphi(y)\rangle_H \\
&= \langle x, \sum_{i=1}^n T_i y_i\rangle_H \\
&= \sum_{i=1}^n \langle x, T_i y_i\rangle_H \\
&= \sum_{i=1}^n \langle T_i^* x, y_i\rangle_H \\
&= \langle (T_i^* x)_{i=1}^n, y\rangle_{H^n}.
\end{aligned}$$

Nun zeigen wir, dass $\varphi\varphi^* \leq \mathrm{id}_H$ genau dann gilt, wenn $\|\varphi\| \leq 1$ ist, sodass mit

$$\varphi\varphi^* = \sum_{i=1}^n T_i T_i^*$$

die Behauptung folgt.
Die Abbildung $\mathrm{id}_H - \varphi\varphi^*$ ist genau dann positiv definit, wenn für alle $x \in H$

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle (\mathrm{id}_H - \varphi\varphi^*)(x), x\rangle \\
&= \langle x, x\rangle - \langle \varphi\varphi^*(x), x\rangle_H \\
&= \|x\|^2 - \langle \varphi^*(x), \varphi^*(x)\rangle_{H^n} \\
&= \|x\|^2 - \|\varphi^*(x)\|^2
\end{aligned}$$

gilt, d.h. genau dann, wenn φ^* und damit auch φ eine Kontraktion ist. □

Wir beweisen nun eine Abschätzung, die wir später noch benötigen werden.

Lemma 1.3.3. *Sei $T \in \mathcal{L}(H)^n$ Zeilenkontraktion. Dann gilt für jedes $\lambda \in \mathbb{C}^n$*

$$\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i T_i \right\| \leq \|\lambda\|.$$

Beweis: Da die Abbildung $\varphi\colon H^n \to H,\ (x_i)_{i=1}^n \mapsto \sum_{i=1}^n T_i x_i$ aus Satz 1.3.2 eine Kontraktion ist, gilt für $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ mit $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ und $x = (x_i)_{i=1}^n \in H^n$

$$\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i T_i x_i \right\| = \|\varphi(\Lambda x)\| \leq \|\Lambda x\| \leq \|\Lambda\| \, \|x\| \leq \|\lambda\| \, \|x\|,$$

womit die Behauptung folgt. □

Ein sehr wichtiges Beispiel einer Zeilenkontraktion ist der n-Shift auf dem Drury-Arveson Raum. Dazu definieren wir uns zunächst die Multiplikationsoperatoren mit den Koordinatenfunktionen und fassen diese dann zum n-Shift zusammen.

Seien zunächst $i \in \{1, ..., n\}$ und $\alpha \in \mathbb{N}^n$ so, dass $\alpha \geq e_i$ mit $e_i = (\delta_{ij})_{j=1}^n$ gilt, d.h. $\alpha_i \geq 1$. Dann gilt mit der Definition von γ_α

$$\frac{\gamma_{\alpha-e_i}}{\gamma_\alpha} = \frac{\frac{|\alpha-e_i|!}{(\alpha-e_i)!}}{\frac{|\alpha|!}{\alpha!}} = \frac{(|\alpha|-1)!\alpha!}{(\alpha-e_i)!|\alpha|!} = \frac{\alpha_i}{|\alpha|} \leq 1. \tag{1.3}$$

Somit können wir die erste wichtige Aussage über die Multiplikationsoperatoren mit den Koordinatenfunktionen formulieren.

Lemma 1.3.4. *Für $i = 1, ..., n$ ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} M_{z_i} \colon \mathscr{H}(\mathbb{B}, H) &\to \mathscr{H}(\mathbb{B}, H), \\ f &\mapsto z_i f \end{aligned}$$

stetig, linear und kontraktiv. Außerdem gilt

$$M_{z_i}\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha\right) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^{\alpha+e_i} = \sum_{\alpha\geq e_i} a_{\alpha-e_i} z^\alpha. \tag{1.4}$$

Beweis: Sei $i \in \{1, ..., n\}$ beliebig und $f = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \in \mathscr{H}(\mathbb{B}, H)$.
Dann hat die Funktion

$$\mathbb{B} \to H, \ z \mapsto z_i f(z)$$

die Potenzreihenentwicklung

$$z_i f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^{\alpha+e_i} = \sum_{\alpha\geq e_i} a_{\alpha-e_i} z^\alpha$$

auf $\mathbb{B}$. Wegen

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha\geq e_i} \frac{\|a_{\alpha-e_i}\|^2}{\gamma_\alpha} &= \sum_{\alpha\geq e_i} \frac{\|a_{\alpha-e_i}\|^2}{\gamma_\alpha} \frac{\gamma_{\alpha-e_i}}{\gamma_{\alpha-e_i}} \\ &= \sum_{\alpha\geq e_i} \frac{\|a_{\alpha-e_i}\|^2}{\gamma_{\alpha-e_i}} \frac{\gamma_{\alpha-e_i}}{\gamma_\alpha} \\ &= \sum_{\alpha\geq e_i} \frac{\|a_{\alpha-e_i}\|^2}{\gamma_{\alpha-e_i}} \frac{\alpha_i}{|\alpha|} \\ &\leq \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{\|a_\alpha\|^2}{\gamma_\alpha} \\ &= \|f\|^2 \end{aligned}$$

ist $z_i f \in \mathscr{H}(\mathbb{B}, H)$ mit $\|z_i f\|^2 \leq \|f\|^2$.
Da M_{z_i} offensichtlich linear ist, folgt damit auch die Stetigkeit und Kontraktivität von M_{z_i}. Formel (1.4) folgt, da für $f = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \in \mathscr{H}(\mathbb{B}, H)$ die Reihe $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$ in dem Hilbertraum $\mathscr{H}(\mathbb{B}, H)$ gegen f konvergiert. $\square$

Nun können wir den n-Shift definieren.

Definition 1.3.5. *Das Tupel $M_z = (M_{z_1}, ..., M_{z_n}) \in \mathcal{L}(\mathscr{H}(\mathbb{B}, H))^n$ heißt* n-Shift *oder* n-dimensionaler Shift*.*

Im nächsten Lemma betrachten wir den zu M_{z_i} adjungierten Operator.

Lemma 1.3.6. *Für $f = \sum\limits_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \in \mathscr{H}(\mathbb{B}, H)$ und $i = 1, ..., n$ gilt*

$$M_{z_i}{}^* f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha+e_i}} a_{\alpha+e_i} z^\alpha.$$

Beweis: Wegen

$$\begin{aligned} \langle M_{z_i}^* x z^\alpha, y z^\beta \rangle &= \langle x z^\alpha, y z^{\beta+e_i} \rangle \\ &= \langle x, y \rangle \delta_{\alpha, \beta+e_i} \frac{1}{\gamma_\alpha} \\ &= \langle \frac{\gamma_{\alpha-e_i}}{\gamma_\alpha} x z^{\alpha-e_i}, y z^\beta \rangle \end{aligned}$$

für alle $x, y \in H$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ gilt mit $\gamma_{\alpha-e_i} = 0$ für $\alpha_i = 0$

$$M_{z_i}^* x z^\alpha = \frac{\gamma_{\alpha-e_i}}{\gamma_\alpha} x z^{\alpha-e_i}$$

für alle $x, y \in H$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. Da $M_{z_i}^*$ für $i = 1, ..., n$ ein stetiger linearer Operator ist, folgt die Aussage für alle Polynome $f = \sum\limits_{|\alpha| \leq k} a_\alpha z^\alpha \in \mathscr{H}(\mathbb{B}, H), a_\alpha \in H$ und wegen

$$\overline{\mathrm{LH}\{x z^\alpha \colon x \in H, \alpha \in \mathbb{N}^n\}} = \mathscr{H}(\mathbb{B}, H)$$

für alle $f \in \mathscr{H}(\mathbb{B}, H)$. □

Wir können damit folgern, dass der n-Shift eine Zeilenkontraktion ist.

Satz 1.3.7. *Der n-Shift M_z ist eine vertauschende Zeilenkontraktion auf $\mathscr{H}(\mathbb{B}, H)$.*

Beweis: Da die Multiplikationsoperatoren M_{z_i} einer Multiplikation mit z_i entsprechen und diese kommutativ ist, ist der n-Shift ein vertauschendes Tupel.
Bleibt noch die Eigenschaft einer Zeilenkontraktion zu zeigen. Wir werden dazu zeigen, dass $\mathrm{id}_{\mathscr{H}(\mathbb{B},H)} - \sum\limits_{i=1}^n M_{z_i} M_{z_i}^*$ die orthogonale Projektion auf den Unterraum der konstanten Funktionen in $\mathscr{H}(\mathbb{B}, H)$ ist.
Für alle $f = \sum\limits_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \in \mathscr{H}(\mathbb{B}, H)$ gilt nach Lemma 1.3.6 und mit Formel (1.3)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_{z_i} M_{z_i}^* f &= \sum_{i=1}^n M_{z_i} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha+e_i}} a_{\alpha+e_i} z^\alpha \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha \geq e_i} \frac{\gamma_{\alpha-e_i}}{\gamma_\alpha} a_\alpha z^\alpha \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha \geq e_i} \frac{\alpha_i}{|\alpha|} a_\alpha z^\alpha \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha - a_{(0,...,0)} \\ &= f - a_{(0,...,0)}. \end{aligned}$$

Da Projektionen positiv sind, ist somit $\mathrm{id}_{\mathscr{H}(\mathbb{B},H)} - \sum_{i=1}^{n} M_{z_i} M_{z_i}^*$ positiv, und damit folgt, dass der n-Shift eine Zeilenkontraktion ist. $\square$

Bemerkung 1.3.8. Für den n-Shift sei M_z^* definiert als das Tupel der Adjungierten der Multiplikatoren mit den Koordinatenfunktionen, also $M_z^* = (M_{z_i}^*)_{i=1}^n$. Da das Tupel M_z vertauschend ist, ist auch das Tupel M_z^* vertauschend.

2 Der Satz von Beurling für Zeilenkontraktionen

2.1 Reine Zeilenkontraktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir spezielle vertauschende Zeilenkontraktionen. Sei H ein beliebiger Hilbertraum über $\mathbb{C}$.
Für ein Operatortupel $T \in \mathcal{L}(H)^n$ definieren wir die Abbildung

$$\sigma_T \colon \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H),\ X \mapsto \sum_{i=1}^{n} T_i X T_i^*.$$

Lemma 2.1.1. *Die Abbildung σ_T ist positiv, d.h. es gilt $\sigma_T(X) \geq 0$ für alle $X \in \mathcal{L}(H)$ mit $X \geq 0$.*

Beweis. Sei $X \in \mathcal{L}(H)$ mit $X \geq 0$. Dann gibt es einen Operator $A \in \mathcal{L}(H)$ mit $X = AA^*$. Daher folgt

$$\sigma_T(X) = \sum_{i=1}^{n} T_i X T_i^* = \sum_{i=1}^{n} T_i A (T_i A)^* \geq 0.$$

□

Lemma 2.1.2. *Für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt*

$$\sigma_T^k(X) = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} T_{i_k} \dots T_{i_1} X T_{i_1}^* \dots T_{i_k}^*.$$

Falls T ein vertauschendes Operatortupel ist, gilt

$$\sigma_T^k(X) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| = k}} \gamma_\alpha T^\alpha X T^{*\alpha}. \tag{2.1}$$

Beweis. Die erste Formel gilt offensichtlich. Für vertauschende Tupel T folgt die zweite Formel mit dem kombinatorischen Argument aus dem Beweis von Proposition 1.2.2. □

Sei $T \in \mathcal{L}(H)^n$ eine Zeilenkontraktion. Dann gilt für $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\sigma_T^k(\mathrm{id}_H) - \sigma_T^{k+1}(\mathrm{id}_H) &= \sigma_T^k(\mathrm{id}_H - \sigma_T(\mathrm{id}_H)) \\
&= \sigma_T^k(\mathrm{id}_H - \sum_{i=1}^{n} T_i T_i^*) \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

d.h. $\left(\sigma_T^k(\mathrm{id}_H)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine monoton fallende Folge positiver Operatoren auf H.
Wir zitieren nun den folgenden wohlbekannten Satz (siehe etwa Lemma 1.8 in [18]).

Satz 2.1.3. *Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge positiver Operatoren in $\mathcal{L}(H)$. Dann konvergiert $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen einen positiven Operator T in $\mathcal{L}(H)$.*

Das bedeutet, es existiert ein positiver Operator $A_\infty \in \mathcal{L}(H)$ mit

$$A_\infty x = \lim_{k\to\infty} \sigma_T^k(\mathrm{id}_H)x \tag{2.2}$$

für alle $x \in H$.
Wir definieren nun den *Defektoperator*

$$D_T = \left(\mathrm{id}_H - \sum_{i=1}^{n} T_i T_i^*\right)^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}(H). \tag{2.3}$$

Sei außerdem $\mathcal{D}_T = \overline{D_T H} \subset H$.

Satz 2.1.4. *Sei $T \in \mathcal{L}(H)^n$ eine vertauschende Zeilenkontraktion. Die Abbildung*

$$\pi_T \colon H \to \mathscr{H}(\mathbb{B}, \mathcal{D}_T),\ x \mapsto \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} (\gamma_\alpha D_T T^{*\alpha} x)\, z^\alpha$$

ist eine wohldefinierte stetige, lineare Kontraktion und erfüllt

$$\pi_T T_i^* = M_{z_i}^* \pi_T$$

für $i = 1, ..., n$ sowie

$$\|\pi_T x\|^2 = \|x\|_H^2 - \langle A_\infty x, x\rangle_H$$

für alle $x \in H$.

Beweis. Zunächst gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{id}_H - \sigma_T^{N+1}(\mathrm{id}_H) &= \sum_{j=0}^{N} \left(\sigma_T^j(\mathrm{id}_H) - \sigma_T^{j+1}(\mathrm{id}_H)\right) \\
&= \sum_{j=0}^{N} \sigma_T^j(D_T^2) \\
&= \sum_{j=0}^{N} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|=j} \gamma_\alpha T^\alpha D_T^2 T^{*\alpha}.
\end{aligned}$$

Für $x \in H$ und $N \in \mathbb{N}$ folgt mit dieser Formel

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n \\ |\alpha|\le N}} \frac{\|\gamma_\alpha D_T T^{*\alpha} x\|_H^2}{\gamma_\alpha} &= \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n \\ |\alpha|\le N}} \langle \gamma_\alpha T^\alpha D_T^2 T^{*\alpha} x, x\rangle_H \\
&= \langle \sum_{j=0}^{N} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n \\ |\alpha|=j}} \gamma_\alpha T^\alpha D_T^2 T^{*\alpha} x, x\rangle_H \\
&= \langle \mathrm{id}_H - \sigma_T^{N+1}(\mathrm{id}_H) x, x\rangle_H \\
&= \langle x, x\rangle_H - \langle \sigma_T^{N+1}(\mathrm{id}_H) x, x\rangle_H \\
&\le \|x\|^2 .
\end{aligned}$$

Damit ist π_T eine wohldefinierte Kontraktion und es gilt sowohl

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n,|\alpha|\leq N} \frac{\|\gamma_\alpha D_T T^{*\alpha} x\|_H^2}{\gamma_\alpha} \longrightarrow \|\pi_T x\|^2_{\mathscr{H}(\mathbb{B},\mathcal{D}_T)}$$

als auch

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n,|\alpha|\leq N} \frac{\|\gamma_\alpha D_T T^{*\alpha} x\|_H^2}{\gamma_\alpha} \longrightarrow \|x\|^2 - \langle A_\infty x, x\rangle$$

für $N \to \infty$. Also gilt für alle $x \in H$

$$\|\pi_T x\|^2_{\mathscr{H}(\mathbb{B},\mathcal{D}_T)} = \|x\|^2 - \langle A_\infty x, x\rangle.$$

Die Linearität der Abbildung ist offensichtlich.
Zeigen wir zuletzt $\pi_T T_i^* = M_{z_i}^* \pi_T$ für $i = 1, ..., n$. Seien dazu $x \in H$ und $i = 1, ..., n$. Dann gilt nach Lemma 1.3.6

$$\begin{aligned} M_{z_i}^* \pi_T x &= M_{z_i}^* \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \left(\gamma_\alpha D_T T^{*\alpha} x\right) z^\alpha \\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha+e_i}} \gamma_{\alpha+e_i} D_T T^{*\alpha+e_i} x z^\alpha \\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \gamma_\alpha D_T T^{*\alpha}(T_i^* x) z^\alpha \\ &= \pi_T(T_i^* x). \end{aligned}$$

□

Wegen $\|\pi_T x\|^2 = \|x\|_H^2 - \langle A_\infty x, x\rangle_H$ ist π_T also genau dann eine Isometrie, wenn

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_T^k(\mathrm{id}_H) x = 0$$

für alle $x \in H$ gilt.

Definition 2.1.5. *Eine Zeilenkontraktion $T \in \mathcal{L}(H)^n$ mit der Eigenschaft*

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_T^k(\mathrm{id}_H) x = 0$$

für alle $x \in H$ nennt man rein *oder* $C_{\cdot 0}$-Kontraktion.

Im nächsten Lemma sehen wir, was das für einen einzelnen Operator $T \in \mathcal{L}(H)$ bedeutet.

Lemma 2.1.6. *Für eine Kontraktion $T \in \mathcal{L}(H)$ sind äquivalent*

(i) T ist rein, d.h. für jedes $x \in H$ gilt $T^k T^{*k} x \to 0$ für $k \to \infty$,

(ii) Für jedes $x \in H$ gilt $T^{*k} x \to 0$ für $k \to \infty$.

Beweis. Falls (i) gilt, folgt für $x \in H$

$$\begin{aligned}\left\|T^{*k}x\right\|^2 &= \langle T^{*k}x, T^{*k}x\rangle \\ &= \langle T^kT^{*k}x, x\rangle \\ &\leq \left\|T^kT^{*k}x\right\| \|x\| \\ &\longrightarrow 0\end{aligned}$$

für $k \to \infty$.
Gilt (ii), so folgt für $x \in H$

$$\left\|T^kT^{*k}x\right\| \leq \|T\|^k \left\|T^{*k}x\right\| \longrightarrow 0$$

für $k \to \infty$, da $\|T\|^k \leq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist. □

Wir haben in Satz 2.1.4 also gezeigt, dass für eine beliebige reine vertauschende Zeilenkontraktion $T \in \mathcal{L}(H)^n$ ein Hilbertraum $\mathcal{E}$ und eine Isometrie

$$\pi_T \colon H \to \mathscr{H}(\mathbb{B}, \mathcal{E})$$

existieren mit der Eigenschaft

$$\pi_T T_i^* = M_{z_i}^* \pi_T$$

für $i = 1, ..., n$. Eine solche Abbildung π_T nennen wir *Dilatation* von T.
Um zu sehen, dass auch die Umkehrung gilt, d.h. dass jedes Tupel $T \in \mathcal{L}(H)^n$, für das eine solche Dilatation existiert, eine reine vertauschende Zeilenkontraktion ist, zeigen wir zunächst, dass der n-Shift M_z rein ist.

Satz 2.1.7. *Sei $\mathcal{F} \subset H^\Lambda$ ein H-wertiger funktionaler Hilbertraum auf einer Menge $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$ so, dass*

(i) $M_z \in \mathcal{L}(\mathcal{F})^n$ eine Zeilenkontraktion ist und

(ii) $\overline{\mathrm{LH}\{K(\cdot,\lambda)x \colon \lambda \in \Lambda \cap \mathbb{B}, x \in H\}} = \mathcal{F}$ ist.

Dann ist $M_z \in \mathcal{L}(\mathcal{F})^n$ eine reine Zeilenkontraktion.

Beweis. Wir müssen also zeigen, dass

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{M_z}^k (\mathrm{id}_\mathcal{F}) f = 0 \tag{2.4}$$

für alle $f \in \mathcal{F}$gilt.
Da $\left(\sigma_{M_z}^k(\mathrm{id}_\mathcal{F})\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge positiver Operatoren ist, ist auch $\left(\left\|\sigma_{M_z}^k(id_\mathcal{F})\right\|\right)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend, sodass $\left(\sigma_{M_z}^k(\mathrm{id}_\mathcal{F})\right)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Wegen der Voraussetzung (ii) genügt es die Gleichung (2.4) für alle $f = K(\cdot,\lambda)x$ mit $\lambda \in \Lambda \cap \mathbb{B}$

und $x \in H$ zu zeigen. Seien also $\lambda \in \Lambda \cap \mathbb{B}, x \in H$ und $f = K(\cdot, \lambda)x$. Für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^n$ und $h \in \mathcal{F}$ gilt

$$\begin{aligned}\langle h, (M_z^*)^\alpha K(\cdot, \lambda)x\rangle &= \langle M_z^\alpha h, K(\cdot, \lambda)x\rangle \\ &= \langle z^\alpha h, K(\cdot, \lambda)x\rangle \\ &= \lambda^\alpha \langle h(\lambda), x\rangle \\ &= \lambda^\alpha \langle h, K(\cdot, \lambda)x\rangle \\ &= \langle h, \overline{\lambda}^\alpha K(\cdot, \lambda)x\rangle,\end{aligned}$$

also $(M_z^*)^\alpha K(\cdot, \lambda)x = \overline{\lambda}^\alpha K(\cdot, \lambda)x$. Damit folgt

$$\begin{aligned}\sigma_{M_z}^k (\mathrm{id}_{\mathcal{F}})\, f &= \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| = k}} \gamma_\alpha M_z^\alpha M_z^{*\alpha} K(\cdot, \lambda)x \\ &= \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| = k}} \gamma_\alpha \overline{\lambda}^\alpha M_z^\alpha K(\cdot, \lambda)x \\ &= \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| = k}} \gamma_\alpha \overline{\lambda}^\alpha z^\alpha K(\cdot, \lambda)x \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \overline{\lambda_i} M_{z_i}\right)^k K(\cdot, \lambda)x \\ &\longrightarrow 0\end{aligned}$$

für $k \to \infty$, denn wegen $\lambda \in \mathbb{B}$ gilt

$$\left\| \sum_{i=1}^n \overline{\lambda_i} M_{z_i} \right\|^k \leq \|\lambda\|^k \to 0$$

für $k \longrightarrow \infty$ nach Lemma 1.3.3. □

Korollar 2.1.8. *Der n-Shift*

$$M_z \in \mathcal{L}\left(\mathscr{H}(\mathbb{B}, H)\right)^n$$

ist eine reine Zeilenkontraktion.

Beweis. Die Aussage folgt aus Satz 1.3.7, Lemma 1.1.5 und Satz 2.1.7. □

Satz 2.1.9. *Sei $T \in \mathcal{L}(H)^n$ so, dass ein Hilbertraum $\mathcal{E}$ und eine Isometrie*

$$\pi \colon H \to \mathscr{H}(\mathbb{B}, \mathcal{E})$$

existieren mit der Eigenschaft

$$\pi T_i^* = M_{z_i}^* \pi$$

für $i = 1, ..., n$. Dann ist T eine reine vertauschende Zeilenkontraktion.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass T ein vertauschendes Operatortupel ist. Für $i, j = 1, ..., n$ gilt

$$\begin{aligned} \pi\left(T_i^* T_j^* - T_j^* T_i^*\right) &= \left(M_{z_i}^* M_{z_j}^* - M_{z_j}^* M_{z_i}^*\right)\pi \\ &= 0, \end{aligned}$$

da M_z ein vertauschendes Tupel ist.
Für $x \in H$ gilt außerdem

$$\begin{aligned} \langle(\mathrm{id}_H - \sum_{i=1}^n T_i T_i^*)x, x\rangle &= \langle x, x\rangle - \sum_{i=1}^n \langle T_i^* x, T_i^* x\rangle \\ &= \langle \pi x, \pi x\rangle - \sum_{i=1}^n \langle \pi T_i^* x, \pi T_i^* x\rangle \\ &= \langle \pi x, \pi x\rangle - \sum_{i=1}^n \langle M_{z_i}^* \pi x, M_{z_i}^* \pi x\rangle \\ &= \langle(\mathrm{id}_H - \sum_{i=1}^n M_{z_i} M_{z_i}^*)\pi x, \pi x\rangle \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

da M_z eine Zeilenkontraktion und π eine Isometrie ist. Damit ist auch T eine Zeilenkontraktion.
Zeigen wir zuletzt, dass T rein ist. Für $x \in H$ gilt

$$\begin{aligned} \langle \sigma_T^k(\mathrm{id}_H)x, x\rangle &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|=k} \gamma_\alpha \langle T^\alpha T^{*\alpha} x, x\rangle \\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|=k} \gamma_\alpha \langle \pi T^{*\alpha} x, \pi T^{*\alpha} x\rangle \\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|=k} \gamma_\alpha \langle M_{z_\alpha}^\alpha M_{z_\alpha}^{*\alpha} \pi x, \pi x\rangle \\ &= \langle \sigma_{M_{z_\alpha}}^k(\mathrm{id}_{\mathscr{H}(\mathbb{B},\mathcal{E})})\pi x, \pi x\rangle \\ &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

für $k \to \infty$, da M_z rein ist. $\square$

2.2 Beispiele reiner Zeilenkontraktionen

Mit Hilfe von Satz 2.1.7 betrachten wir nun weitere Beispiele für reine Zeilenkontraktionen. Dazu sei $(a_k)_{k\geq 0}$ eine Folge in $(0, \infty)$ mit $a_0 = 1$ so, dass

(i) die Potenzreihe $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ Konvergenzradius $R = r^2 > 0$ besitzt und

(ii) $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{a_k}{a_{k+1}} \leq 1$ ist.

Nach Satz 1.12 und Satz 1.15 in [24] definiert

$$K\colon B_r(0)\times B_r(0)\to\mathbb{C},\; K(z,w)=f\left(\langle z,w\rangle\right)$$

eine positiv definite Abbildung und der zugehörige funktionale Hilbertraum $H=H(K)$ hat die Form

$$H=\left\{h=\sum_{\nu\in\mathbb{N}^n}c_\nu z^\nu\in\mathcal{O}\left(B_r(0)\right):\;\|h\|=\left(\sum_{\nu\in\mathbb{N}^n}\frac{\nu!}{a_{|\nu|}|\nu|!}\,|c_\nu|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\infty\right\}\subset\mathcal{O}\left(B_r(0)\right).$$

Nach Lemma 2.4 in [24] ist $M_z\in\mathcal{L}(H)^n$ eine wohldefinierte Zeilenkontraktion. Genauer gilt:
Ist $E_k, k\in\mathbb{N}$ die Orthogonalprojektion von H auf den Raum der homogenen Polynome vom Grad k und $P_{\mathbb{C}^\perp}$ die Projektion auf das orthogonale Komplement von $\mathbb{C}$ in H, so gilt nach Lemma 2.4 in [24]

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n M_{z_i}M_{z_i}^* &= \mathrm{SOT}-\sum_{k=1}^\infty\frac{a_{k-1}}{a_k}E_k\\ &\leq \mathrm{SOT}-\sum_{k=1}^\infty E_k\\ &= P_{\mathbb{C}^\perp}\\ &\leq \mathrm{id}\,.\end{aligned}$$

Also ist $M_z\in\mathcal{L}\left(H\right)^n$ eine Zeilenkontraktion, die Satz 2.1.7 zufolge rein ist.

Für konkrete Beispiele betrachten wir nun den Fall $R=r=1$ (siehe Example 2.52 in [25]). Für jede reelle Zahl $\alpha\geq -n$ definiert

$$a_{k,\alpha}=\frac{1}{k!}\frac{\Gamma(n+\alpha+k+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}$$

eine Folge in $(0,\infty)$ mit $a_{0,\alpha}=1$ und

$$1\longleftarrow\frac{a_{k,\alpha}}{a_{k+1,\alpha}}=\frac{k+1}{n+\alpha+k+1}\leq 1$$

für $k\geq 0$. Für $f_\alpha(z)=\sum\limits_{k=0}^\infty a_{k,\alpha}z^k$ ist

$$K_{f_\alpha}\colon\mathbb{B}\times\mathbb{B}\to\mathbb{C},\;(z,w)\mapsto f_\alpha\left(\langle z,w\rangle\right)=\left(\frac{1}{1-\langle z,w\rangle}\right)^{n+\alpha+1}$$

der zugehörige reproduzierende Kern.
Sei $H_\alpha=H(K_{f_\alpha})$. Nach Example 2.52 in [25] sind

$H_{-n}=\mathscr{H}\left(\mathbb{B}\right)$ der Drury-Arveson Raum,

$$H_{-1} = H^2(\mathbb{B}) = \left\{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{B}) : \sup_{0<r<1} \int_{\partial\mathbb{B}} |f(r\xi)|^2 \, d\xi < \infty \right\} \text{ der Hardy-Raum,}$$

$$H_0 = L_a^2(\mathbb{B}) = \left\{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{B}) : \int_{\mathbb{B}} |f|^2 \, d\lambda < \infty \right\} \text{ der Bergman-Raum und für } \alpha > -1$$

$$H_\alpha = \left\{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{B}) : \int_{\mathbb{B}} |f|^2 \left(1 - |z|^2\right)^\alpha d\lambda < \infty \right\} \text{ die gewichteten Bergman-Räume.}$$

2.3 Der Satz von Beurling für Zeilenkontraktionen

In diesem Kapitel verallgemeinern wir einen berühmten Satz von Beurling aus dem Jahr 1949 (siehe Theorem IV auf Seite 253 in [10]). Hierzu beachte man zunächst, dass für $n = 1$ der Drury-Arveson Raum

$$\mathscr{H}(\mathbb{D}, \mathbb{C}) = \left\{ f = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k z^k : a_k \in \mathbb{C}, \|f\| = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$$

mit dem Hardyraum $H^2(\mathbb{D})$ über der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ übereinstimmt.

Definition 2.3.1. *Sei $T \in \mathcal{L}(H)^n$.*

(a) Ein abgeschlossener Teilraum $\mathcal{S} \subset H$ heißt invariant *für T, falls $T_i\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$ für jedes $i = 1, ..., n$ ist. Wir schreiben* $\mathrm{Lat}(T)$ *für die Menge der abgeschlossenen invarianten Teilräume für T.*

(b) Ein abgeschlossener Teilraum $\mathcal{S} \subset H$ heißt reduzierend *für T, falls S und $S^\perp$ invariante Teilräume für T sind.*

Sei $m \in M^+(\partial\mathbb{D})$ das normalisierte 1-dimensionale Lebesguemaß auf $\partial\mathbb{D}$.

Definition 2.3.2. *Eine Funktion $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ heißt* innere Funktion*, falls $\lim_{r \uparrow 1} |f(rz)| = 1$ für m-fast alle $z \in \partial\mathbb{D}$ gilt.*

Satz 2.3.3 (Satz von Beurling, 1949)**.** *Ein abgeschlossener Teilraum $\mathcal{S} \subset H^2(\mathbb{D})$ ist genau dann ein invarianter Teilraum für $M_z \in \mathcal{L}(H^2(\mathbb{D}))$, wenn eine innere Funktion $\theta \in H^\infty(\mathbb{D})$ existiert mit*

$$\mathcal{S} = \theta H^2(\mathbb{D}) = \left\{ \theta f : f \in H^2(\mathbb{D}) \right\}.$$

Mit unseren bisherigen Ergebnissen erhalten wir nun eine Verallgemeinerung des Satzes von Beurling für beliebige reine vertauschende Zeilenkontraktionen $T \in \mathcal{L}(H)^n$.

Definition 2.3.4. *Seien H, K Hilberträume. Eine Abbildung $V\colon H \to K$ heißt* partielle Isometrie*, falls $V|_{(\ker V)^\perp}\colon (\ker V)^\perp \to K$ isometrisch ist.*

Satz 2.3.5. *Seien H, K Hilberträume. Es sind äquivalent*

(i) $V \in \mathcal{L}(H, K)$ ist eine partielle Isometrie,

(ii) $V^* \in \mathcal{L}(K, H)$ ist eine partielle Isometrie,

(iii) V^*V ist eine Orthogonalprojektion.

In diesem Fall ist V^*V die Orthogonalprojektion auf $(\ker V)^\perp$.

Beweis. Sei zunächst V eine partielle Isometrie und $f \in (\ker V)^\perp$. Dann gilt

$$\langle f, g\rangle = \langle Vf, Vg\rangle = \langle V^*Vf, g\rangle$$

für alle $g \in (\ker V)^\perp$ und

$$\langle f, g\rangle = 0 = \langle V^*Vf, g\rangle$$

für alle $g \in \ker V$. Also ist $V^*Vf = f$. Für beliebiges $h = f_0 + f \in \ker V \oplus (\ker V)^\perp = H$ folgt dann

$$V^*Vh = V^*Vf_0 + V^*Vf = V^*Vf = f.$$

Damit ist V^*V die Orthogonalprojektion auf $(\ker V)^\perp$.
Sei nun V^*V ist eine Orthogonalprojektion auf einen Teilraum $M \subset H$. Es ist $V|_M$ isometrisch, denn für $f \in M$ gilt

$$\|Vf\|^2 = \langle V^*Vf, f\rangle = \|f\|^2.$$

Zeigen wir nun, dass $M = (\ker V)^\perp$ gilt. Für $g \in M^\perp$ gilt

$$\|Vg\|^2 = \langle V^*Vg, g\rangle = 0,$$

so dass $g \in \ker V$ ist. Damit folgt $M^\perp \subset \ker V$. Für $f \in M$ und $g \in \ker V$ gilt außerdem

$$\langle f, g\rangle = \langle Vf, Vg\rangle = 0,$$

so dass $M \subset (\ker V)^\perp$ folgt. Damit ist V eine partielle Isometrie.
Sei nun V eine partielle Isometrie. Wir zeigen, dass V^* eine partielle Isometrie ist. Da $V^*Vf = f$ für alle $f \in (\ker V)^\perp$ gilt, folgt $VV^*g = g$ für alle $g \in V((\ker V)^\perp)$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} V((\ker V)^\perp) &= V((\ker V)^\perp \oplus \ker V) \\ &= VH \\ &= (\ker V^*)^\perp. \end{aligned}$$

Somit ist VV^* Orthogonalprojektion auf $(\ker V^*)^\perp$, also ist V^* partielle Isometrie. □

Der nächste Satz liefert die Grundlage für unsere Verallgemeinerung des Satzes von Beurling.

Satz 2.3.6. *Sei $T \in \mathcal{L}(H)^n$ eine reine vertauschende Zeilenkontraktion und $\mathcal{S} \subset H$ beliebig. Dann ist $\mathcal{S} \in \mathrm{Lat}(T)$ genau dann, wenn ein Hilbertraum $\mathcal{E}$ und eine partielle Isometrie $\pi : \mathscr{H}(\mathbb{B}, \mathcal{E}) \to H$ existieren mit $T_i\pi = \pi M_{z_i}$ für $i = 1, ..., n$ und $\mathcal{S} = \mathrm{Im}\,\pi$.*

Beweis. Falls $\mathcal{E}$ und π wie in der Aussage existieren, gibt es für jedes $x \in \mathcal{S}$ ein $f \in \mathscr{H}(\mathbb{B}, \mathcal{E})$ mit $\pi(f) = x$. Dann folgt für $i = 1, ..., n$

$$T_i x = T_i\pi(f) = \pi(M_{z_i}(f)) \in \mathrm{Im}\,\pi = \mathcal{S}.$$

Außerdem ist $\mathcal{S} \subset H$ als Bild einer partiellen Isometrie ein abgeschlossener Teilraum.
Sei nun $\mathcal{S} \in \mathrm{Lat}(T)$. Da T eine Zeilenkontraktion ist, ist die Abbildung

$$\varphi\colon H^n \to H, \ \ (x_i)_{i=1}^n \mapsto \sum_{i=1}^n T_i x_i$$

nach Satz 1.3.2 kontraktiv und somit auch die Abbildung

$$\varphi|_{\mathcal{S}^n} : \mathcal{S}^n \to H, \ \ (x_i)_{i=1}^n \mapsto \sum_{i=1}^n T_i x_i,$$

wobei $\varphi|_{\mathcal{S}^n}(\mathcal{S}^n) \subset \mathcal{S}$ gilt wegen $\mathcal{S} \in \mathrm{Lat}(T)$. Damit ist $T|_{\mathcal{S}} = (T_1|_{\mathcal{S}}, ..., T_n|_{\mathcal{S}}) \in \mathcal{L}(\mathcal{S})^n$ eine Zeilenkontraktion.
Zeigen wir nun, dass $T|_{\mathcal{S}}$ rein ist. Für $x, y \in \mathcal{S}$ gilt

$$\begin{aligned}\langle P_{\mathcal{S}} T^{*\alpha}|_{\mathcal{S}} x, y\rangle &= \langle T^{*\alpha} x, y\rangle \\ &= \langle x, T^{\alpha} y\rangle \\ &= \langle (T|_{\mathcal{S}})^{*\alpha} x, y\rangle,\end{aligned}$$

also $P_{\mathcal{S}} T^{*\alpha}|_{\mathcal{S}} = (T|_{\mathcal{S}})^{*\alpha}$. Damit gilt

$$\begin{aligned}\langle \sigma_T^k(\mathrm{id}_H)x, x\rangle &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|=k} \gamma_\alpha \langle T^\alpha T^{*\alpha} x, x\rangle \\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|=k} \gamma_\alpha \langle T^{*\alpha} x, T^{*\alpha} x\rangle \\ &\geq \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|=k} \gamma_\alpha \langle P_{\mathcal{S}} T^{*\alpha} x, P_{\mathcal{S}} T^{*\alpha} x\rangle \\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|=k} \gamma_\alpha \langle T^\alpha P_{\mathcal{S}} T^{*\alpha} x, x\rangle \\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|=k} \gamma_\alpha \langle (T|_{\mathcal{S}})^{\alpha} (T|_{\mathcal{S}})^{*\alpha} x, x\rangle \\ &= \langle \sigma_{T|_{\mathcal{S}}}^k(\mathrm{id}_{\mathcal{S}})x, x\rangle.\end{aligned}$$

Da T rein ist, folgt wegen

$$\langle \sigma_T^k(\mathrm{id}_H)x, x\rangle \longrightarrow 0$$

für $k \to \infty$ auch, dass $T|_{\mathcal{S}}$ rein ist.
Wir wählen nun $\mathcal{E} = \mathcal{D}_{T|_{\mathcal{S}}}$ wie in Formel (2.3) bei der Definition des Defektoperators. Für die gesuchte partielle Isometrie $\pi : \mathscr{H}(\mathbb{B}, \mathcal{E}) \to H$ wählen wir $\pi = i \circ (\pi_{T|_{\mathcal{S}}})^*$ mit der Inklusionsabbildung $i\colon \mathcal{S} \to H$ und $\pi_{T|_{\mathcal{S}}}$ aus Satz 2.1.4. Nach Satz 2.1.4 gilt dann $T_i\pi = \pi M_{z_i}$ für $i = 1, ..., n$. Da $T|_{\mathcal{S}}$ rein ist, ist $\pi_{T|_{\mathcal{S}}}$ eine Isometrie. Damit ist $(\pi_{T|_{\mathcal{S}}})^*$ surjektiv und es folgt $\mathrm{Im}\,\pi = \mathcal{S}$. $\square$

Im nächsten Satz (vgl. [7], Proposition 1.7.9) geben wir äquivalente Bedingungen dafür, dass ein Operator $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ zwischen funktionalen Hilberträumen H_1, H_2 ein Multiplikationsoperator ist.

Satz 2.3.7. *Seien $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ Hilberträume, $H_1 \subset \mathcal{E}_1^X, H_2 \subset \mathcal{E}_2^X$ funktionale Hilberträume über einer beliebigen Menge X und $\delta_{1,z}\colon H_1 \to \mathcal{E}_1, \delta_{2,z}\colon H_2 \to \mathcal{E}_2$ die Punktauswertungen in $z \in X$. Zudem sei $\delta_{1,z}$ surjektiv für alle $z \in X$. Dann sind für einen Operator $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ äquivalent:*

(i) Für $f \in H_1$ und $z \in X$ mit $f(z) = 0$ gilt $(Tf)(z) = 0$,

(ii) für jedes $z \in X$ gilt $T^*\left(\operatorname{Im} \delta_{2,z}^*\right) \subset \operatorname{Im} \delta_{1,z}^*$,

(iii) T ist ein Multiplikationsoperator, d.h. es existiert eine Funktion $\theta : X \to \mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ mit $Tf = \theta f$ für alle $f \in H_1$.

Beweis. Für $f \in H_1$ und $z \in X$ mit $f(z) = 0$ gelte $(Tf)(z) = 0$, also

$$T \ker \delta_{1,z} \subset \ker \delta_{2,z}.$$

Da $\delta_{1,z}$ surjektiv ist, ist $\operatorname{Im} \delta_{1,z}$ abgeschlossen und damit auch $\operatorname{Im} \delta_{1,z}^*$. Also gilt

$$\operatorname{Im} \delta_{1,z}^* = (\ker \delta_{1,z})^{\perp}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} T^*\left(\operatorname{Im} \delta_{2,z}^*\right) &\subset T^*\left((\ker \delta_{2,z})^{\perp}\right) \\ &\subset (\ker \delta_{1,z})^{\perp} \\ &= \operatorname{Im} \delta_{1,z}^*. \end{aligned}$$

Es gelte nun (ii). Da $\delta_{1,z}$ für $z \in X$ surjektiv ist, existiert eine Rechtsinverse $i_{1,z} \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_1, H_1)$ für $\delta_{1,z}$. Wir definieren nun die Abbildung

$$\theta\colon X \to \mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2),\ z \mapsto \delta_{2,z} T i_{1,z}.$$

Seien nun $f \in H_1, z \in X$ und $y \in \mathcal{E}_2$. Nach Voraussetzung existiert ein $x \in \mathcal{E}_1$ mit $T^*\delta_{2,z}^* y = \delta_{1,z}^* x$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \langle \theta(z) f(z), y \rangle &= \langle i_{1,z} f(z), T^* \delta_{2,z}^* y \rangle \\ &= \langle i_{1,z} f(z), \delta_{1,z}^* x \rangle \\ &= \langle f(z), x \rangle \\ &= \langle f, \delta_{1,z}^* x \rangle \\ &= \langle f, T^* \delta_{2,z}^* y \rangle \\ &= \langle (Tf)(z), y \rangle. \end{aligned}$$

Es gilt also $Tf = \theta f$ für alle $f \in H_1$.
Die Implikation von (iii) nach (i) ist trivial. □

Seien $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen und $\mathcal{D}, \mathcal{E}$ Hilberträume. Eine Abbildung $f\colon \Omega \to \mathcal{D}$ heißt holomorph, falls f stetig ist und für jedes $a \in \Omega$ die Grenzwerte

$$\partial_j f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + he_j) - f(a)}{h}$$

für $j = 1, ..., n$ in $\mathcal{D}$ existieren. Für eine Funktion $g\colon \Omega \to \mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ kann man mit dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit zeigen, dass g genau dann holomorph ist, wenn für jedes $x \in \mathcal{D}$ die Funktion

$$\Omega \to \mathcal{E}, \ z \mapsto g(z)(x)$$

als $\mathcal{E}$-wertige Funktion holomorph ist.

Satz 2.3.8. *Seien $\mathcal{D}, \mathcal{E}$ Hilberträume und seien $H(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}^\Omega, H(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}^\Omega$ funktionale Hilberträume über einer Menge $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ so, dass gilt*

(i) $M_z \in \mathcal{L}\left(H(\mathcal{D})\right)^n, M_z \in \mathcal{L}\left(H(\mathcal{E})\right)^n$,

(ii) $\delta_\lambda\colon H(\mathcal{D}) \to \mathcal{D}$ *ist surjektiv für alle* $\lambda \in \Omega$,

(iii) $\ker \delta_\lambda = \overline{\sum_{i=1}^{n} (z_i - \lambda_i) H(\mathcal{D})}$ *für alle* $\lambda \in \Omega$.

Dann gibt es für jeden stetigen linearen Operator $\pi\colon H(\mathcal{D}) \to H(\mathcal{E})$ mit $\pi M_{z_i} = M_{z_i}\pi$ für $i = 1, ..., n$ eine eindeutige Abbildung $\theta\colon \Omega \to \mathcal{L}\left(\mathcal{D}, \mathcal{E}\right)$ mit

$$\pi f = \theta f$$

für alle $f \in H(\mathcal{D})$.
Ist $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen, $\mathcal{D} \subset H(\mathcal{D})$ und $H(\mathcal{E}) \subset \mathcal{O}\left(\Omega, \mathcal{E}\right)$, so ist $\theta\colon \Omega \to \mathcal{L}\left(\mathcal{D}, \mathcal{E}\right)$ holomorph.

Beweis. Sei $f \in H(\mathcal{D})$ und $\lambda \in \Omega$ mit $f(\lambda) = 0$. Wegen (iii) existieren dann Funktionen $f_j = \sum_{i=1}^{n} (z_i - \lambda_i) f_{ji} \in \sum_{i=1}^{n} (z_i - \lambda_i) H(\mathcal{D}), j \in \mathbb{N}, f_{ji} \in H(\mathcal{D})$ mit $f_j \to f$ in $H(\mathcal{D})$ für $j \to \infty$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
(\pi f)(\lambda) &= \lim_{j \to \infty} (\pi f_j)(\lambda) \\
&= \lim_{j \to \infty} \left(\pi \sum_{i=1}^{n} (z_i - \lambda_i) f_{ji} \right)(\lambda) \\
&= \lim_{j \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} (z_i - \lambda_i) \pi f_{ji} \right)(\lambda) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Mit $\mathcal{E}_1 = \mathcal{D}, \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}, X = \Omega, H_1 = H(\mathcal{D})$ und $H_2 = H(\mathcal{E})$ liefert Satz 2.3.7 dann die Existenz einer Funktion $\theta\colon \Omega \to \mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ mit $\pi f = \theta f$ für alle $f \in H(\mathcal{D})$.
Falls $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen, $\mathcal{D} \subset H(\mathcal{D})$ und $H(\mathcal{E}) \subset \mathcal{O}\left(\Omega, \mathcal{E}\right)$ ist, ist

$$\theta(z)(x) = (\theta x)(z) = (\pi x)(z)$$

für alle $x \in \mathcal{D}$ holomorph in $z \in \Omega$. Also ist wegen $\pi x \in H(\mathcal{E})$ die Abbildung $\theta\colon \Omega \to \mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ holomorph. $\square$

Korollar 2.3.9. *Seien $\mathcal{D}, \mathcal{E}$ Hilberträume und sei $H(\mathcal{E}) \subset \mathcal{O}(\mathbb{B}, \mathcal{E})$ ein funktionaler Hilbertraum aus analytischen Funktionen so, dass $M_z \in \mathcal{L}(H(\mathcal{E}))^n$ wohldefiniert ist. Zu jedem Operator $\pi \in \mathcal{L}\left(\mathcal{H}_n^2(\mathbb{B}, \mathcal{D}), H(\mathcal{E})\right)$ mit $\pi M_{z_i} = M_{z_i}\pi$ existiert eine analytische Funktion $\theta\colon \mathbb{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ mit*

$$(\pi f)(z) = \theta(z) f(z)$$

für alle $f \in \mathcal{H}_n^2(\mathbb{B}, \mathcal{D})$ und $z \in \mathbb{B}$.

Beweis. Wir zeigen, dass die Bedingungen (ii) und (iii) in Satz 2.3.8 für $\mathcal{D}$ erfüllt sind, wenn $\overline{\mathcal{D}[z]} = H(\mathcal{D})$ gilt, wobei

$$\mathcal{D}[z] = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha z^\alpha \colon N \in \mathbb{N}, a_\alpha \in \mathcal{D} \text{ für alle } |\alpha| \leq N \right\}$$

die Menge der $\mathcal{D}$-wertigen Polynome in $z_1, ..., z_n$ sei. Der Drury-Arveson Raum $\mathcal{H}(\mathbb{B}, \mathcal{D})$ erfüllt diese Bedingung, denn für $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \in \mathcal{H}(\mathbb{B}, \mathcal{D})$ konvergiert die Reihe $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$ in $\mathcal{H}(\mathbb{B}, \mathcal{D})$ gegen f.

Es gelte also $\overline{\mathcal{D}[z]} = H(\mathcal{D})$. Dann gibt es zu jedem $f \in H(\mathcal{D})$ und $\lambda \in \Omega$ mit $f(\lambda) = 0$ eine Folge $(\widetilde{p}_k)$ in $\mathcal{D}[z]$ mit $\widetilde{p}_k \to f$ für $k \to \infty$. Wir definieren $p_k = \widetilde{p}_k - \widetilde{p}_k(\lambda)$. Da nach dem Graphensatz die Inklusionsabbildung $\mathcal{D} \to H(\mathcal{D})$ stetig ist, folgt $p_k \to f$ für $k \to \infty$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt außerdem $p_k(\lambda) = 0$ und daher

$$p_k \in \sum_{i=1}^{n} (z_i - \lambda_i)\mathcal{D}[z] \subset \sum_{i=1}^{n} (z_i - \lambda_i) H(\mathcal{D}),$$

sodass

$$f = \lim_{k \to \infty} p_k \in \overline{\sum_{i=1}^{n} (z_i - \lambda_i) H(\mathcal{D})}$$

folgt. Die Bedingung (ii) gilt, da $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}[z] \subset H(\mathcal{D})$ ist. □

Wir formulieren nun eine Version des Satzes von Beurling für Zeilenkontraktionen.

Korollar 2.3.10. *Sei $\mathcal{E}$ ein Hilbertraum und $H(\mathcal{E}) \subset \mathcal{O}(\mathbb{B}, \mathcal{E})$ ein funktionaler Hilbertraum aus analytischen Funktionen so, dass $M_z \in \mathcal{L}(H(\mathcal{E}))^n$ eine Zeilenkontraktion ist. Sei $\mathcal{S} \subset H(\mathcal{E})$. Dann ist $\mathcal{S}$ genau dann ein abgeschlossener invarianter Teilraum für $M_z \in \mathcal{L}(H(\mathcal{E}))^n$, wenn ein Hilbertraum $\mathcal{D}$ und eine analytische Funktion $\theta : \mathbb{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ existieren so, dass*

$$M_\theta \colon \mathscr{H}(\mathbb{B}, \mathcal{D}) \to H(\mathcal{E}), \; f \mapsto \theta f$$

eine partielle Isometrie ist mit $\operatorname{Im} M_\theta = S$.

Beweis. Da die Zeilenkontraktion $M_z \in \mathcal{L}(H(\mathcal{E}))^n$ nach Satz 2.1.7 rein ist, erhalten wir mit Satz 2.3.6, dass $\mathcal{S}$ genau dann invariant für M_z ist, wenn ein Hilbertraum $\mathcal{D}$ und eine partielle Isometrie $\pi : \mathscr{H}(\mathbb{B}, \mathcal{D}) \to H(\mathcal{E})$ existieren mit $M_{z_i}\pi = \pi M_{z_i}$ für $i = 1, ..., n$ und $\mathcal{S} = \operatorname{Im} \pi$. Damit folgt die Aussage aus Korollar 2.3.9. □

3 Der Satz von Beurling für m-Hyperkontraktionen

3.1 m-Hyperkontraktionen

Wir wollen die Ergebnisse über den Drury-Arveson Raum aus Kapitel 2 nun auf funktionale Hilberträume mit reproduzierendem Kern

$$K_m \colon \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathcal{L}(H),\ (z,w) \mapsto \frac{\mathrm{id}_H}{(1-\langle z,w\rangle)^m}$$

für $m \in \mathbb{N}^*$ verallgemeinern. Wir gehen zunächst vor wie in [21]. Sei dazu im Folgenden $T \in \mathcal{L}(H)^n$ ein vertauschendes Operatortupel auf einem Hilbertraum H. Mit Hilfe der Abbildung

$$\sigma_T \colon \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H),\ X \mapsto \sum_{i=1}^n T_i X T_i^*$$

aus Kapitel 2.1 definieren wir Defektoperatoren höherer Ordnung.

Definition 3.1.1. *Für $m \in \mathbb{N}$ definieren wir den Operator*

$$\Delta_T^{(m)} = \Big(\mathrm{id}_{\mathcal{L}(H)} - \sigma_T\Big)^m (\mathrm{id}_H).$$

Bemerkung 3.1.2. (a) Für den Operator $\Delta_T^{(1)}$ gilt $\Delta_T^{(1)} = D_T^2$ mit dem Defektoperator D_T aus Formel (2.3).

(b) Sei $m \in \mathbb{N}^*$. Es gilt

$$\Delta_T^{(m)} = \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} \sigma_T^j(\mathrm{id}_H)$$

und mit Lemma 2.1.2 erhalten wir

$$\Delta_T^{(m)} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} \frac{m!}{\alpha!(m-|\alpha|)!} T^\alpha T^{*\alpha}.$$

Lemma 3.1.3. *Es gilt genau dann $\Delta_T^{(1)} \ge 0$, wenn σ_T eine Kontraktion ist.*

Beweis. Es gelte $\Delta_T^{(1)} \ge 0$, d.h. $T_1T_1^* + ... + T_nT_n^* \le \mathrm{id}_H$. Dann gilt für $X \in \mathcal{L}(H)$ und

$x, y \in H$

$$\begin{aligned}
|\langle \sigma_T(X)x, y\rangle| &= \left|\sum_{i=1}^n \langle XT_i^* x, T_i^* y\rangle\right| \\
&\leq \|X\| \sum_{i=1}^n \|T_i^* x\| \, \|T_i^* y\| \\
&\leq \|X\| \left(\sum_{i=1}^n \|T_i^* x\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \|T_i^* y\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|X\| \, \|x\| \, \|y\| \, ,
\end{aligned}$$

denn nach Satz 1.3.2 gilt

$$\sum_{i=1}^n \|T_i^* z\|^2 \leq \|z\|^2$$

für jedes $z \in H$. Also ist $\|\sigma_T\| \leq 1$.
Ist σ_T eine Kontraktion, so ist $\|\sigma_T(\mathrm{id}_H)\| = \|T_1T_1^* + ... + T_nT_n^*\| \leq 1$, also $T_1T_1^* + ... + T_nT_n^* \leq \mathrm{id}_H$. □

Lemma 3.1.4. *Für $m \in \mathbb{N}^*$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) Es gelten $\sup_{s \in \mathbb{N}} \|\sigma_T^s(\mathrm{id}_H)\| < \infty$ und $\Delta_T^{(m)} \geq 0$.

(b) Es gelten $\Delta_T^{(1)} \geq 0$ und $\Delta_T^{(m)} \geq 0$.

(c) Es gilt $\Delta_T^{(k)} \geq 0$ für $k = 1, ..., m$.

*In diesem Fall nennen wir das Tupel T m-*Hyperkontraktion*.*

Beweis. Die Implikation von (c) nach (b) ist trivial und mit Lemma 3.1.3 erhalten wir die Implikation von (b) nach (a).
Es gelte nun Aussage (a). Für $m = 1$ ist die Aussage klar. Sei $x \in H$ und $m \geq 2$. Für $s \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$a_s = \langle \sigma_T^s \left(\Delta_T^{(m-1)}\right) x, x\rangle.$$

Dann gilt für $s \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
a_s - a_{s+1} &= \langle \sigma_T^s \left(\mathrm{id}_{\mathcal{L}(H)} - \sigma_T\right) \left(\Delta_T^{(m-1)}\right) x, x\rangle \\
&= \langle \sigma_T^s \left(\Delta_T^{(m)}\right) x, x\rangle \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

wegen Lemma 2.1.1. Also ist $(a_s)_{s \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge reeller Zahlen. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt außerdem

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{s=0}^{N} a_s\right| &= \left|\sum_{s=0}^{N} \langle (\mathrm{id}_{\mathcal{L}(H)} - \sigma_T)\sigma_T^s \left(\Delta_T^{(m-2)}\right) x, x\rangle\right| \\
&= \left|\sum_{s=0}^{N} \langle \left(\sigma_T^s \left(\Delta_T^{(m-2)}\right) - \sigma_T^{s+1}\left(\Delta_T^{(m-2)}\right)\right) x, x\rangle\right| \\
&= \left|\langle \left(\mathrm{id}_{\mathcal{L}(H)} - \sigma_T^{(N+1)}\right)\left(\Delta_T^{(m-2)}\right) x, x\rangle\right| \\
&= \left|\langle \left(\mathrm{id}_{\mathcal{L}(H)} - \sigma_T^{(N+1)}\right)\left((\mathrm{id}_{\mathcal{L}(H)} - \sigma_T)^{m-2}(\mathrm{id}_H)\right) x, x\rangle\right| \\
&\leq \left(1 + \sup_{s\in\mathbb{N}} \|\sigma_T^s(\mathrm{id}_H)\|\right) \left\|\left(\mathrm{id}_{\mathcal{L}(H)} - \sigma_T\right)^{m-2}\right\| \|x\|^2 .
\end{aligned}$$

Wäre $a_{s_0} < 0$ für ein $s_0 \in \mathbb{N}$, so würde

$$\sum_{s=s_0+1}^{s_0+k} \leq k a_{s_0} \longrightarrow -\infty$$

für $k \to \infty$ folgen im Widerspruch zur Beschränktheit der Partialsummenfolge von $\sum_{s=0}^{\infty} a_s$. Also gilt $a_s \geq 0$ für jedes $s \in \mathbb{N}$. Insbesondere gilt $a_0 = \langle \Delta_T^{(m-1)} x, x\rangle \geq 0$ und daher $\Delta_T^{(m-1)} \geq 0$. Induktiv folgt nun $\Delta_T^{(k)} \geq 0$ für alle $k \leq m-1$. □

Bemerkung 3.1.5. Bei der üblichen Definition vom m-Hyperkontraktionen verlangt man (zumindest im Fall $n = 1$), dass $\Delta_{T*}^{(1)} \geq 0$ und $\Delta_{T^*}^{(m)} \geq 0$ gilt. In [13] nennen Chavan und Kumari Tupel, die die Bedingungen aus Lemma 3.1.4 erfüllen, daher Zeilen-m-Hyperkontraktionen. Der Einfachheit halber werden wir von m-Hyperkontraktionen sprechen.

Korollar 3.1.6. *Sei $m \in \mathbb{N}^*$. Ist T eine m-Hyperkontraktion, dann gilt*

$$0 \leq \Delta_T^{(m)} \leq \Delta_T^{(m-1)} \leq ... \leq \Delta_T^{(1)} \leq \mathrm{id}_{\mathcal{L}(H)} .$$

Beweis. Für $k = 1, 2, ..., m-1$ gilt

$$\begin{aligned}
\Delta_T^{(k)} - \Delta_T^{(k+1)} &= (\mathrm{id}_{\mathcal{L}(H)} - \sigma_T)^k(\mathrm{id}_H) - (\mathrm{id}_{\mathcal{L}(H)} - \sigma_T)^{k+1}(\mathrm{id}_H) \\
&= \sigma_T(\mathrm{id}_{\mathcal{L}(H)} - \sigma_T)^k(\mathrm{id}_H) \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

denn es ist $(\mathrm{id}_{\mathcal{L}(H)} - \sigma_T)^k(\mathrm{id}_H) = \Delta_T^{(k)} \geq 0$ nach Lemma 3.1.4. □

Lemma 3.1.7. *Für $m \in \mathbb{N}^*$ und $N \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{s=0}^{N} \binom{s+m-1}{m-1} \sigma_T^s \left(\Delta_T^{(m)}\right) = \mathrm{id}_H - \sum_{j=0}^{m-1} \binom{N+j}{j} \sigma_T^{N+1}\left(\Delta_T^{(j)}\right).$$

Beweis. Sei $N \in \mathbb{N}$. Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach m. Ist $m = 1$, so gilt

$$\sum_{s=0}^{N} \sigma_T^s \Delta_T^{(1)} = \sum_{s=0}^{N} \sigma_T^s(\mathrm{id}_{\mathcal{L}(H)} - \sigma_T)(\mathrm{id}_H) = \left(\mathrm{id}_{\mathcal{L}(H)} - \sigma_T^{N+1}\right)(\mathrm{id}_H).$$

Die Aussage gelte nun für $m-1 \in \mathbb{N}^*$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=0}^{N} \binom{s+m-1}{m-1} \sigma_T^s \left(\Delta_T^{(m)}\right) \\
=\ & \sum_{s=0}^{N} \binom{s+m-1}{m-1} (\mathrm{id}_{\mathcal{L}(H)} - \sigma_T) \sigma_T^s \left(\Delta_T^{(m-1)}\right) \\
=\ & \Delta_T^{(m-1)} + \sum_{s=1}^{N} \left(\binom{s+m-1}{m-1} - \binom{s+m-2}{m-1} \right) \sigma_T^s \left(\Delta_T^{(m-1)}\right) \\
& - \binom{N+m-1}{m-1} \sigma_T^{N+1} \left(\Delta_T^{(m-1)}\right) \\
=\ & \sum_{s=0}^{N} \binom{s+m-2}{m-2} \sigma_T^s \left(\Delta_T^{(m-1)}\right) - \binom{N+m-1}{m-1} \sigma_T^{N+1} \left(\Delta_T^{(m-1)}\right) \\
=\ & \mathrm{id}_H - \sum_{j=0}^{m-1} \binom{N+j}{j} \sigma_T^{N+1} \left(\Delta_T^{(j)}\right)
\end{aligned}$$

nach Induktionsvoraussetzung. $\square$

Lemma 3.1.8. *Ist $T \in \mathcal{L}(H)^n$ eine m-Hyperkontraktion für ein $m \in \mathbb{N}^*$ und $x \in H$, dann gelten*

(a) Der Grenzwert $\lim_{N\to\infty} N^k \langle \sigma_T^N \left(\Delta_T^{(k)}\right) x, x\rangle$ existiert für alle $k = 0, ..., m-1$ und es gilt $\lim_{N\to\infty} N^k \langle \sigma_T^N \left(\Delta_T^{(k)}\right) x, x\rangle = 0$ für $1 \leq k \leq \max\{1, m-1\}$.

(b) Es gilt $\sum_{s=0}^{\infty} s^{k-1} \langle \sigma_T^s \left(\Delta_T^{(k)}\right) x, x\rangle < \infty$ für $k = 1, ..., m$.

Beweis. Wir beweisen die Aussagen gleichzeitig per Induktion nach k.
Wegen $\Delta_T^{(1)} \geq 0$ und $\sigma_T^N \left(\Delta_T^{(1)}\right) \geq 0$ für alle $N \in \mathbb{N}$, gilt

$$\langle \sigma_T^N(\mathrm{id}_H)x, x\rangle - \langle \sigma_T^{N+1}(\mathrm{id}_H)x, x\rangle = \langle \sigma_T^N \left(\Delta_T^{(1)}\right) x, x\rangle \geq 0.$$

Damit ist $\left(\langle \sigma_T^N(\mathrm{id}_H)x, x\rangle\right)_{N\geq 1}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer Zahlen, sodass der Grenzwert

$$\lim_{N\to\infty} \langle \sigma_T^N(\mathrm{id}_H)x, x\rangle$$

existiert. Damit gilt (a) für $k = 0$.
Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{s=0}^{\infty} \langle \sigma_T^s \left(\Delta_T^{(1)}\right) x, x\rangle &= \lim_{N\to\infty} \sum_{s=0}^{N} \langle (\mathrm{id}_{\mathcal{L}(H)} - \sigma_T) \sigma_T^s (\mathrm{id}_H)x, x\rangle \\
&= \lim_{N\to\infty} \langle (\mathrm{id}_{\mathcal{L}(H)} - \sigma_T^{N+1})(\mathrm{id}_H)x, x\rangle \\
&= \|x\|^2 - \lim_{N\to\infty} \langle \sigma_T^{N+1}(\mathrm{id}_H)x, x\rangle \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

daher gilt (b) für $k = 1$.
Wir nehmen nun an, dass (b) für ein $1 \leq k \leq \max\{1, m-1\}$ gilt und (a) für $k-1$ und zeigen (a) für k. Setzen wir $a_s = \langle \sigma_T^s \left(\Delta_T^{(k)} \right) x, x \rangle$, so ist $a_s \geq 0$ und

$$a_s - a_{s+1} = \langle \sigma_T^s \left(\Delta_T^{(k+1)} \right) x, x \rangle \geq 0$$

für alle $s \in \mathbb{N}$, denn Lemma 3.1.4 liefert $\Delta_T^{(k)} \geq 0$ und $\Delta_T^{(k+1)} \geq 0$. Daher ist $(a_s)_{s \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer Zahlen, die nach Induktionsvoraussetzung

$$\sum_{s=0}^{\infty} s^{k-1} a_s < \infty$$

erfüllt. Damit gilt

$$\lim_{s \to \infty} s \cdot s^{k-1} a_s = 0$$

(siehe Sublemma auf Seite 799 in [14]), d.h. Aussage (a) ist gezeigt für k.
Es gelte nun (a) für ein $1 \leq k \leq \max\{1, m-1\}$ und (b) für k. Wir zeigen, dass (b) für $k+1$ gilt. Es ist

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=0}^{\infty} s^k \langle \sigma_T^s \left(\Delta_T^{(k+1)} \right) x, x \rangle \\
&= \lim_{N \to \infty} \sum_{s=0}^{N} s^k \langle (1 - \sigma_T) \sigma_T^s \left(\Delta_T^{(k)} \right) x, x \rangle \\
&= \lim_{N \to \infty} \sum_{s=1}^{N} (s^k - (s-1)^k) \langle \sigma_T^s \left(\Delta_T^{(k)} \right) x, x \rangle - N^k \langle \sigma_T^{N+1} \left(\Delta_T^{(k)} \right) x, x \rangle.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\lim_{N \to \infty} N^k \langle \sigma_T^{N+1} \left(\Delta_T^{(k)} \right) x, x \rangle = 0$$

nach Induktionsvoraussetzung und $s^k - (s-1)^k \leq k s^{k-1}$ folgt

$$\sum_{s=0}^{\infty} s^k \langle \sigma_T^s \left(\Delta_T^{(k+1)} \right) x, x \rangle < \infty,$$

also gilt (b) für k. □

Für $m \in \mathbb{N}^*$ definieren wir die Funktion

$$\rho_m \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}, \ \alpha \mapsto \frac{(m + |\alpha| - 1)!}{\alpha!(m-1)!}.$$

Lemma 3.1.9. *Für $\alpha \neq 0$ erfüllen die Zahlen $\rho_m(\alpha)$, $m \in \mathbb{N}^*$, die Gleichung*

$$\sum_{\beta \leq \alpha, |\beta| \leq m} (-1)^{|\beta|} \frac{m!}{\beta!(m - |\beta|!)} \rho_m(\alpha - \beta) = 0.$$

Beweis. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| < 1$ kennen wir die Reihenentwicklung

$$(1-\lambda)^{-m} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k} \lambda^k.$$

Für $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$ mit $\sum_{j=1}^{n} |z_j| < 1$ folgt daher

$$\left(1 - \sum_{j=1}^{n} z_j\right)^{-m} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k} \sum_{|\gamma|=k} \frac{k!}{\gamma!} z^\gamma = \sum_{\gamma \geq 0} \rho_m(\gamma) z^\gamma.$$

Außerdem gilt

$$\left(1 - \sum_{j=1}^{n} z_j\right)^{m} = \sum_{|\beta| \leq m} (-1)^{|\beta|} \frac{m!}{\beta!(m-|\beta|)!} z^\beta. \tag{3.1}$$

Bei Multiplikation der letzten beiden Gleichungen ergibt sich

$$1 = \sum_{\gamma \geq 0} \sum_{|\beta| \leq m} (-1)^{|\beta|} \frac{m!}{\beta!(m-|\beta|)!} \rho_m(\gamma) z^{\gamma+\beta}.$$

Da auch die iterierte Reihe über die Absolutbeträge der Summanden konvergiert und wegen

$$\mathbb{N}^n \times \{\beta \in \mathbb{N}^n \colon |\beta| \leq m\} = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \{(\alpha - \beta, \beta) \colon \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \text{ mit } 0 \leq \beta \leq \alpha \text{ und } |\beta| \leq m\}$$

mit einer disjunkten Vereinigung auf der rechten Seite, gilt für $z \in \mathbb{C}^n$ mit $\sum_{j=1}^{n} |z_j| < 1$

$$1 = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \left(\sum_{0 \leq \beta \leq \alpha, |\beta| \leq m} (-1)^{|\beta|} \frac{m!}{\beta!(m-|\beta|)!} \rho_m(\alpha - \beta) \right) z^\alpha.$$

Bei Betrachtung der Summanden mit $\alpha \neq 0$ erhält man die gewünschte Formel. $\square$

Wir betrachten nun für $m \in \mathbb{N}^*$ den funktionalen Hilbertraum

$$\mathscr{H}_m(\mathbb{B}, H) = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \;\middle|\; a_\alpha \in H, \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\|a_\alpha\|^2}{\rho_m(\alpha)} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$\left\langle \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha, \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} b_\alpha z^\alpha \right\rangle_{\mathscr{H}_m(\mathbb{B},H)} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\langle a_\alpha, b_\alpha \rangle_H}{\rho_m(\alpha)}$$

und reproduzierendem Kern

$$K_m \colon \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to H,\ (z,w) \mapsto \frac{\mathrm{id}_H}{(1 - \langle z, w \rangle)^m}$$

(siehe Kapitel 1 in [24]). Für $m = 1$ ist $\rho_m(\alpha) = \gamma_\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{N}^n$ und wir sind im Fall des Drury-Arveson Raums $\mathscr{H}_1(\mathbb{B}, H) = \mathscr{H}(\mathbb{B}, H)$.
Analog zu Definition 1.3.5 definieren wir auf $\mathscr{H}_m(\mathbb{B}, H)$ den Rechtsshift

$$M_z^{(m)} = (M_{z_1}^{(m)}, ..., M_{z_n}^{(m)}) \in \mathcal{L}(\mathscr{H}_m(\mathbb{B}, H))^n$$

durch

$$M_{z_i}^{(m)} f = z_i \cdot f,$$

bzw.

$$M_{z_i}^{(m)} \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \right) = \sum_{\alpha \geq e_i} a_{\alpha - e_i} z^\alpha \tag{3.2}$$

für $i = 1, .., n$. Die Wohldefiniertheit folgt dabei wie im Beweis von 1.3.4. Den adjungierten Operator

$$M_z^{(m)^*} = (M_{z_1}^{(m)^*}, ..., M_{z_n}^{(m)^*})$$

erhalten wir analog zu Lemma 1.3.6 (siehe auch Lemma 2.4 in [24]).

Lemma 3.1.10. *Für* $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \in \mathscr{H}_m(\mathbb{B}, H)$ *und* $i = 1, ..., n$ *gilt*

$$M_{z_i}{}^{(m)*} f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\rho_m(\alpha)}{\rho_m(\alpha + e_i)} a_{\alpha + e_i} z^\alpha.$$

Lemma 3.1.11. *Für den Rechtsshift* $M_z^{(m)}$ *gilt*

(a) $\Delta^{(1)}_{M_z^{(m)}} \geq 0$,

(b) $\Delta^{(m)}_{M_z^{(m)}} \geq 0$,

(c) *Es gilt* $\lim_{s \to \infty} \sigma^s_{M_z^{(m)}}(\mathrm{id}_{\mathscr{H}_m(\mathbb{B},H)}) = 0$ *in der starken Operatortopologie.*

Beweis. (a) Für $h \in H$ und $\alpha \in \mathbb{N}^n$ gilt

$$M_z^{(m)^*\beta} h z^\alpha = \begin{cases} \frac{\rho_m(\alpha - \beta)}{\rho_m(\alpha)} h z^{\alpha - \beta}, & \text{falls } \beta \leq \alpha, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und damit

$$M_z^{(m)^\beta} M_z^{(m)^*\beta} h z^\alpha = \begin{cases} \frac{\rho_m(\alpha - \beta)}{\rho_m(\alpha)} h z^{\alpha}, & \text{falls } \beta \leq \alpha, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.3}$$

Mit $\beta = e_j$ für $j = 1, .., n$ folgt damit

$$\begin{aligned} \Delta^{(1)}_{M_z^{(m)}} h z^\alpha &= h z^\alpha - \sum_{1 \leq j \leq n, \alpha_j \neq 0} \frac{\rho_m(\alpha - e_j)}{\rho_m(\alpha)} h z^\alpha \\ &= \left(\mathrm{id} - \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{|\alpha| + m - 1} \right) h z^\alpha \\ &= \frac{m-1}{|\alpha| + m - 1} h z^\alpha \end{aligned}$$

für $m \geq 2$ oder $\alpha \neq 0$ und

$$\Delta_{M_z}^{(1)} h = h$$

für $m = 1$ und $\alpha = 0$. Wir erhalten $\Delta^{(1)}_{M_z^{(m)}} \geq 0$, da der Teilraum

$$\mathrm{LH}\left\{hz^\alpha \colon \alpha \in \mathbb{N}^n, h \in H\right\}$$

dicht in $\mathscr{H}_m(\mathbb{B}, H)$ liegt.

(b) Für $h \in H$ und $\alpha \in \mathbb{N}^n$ gilt nach Formel (3.3) und Lemma 3.1.9 für $\alpha \neq 0$

$$\begin{aligned}
\Delta^{(m)}_{M_z^{(m)}} hz^\alpha &= \sum_{|\beta| \leq m} (-1)^{|\beta|} \frac{m!}{\beta!(m-|\beta|)!} M_z^{(m)\beta} M_z^{(m)*\beta} hz^\alpha \\
&= \sum_{|\beta| \leq m, \beta \leq \alpha} (-1)^{|\beta|} \frac{m!}{\beta!(m-|\beta|)!} \frac{\rho_m(\alpha - \beta)}{\rho_m(\alpha)} hz^\alpha \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Für $\alpha = 0$ gilt $\Delta^{(m)}_{M_z^{(m)}} h = h$, sodass $\Delta^{(m)}_{M_z^{(m)}} \geq 0$ folgt.

(c) Da $M_z^{(m)} \in \mathcal{L}\left(\mathscr{H}_m(\mathbb{B}, H)\right)^n$ eine Zeilenkontraktion ist, folgt die Aussage aus Satz 2.1.7.

□

Sei T nun eine m-Hyperkontraktion für ein $m \in \mathbb{N}^*$ und $\mathcal{E} = \overline{\Delta_T^{(m)\,\frac{1}{2}} H} \subset H$. Wir definieren den Operator $\pi_T^{(m)} \colon H \to \mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E})$ durch

$$\pi_T^{(m)} h = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \rho_m(\alpha) \Delta_T^{(m)\,\frac{1}{2}} T^{*\alpha} hz^\alpha \tag{3.4}$$

für $h \in H$. Wir begründen die Wohldefiniertheit von $\pi_T^{(m)}$ im nächsten Lemma. Ist diese gezeigt, so folgt für $j = 1, ..., n$

$$\pi_T^{(m)} T_j^* h = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \rho_m(\alpha) \Delta_T^{(m)\,\frac{1}{2}} T^{*\alpha + e_j} hz^\alpha$$

und außerdem

$$M_{z_j}^{(m)*} \pi_T^{(m)} h = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\rho_m(\alpha)}{\rho_m(\alpha + e_j)} \rho_m(\alpha + e_j) \Delta_T^{(m)\,\frac{1}{2}} T^{*\alpha + e_j} hz^\alpha.$$

Damit gilt

$$\pi_T^{(m)} T_j^* = M_{z_j}^{(m)*} \pi_T^{(m)}$$

für $j = 1, ..., n$.

Lemma 3.1.12. *Es gilt*

$$\left\|\pi_T^{(m)} h\right\|^2 = \|h\|^2 - \lim_{s \to \infty} \langle \sigma_T^s(\mathrm{id}_H) h, h \rangle$$

für jedes $h \in H$.

Beweis. Wir nehmen $m \geq 2$ an, denn für $m = 1$ folgt die Behauptung aus Satz 2.1.4. Mit Lemma 3.1.7 gilt

$$\begin{aligned}
\left\|\pi_T^{(m)} h\right\|^2 &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \rho_m(\alpha) \langle \Delta_T^{(m)} T^{*\alpha} h, T^{*\alpha} h \rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m-1)!}{k!(m-1)!} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \langle \Delta_T^{(m)} T^{*\alpha} h, T^{*\alpha} h \rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+m-1}{m-1} \langle \sigma_T^k \left(\Delta_T^{(m)}\right) h, h \rangle \\
&= \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} \binom{k+m-1}{m-1} \langle \sigma_T^k \left(\Delta_T^{(m)}\right) h, h \rangle \\
&= \|h\|^2 - \lim_{N \to \infty} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{N+j}{j} \langle \sigma_T^{N+1} \left(\Delta_T^{(j)}\right) h, h \rangle \\
&= \|h\|^2 - \lim_{N \to \infty} \langle \sigma_T^{N+1} \left(\mathrm{id}_H\right) h, h \rangle,
\end{aligned}$$

denn mit Lemma 3.1.8(a) erhalten wir für $j = 1, ..., m-1$

$$\begin{aligned}
\binom{N+j}{j} \langle \sigma_T^{N+1} \left(\Delta_T^{(j)}\right) h, h \rangle &= \frac{N+1}{1} \cdot ... \cdot \frac{N+j}{j} \langle \sigma_T^{N+1} \left(\Delta_T^{(j)}\right) h, h \rangle \\
&\leq (N+1)^j \langle \sigma_T^{N+1} \left(\Delta_T^{(j)}\right) h, h \rangle \\
&\longrightarrow 0
\end{aligned}$$

für $N \to \infty$. □

In Analogie zu Definition 2.1.5 nennen wir eine m-Hyperkontraktion $T \in \mathcal{L}(H)^n$ mit der Eigenschaft

$$\lim_{s \to \infty} \sigma_T^s(\mathrm{id}_H) x = 0$$

für alle $x \in H$ *rein.* Wir haben also in Lemma 3.1.11 gesehen, dass der Rechtsshift eine reine m-Hyperkontraktion ist.

Wir beweisen nun einen Modellsatz für m-Hyperkontraktionen.

Satz 3.1.13. *Sei $m \in \mathbb{N}^*$. Ein vertauschendes Tupel $T \in \mathcal{L}(H)^n$ ist genau dann eine reine m-Hyperkontraktion, wenn T^* unitär äquivalent zu einer Einschränkung von $M_z^{(m)^*}$ auf einen invarianten Unterraum ist.*

Beweis. Sei T zunächst eine reine m-Hyperkontraktion. Dann ist der in Formel (3.4) definierte Operator $\pi_T^{(m)}$ nach Lemma 3.1.12 eine Isometrie und wegen $\pi_T^{(m)} T_j^* = M_{z_j}^{(m)*} \pi_T^{(m)}$ für $j = 1, ..., n$ ist $\pi_T^{(m)} H$ invariant unter $M_z^{(m)*}$.
Sei nun $K \subset \mathscr{H}_m(\mathbb{B}, H)$ ein unter $M_z^{(m)^*}$ invarianter Teilraum. Da offensichtlich jedes zu einer reinen m-Hyperkontraktion unitär äquivalente Tupel wieder eine reine m-Hyperkontraktion ist, reicht es zu zeigen, dass $S = P_K M_z^{(m)}|_K \in \mathcal{L}(K)^n$ eine reine

m-Hyperkontraktion ist. Für $x \in K$ gilt

$$\begin{aligned}\langle \Delta_S^{(k)} x, x\rangle &= \sum_{|\alpha|\le k} (-1)^{|\alpha|} \frac{k!}{\alpha!(k-|\alpha|)!} \langle S^{*\alpha} x, S^{*\alpha} x\rangle \\ &= \langle \Delta^{(k)}_{M_z^{(m)}} x, x\rangle\end{aligned}$$

für $k \in \{1, ..., n\}$. Also ist T nach Lemma 3.1.11 eine m-Hyperkontraktion.
Wegen $S^\alpha = P_K M_z^{(m)\alpha}|_K$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ gilt für $x \in K$

$$\begin{aligned}\lim_{s\to\infty} \|\sigma_S^s(\mathrm{id}_K)x\| &= \lim_{s\to\infty} \left\| P_K \sigma^s_{M_z^{(m)}}(\mathrm{id}_{\mathscr{H}_m(\mathbb{B},H)})x\right\| \\ &\le \lim_{s\to\infty} \left\| \sigma^s_{M_z^{(m)}}(\mathrm{id}_{\mathscr{H}_m(\mathbb{B},H)})x\right\| \\ &= 0\end{aligned}$$

nach Lemma 3.1.11. □

3.2 Der Satz von Beurling für *m*-Hyperkontraktionen

Wir können nun den Satz von Beurling 2.3.6 sowie dessen Korollare auf m-Hyperkontraktionen erweitern.

Satz 3.2.1. *Sei $T \in \mathcal{L}(H)^n$ eine reine m-Hyperkontraktion und $\mathcal{S} \subset H$ beliebig. Dann sind äquivalent:*

(i) Es ist $\mathcal{S} \in \mathrm{Lat}(T)$ und $T|_{\mathcal{S}}$ ist eine m-Hyperkontraktion.

(ii) Es existieren ein Hilbertraum $\mathcal{E}$ und eine partielle Isometrie $\pi : \mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E}) \to H$ mit $T_i\pi = \pi M_{z_i}^{(m)}$ für $i = 1, ..., n$ und $\mathcal{S} = \mathrm{Im}\,\pi$.

Beweis. Die Aussage lässt sich analog zum Beweis von Satz 2.3.6 beweisen. Wir wählen also $\pi = i \circ (\pi_T^{(m)}|_{\mathcal{S}})^*$ mit dem Operator $\pi_T^{(m)}$ aus Formel (3.4). □

Lemma 3.2.2. *Seien $\mathcal{D}, \mathcal{E}$ Hilberträume und sei $H(\mathcal{E}) \subset \mathcal{O}(\mathbb{B}, \mathcal{E})$ ein funktionaler Hilbertraum aus analytischen Funktionen so, dass $M_z \in \mathcal{L}(H(\mathcal{E}))^n$ wohldefiniert ist. Zu jedem Operator $\pi \in \mathcal{L}\left(\mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{D}), H(\mathcal{E})\right)$ mit $\pi M_{z_i}^{(m)} = M_{z_i}\pi$ existiert eine analytische Funktion $\theta \colon \mathbb{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ mit*

$$(\pi f)(z) = \theta(z) f(z)$$

für alle $f \in \mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{D})$ und $z \in \mathbb{B}$.

Beweis. Der Beweis folgt aus dem von Korollar 2.3.9, da mit den dortigen Notationen auch der verallgemeinerte Raum $\mathscr{H}_{(m)}(\mathbb{B}, \mathcal{D})$ die Bedingung $\overline{\mathcal{D}[z]} = H(\mathcal{D})$ erfüllt. □

Korollar 3.2.3. *Sei $\mathcal{E}$ ein Hilbertraum und $\mathcal{S} \subset \mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E})$ ein linearer Teilraum. Dann sind äquivalent:*

(i) Es ist $\mathcal{S} \in \mathrm{Lat}(M_z^{(m)}, \mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E}))$ und $M_z^{(m)}|_{\mathcal{S}}$ ist eine m-Hyperkontraktion.

(ii) Es existieren ein Hilbertraum $\mathcal{D}$ und eine analytische Funktion $\theta\colon \mathbb{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ so, dass

$$M_\theta\colon \mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{D}) \to \mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E})$$

eine partielle Isometrie mit $\operatorname{Im} M_\theta = \mathcal{S}$ *ist.*

Beweis. Nach Satz 3.2.1 ist $\mathcal{S}$ genau dann invariant für $M_z^{(m)}$, wenn ein Hilbertraum $\mathcal{D}$ und eine partielle Isometrie $\pi : \mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{D}) \to H(\mathcal{E})$ existieren mit $M_{z_i}\pi = \pi M_{z_i}^{(m)}$ und $\mathcal{S} = \operatorname{Im}\pi$. Damit folgt die Aussage aus Lemma 3.2.2. □

Bemerkung 3.2.4. Sei $\mathcal{S} \in \operatorname{Lat}(M_z^{(m)}, \mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E}))$ ein invarianter Teilraum für $M_z^{(m)}$. Da $M_z^{(m)}|_{\mathcal{S}}$ eine Zeilenkontraktion ist, ist $M_z^{(m)}|_{\mathcal{S}}$ wegen Lemma 3.1.4 genau dann eine m-Hyperkontraktion, wenn der Operator

$$\begin{aligned}\Delta^{(m)}_{M_z^{(m)}|_{\mathcal{S}}} &= \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} \frac{m!}{\alpha!(m-|\alpha|)!} \left(M_z^{(m)}|_{\mathcal{S}}\right)^{\alpha} \left(M_z^{(m)}|_{\mathcal{S}}\right)^{*\alpha} \\ &= \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} \frac{m!}{\alpha!(m-|\alpha|)!} \left(M_z^{(m)\alpha}|_{\mathcal{S}}\right) P_{\mathcal{S}} \left(M_z^{(m)*\alpha}|_{\mathcal{S}}\right) \\ &\in \mathcal{L}(\mathcal{S})\end{aligned}$$

positiv ist. Da der Raum $\mathcal{S}$ reduzierend ist für den durch

$$\Delta^{(m)}_{\mathcal{S}} = \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} \frac{m!}{\alpha!(m-|\alpha|)!} M_z^{(m)\alpha} P_{\mathcal{S}} M_z^{(m)*\alpha} \in \mathcal{L}\left(\mathscr{H}(\mathbb{B}, \mathcal{E})\right)$$

definierten Operator mit

$$\Delta^{(m)}_{\mathcal{S}}|_{\mathcal{S}} = \Delta^{(m)}_{M_z^{(m)}|_{\mathcal{S}}}$$

und

$$\Delta^{(m)}_{\mathcal{S}}|_{\mathcal{S}^\perp} = 0,$$

ist $M_z^{(m)}|_{\mathcal{S}}$ genau dann eine m-Hyperkontraktion, wenn $\Delta^{(m)}_{\mathcal{S}} \ge 0$ ist.
Diese Bedingung ist nicht automatisch erfüllt. Für

$$\mathcal{S} = \{f \in \mathscr{H}_m(\mathbb{B})\colon f(0) = 0\} = \{1\}^\perp \in \operatorname{Lat}(M_z^{(m)}, \mathscr{H}_m(\mathbb{B}))$$

zeigt Barbian in Example 3.3.3(c) in [7], dass

$$\Delta^{(m)}_{\mathcal{S}} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k P_{E_k}$$

ist mit den Mengen E_k der homogenen Polynome in $z_1, ..., z_n$ vom Grad k und

$$\lambda_k = -\prod_{j=0}^{k-1} \frac{-m+j}{m+j}.$$

Insbesondere ist $\lambda_1 = 1$ und für $m \ge 2$

$$\lambda_2 = -\frac{(-m)(-m+1)}{m(m+1)} = -\frac{m-1}{m+1} < 0.$$

Für $m \geq 2$ ist daher der Operator $\Delta_{\mathcal{S}}^{(m)}$ nicht positiv und $M_z^{(m)}|_{\mathcal{S}}$ keine m-Hyperkontraktion.

Für $m \geq n+1$ ist

$$\mathscr{H}_m(\mathbb{B}) = L_a^2(\mathbb{B}, d\mu_\alpha) = \mathcal{O}(\mathbb{B}) \cap L^2(\mathbb{B}, d\mu_\alpha)$$

mit $\alpha = m - n - 1$ der gewichtete Bergman-Raum bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes

$$d\mu_\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)\pi^n}(1-|z|^2)^\alpha d\lambda = \frac{(m-1)!}{(m-n-1)!\pi^n}(1-|z|^2)^{m-n-1} d\lambda$$

mit dem Lebesguemaß $d\lambda$ auf $\mathbb{C}^n$. Die Norm auf $\mathscr{H}_m(\mathbb{B})$ ist gegeben durch

$$\|f\|^2_{\mathscr{H}_m(\mathbb{B})} = \int_{\mathbb{B}} |f|^2 d\mu_\alpha.$$

Das folgende Resultat für den ungewichteten Bergman-Raum

$$\mathscr{H}_{n+1}(\mathbb{B}) = L_a^2(\mathbb{B}, d\mu_0)$$

stammt von Guo (Proposition 4.1 in [17]).

Satz 3.2.5. *Sei $m \geq n+1$ und $\mathcal{S} \in \operatorname{Lat}\left(M_z^{(m)}, \mathscr{H}_m(\mathbb{B})\right)$. Dann ist $M_z^{(m)}|_{\mathcal{S}}$ genau dann eine m-Hyperkontraktion, wenn $\mathcal{S} = \{0\}$ oder $\mathcal{S} = \mathscr{H}_m(\mathbb{B})$ ist.*

Beweis. Offensichtlich sind $M_z^{(m)}|_{\{0\}}$ und $M_z^{(m)} \in \mathcal{L}(\mathscr{H}_m(\mathbb{B}))^n$ m-Hyperkontraktionen. Sei umgekehrt $\{0\} \neq \mathcal{S} \in \operatorname{Lat}\left(M_z^{(m)}, \mathscr{H}_m(\mathbb{B})\right)$ ein Raum, für den $M_z^{(m)}|_{\mathcal{S}}$ eine m-Hyperkontraktion ist. Nach Example 3.3.3 in [7] ist der Raum

$$N = \mathcal{S} \ominus \sum_{i=1}^n z_i \mathcal{S}$$

nicht der Nullraum und besteht aus Eigenvektoren zum Eigenwert 1 für $\Delta_{\mathcal{S}}^{(m)}$. Sei $g \in N$ ein Vektor mit $\|g\| = 1$. Dann ist

$$\Delta_{\mathcal{S}}^{(m)} \geq g \otimes g.$$

Für $w \in \mathbb{B}$ gilt mit Formel (3.1)

$$\begin{aligned}
&\langle \Delta_{\mathcal{S}}^{(m)} K_m(\cdot, w), K_m(\cdot, w)\rangle \\
&= \langle \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \frac{m!}{\alpha!(m-|\alpha|)!} M_z^{(m)\alpha} P_{\mathcal{S}} M_z^{(m)*\alpha} K_m(\cdot, w), K_m(\cdot, w)\rangle \\
&= \left(\sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \frac{m!}{\alpha!(m-|\alpha|)!} w^\alpha \overline{w}^\alpha \right) \langle P_{\mathcal{S}} K_m(\cdot, w), K_m(\cdot, w)\rangle \\
&= (1-|w|^2)^m \|P_{\mathcal{S}} K_m(\cdot, w)\|^2 \\
&= \left\| P_{\mathcal{S}} \frac{K_m(\cdot, w)}{\|K_m(\cdot, w)\|} \right\|^2.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}|g(w)|^2 &= \langle (g\otimes g)K_m(\cdot,w), K_m(\cdot,w)\rangle\\ &\le \langle \Delta_{\mathcal{S}}^{(m)} K_m(\cdot,w), K_m(\cdot,w)\rangle\\ &= \left\| P_{\mathcal{S}} \frac{K_m(\cdot,w)}{\|K_m(\cdot,w)\|}\right\|^2\end{aligned}$$

für $w\in\mathbb{B}$. Aus

$$1 \ge \int_{\mathbb{B}} \left\| P_{\mathcal{S}} \frac{K_m(\cdot,w)}{\|K_m(\cdot,w)\|}\right\|^2 d\mu_\alpha \ge \int_{\mathbb{B}} |g|^2 d\mu_\alpha = 1$$

folgt

$$\left\| P_{\mathcal{S}} \frac{K_m(\cdot,w)}{\|K_m(\cdot,w)\|}\right\| = 1$$

μ_α-fast überall und damit

$$K_m(\cdot,w)\in\mathcal{S}$$

für μ_α-fast alle $w\in\mathbb{B}$. Ist $N\subset\mathbb{B}$ eine μ_α-Nullmenge, so ist

$$\left(\overline{\mathrm{LH}\{K_m(\cdot,w)\colon w\in\mathbb{B}\setminus N\}}\right)^\perp = \{0\}.$$

Also ist $\mathcal{S} = \mathscr{H}_m(\mathbb{B})$. □

Für $m = n$ ist $\mathscr{H}_m(\mathbb{B}) = H^2(\mathbb{B})$ der Hardyraum über $\mathbb{B}$. Resultate von Aleksandrov ([1]) zeigen, dass es sehr viele nicht konstante innere Funktionen $\theta\colon\mathbb{B}\to\mathbb{C}$ gibt. Für jede nicht konstante innere Funktion $\theta\colon\mathbb{B}\to\mathbb{C}$ ist

$$\mathcal{S}_\theta = \theta H^2(\mathbb{B}) \in \mathrm{Lat}(M_z^{(n)}, H^2(\mathbb{B}))$$

nach Korollar 3.2.3 ein invarianter Teilraum mit $\{0\}\neq\mathcal{S}_\theta\neq H^2(\mathbb{B})$ so, dass $M_z^{(n)}|_{\mathcal{S}_\theta}$ eine n-Hyperkontraktion ist. Nach Proposition 5.1.3 in [7] sind dies die einzigen Räume $M\in\mathrm{Lat}(M_z, H^2(\mathbb{B}))$, für die $M_z^{(n)}|_M$ eine n-Hyperkontraktion ist.

Sei $\mathcal{E}$ ein beliebiger Hilbertraum. Da $M_z^{(m)}\in\mathcal{L}\left(\mathscr{H}_m(\mathbb{B},\mathcal{E})\right)^n$ auch eine reine k-Hyperkontraktion ist für $k=1,...,m$, erhält man mit Satz 3.2.1 und Lemma 3.2.2 die folgende Verallgemeinerung von Korollar 3.2.3.

Korollar 3.2.6. *Sei $\mathcal{E}$ ein Hilbertraum und $\mathcal{S}\subset\mathscr{H}_m(\mathbb{B},\mathcal{E})$ ein linearer Teilraum. Für $k\in\{1,...,m\}$ sind äquivalent:*

(i) Es ist $\mathcal{S}\in\mathrm{Lat}(M_z^{(m)},\mathscr{H}_m(\mathbb{B},\mathcal{E}))$ und $M_z^{(m)}|_{\mathcal{S}}$ ist eine k-Hyperkontraktion.

(ii) Es ist $\mathcal{S}\in\mathrm{Lat}(M_z^{(m)},\mathscr{H}_m(\mathbb{B},\mathcal{E}))$ und es gilt

$$\sum_{|\alpha|\le k} (-1)^{|\alpha|} \frac{k!}{\alpha!(k-|\alpha|)!} M_z^{(m)\alpha} P_{\mathcal{S}} M_z^{(m)*\alpha} \ge 0.$$

(iii) Es gibt einen Hilbertraum $\mathcal{D}$ und eine analytische Funktion $\theta\colon\mathbb{B}\to\mathcal{L}(\mathcal{D},\mathcal{E})$ so, dass

$$M_\theta\colon \mathscr{H}_k(\mathbb{B},\mathcal{D})\to\mathscr{H}_m(\mathbb{B},\mathcal{E})$$

eine partielle Isometrie ist mit $\mathcal{S} = \mathrm{Im}\, M_\theta$.

4 Minimale Dilatationen

In diesem Kapitel verallgemeinern wir die Ergebnisse aus [11] über die Eindeutigkeit minimaler Dilatationen für reine Zeilenkontraktionen auf den Fall von m-Hyperkontraktionen.
Bevor wir beginnen, diese spezielle Klasse von Dilatationen einzuführen, wollen wir das Hilbertraum-Tensorprodukt $\mathscr{H}_m(\mathbb{B}) \otimes \mathcal{E}$ mit dem $\mathcal{E}$-wertigen Raum $\mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E})$ identifizieren. Wir benutzen dazu Satz 1.1.7 und gelangen zum folgenden Resultat.

Korollar. *Das Hilbertraum-Tensorprodukt* $\mathscr{H}_m(\mathbb{B}) \otimes \mathcal{E}$ *ist isometrisch isomorph zu* $\mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E})$ *unter dem kanonischen unitären Operator*

$$V : \mathscr{H}_m(\mathbb{B}) \otimes \mathcal{E} \to \mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E})$$

mit

$$V(f \otimes x) = f \cdot x$$

für alle $f \in \mathscr{H}_m(\mathbb{B})$ *und* $x \in \mathcal{E}$.

4.1 Die Toeplitz-Algebra

Wir verallgemeinern zunächst Kapitel 3.2 aus [19] auf m-Hyperkontraktionen, d.h. wir zeigen, dass die Operatoren

$$M_{z_i}^{(m)^*} M_{z_i}^{(m)} - M_{z_i}^{(m)} M_{z_i}^{(m)^*}$$

für $i = 1, ..., n$ in der Menge $\mathcal{K}(\mathscr{H}_m(\mathbb{B}))$ der kompakten Operatoren auf $\mathscr{H}_m(\mathbb{B})$ liegen. Wir wollen hierzu das folgende Lemma benutzen.

Lemma 4.1.1. *Sei H ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$. Existiert eine Orthonormalbasis $(e_i)_{i \in I}$ von H und eine Familie $(\lambda_i)_{i \in I}$ komplexer Zahlen mit den Eigenschaften*

(i) $\lim_{i \in I} \lambda_i = 0$, *d.h. zu jedem $\epsilon > 0$ existiert eine endliche Teilmenge $J \subset I$ mit $|\lambda_i| < \epsilon$ für alle $i \in I \setminus J$, und*

(ii) $Te_i = \lambda_i e_i$ *für alle $i \in I$,*

so ist T ein kompakter Operator.

Lemma 4.1.2. *Für den Rechtsshift $M_z^{(m)} = (M_{z_1}^{(m)}, ..., M_{z_n}^{(m)}) \in \mathcal{L}(\mathscr{H}_m(\mathbb{B}))^n$ gilt für $i = 1, ..., n$*

$$M_{z_i}^{(m)^*} M_{z_i}^{(m)} - M_{z_i}^{(m)} M_{z_i}^{(m)^*} \in \mathcal{K}(\mathscr{H}_m(\mathbb{B})).$$

Beweis. Wegen $\overline{\mathrm{LH}\{z^\alpha\colon \alpha\in\mathbb{N}^n\}} = \mathscr{H}_m(\mathbb{B})$ und $\|z^\alpha\|^2_{\mathscr{H}_m(\mathbb{B})} = \rho_m(\alpha)^{-1}$ für $\alpha\in\mathbb{N}^n$ ist $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ mit

$$e_\alpha = \rho_m(\alpha)^{\frac{1}{2}} z^\alpha$$

für $\alpha\in\mathbb{N}^n$ eine Orthonormalbasis von $\mathscr{H}_m(\mathbb{B})$. Außerdem gilt mit Lemma 3.1.10 für $i=1,...,n$

$$\begin{aligned}
&\left(M_{z_i}^{(m)*}M_{z_i}^{(m)} - M_{z_i}^{(m)}M_{z_i}^{(m)*}\right)\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha\right)\\
&= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{\rho_m(\alpha)}{\rho_m(\alpha+e_i)} a_\alpha z^\alpha - \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{\rho_m(\alpha)}{\rho_m(\alpha+e_i)} a_{\alpha+e_i} z^{\alpha+e_i}\\
&= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{\rho_m(\alpha)}{\rho_m(\alpha+e_i)} a_\alpha z^\alpha - \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n,\alpha\geq e_i} \frac{\rho_m(\alpha-e_i)}{\rho_m(\alpha)} a_\alpha z^\alpha\\
&= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n,\alpha_i=0} \frac{\rho_m(\alpha)}{\rho_m(\alpha+e_i)} a_\alpha z^\alpha + \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n,\alpha\geq e_i} \left(\frac{\rho_m(\alpha)}{\rho_m(\alpha+e_i)} - \frac{\rho_m(\alpha-e_i)}{\rho_m(\alpha)}\right) a_\alpha z^\alpha\\
&= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n,\alpha_i=0} \frac{\alpha_i+1}{m+|\alpha|} a_\alpha z^\alpha + \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n,\alpha\geq e_i} \left(\frac{\alpha_i+1}{m+|\alpha|} - \frac{\alpha_i}{m+|\alpha|-1}\right) a_\alpha z^\alpha\\
&= \frac{1}{m}a_0 + \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n,\alpha\neq 0} \frac{m+|\alpha|-1-\alpha_i}{(m+|\alpha|)(m+|\alpha|-1)} a_\alpha z^\alpha,
\end{aligned}$$

also folgt für alle $\alpha\in\mathbb{N}^n$

$$\left(M_{z_i}^{(m)*}M_{z_i}^{(m)} - M_{z_i}^{(m)}M_{z_i}^{(m)*}\right)e_\alpha = \lambda_{\alpha,i}^{(m)} e_\alpha$$

mit

$$0 \leq \lambda_{\alpha,i}^{(m)} = \frac{m+|\alpha|-1-\alpha_i}{(m+|\alpha|)(m+|\alpha|-1)} \leq \frac{1}{m+|\alpha|}$$

für $\alpha\neq 0$ und $\lambda_{0,i}^{(m)} = \frac{1}{m}$. Wegen $\lim\limits_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\lambda_\alpha = 0$ erhalten wir mit Lemma 4.1.1

$$M_{z_i}^{(m)*}M_{z_i}^{(m)} - M_{z_i}^{(m)}M_{z_i}^{(m)*} \in \mathcal{K}\left(\mathscr{H}_m(\mathbb{B})\right).$$

□

Wir betrachten nun die Calkin-Algebra $\mathcal{C}\left(\mathscr{H}_m(\mathbb{B})\right) = \mathcal{L}\left(\mathscr{H}_m(\mathbb{B})\right)/\mathcal{K}\left(\mathscr{H}_m(\mathbb{B})\right)$. Da die kompakten Operatoren $\mathcal{K}\left(\mathscr{H}_m(\mathbb{B})\right)$ ein abgeschlossenes, zweiseitiges Ideal in $\mathcal{L}\left(\mathscr{H}_m(\mathbb{B})\right)$ bilden, ist sie selbst wieder eine C^*-Algebra. Wir erhalten nun, dass die Restklassen $\left[M_{z_1}^{(m)}\right], ..., \left[M_{z_n}^{(m)}\right]$ ein vertauschendes Tupel

$$\left(\left[M_{z_1}^{(m)}\right], ..., \left[M_{z_n}^{(m)}\right]\right) \in \mathcal{C}\left(\mathscr{H}_m(\mathbb{B})\right)^n$$

in der Calkin-Algebra bilden. Mit dem folgenden Satz (siehe S.300 in [22]) können wir dieses Ergebnis noch verbessern.

Satz 4.1.3 (Putman-Fuglede)**.** *Seien $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra, $T\in\mathcal{A}$ und $M,N\in\mathcal{A}$ normal mit $MT=TN$. Dann gilt*

$$M^*T = TN^*.$$

Wählen wir nun $\mathcal{A} = \mathcal{C}(H), M = N = \left[M_{z_i}^{(m)}\right]$ und $T = \left[M_{z_j}^{(m)}\right]$ für $i, j = 1, ..., n$, so gilt

$$\left[M_{z_i}^{(m)}\right]^* \left[M_{z_j}^{(m)}\right] = \left[M_{z_j}^{(m)}\right] \left[M_{z_i}^{(m)}\right]^*. \tag{4.1}$$

Um das folgende Lemma zu beweisen, imitieren wir den Beweis von Lemma 3.4.1 in [19] für m-Hyperkontraktionen. Für $T \in \mathcal{L}(H)$ definieren wir außerdem die Operatoren $L_T, R_T \colon \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H)$ durch $L_T(S) = TS$ und $R_T(S) = ST$ für $S \in \mathcal{L}(H)$.

Lemma 4.1.4. *Es sei $\mathcal{K}(H)$ die Menge der kompakten Operatoren auf H. Dann gilt*

$$\mathcal{K}(\mathscr{H}_m(\mathbb{B})) \subset \overline{\mathrm{LH}\left\{M_z^{(m)\alpha} M_z^{(m)*\beta} : \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\right\}}.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die Operatoren in $\mathcal{L}(\mathscr{H}_m(\mathbb{B}))$ mit eindimensionalem Bild in $\overline{\mathrm{LH}\left\{M_z^{(m)\alpha} M_z^{(m)*\beta} : \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\right\}}$ enthalten sind. Sei also $B \in \mathcal{L}(\mathscr{H}_m(\mathbb{B}))$ mit $\dim(B\mathscr{H}_m(\mathbb{B})) = 1$. Wir wählen nun eine Funktion $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \in \mathscr{H}_m(\mathbb{B})$ mit $\|f\|_{\mathscr{H}_m(\mathbb{B})} = 1$, die das Bild von B erzeugt. Sei außerdem

$$g = B^* f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} b_\alpha z^\alpha \in \mathscr{H}_m(\mathbb{B}).$$

Bezeichnen wir mit $P_{\mathbb{C}}$ die Orthogonalprojektion auf die konstanten Funktionen in $\mathscr{H}_m(\mathbb{B})$, so folgt aus Lemma 1.2 in [3] und Formel (3.1)

$$\begin{aligned}
P_{\mathbb{C}} &= \frac{1}{K(z, \overline{w})} \left(L_{M_z^{(m)}}, R_{M_z^{(m)*}}\right) \left(\mathrm{id}_{\mathscr{H}_m(\mathbb{B})}\right) \\
&= (1 - \langle z, \overline{w}\rangle)^m \left(L_{M_z^{(m)}}, R_{M_z^{(m)*}}\right) \left(\mathrm{id}_{\mathscr{H}_m(\mathbb{B})}\right) \\
&= \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} \frac{m!}{\alpha!(m - |\alpha|)!} (zw)^\alpha \left(L_{M_z^{(m)}}, R_{M_z^{(m)*}}\right) \left(\mathrm{id}_{\mathscr{H}_m(\mathbb{B})}\right) \\
&= \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} \frac{m!}{\alpha!(m - |\alpha|)!} M_z^{(m)\alpha} M_z^{(m)*\alpha} \\
&\in \mathrm{LH}\left\{M_z^{(m)\alpha} M_z^{(m)*\alpha} : \alpha \in \mathbb{N}^n\right\}.
\end{aligned}$$

Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir den Operator

$$B_k = \sum_{|\alpha|, |\beta| \le k} a_\alpha \overline{b_\beta} M_z^{(m)\alpha} P_{\mathbb{C}} M_z^{(m)*\beta} \in \mathcal{L}(\mathscr{H}_m(\mathbb{B})).$$

Wegen $P_{\mathbb{C}} \in \mathrm{LH}\left\{M_z^{(m)\alpha} M_z^{(m)*\beta} : \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\right\}$ ist dann auch

$$B_k \in \mathrm{LH}\left\{M_z^{(m)\alpha} M_z^{(m)*\beta} : \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\right\}$$

für $k \in \mathbb{N}$. Wir zeigen nun, dass die Operatoren B_k in der Operatornorm gegen B konvergieren. Wir definieren dazu für $u, v \in \mathscr{H}_m(\mathbb{B})$ die Abbildung

$$u \otimes v \colon \mathscr{H}_m(\mathbb{B}) \to \mathscr{H}_m(\mathbb{B}), \ h \mapsto \langle h, v\rangle u.$$

Wegen $\|u \otimes v\| \leq \|u\|_{\mathscr{H}_m(\mathbb{B})} \|v\|_{\mathscr{H}_m(\mathbb{B})}$ für $u, v \in \mathscr{H}_m(\mathbb{B})$ ist die Abbildung

$$\Gamma\colon \mathscr{H}_m(\mathbb{B}) \times \mathscr{H}_m(\mathbb{B}) \to \mathcal{L}\left(\mathscr{H}_m(\mathbb{B})\right), \ (u, v) \mapsto u \otimes v$$

stetig. Nach Wahl von f existiert für jedes $h = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} d_\alpha z^\alpha \in \mathscr{H}_m(\mathbb{B})$ ein $\lambda_h \in \mathbb{C}$ mit

$$Bh = \lambda_h f.$$

Wegen $\|f\|_{\mathscr{H}_m(\mathbb{B})} = 1$ folgt dann

$$\begin{aligned} \lambda_h &= \lambda_h \|f\|^2_{\mathscr{H}_m(\mathbb{B})} \\ &= \langle \lambda_h f, f \rangle \\ &= \langle Bh, f \rangle \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} Bh &= \langle Bh, f \rangle f \\ &= \langle h, B^* f \rangle f \\ &= f \otimes g(h). \end{aligned}$$

Außerdem gilt (vgl. Beweis von Lemma 3.1.11)

$$\begin{aligned} B_k h &= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq k} a_\alpha \overline{b_\beta} M_z^{(m)^\alpha} P_{\mathbb{C}} M_z^{(m)*^\beta} h \\ &= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq k} a_\alpha \overline{b_\beta} \frac{1}{\rho_m(\beta)} d_\beta z^\alpha \\ &= \left(\sum_{|\beta| \leq k} \overline{b_\beta} d_\beta \left\| z^\beta \right\|^2 \right) \left(\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha z^\alpha \right) \\ &= \left(\sum_{|\beta| \leq k} \overline{b_\beta} \langle h, z^\beta \rangle \right) \left(\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha z^\alpha \right) \\ &= \langle h, g_k \rangle f_k \\ &= f_k \otimes g_k(h) \end{aligned}$$

mit $f_k = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha z^\alpha$ und $g_k = \sum_{|\beta| \leq k} b_\beta z^\beta$, sodass $B_k = f_k \otimes g_k$ und $B = f \otimes g$ folgt. Wegen der Stetigkeit von Γ und

$$f_k \to f, \ g_k \to g$$

für $k \to \infty$ erhalten wir $B_k \to B$ für $k \to \infty$ und damit

$$B \in \overline{\mathrm{LH}\left\{ M_z^{(m)^\alpha} M_z^{(m)*^\beta} : \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \right\}}.$$

Da die eindimensionalen Operatoren in $\mathcal{L}\left(\mathscr{H}_m(\mathbb{B})\right)$ die endlichdimensionalen Operatoren in $\mathcal{L}\left(\mathscr{H}_m(\mathbb{B})\right)$ erzeugen, liegen letztere auch in $\overline{\mathrm{LH}\left\{ M_z^{(m)^\alpha} M_z^{(m)*^\beta} : \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \right\}}$. Da die endlichdimensionalen Operatoren wiederum dicht in den kompakten Operatoren auf $\mathcal{L}\left(\mathscr{H}_m(\mathbb{B})\right)$ liegen, folgt die Aussage. □

Wir erhalten nun eine nützliche Aussage über die von $M_z^{(m)}$ erzeugte C^*-Algebra (siehe Lemma 3.7(2) in [12]), die *Toeplitz-Algebra*.

Satz 4.1.5. *Es gilt*

$$C^*(M_z^{(m)}) = \overline{\mathrm{LH}\left\{ {M_z^{(m)}}^\alpha {M_z^{(m)*}}^\beta \;:\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n\right\}}.$$

Beweis. Die Inklusion „$\supset$" gilt offensichtlich. Sei $S = \mathrm{LH}\left\{ {M_z^{(m)}}^\alpha {M_z^{(m)*}}^\beta\colon \alpha,\beta\in\mathbb{N}^n\right\}$. Da die Erzeuger von $C^*\left(M_z^{(m)}\right)$ in $\overline{S}$ liegen, zeigen wir für die umgekehrte Inklusion, dass $\overline{S}$ eine C^*-Algebra ist. Da $\overline{S}$ offensichtlich ein $*$-abgeschlossener Unterraum ist, genügt es, die multiplikative Abgeschlossenheit nachzurechnen.
Da nach Lemma 4.1.4 $\mathcal{K}(\mathscr{H}_m(\mathbb{B}))\subset\overline{S}$ gilt, folgt mit Formel (4.1) für $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{N}^n$

$$\left[\left({M_z^{(m)}}^\alpha {M_z^{(m)*}}^\beta\right)\left({M_z^{(m)}}^\gamma {M_z^{(m)*}}^\delta\right)\right] = \left[{M_z^{(m)}}^{\alpha+\gamma} {M_z^{(m)*}}^{\beta+\delta}\right].$$

Damit existiert ein Operator $K\in\mathcal{K}(H)$ mit

$${M_z^{(m)}}^\alpha {M_z^{(m)*}}^\beta {M_z^{(m)}}^\gamma {M_z^{(m)*}}^\delta = {M_z^{(m)}}^{\alpha+\gamma} {M_z^{(m)*}}^{\beta+\delta} + K\in\overline{S},$$

da $K\in\overline{S}$ ist. □

Es folgt ein weiterer Hilfssatz über reduzierende Teilräume von $\mathscr{H}_m(\mathbb{B},\mathcal{E})$ für $M_z^{(m)}$.

Lemma 4.1.6. *Für einen reduzierenden Teilraum $M\subset\mathscr{H}_m(\mathbb{B},\mathcal{E})$ für $M_z^{(m)}$ gilt*

$$M = \overline{\mathrm{LH}\left\{z^\alpha(M\cap\mathcal{E})\colon \alpha\in\mathbb{N}^n\right\}}.$$

Beweis. Die Inklusion „$\supset$" gilt offensichtlich. Da M reduzierend für $M_z^{(m)}$ ist, ist M nach Lemma 1.2 in [3] invariant unter der Projektion

$$P_{\mathcal{E}}\in\mathrm{LH}\left\{ {M_z^{(m)}}^\alpha {M_z^{(m)*}}^\alpha :\alpha\in\mathbb{N}^n\right\}.$$

Also hat der abgeschlossene Teilraum $M\cap\mathcal{E}\subset\mathcal{E}$ die Darstellung $M\cap\mathcal{E} = P_{\mathcal{E}}M$. Sei $f=\sum\limits_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha\in\mathscr{H}_m(\mathbb{B},\mathcal{E})$. Mit dem Beweis von Lemma 3.1.11 folgt

$$P_{\mathcal{E}}{M_z^{(m)*}}^\beta f = \frac{1}{\rho_m(\beta)}\,a_\beta$$

für $\beta\in\mathbb{N}^n$.
Für $f=\sum\limits_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha\in M$ gilt wegen ${M_z^{(m)*}}^\beta f\in M$ für alle $\beta\in\mathbb{N}^n$ also $a_\beta\in M\cap\mathcal{E}$ für alle $\beta\in\mathbb{N}^n$ und damit

$$f=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha\in\overline{\mathrm{LH}\left\{z^\alpha(M\cap\mathcal{E})\colon\alpha\in\mathbb{N}^n\right\}}.$$

□

4.2 Eindeutigkeit minimaler Dilatationen

Definition 4.2.1. *Seien $H, \mathcal{E}$ Hilberträume und $T \in \mathcal{L}(H)^n$ eine reine m-Hyperkontraktion. Eine Isometrie*

$$\pi\colon H \to \mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E})$$

mit der Eigenschaft

$$\pi T_i^* = M_{z_i}^{(m)*}\pi$$

*für $i = 1, ..., n$ nennen wir m-*Dilatation *von T.*

Lemma 4.2.2. *Sei $T \in \mathcal{L}(H)^n$ eine reine m- Hyperkontraktion und*

$$\pi\colon H \to \mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E})$$

eine m-Dilatation von T. Es ist

$$M = \overline{\operatorname{LH}\{z^\alpha \pi h\colon \alpha \in \mathbb{N}^n, h \in H\}} \subset \mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E})$$

der kleinste reduzierende Teilraum für $M_z^{(m)} \in \mathcal{L}\left(\mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E})\right)^n$, der πH enthält.

Beweis. Offensichtlich ist M der kleinste für $M_z^{(m)}$ invariante abgeschlossene Teilraum, der πH enthält. Also genügt es, $M \in \operatorname{Lat}\left(M_z^{(m)^*}\right)$ zu zeigen. Für $\alpha \in \mathbb{N}^n, i = 1, ..., n$ und $h \in H$ zeigen wir hierfür, dass

$$M_{z_i}^{(m)^*}(z^\alpha \pi h) \in M$$

gilt. Nach Satz 4.1.5 lässt sich $M_{z_i}^{(m)^*} M_z^{(m)^\alpha}$ in der Operatornorm approximieren durch Linearkombinationen der Form

$$\sum_{\gamma,\beta \in \mathbb{N}^n} c_{\gamma,\beta} M_z^{(m)^\gamma} M_z^{(m)^{*\beta}}.$$

Dann lässt sich aber

$$M_{z_i}^{(m)^*}(z^\alpha \pi h) = M_{z_i}^{(m)^*} M_z^{(m)^\alpha} \pi h$$

in $\mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E})$ approximieren durch endliche Summanden der Form

$$\sum_{\gamma,\beta \in \mathbb{N}^n} c_{\gamma,\beta} z^\gamma \pi T^{*\beta} h \in M.$$

Also ist $M_{z_i}^{(m)^*}(z^\alpha \pi h) \in M$. □

Definition 4.2.3. *Wir nennen eine m-Dilatation $\pi\colon H \to \mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E})$ einer reinen m-Hyperkontraktion $T \in \mathcal{L}(H)^n$* minimal*, falls der einzige für $M_z^{(m)}$ reduzierende Teilraum $M \subset \mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E})$, der πH enthält, der Raum $M = \mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E})$ ist.*

Nach Lemma 4.2.2 ist π also genau dann minimal, falls

$$\mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E}) = \overline{\operatorname{LH}\{z^\alpha \pi h\colon \alpha \in \mathbb{N}^n, h \in H\}}$$

gilt.

Bemerkung 4.2.4. Die m-Dilatation (siehe §3.1)

$$\pi_T^{(m)}\colon H \to \mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E}),\ h \mapsto \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \rho_m(\alpha)\Delta_T^{(m)\frac{1}{2}} T^{*\alpha} h z^\alpha$$

ist minimal.

Beweis. Wir müssen begründen, dass

$$\overline{\mathrm{LH}\left\{z^\alpha \pi_T^{(m)} h\colon \alpha \in \mathbb{N}^n, h \in H\right\}} = \mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E})$$

gilt. Nach Lemma 4.1.6 existiert ein abgeschlossener Teilraum $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$ mit

$$\mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{S}) = \overline{\mathrm{LH}\left\{z^\alpha \pi_T^{(m)} h\colon \alpha \in \mathbb{N}^n, h \in H\right\}}.$$

Nach Lemma 1.2 in [3] gilt

$$P_{\mathcal{E}} \in \mathrm{LH}\left\{M_z^{(m)\alpha} M_z^{(m)*\alpha} : \alpha \in \mathbb{N}^n\right\}.$$

Sei

$$a = \lim_{k\to\infty} \Delta_T^{(m)\frac{1}{2}} h_k \in \overline{\Delta_T^{(m)\frac{1}{2}} H} = \mathcal{E},$$

$h_k \in H$ für $k \in \mathbb{N}$. Wegen $\Delta_T^{(m)\frac{1}{2}} h_k = P_{\mathcal{E}}\left(\pi_T^{(m)} h_k\right)$ folgt dann

$$\begin{aligned} a &\in \overline{\mathrm{LH}\left\{M_z^{(m)\alpha} M_z^{(m)*\alpha} \pi_T^{(m)} h : \alpha \in \mathbb{N}^n, h \in H\right\}} \cap \mathcal{E} \\ &\subset \mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{S}) \cap \mathcal{E} \\ &= \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Also folgt $\mathcal{S} = \mathcal{E}$, sodass $\pi_T^{(m)}$ minimal ist. □

Um den zentralen Satz dieses Kapitels, ein Eindeutigkeitsresultat über minimale m-Dilatationen (vgl. Kapitel 3 in [11]), beweisen zu können, benötigen wir weitere Definitionen und Sätze.

Definition 4.2.5. *Sei $\mathcal{A}$ eine (nicht notwendigerweise abgeschlossene) Teilalgebra einer unitalen C^*-Algebra $\mathcal{B}$, die das Einselement enthält. Ein $\mathcal{A}$-*Morphismus *ist eine vollständig positive, lineare Abbildung*

$$\phi\colon \mathcal{B} \to \mathcal{L}(H)$$

von $\mathcal{B}$ in die linearen, stetigen Operatoren auf einem Hilbertraum H mit den Eigenschaften

(i) $\phi(1) = 1$,

(ii) $\phi(AX) = \phi(A)\phi(X)$ *für alle* $A \in \mathcal{A}, X \in \mathcal{B}$.

Definition 4.2.6. *Sei $\phi\colon \mathcal{B} \to \mathcal{L}(H)$ eine vollständig positive Abbildung von einer unitalen C^*-Algebra $\mathcal{B}$ in die linearen stetigen Operatoren auf einem Hilbertraum H. Wir nennen ein Paar (V, π) mit einer Darstellung π von $\mathcal{B}$ auf einen Hilbertraum H_π und $V \in \mathcal{L}(H, H_\pi)$* Stinespring-Darstellung *für ϕ, falls*

$$\phi(x) = V^*\pi(x)V$$

für jedes $x \in \mathcal{B}$ gilt.
Falls zusätzlich

$$H_\pi = \overline{\mathrm{LH}\{\pi(x)Vh\colon x \in \mathcal{B}, h \in H\}}$$

gilt, heißt (V, π) minimale *Stinespring-Darstellung für ϕ.*

Das nächste Lemma (siehe Lemma 8.6 in [4]) ist entscheidend für den Beweis des darauffolgenden Satzes.

Lemma 4.2.7. *Sei $\mathcal{B}$ eine unitale C^*-Algebra und $\mathcal{A}$ eine Teilalgebra auf $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B} = \overline{\mathrm{LH}\{\mathcal{A}\mathcal{A}^*\}}^{\|\cdot\|}$. Für $i = 1, 2$ sei H_i ein Hilbertraum, $\phi_i\colon \mathcal{B} \to \mathcal{L}(H_i)$ ein $\mathcal{A}$-Morphismus und $U\colon H_1 \to H_2$ sei ein unitärer Operator mit*

$$U\phi_1(a) = \phi_2(a)U$$

für $a \in \mathcal{A}$. Sei (V_i, π_i) eine minimale Stinespring-Darstellung für ϕ_i, d.h. es gilt $\phi_i(x) = V_i^*\pi_i(x)V_i$ für $x \in \mathcal{B}$. Dann existiert ein eindeutiger unitärer Operator $W\colon H_{\pi_1} \to H_{\pi_2}$ mit

(i) $W\pi_1(x) = \pi_2(x)W$ *für $x \in \mathcal{B}$,*

(ii) $WV_1 = V_2U$.

Beweis. Da ϕ_1, ϕ_2 $\mathcal{A}$-Morphismen sind und U unitär ist, gilt

$$\begin{aligned} U\phi_1(ab^*) &= \phi_2(a)U\phi_1(b)^*U^*U \\ &= \phi_2(a)UU^*\phi_2(b)^*U \\ &= \phi_2(ab^*)U \end{aligned}$$

für alle $a, b \in \mathcal{A}$. Wegen $\mathcal{B} = \overline{\mathrm{LH}\{\mathcal{A}\mathcal{A}^*\}}^{\|\cdot\|}$ folgt dann

$$U\phi_1(x) = \phi_2(x)U$$

für alle $x \in \mathcal{B}$. Wir definieren nun

$$\begin{aligned} \widetilde{W}\colon\ &\mathrm{LH}\{\pi_1(x)V_1h\colon x \in \mathcal{B}, h \in H_1\} \to H_{\pi_2}, \\ &\sum_{k=0}^{m} \alpha_k\pi_1(x_k)V_1h_k \mapsto \sum_{k=0}^{m} \alpha_k\pi_2(x_k)V_2Uh_k. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=0}^{m}\alpha_k\pi_1(x_k)V_1h_k\right\|^2 &= \sum_{k,l=0}^{m}\langle\alpha_k\pi_1(x_k)V_1h_k,\alpha_l\pi_1(x_l)V_1h_l\rangle\\
&= \sum_{k,l=0}^{m}\alpha_k\overline{\alpha_l}\langle V_1^*\pi_1(x_l)^*\pi_1(x_k)V_1h_k,h_l\rangle\\
&= \sum_{k,l=0}^{m}\alpha_k\overline{\alpha_l}\langle V_1^*\pi_1(x_l^*x_k)V_1h_k,h_l\rangle\\
&= \sum_{k,l=0}^{m}\alpha_k\overline{\alpha_l}\langle\phi_1(x_l^*x_k)h_k,h_l\rangle\\
&= \sum_{k,l=0}^{m}\alpha_k\overline{\alpha_l}\langle U^*U\phi_1(x_l^*x_k)h_k,h_l\rangle\\
&= \sum_{k,l=0}^{m}\alpha_k\overline{\alpha_l}\langle V_2^*\pi_2(x_l^*x_k)V_2Uh_k,Uh_l\rangle\\
&= \left\|\sum_{k=0}^{m}\alpha_k\pi_2(x_k)V_2Uh_k\right\|^2
\end{aligned}$$

ist $\widetilde{W}$ wohldefiniert und isometrisch. Aufgrund der Minimalität von (V_1,π_1) können wir $\widetilde{W}$ zu einer isometrischen Abbildung

$$W\colon H_{\pi_1}\to H_{\pi_2}$$

fortsetzen. Wegen der Minimalität von (V_2,π_2) liegt $\mathrm{Im}(W)$ dicht in H_{π_2}, sodass

$$\mathrm{Im}(W)=H_{\pi_2}$$

wegen der Abgeschlossenheit von $\mathrm{Im}(W)$ folgt. Also ist W surjektiv und somit unitär. Für $h_1\in H_1$ gilt außerdem

$$\begin{aligned}
WV_1h_1 &= W\pi_1(1)V_1h_1\\
&= \pi_2(1)V_2Uh_1\\
&= V_2Uh_1,
\end{aligned}$$

also $V_2U=WV_1$. Weiterhin gilt für $x,y\in\mathcal{B}$

$$\begin{aligned}
W\pi_1(x)\pi_1(y)V_1h_1 &= W\pi_1(xy)V_1h_1\\
&= \pi_2(x)\pi_2(y)V_2Uh_1\\
&= \pi_2(x)W\pi_1(y)V_1h_1,
\end{aligned}$$

daher gilt

$$W\pi_1(x)=\pi_2(x)W$$

auf $\mathrm{LH}\{\pi_1(y)V_1h_1\colon y\in\mathcal{B},h_1\in H_1\}$ und damit auch auf

$$\overline{\mathrm{LH}\{\pi_1(y)V_1h_1\colon y\in\mathcal{B},h_1\in H_1\}}=H_{\pi_1}.$$

□

Bemerkung 4.2.8. Sei $\mathcal{B} = C^*\left(M_z^{(m)}\right) \subset \mathcal{L}(\mathscr{H}_m(\mathbb{B}))$ die von $(M_{z_1}^{(m)}, ..., M_{z_n}^{(m)})$ erzeugte C^*-Algebra auf dem skalarwertigen Raum $\mathscr{H}_m(\mathbb{B})$ und sei $\mathcal{A}$ die unitale Teilalgebra von $\mathcal{B}$, die aus allen Polynome in $(M_{z_1}^{(m)}, ..., M_{z_n}^{(m)})$ besteht. Zudem seien $H, \mathcal{E}$ Hilberträume und

$$\pi\colon H \to \mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E})$$

eine minimale m-Dilatation einer reinen vertauschenden m-Hyperkontraktion $T \in \mathcal{L}(H)^n$. Dann ist die Abbildung

$$\varphi\colon \mathcal{B} \to \mathcal{L}(H),\ X \mapsto \pi^*(X \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{E}})\,\pi$$

vollständig positiv und unital. Wegen $\pi^* M_{z_i}^{(m)} = T_i \pi^*$ gilt dann für jedes Polynom und jeden Operator $X \in \mathcal{B}$

$$\begin{aligned}
\varphi\left(p(M_z)X\right) &= \pi^*\left((p(M_z)X) \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{E}}\right)\pi \\
&= \pi^*\left(p(M_z)\left(X \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{E}}\right)\right)\pi \\
&= p(T)\varphi(X) \\
&= \varphi\left(p(M_z)\right)\varphi(X).
\end{aligned}$$

Also ist φ ein $\mathcal{A}$-Morphismus.
Der unitale C^*-Algebrenhomomorphismus

$$\Pi\colon \mathcal{B} \to \mathcal{L}\left(\mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E})\right),\ X \mapsto X \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$$

definiert zusammen mit der m-Dilatation $\pi\colon H \to \mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E})$ von T eine Stinespring-Darstellung der vollständig positiven Abbildung $\varphi\colon \mathcal{B} \to \mathcal{L}(H)$. Da der Raum

$$\overline{\mathrm{LH}\left\{\Pi(X)\pi h\colon X \in \mathcal{B}, h \in H\right\}}$$

ein reduzierender Teilraum für $M_z \in \mathcal{L}\left(\mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E})\right)^n$ ist, der πH enthält, impliziert die Minimalität von π als m-Dilatation von T, dass die Stinespring-Darstellung (π, Π) von φ minimal ist.

Mit Hilfe dieser Beobachtungen beweisen wir nun den zentralen Satz dieses Kapitels über die Eindeutigkeit minimaler m-Dilatationen.

Satz 4.2.9. *Es sei $\pi_i\colon H \to \mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E}_i), i = 1, 2,$ ein Paar minimaler m-Dilatationen der reinen vertauschenden m-Hyperkontraktion $T \in \mathcal{L}(H)^n$ auf dem Hilbertraum H. Dann existiert ein unitärer Operator $U \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ mit*

$$\pi_2 = \left(\mathrm{id}_{\mathscr{H}_m(\mathbb{B})} \otimes U\right)\pi_1,$$

d.h. das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E}_2) \\
\mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E}_1) \arrow[ur, "\mathrm{id}_{\mathscr{H}_m(\mathbb{B})} \otimes U"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. Sei also $\pi_i \colon H \to \mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E}_i), i = 1, 2$, ein Paar minimaler m-Dilatationen von T und für $i = 1, 2$ seien $\varphi_i \colon \mathcal{B} \to \mathcal{L}(H)$ und $\Pi_i \colon \mathcal{B} \to \mathcal{L}\left(\mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E}_i)\right)$ die von π_i induzierten Abbildungen aus Bemerkung 4.2.8. Dann gilt $\varphi_1\left(p(M_z^{(m)})\right) = p(T) = \varphi_2\left(p(M_z^{(m)})\right)$ für alle Polynome $p \in \mathbb{C}\left[z_1, ..., z_n\right]$, also $\varphi_1 = \varphi_2$ auf $\mathcal{A}$. Somit liefert Lemma 4.2.7 (mit $H_1 = H_2 = H$ und $U = \mathrm{id}_H$) die Existenz eines unitären Operators $W \colon \mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E}_1) \to \mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E}_2)$ mit

$$W\left(X \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{E}_1}\right) = \left(X \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{E}_2}\right) W$$

für alle $X \in \mathcal{B}$ und

$$W\pi_1 = \pi_2.$$

Da W und W^* beide mit $M_z^{(m)}$ auf $\mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E}_1)$ und $\mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E}_2)$ vertauschen, folgt aus Satz 2.3.8 und dem Beweis von Korollar 2.3.9, dass W und W^* von Multiplikatoren induziert werden, etwa $W = M_a$ und $W^* = M_b$ mit analytischen Funktionen $a \colon \mathbb{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ und $b \colon \mathbb{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1)$. Da W unitär ist, gilt

$$M_{ab} = M_a M_b = \mathrm{id}_{\mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E}_2)}$$

sowie

$$M_{ba} = M_b M_a = \mathrm{id}_{\mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E}_1)}.$$

Für jedes $z \in \mathbb{B}$ gilt also $a(z) = b(z)^{-1}$, sodass $a(z)$ und $b(z)$ invertierbare Operatoren sind. Mit Hilfe der Eigenschaften des Multiplikators M_a rechnet man nach, dass

$$M_a^* K_m(\cdot, w)\eta = K_m(\cdot, w)a(w)^*\eta$$

für $w \in \mathbb{B}, \eta \in \mathcal{E}_2$ gilt. Damit ist

$$\begin{aligned} K_m(z, w)\eta &= \left(K_m(\cdot, w)\eta\right)(z) \\ &= \left(M_a M_a^* K_m(\cdot, w)\eta\right)(z) \\ &= \left(M_a K_m(\cdot, w)a(w)^*\eta\right)(z) \\ &= a(z)K_m(z, w)a(w)^*\eta \\ &= a(z)a(w)^* K_m(z, w)\eta \end{aligned}$$

für alle $z, w \in \mathbb{B}$ und $\eta \in \mathcal{E}_2$. Es folgt $a(z)a(w)^* = \mathrm{id}_{\mathcal{E}_2}$ für alle $z, w \in \mathbb{B}$. Daher sind die Operatoren $a(z)$ für $z \in \mathbb{B}$ unitär und es gilt $a(z) = a(w)$ für alle $z, w \in \mathbb{B}$. Also erhalten wir einen unitären Operator $U \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ mit $a(z) = U$ für alle $z \in \mathbb{B}$. Damit gilt

$$W = \mathrm{id}_{\mathscr{H}_m(\mathbb{B})} \otimes U.$$

□

Wir erhalten damit das folgende Ergebnis über die Faktorisierung beliebiger m-Dilatationen.

Korollar 4.2.10. *Sei $T \in \mathcal{L}(H)^n$ eine reine m-Hyperkontraktion, $\mathcal{F}$ ein Hilbertraum und $\pi_T^{(m)} \colon H \to \mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{E})$ die kanonische m-Dilatation aus Bemerkung 4.2.4. Ist $\pi \colon H \to \mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{F})$ irgendeine m-Dilatation von T, so existiert eine Isometrie $V \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ mit*

$$\pi = \left(\mathrm{id}_{\mathscr{H}_m(\mathbb{B})} \otimes V\right) \pi_T^{(m)}.$$

Beweis. Nach Lemma 4.2.2 ist

$$\overline{\operatorname{LH}\{z^\alpha \pi h \colon \alpha \in \mathbb{N}^n, h \in H\}}$$

ein reduzierender Teilraum für $M_z^{(m)} \in \mathcal{L}\left(\mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{F})\right)^n$, der πH enthält. Nach Lemma 4.1.6 gibt es einen abgeschlossenen Teilraum $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$ mit

$$\mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{S}) = \overline{\operatorname{LH}\{z^\alpha \pi h \colon \alpha \in \mathbb{N}^n, h \in H\}}.$$

Damit ist

$$\pi \colon H \to \mathscr{H}_m(\mathbb{B}, \mathcal{S})$$

eine minimale m-Dilatation von T. Mit Satz 4.2.9 folgt dann die Existenz eines unitären Operators $U \colon \mathcal{E} \to \mathcal{S}$ mit

$$\pi = \left(\operatorname{id}_{\mathscr{H}_m(\mathbb{B})} \otimes U\right) \pi_T^{(m)}.$$

Den Operator $V \colon \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ aus der Aussage erhalten wir durch $V = i \circ U$ mit der Inklusionsabbildung $i \colon \mathcal{S} \to \mathcal{F}$. $\square$

Literaturverzeichnis

[1] A.B. Aleksandrov, *Inner functions on compact spaces*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **18** (1984), 1–13.

[2] M. Alt, *Modell- und Dilatationssätze für Zeilenkontraktionen mit polynomiellen Relationen*, Bachelorarbeit, Universität des Saarlandes, 2014.

[3] C. Ambrozie and J. Eschmeier, *A commutant lifting theorem on analytic polyhedra*, in: Topological algebras, their applications, and related topics, Banach Center Publications **67** (2005), 83-108.

[4] W. Arveson, *Subalgebras of C*-algebras III: Multivariable operator theory*, Acta Math. **181** (1998), 159-228.

[5] J. Ball, T. Trent, and V. Vinnikov, *Interpolation and commutant lifting for multipliers on reproducing kernel Hilbert spaces*, Operator Theory and Analysis, OT 122, Springer, Basel, 2001.

[6] C. Barbian, *Positivitätsbedingungen funktionaler Hilberträume und Anwendungen in der mehrdimensionalen Operatorentheorie*, Diplomarbeit, Universität des Saarlandes, 2001.

[7] ———, *Beurling-type representation of invariant subspaces in reproducing kernel Hilbert spaces*, Dissertation, Universität des Saarlandes, 2008.

[8] ———, *Beurling-type representations of invariant subspaces in reproducing kernel Hilbert spaces*, Integral Equations Operator Theory **61** (2008), 299–323.

[9] K. Bardyszewski, *Wesentliches Spektrum und Index für Hilbertmoduln*, Bachelorarbeit, Universität des Saarlandes, 2011.

[10] A. Beurling, *On two problems concerning linear transformations in Hilbert space*, Acta Math. **81** (1949), 239-255.

[11] M. Bhattacharjee, J. Eschmeier, D. K. Keshari, and J. Sarkar, *Dilations, Wandering Subspaces, and Inner Functions*, ArXiv e-prints (2015), available at `1509.07084`.

[12] S. Chavan and R. Kumari, *U-invariant kernels, defect operators, and graded submodules*, New York Journal of Math. **22** (2016), 677–709.

[13] ———, *A Wold-type decomposition for a class of row v-hypercontractions*, J. Operator Theory **75** (2016), 195–208. MR3474103

[14] R. E. Curto and F.-H. Vasilescu, *Standard operator models in the polydisc*, Indiana Univ. Math. J. **42** (1993), 791–810. MR1254118

[15] M. Engliš and J. Eschmeier, *Geometric Arveson-Douglas conjecture*, Adv. Math **274** (2015), 606–630.

[16] J. Eschmeier, *Funktionale Hilberträume und reproduzierende Kerne*, Universität des Saarlandes, 2011.

[17] K. Guo, *Defect operators, defect functions and defect indices for analytic submodules*, J. Funct. Anal. **213** (2004), 380–411.

[18] M. Hartz, *Extremale Fortsetzungen in Familien von Operatoren auf Hilberträumen*, Bachelorarbeit, Universität des Saarlandes, 2010.

[19] J. Haupenthal, *Modellsätze für sphärische Kontraktionen*, Staatsexamensarbeit, Universität des Saarlandes, 2003.

[20] S. McCullough and T.T. Trent, *Invariant subspaces and Nevanlinna-Pick kernels*, J. Funct. Anal. **178** (2000), 262–249.

[21] V. Müller and F.-H. Vasilescu, *Standard models for some commuting multioperators*, Proc. Amer. Math. Soc. **117** (1993), 979–989. MR1112498

[22] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw Hill International Editionsl, 1973.

[23] J. Sarkar, *An invariant subspace theorem and invariant subspaces of analytic reproducing kernel Hilbert spaces II*, ArXiv e-prints (2015), available at `1309.2384`.

[24] M. Wernet, *Wesentlich normale Hilbertmoduln über Gebieten in* $\mathbb{C}^d$, Diplomarbeit, Universität des Saarlandes, 2008.

[25] ———, *On semi-Fredholm theory and essential normality*, Dissertation, Universität des Saarlandes, 2014.