Eine Charakterisierung $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalarer Operatoren auf Banachräumen

Diplomarbeit

angefertigt 1998 von

Michael Didas

im Fachbereich Mathematik der Universität des Saarlandes
unter Betreuung von Prof. Dr. Jörg Eschmeier

Vorwort

Erfüllt ein stetig linearer Hilbertraum-Operator einfache algebraische Bedingungen (man denke an selbstadjungierte, normale oder unitäre Operatoren), so kann man auf die Existenz gewisser Funktionalkalküle schließen. Die dabei an einen Operator gestellten algebraischen Forderungen

$$T^* = T, \quad T^*T = TT^* \text{ oder } T^* = T^{-1}$$

besitzen offenbar kein direktes Analogon im Banachraumkontext.

Hier ergibt sich vielmehr ein natürlicher Zugang über Wachstumsbedingungen, etwa an die Potenzen eines Operators oder seine Resolvente. So läßt sich beispielsweise zeigen, daß ein stetig linearer Operator T auf einem Banachraum X einen Funktionalkalkül über der Algebra $\mathcal{E}(\mathbb{T})$ der C^∞-Funktionen auf der Einheitskreislinie besitzt, wenn er invertierbar ist, und sein Potenzwachstum einer Beschränkung der Form

$$\|T^n\| \leq c(1+|n|)^k \quad (n \in \mathbb{Z})$$

(mit Konstanten $c > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$) unterliegt. Ein Funktionalkalkül ist dann in einfacher Weise dadurch gegeben, daß man in der Fourierentwicklung $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(n)z^n$ einer Funktion $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$ die Funktion z durch den Operator T ersetzt, also Reihen der Form

$$\varphi(T) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(n)T^n$$

bildet. Operatoren mit einem stetigen $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Funktionalkalkül nennen wir $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalar. Es läßt sich zeigen, daß ein Potenzwachstum der oben angegebenen Form nicht nur hinreichend ist für die Existenz eines stetigen $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Kalküls, sondern vielmehr die $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalaren Operatoren präzise charakterisiert (vgl. Colojoară und Foiaş [5], Kapitel 5).

Neben diesem Resultat dient als Ausgangspunkt für die vorliegende Arbeit ein Ergebnis von Eschmeier und Putinar, welches gerade die subskalaren Operatoren, d.h. Einschränkungen verallgemeinert skalarer Operatoren auf einen abgeschlossenen invarianten Teilraum, charakterisiert (Eschmeier und Putinar [8], Corollary 6.4.9). Die dabei verwendeten Methoden sind so allgemein, daß sie in weiten Teilen eine Anpassung der Beweisführung auf Operatoren mit $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Kalkül problemlos zulassen. Dabei sprechen wir sinngemäß von einem $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalaren Operator, wenn dieser sich darstellen läßt (bis auf topologische Isomorphie) als Einschränkung eines $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalaren Operators auf einen abgeschlossenen invarianten Teilraum.

Im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit steht nun die Frage, ob sich durch Kombination der beiden vorgestellten Resultate eine Charakterisierung $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalarer Operatoren mit Hilfe von Wachstumsbedingungen gewinnen läßt.

In Satz (3.1.6) wird diese Frage positiv beantwortet, wenn man den Begriff der Wachstumsbedingung weit genug faßt. Wir zeigen dort:

Ein Operator $T \in L(X)$ ist genau dann $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar, wenn Konstanten $c > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$ existieren, so daß einerseits die Normabschätzungen

$$\|T^n\| \leq c(1+n)^k \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

gelten, und andererseits zu jedem $x' \in X'$ eine Folge $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in X' existiert mit

$$T'x'_{n+1} = x'_n \quad (n \in \mathbb{N}_0), \quad x'_0 = x' \text{ und } \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{\|x'_n\|}{(1+n)^k} < \infty.$$

Weiterhin offen ist die Frage, ob die für einen $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalaren Operator notwendigen einfacheren Bedingungen (vgl. (2.1.5))

$$\frac{a\|x\|}{(1+n)^k} \leq \|T^n x\| \leq b(1+n)^k \|x\| \quad (x \in X, n \in \mathbb{N}_0)$$

mit $a, b > 0$ und $k \in \mathbb{N}_0$ die Existenz einer Erweiterung für T mit $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Kalkül erzwingen. Daß dies für die Klasse gewichteter einseitiger Shiftoperatoren auf Hilberträumen durchaus der Fall ist, werden wir in Abschnitt 5.2 sehen. Durch Verschärfen der Abschätzung nach unten erhält man daraus ein für alle Banachraum-Operatoren hinreichendes (wenn auch dann nicht mehr notwendiges) Kriterium, siehe (5.1.3).

Eine zweite Möglichkeit, $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalare Operatoren zu charakterisieren, findet man in (3.3.1). Dort spielen "langsam wachsende" lokale Resolventen für den adjungierten Operator die zentrale Rolle. Ein ähnliches Wachstumsverhalten wurde in einer Arbeit von T.L. Miller, V.G. Miller und R.C. Smith beim Studium des Cesàro-Operators C_p auf dem Hardyraum H^p beobachtet (vgl. [14]). Der wesentliche Unterschied besteht jedoch darin, daß bei C_p ein Ausnahmepunkt existiert, in dessen Umgebung sich das Wachstumsverhalten nur sehr schlecht kontrollieren läßt (vgl. (5.3.3)(c)).

Vor diesem konkreten Hintergrund wird im vierten Kapitel eine Theorie entwickelt, die nicht nur einpunktige, sondern allgemein kompakte Ausnahmemengen zuläßt. Den Abschluß bildet hier ein Kriterium zum Nachweis der Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ modulo einer Ausnahmemenge (4.3.3). Angewendet auf den Cesàro-Operator C_p $(0 < p < 1)$ erhält man für diesen die Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ modulo $\{0\}$ (vgl. Abschnitt 5.3).

Was bisher unerwähnt blieb, ist die der Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ nachempfundene Bedingung $(\beta)_{\mathcal{E}(\mathbb{T})}$, welche (vgl. Abschnitt 2.3) definitionsgemäß besagt, daß

$$\mathcal{E}(\mathbb{T}, X) \xrightarrow{z-T} \mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$$

topologischer Monomorphismus ist. In Eschmeier und Putinar [8], Corollary 6.4.8, wird gezeigt, daß $(\beta)_{\mathcal{E}}$ (d.h. die obige Bedingung mit $\mathcal{E}(\mathbb{C}, X)$ statt $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$) gerade die subskalaren Operatoren charakterisiert. Vor diesem Hintergrund wird versucht, die Theorie der Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}(\mathbb{T})}$ konsequent mitzuentwickeln. Einfache Gegenbeispiele zeigen, vgl. (3.5.3), daß die Eigenschaften $(\beta)_{\mathcal{E}(\mathbb{T})}$ und $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar nicht äquivalent sind. Zu einem vorläufigen Ende geführt werden die Betrachtungen daher durch den Satz (3.5.2), der zeigt, daß durch eine Ergänzung der Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}(\mathbb{T})}$ um zwei weitere Bedingungen eine äquivalente Beschreibung $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalarer Operatoren erreicht werden kann.

Zum Schluß möchte ich die Gelegenheit wahrnehmen und all denen danken, die zu einem Gelingen dieser Arbeit - in welcher Form auch immer - beigetragen haben. Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr. Jörg Eschmeier, der in mir die Begeisterung für lokale Spektraltheorie geweckt hat und mir während der Entstehung dieser Arbeit ständig neue Impulse gab. Desweiteren danke ich Herrn Prof. Dr. T.L. Miller, der mir bei einem Gastaufenthalt an der Universität des Saarlandes für Diskussionen bereitwillig zur Verfügung stand, meiner Freundin Christine Küntzer, die die mühsame Arbeit des Korrekturlesens übernommen hat, sowie Herrn Dipl.-Math. Eric Réolon, der mir bei einer letzten Durchsicht behilflich war.

Schließlich möchte ich einen besonderen Dank meinen Eltern aussprechen, die mir das Studium der Mathemathik und Physik überhaupt erst ermöglicht und mich auch während des Studiums in jeder Hinsicht tatkräftig unterstützt haben.

Theley, im Dezember 1998 Michael Didas

Inhaltsverzeichnis

1 Funktionen mit Werten in Banachräumen

Viele in der lokalen Spektraltheorie zentralen Eigenschaften von Operatoren lassen sich in besonders einfacher Weise mit Hilfe von Multiplikationsoperatoren auf geeigneten Funktionenräumen beschreiben. So besitzt ein stetig linearer Operator T auf einem Banachraum X die eindeutige Fortsetzungseigenschaft genau dann, wenn die Abbildung

$$z - T : \mathcal{O}(U, X) \to \mathcal{O}(U, X); \quad f \mapsto zf - Tf$$

für jede offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ injektiv ist. Daß sie ein topologischer Monomorphismus ist, ist äquivalent dazu, daß T Bishops Eigenschaft (β) besitzt, also Einschränkung eines zerlegbaren Operators auf einen invarianten Unterraum ist (Albrecht und Eschmeier [2]). Ferner lassen sich die subskalaren Operatoren (also Einschränkungen verallgemeinert skalarer Operatoren im Sinne von Colojoară und Foiaş) dadurch charakterisieren, daß

$$\mathcal{E}(\mathbb{C}, X) \xrightarrow{z-T} \mathcal{E}(\mathbb{C}, X)$$

topologischer Monomorphismus ist (Eschmeier und Putinar [8], Corollary 6.4.9). Da man bei der Untersuchung $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalarer Operatoren auf ganz ähnliche Bedingungen stößt, soll im ersten Kapitel kurz auf die relevanten Funktionenräume (insbesondere deren Topologisierung) eingegangen werden. Im Mittelpunkt steht dabei der Raum $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ der glatten Funktionen auf der Einheitskreislinie.

Der folgende erste Abschnitt dient lediglich dazu, die Notation (insbesondere der erzeugenden Halbnormensysteme) festzulegen. X bezeichnet durchweg einen Banachraum.

1.1 Stetig differenzierbare Funktionen

1.1.1 Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to X$ heißt differenzierbar in $t_0 \in \mathbb{R}$, falls ein $y \in X$ existiert, so daß $\frac{1}{|t-t_0|} \parallel f(t) - f(t_0) - (t - t_0)y \parallel \to 0$ für $t \to t_0$.

Man sieht leicht, daß y in diesem Fall eindeutig bestimmt ist, und schreibt $\frac{d}{dt} f(t_0) := y$. Eine Funktion f heißt kurz differenzierbar, falls f in jedem $t_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Wie im skalarwertigen Fall betrachtet man iterierte Ableitungen und definiert die Räume $C^k(\mathbb{R}, X)$ bzw. $\mathcal{E}(\mathbb{R}, X)$ als Klasse der k-mal bzw. beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}$ nach X. Sie tragen in natürlicher Weise die Fréchetraum-Topologie der kompakt gleichmäßigen Konvergenz in allen Ableitungen. Es ist dies die von den Halbnormen

$$p_{n,j}(f) := \sup_{\substack{t \in [-n,n] \\ 0 \leq m \leq j}} \parallel \frac{d^m}{dt^m} f(t) \parallel$$

mit $j \in \{1, \cdots, k\}$ bzw. $j \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}$ erzeugte lokalkonvexe Topologie. Für den Fall $X = \mathbb{C}$ sind die hier gemachten Definitionen natürlich konsistent und wir schreiben kurz $C^k(\mathbb{R})$ für $C^k(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ bzw. $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ für $\mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, wie wir dies auch in Zukunft für andere Banachraum-wertige Funktionenklassen tun werden, falls $\mathbb{C}$ als Bildraum auftritt.

1.1.2 Durch punktweise Multiplikation mit skalarwertigen Funktionen wird eine bilineare Verknüpfung

$$C^k(\mathbb{R}) \times C^k(\mathbb{R}, X) \to C^k(\mathbb{R}, X); \quad (\varphi, f) \mapsto \varphi f$$

erklärt, für die man wie üblich die Produktregel der Differentiation bestätigt; induktiv erhält man also auch hier die Leibniz-Regel für höhere Ableitungen eines Produktes.

Ebenso wie im skalarwertigen Fall beweist man für Kompositionen der Form $f \circ g : \mathbb{R} \to X$ von differenzierbaren Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to X$ die Kettenregel $\frac{d}{dt}(f \circ g)(t) = \frac{df}{dt}(g(t))\frac{dg}{dt}(t)$.

Für später bemerken wir noch, daß für $T \in L(X,Y)$ mit $f : \mathbb{R} \to X$ auch $T \circ f : \mathbb{R} \to Y$ differenzierbar ist mit Ableitung $\frac{d}{dt}(T \circ f)(t_0) = T\frac{d}{dt}f(t_0)$ für alle $t_0 \in \mathbb{R}$ (man mache sich einfach in der Definition der Ableitung die Linearität und Beschränktheit zunutze). Speziell gilt diese Relation, wenn man für T eine stetige Linearform einsetzt.

1.1.3 Betrachtet man zu den oben definierten Funktionenklassen den jeweilgen Unterraum der 2π-periodischen Funktionen $C^k_{per}(\mathbb{R}, X) \subset C^k(\mathbb{R}, X)$ bzw. $\mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}, X) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}, X)$, so überzeugt man sich unmittelbar, daß die Relativtopologie bezüglich des jeweiligen Oberraumes äquivalent ist zur Topologie der gleichmäßigen Konvergenz in allen Ableitungen und als solche schon von dem folgenden Halbnormensystem erzeugt wird:

$$\|f\|_j = \sup_{\substack{t\in\mathbb{R}\\ 0\le m\le j}} \|\frac{d^m}{dt^m}f(t)\| \qquad (0 \le j \le k \text{ bzw. } j \in \mathbb{N}_0).$$

(Man beachte, daß für $n > 2\pi$ gilt $p_{n,k}(f) = \|f\|_k \quad (k \in \mathbb{N}_0)$, sowie $\|f\|_k \ge p_{n,k}(f)$ für alle $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0$). Der Grenzwert einer konvergenten Folge $(f_n)_n$ von Funktionen aus $C^k_{per}(\mathbb{R}, X)$ bzw. $\mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}, X)$ ist einerseits von der gewünschten Differenzierbarkeitsklasse (Vollständigkeit der Oberräume), andererseits sind alle betrachteten Topologien jedenfalls stärker als die der punktweisen Konvergenz, womit die Grenzfunktion auch periodisch ist, denn:

$$\|f(t+2\pi) - f(t)\| \le \|f(t+2\pi) - f_n(t+2\pi)\| + \|f_n(t) - f(t)\| \to 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Somit sind $C^k_{per}(\mathbb{R}, X)$ bzw. $\mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}, X)$ selbst Frécheträume.

1.1.4 Wir werden im folgenden Funktionalkalküle von solchen Operatoren untersuchen, deren Spektrum im Torus $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ enthalten ist. Für diesen Zweck ist es angemessener, die 2π-periodischen Funktionen auf $\mathbb{R}$ in einem etwas anderen Gewand zu betrachten, und zwar als Funktionen auf dem Torus vermöge der Definition:

$$\mathcal{E}(\mathbb{T}, X) := \{f : \mathbb{T} \to X \text{ mit } (t \mapsto f(e^{it})) \in \mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}, X)\}.$$

D.h. mittels der Exponentialfunktion wird einfach die differenzierbare Struktur der reellen Achse auf die Einheitskreislinie übertragen. Die Topologie ist durch die Forderung bestimmt, daß die Abbildung $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X) \ni f \xmapsto{i_X} f(e^{i\cdot}) \in \mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}, X)$ ein topologischer Isomorphismus ist. Ein erzeugendes Halbnormensystem erhält man also durch Zurückziehen der Halbnormen von $\mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}, X)$, von denen wir auch die Bezeichnungen übernehmen:

$$\|f\|_k := \|i_X(f)\|_k = \sup_{\substack{t\in\mathbb{R}\\ 0\le m\le k}} \|\frac{d^m}{dt^m}f(e^{it})\| \qquad (f \in \mathcal{E}(\mathbb{T}, X), k \in \mathbb{N}_0).$$

Beachten sollte man noch, daß dieses Halbnormensystem wegen $\|\cdot\|_k \le \|\cdot\|_{k+1}$ sogar aufwärts gerichtet ist. Es dürfte klar sein, wie man mit diesem Verfahren die Räume $C^k(\mathbb{T}, X)$ der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf dem Torus konstruiert und mit einer Fréchetraum-Topologie versieht. Man überlegt sich leicht weiter, daß $\|\cdot\|_k$ auf $C^k(\mathbb{T}, X)$ eine Norm ist, die - wegen der Gerichtetheit des erzeugenden Halbnormensystems - die ursprüngliche Topologie erzeugt, d.h. $(C^k(\mathbb{T}, X), \|\cdot\|_k)$ ist sogar ein Banachraum.

1.2 Integration Banachraum-wertiger Funktionen

Der Raum $\mathcal{E}(\mathbb{T})$ läßt sich mit Hilfe der Fouriertransformation auch als Folgenraum darstellen und hat somit eine gut durchschaubare Struktur. Bevor wir uns davon überzeugen können, daß dies auch im Banachraum-wertigen Fall so ist, stellen wir die wesentlichen Eigenschaften des Riemann-Integrals für X-wertige Funktionen zusammen, auf welches wir für die Darstellung der Fourierkoeffizienten einer Funktion $f \in \mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}, X)$ zurückgreifen werden.

1.2.1 Zur Konstruktion des Riemann-Integrals für Funktionen mit Werten in Banachräumen sei auf Heuser [11], S.335 verwiesen. Wie im skalarwertigen Fall ist das Riemann-Integral einer Funktion $f : [a, b] \to X$ im wesentlichen definiert über Grenzwerte einer Folge "Riemannscher Summen" der Form

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(\tau_\nu)(t_\nu - t_{\nu-1})$$

für Zerlegungen $\{t_0, \cdots, t_n\}$ von $[a, b]$ und Zwischenpunkte τ_i, $t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$ $(i = 1, \cdots, n)$. Funktionen, für die dieser Grenzprozeß Sinn macht, nennt man R-integrierbar, der zugehörige Grenzwert in X wird mit $\int_a^b f(t)dt$ bezeichnet. (Ein Integrabilitätskriterium findet man etwa auf S.336 in [11].) Für unsere Zwecke sind (neben der Linearität) die folgenden einfachen Eigenschaften des Riemann-Integrals von Bedeutung:

1.2.2 Seien $[a, b]$, $[c, d]$ zwei (nichtleere) kompakte Intervalle in $\mathbb{R}$. Dann gilt:

(a) Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to X$ ist R-integrierbar.

(b) Ist $f : [a, b] \to X$ R-integrierbar, $T \in L(X, Y)$, so ist auch $T \circ f : [a, b] \to Y$ R-integrierbar, und es gilt: $\int_a^b Tf(t)dt = T\int_a^b f(t)dt$.

(c) Ist $f : [a, b] \to X$ stetig, so gilt die verallgemeinerte Dreiecksungleichung $\|\int_a^b f(t)dt\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt$, insbesondere darf eine gleichmäßig konvergente Reihe stetiger Funktionen gliedweise integriert werden.

(d) Für $f \in C^1(\mathbb{R}, X)$ gilt: $\int_a^b \frac{d}{dt}f(t)dt = f(b) - f(a)$, und Produkte der Form $\varphi' f$ bzw. $\varphi f'$ mit $\varphi \in C^1(\mathbb{R}), f \in C^1(\mathbb{R}, X)$ können nach der üblichen Regel partiell integriert werden.

(e) Ist $f : [c, d] \to X$ stetig und $\varphi : [a, b] \to [c, d]$ stetig differenzierbar, so gilt die Substitutionsregel: $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s)ds$.

(f) Ist $f \in C([a, b] \times [c, d], X)$, so ist die durch $F(s) := \int_a^b f(t, s)dt$ definierte Funktion $F : [c, d] \to X$ stetig.

Beweis.

(a) Vgl. Heuser [11], S.336.

(b) Folgt unmittelbar durch Betrachtung von Riemann-Summen für die Funktion $T \circ f$ und Durchführung eines Grenzüberganges.

(c) Entweder imitiert man den Beweis aus dem skalarwertigen Fall, oder man argumentiert mit (b) und Hahn-Banach: Wählt man etwa ein $x' \in X'$ mit $x'(\int_a^b f(t)dt) = \|\int_a^b f(t)dt\|$ und $\|x'\| = 1$, so liefert (b):

$$\|\int_a^b f(t)dt\| = x'(\int_a^b f(t)dt) = \int_a^b x'f(t)dt \leq \int_a^b \|f(t)\|dt.$$

(d) Da $\frac{d}{dt}f$ stetig auf $[a,b]$ ist, existiert das Integral, und mit den Bemerkungen über Vertauschbarkeit von Differentiation und Linearformen (vgl. (1.1.2)) haben wir:

$$x' \int_a^b \frac{d}{dt} f(t)dt = \int_a^b x' \frac{d}{dt} f(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(x' \circ f)(t)dt = x'f(b) - x'f(a),$$

wobei der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung im skalarwertigen Fall benutzt wurde. Gleichheit gilt für alle $x' \in X'$, also folgt der erste Teil der Behauptung, da X' die Punkte von X trennt.

Die Regel für partielle Integration erhält man durch Integration der Produktregel unter Ausnutzung der Linearität des Integrals und des gerade hergeleiteten Hauptsatzes im X-wertigen Fall.

(e) Mit f und φ ist auch $f \circ \varphi \cdot \varphi'$ stetig, folglich R-integrierbar, und für beliebiges $x' \in X'$ gilt unter Berufung auf die skalarwertige Substitutionsregel:

$$\begin{aligned} x' \int_a^b f(g(t))g'(t)dt &= \int_a^b x' \circ f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} x' \circ f(x)dx \\ &= x' \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx. \end{aligned}$$

(f) Wir fixieren ein $s_0 \in [c,d]$ und schätzen für beliebiges $s \in [c,d]$ mit Hilfe der verallgemeinerten Dreiecksungleichung aus Teil (c) wie folgt ab:

$$\begin{aligned} \|F(s) - F(s_0)\| &= \|\int_a^b (f(t,s) - f(t,s_0))dt\| \\ &\le \int_a^b \|f(t,s) - f(t,s_0)\|dt. \end{aligned}$$

Für $s \to s_0$ strebt dieser Ausdruck jedoch nach dem Satz über Stetigkeit skalarwertiger Parameterintegrale gegen Null. $\diamondsuit$

1.2.3 Zum Abschluß noch eine triviale, aber nützliche Bemerkung: Für ein $x \in X$ und eine Funktion $\varphi \in C(\mathbb{R})$ ist natürlich $\varphi \cdot x \in C(\mathbb{R}, X)$ und somit über $[a,b]$ integrierbar, und es gilt: $\int_a^b \varphi(t)xdt = \int_a^b \varphi(t)dt \cdot x$, wie man sich mit (1.2.2)(b) nach Wahl von $T : \mathbb{R} \to X$ als Multiplikationsoperator $\lambda \overset{T}{\longmapsto} \lambda x$ vergewissert.

1.3 Fourierentwicklung für $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$-Funktionen

Nach den Betrachtungen aus dem letzten Abschnitt können wir nun problemlos die Fourierkoeffizienten einer Funktion $f \in C_{per}(\mathbb{R}, X)$ in Analogie zum skalarwertigen Fall definieren als

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt \in X \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Um der Formel das gewohnte Aussehen zu geben, schreiben wir dabei im Integranden die Skalarmultiplikation auf X als Rechtsmultiplikation.

Mit Hilfe der (nun X-wertig etablierten) partiellen Integration werden wir uns überzeugen, daß die Folge der Fourierkoeffizienten einer $\mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}, X)$-Funktion ein charakteristisches Wachstumsverhalten zeigt. Vorweg definieren wir den Raum der schnell fallenden Folgen in X

$$s_X := \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subset X : \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|a_n\|(1+|n|)^k < \infty \quad \forall k \in \mathbb{N}_0\}$$

mit zugehörigem erzeugenden Halbnormensystem

$$\|(a_n)_n\|_{1,k} := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|a_n\|(1+|n|)^k \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

s_X wird dadurch zum Fréchetraum. Nun können wir das Wachstumsverhalten wie folgt charakterisieren:

1.3.1 Lemma. *Die Fourierkoeffizienten einer Funktion $f \in \mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}, X)$ erfüllen:*

(a) $\widehat{f^{(m)}}(n) = (in)^m \hat{f}(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}_0$

(b) $\|\hat{f}(n)\| \leq \frac{1}{|n|^m}\|f\|_m \quad \forall n \in \mathbb{Z} - \{0\}, m \in \mathbb{N}_0$

(c) $(\hat{f}(n))_n \in s_X$*, genauer:*

(d) $\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \exists c_k > 0 \quad \forall f \in \mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}, X) : \|(\hat{f}(n))_n\|_{1,k} \leq c_k\|f\|_{k+2}$.

Die ersten beiden Teilaussagen gelten auch für $C^k_{per}(\mathbb{R}, X)$-Funktionen für $m \leq k$.

Beweis.

(a) Für $n = m = 0$ ist die Aussage offenbar richtig. Ist $m \geq 1$, so ergibt sich der 0-te Fourierkoeffizient von f zu

$$\widehat{f^{(m)}}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d^m}{dt^m} f(e^{it})dt,$$

und das ist Null (wie behauptet), was man mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sofort feststellt, da mit f auch alle Ableitungen 2π-periodisch sind.

Für für $n \neq 0$ liefert partielle Integration die Beziehung

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-int}}{-in}f(t)\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)\frac{e^{-int}}{-in}dt \\ &= (\frac{1}{in})\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}dt, \end{aligned}$$

wobei der Randterm wegen der Periodizität von f verschwindet. Induktiv - jede weitere partielle Integration liefert erneut den Faktor $\left(\frac{1}{in}\right)$ und eine um 1 höhere Ableitungsstufe im Integranden - folgt:

$$\hat{f}(n) = (\frac{1}{in})^m \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^{(m)}(t)e^{-int}dt = (\frac{1}{in})^m \widehat{f^{(m)}} \quad \forall n \in \mathbb{Z} - \{0\}, m \in \mathbb{N}_0,$$

und man erhält

(b) mittels (1.2.2)(c)

$$\|\hat{f}(n)\| \leq \frac{1}{|n|^m} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|e^{-int} f^{(m)}(t)\| \leq \frac{1}{|n|^m} \sup_{\substack{t\in\mathbb{R} \\ 0\leq k\leq m}} \|f^{(k)}(t)\| = \frac{1}{|n|^m} \|f\|_m$$

für $n \in \mathbb{Z} - \{0\}, m \in \mathbb{N}_0$ wie oben.

(c) Mit $m = k+2, k \in \mathbb{N}_0$ beliebig, sieht man leicht:

$$\|(\hat{f}(n))_n\|_{1,k} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|\hat{f}(n)\|(1+|n|)^k \leq \sum_{n\neq 0} \|f\|_{k+2} \frac{(1+|n|)^k}{|n|^{k+2}} + \|\hat{f}(0)\|.$$

Die Reihe konvergiert, da sich ihre Glieder asymptotisch wie $\frac{1}{n^2}$ verhalten. Den Reihenwert bezeichnen wir mit M_k. Weiter schätzen wir den 0-ten Fourierkoeffizienten ab:

$$\|\hat{f}(0)\| = \frac{1}{2\pi} \| \int_0^{2\pi} f(t)dt\| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\| = \|f\|_0 \leq \|f\|_{k+2} \quad (\forall k \in \mathbb{N}_0).$$

Also: $\|(\hat{f}(n))_n\|_{1,k} \leq (M_k + 1)\|f\|_{k+2}$, und damit folgt die Behauptung, da der Vorfaktor endlich ist und nur von k abhängt. $\diamondsuit$

1.3.2 Lemma. *Sei $(a_n)_n \in s_X$. Dann konvergiert die Fourierreihe $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{int}$ in $\mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}, X)$ gegen eine Funktion f mit $\hat{f}(n) = a_n \quad (\forall n \in \mathbb{Z})$.*

Beweis. Sei $(a_n)_n \in s_X$ beliebig. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|\frac{d^m}{dt^m} a_n e^{int}\| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |in|^m \|a_n\| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|a_n\|(1+|in|)^m < \infty.$$

Daher konvergieren nach dem Weierstraßschen Majorantentest die Reihe $\sum a_n e^{int}$ sowie die Reihen der Ableitungen beliebiger Ordnung gleichmäßig auf $\mathbb{R}$, d.h. die Reihe konvergiert in der Topologie von $\mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}, X)$ gegen eine Funktion f aus diesem Raum (Vollständigkeit von $\mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}, X)$). Die Fourierkoeffizienten von f ermittelt man nach Vertauschung von Reihe und Integral (gleichmäßige Konvergenz) zu

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikt} a_k \cdot e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t} dt \cdot a_k = a_n,$$

denn das letzte Integral liefert 2π für $k = n$ und 0 sonst (Periodizität). $\diamondsuit$

1.3.3 Satz. *Jede Funktion $f \in \mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}, X)$ läßt sich in eine (in der $\mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}, X)$-Topologie konvergente) Fourierreihe $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{int}$ entwickeln.*

Beweis. Die Fourierkoeffizientenfolge $(\hat{f}(n))_n$ einer beliebig vorgegebenen Funktion $f \in \mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}, X)$ ist nach (1.3.1)(c) ein Element von s_X. Nach (1.3.2) konvergiert dann die Fourierreihe von f (in der passenden Topologie) gegen eine Funktion $g \in \mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}, X)$, für die gilt: $\hat{g}(n) = \hat{f}(n)$ $(n \in \mathbb{Z})$. Bleibt zu zeigen: $g = f$. Dazu benutzen wir die Tatsache, daß für beliebiges $x' \in X'$ die beiden Funktionen $x' \circ g$ und $x' \circ f$ (skalarwertige) $\mathcal{E}_{per}(\mathbb{R})$-Funktionen sind, deren Fourierkoeffizienten übereinstimmen. Ist nämlich $x' \in X'$ beliebig, so hat man

$$\widehat{(x' \circ g)}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x' g(e^{it}) e^{-int} dt = x' \hat{g}(n),$$

und gleiches gilt mit f statt g, also wegen $\hat{g}(n) = \hat{f}(n)$ $(n \in \mathbb{Z})$ auch

$$\widehat{(x' \circ g)}(n) = \widehat{(x' \circ f)}(n) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

für beliebiges $x' \in X'$. Aus der skalarwertigen Fouriertheorie wissen wir dann allerdings, daß schon

$$x'g(e^{it}) = x'f(e^{it}) \quad (t \in \mathbb{R})$$

für alle $x' \in X'$ gelten muß. Dies genügt jedoch, da X' auf X punktetrennend ist. $\diamondsuit$

Der Satz lehrt insbesondere, daß die trigonometrischen Polynome in $\mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}, X)$ bzw. $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ dicht liegen, eine Struktureigenschaft, die insbesondere in der Darstellung von $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ als Tensorprodukt wertvolle Dienste leistet. Halten wir also fest:

1.3.4 Korollar. *Die trigonometrischen Polynome liegen dicht in $\mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}, X)$. Insbesondere gilt: $\mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}, X) = \overline{\text{lin}}\{\varphi \cdot x : \varphi \in \mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}), x \in X\}$.*

Beweis. Die Partialsummen der zu $f \in \mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}, X)$ gehörigen Fourierreihe sind trigonometrische Polynome der Form $\sum_{n=-l}^{l} \hat{f}(n)e^{int}$, liegen also insbesondere auch in lin $\{\varphi \cdot x : \varphi \in \mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}), x \in X\}$. Nach dem letzten Satz wissen wir: die Partialsummen konvergieren in $\mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}, X)$, d.h. f ist approximierbar durch trigonometrische Polynome, was auch die nichttriviale Inklusion „$\subset$“ zeigt, denn f als Grenzwert liegt in $\overline{\text{lin}}\{\cdots\}$. $\diamondsuit$

Durch Kombination der einzelnen Teilergebnisse erhalten wir die folgende topologische Identifizierung:

1.3.5 Satz. *Die Fourierentwicklung*

$$F : \mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}, X) \to s_X; \quad f \mapsto (\hat{f}(n))_n \text{ mit } \hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$$

ist ein topologischer Isomorphismus.

Beweis. Nach Lemma (1.3.1) (c) ist die Abbildung F wohldefiniert, und somit offenbar linear (Linearität des Integrals in der Definition von $\hat{f}(n)$). Die Abschätzung (1.3.1) (d) ist dann aber nichts anderes als die Stetigkeit von F bezüglich der auf $\mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}, X)$ bzw. s_X eingeführten lokalkonvexen Topologien. Zur Injektivität: $F(f) = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z} : \hat{f}(n) = 0$, also mit (1.3.3) $f(t) = \sum_n e^{int}\hat{f}(n) \equiv 0$. Desweiteren liefert Lemma (1.3.2) zu jedem Element aus s_X ein Urbild unter F. Da s_X ein Fréchetraum ist, folgt die Stetigkeit von F^{-1} aus dem Prinzip der offenen Abbildung. $\diamondsuit$

Wir werden nun noch anstelle glatter Funktionen solche mit endlicher Differenzierbarkeitsordnung untersuchen. Es ist klar, daß die obige Beweisführung im Falle $f \in C^k_{per}(\mathbb{R}, X)$ nicht mehr anwendbar ist. Trotzdem läßt sich mit dem Verfahren der Cesàro-Mittel noch die folgende Aussage retten:

1.3.6 Satz. *Für $k \in \mathbb{N}_0$ liegen die trigonometrischen Polynome dicht in $C^k_{per}(\mathbb{R}, X)$. Oder abgeschwächt: $C^k_{per}(\mathbb{R}, X) = \overline{\text{lin}}\{\varphi \cdot x : \varphi \in \mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}), x \in X\}$, wobei sich der Abschluß auf die C^k-Topologie bezieht.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage in mehreren Schritten. Es sei zunächst $f \in C_{per}(\mathbb{R}, X)$. Für die Folge der Partialsummen der zu f gehörigen Fourierreihe gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikt} &= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iks}f(s)ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{-ik(s-t)}f(s)ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\sum_{k=-n}^{n} e^{-ik\tau})f(\tau+t)d\tau.
\end{aligned}$$

Für den sogenannten Dirichlet-Kern

$$D_n(\tau) := \sum_{k=-n}^{n} e^{-ik\tau}$$

verifiziert man ohne große Mühe

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(\tau)d\tau = 2\pi \quad \text{sowie} \quad D_n(\tau) = D_n(-\tau).$$

Unter Ausnutzung dieser letztgenannten Symmetrie überzeugt man sich durch Substitution von der Gültigkeit der Beziehung

$$\int_{-\pi}^{0} f(t+\tau)D_n(\tau)d\tau = \int_{\pi}^{0} f(t-\tau)D_n(-\tau)(-1)d\tau = \int_{0}^{\pi} f(t-\tau)D_n(\tau)d\tau,$$

was ausgehend von der oben gewonnenen Darstellung

$$\sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+\tau)D_n(\tau)d\tau$$

zu folgendem Ausdruck führt:

$$\sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikt} = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}[f(t+\tau)+f(t-\tau)]D_n(\tau)d\tau.$$

Für $m \in \mathbb{N}$ definieren wir das m-te Cesàro-Mittel als

$$\begin{aligned}
(C_m f)(t) &:= \frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m}\sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikt} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}[f(t+\tau)+f(t-\tau)]\frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m} D_n(\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}[f(t+\tau)+f(t-\tau)]F_m(\tau)d\tau,
\end{aligned}$$

wobei wir die Integraldarstellung von oben ausgenutzt haben und abkürzend

$$F_m(\tau) = \frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m} D_n(\tau)$$

für den Fejérkern schreiben. Für diesen verifiziert man die folgende geschlossene Darstellung (vgl. Heuser [11]):

$$F_m(\tau) = \frac{1}{(m+1)}\frac{\sin^2(m+1)\frac{\tau}{2}}{\sin^2\frac{\tau}{2}}$$

(in $\tau = 0$ stetig fortgesetzt), woraus wir sofort folgern, daß für $0 < \delta \leq \tau \leq 2\pi - \delta$ gilt:

$$0 \leq F_m(\tau) \leq \frac{1}{(m+1)} \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

Weiter gilt für alle $m \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^\pi F_m(\tau) d\tau = \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^{m} \int_0^\pi D_n(\tau) d\tau = \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^{m} \pi = \pi,$$

also für alle $t \in \mathbb{R}$: $\quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi 2f(t) F_m(\tau) d\tau$, so daß wir abschließend folgende Darstellung gefunden haben:

$$(C_m)f(t) - f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2f(t)] F_m(\tau) d\tau.$$

Schreiben wir abkürzend $g(t,\tau) := f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2f(t)$, so läuft nun alles darauf hinaus, zu zeigen, daß

$$\int_0^\pi g(t,\tau) F_m(\tau) d\tau \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{gleichmäßig in } t \in \mathbb{R};$$

damit ist dann nachgewiesen, daß für stetiges f gilt: $C_m f \to f$ (gleichmäßig), wobei die C_m trigonometrische Polynome sind, wie man in ihrer Definition leicht nachliest.

Zunächst überlegen wir uns, daß eine 2π-periodische stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to X$ automatisch gleichmäßig stetig ist (denn wegen der Periodizität genügt es zu bemerken, daß f auf einem beliebigen, das Periodizitätsintervall $[0, 2\pi]$ echt umfassenden, kompakten Intervall gleichmaßig stetig ist).

Somit wissen wir: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \in (0,\pi) \quad \forall \tau \in (0,\delta) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\|f(t+\tau) - f(t)\| < \frac{\varepsilon}{4\pi} \text{ und } \|f(t-\tau) - f(t)\| < \frac{\varepsilon}{4\pi},$$

mit der Dreiecksungleichung also:

$$\|g(t,\tau)\| \leq \|f(t+\tau) - f(t)\| + \|f(t-\tau) - f(t)\| < \frac{\varepsilon}{2\pi}.$$

Damit macht ein Teil des zu betrachtenden Integrals jedenfalls keine Probleme:

$$\| \int_0^\delta g(t,\tau) F_m(\tau) d\tau \| \overset{(F_m \geq 0)}{\leq} \int_0^\delta \|g(t,\tau)\| F_m(\tau) d\tau \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^\pi F_m(\tau) d\tau = \frac{\varepsilon}{2},$$

und dies ist unabhängig von m und $t \in \mathbb{R}$. Bei dem noch verbleibenden Integral $\int_\delta^\pi (\cdots) d\tau$ nutzen wir die Tatsache aus, daß $\|g(t,\tau)\| \leq 4\|f\|_0$ unabhängig von t und τ gilt. Zusammen mit der Abschätzung für den Fejérkern erhält man damit:

$$\begin{aligned} \| \int_\delta^\pi g(t,\tau) F_m(\tau) d\tau \| &\leq \int_\delta^\pi \|g(t,\tau)\| F_m(\tau) d\tau \\ &\leq \frac{4\pi \|f\|_0}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \frac{1}{m+1} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

für m hinreichend groß in Abhängigkeit von $\delta = \delta(\varepsilon)$, unabhängig von t. Insgesamt ist somit erreicht worden, daß

$$\| \int_0^\pi g(t,\tau) F_m(\tau) d\tau \| < \varepsilon \quad \forall m \geq m_0(\varepsilon) \quad (t \in \mathbb{R} \text{ beliebig}).$$

Damit ist die gleichmäßige Konvergenz von $C_m f$ gegen f gesichert. Der Schritt zum C^k-Fall ist nun nicht mehr schwierig, denn für k-mal stetig differenzierbares f rechnet man leicht nach (unter Verwendung von (1.3.1)(a)):

$$\begin{aligned}
(C_m \frac{d^l}{dt^l} f)(t) &= \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f^{(l)}}(k) e^{ikt} \\
&= \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=-n}^{n} (ik)^l \hat{f}(k) e^{ikt} \\
&= \frac{d^l}{dt^l} \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikt} \\
&= \frac{d^l}{dt^l} (C_m f)(t).
\end{aligned}$$

Ist nun $f \in C^k_{per}(\mathbb{R}, X)$, so ist $\frac{d^l}{dt^l} f$ stetig für $0 \leq l \leq k$ und nach dem ersten Teil des Beweises wissen wir dann, daß $C_m \frac{d^l}{dt^l} f \to \frac{d^l}{dt^l} f$ (gleichmäßig auf $\mathbb{R}$). Nach obiger kleiner Rechnung heißt das aber:

$$\frac{d^l}{dt^l} (C_m f)(t) \overset{m \to \infty}{\longrightarrow} \frac{d^l}{dt^l} f \text{ gleichmäßig auf } \mathbb{R}.$$

Mit anderen Worten: $C_m f$ konvergiert gleichmäßig in allen Ableitungen (bis zur Ordnung k) gegen f, das ist aber nichts anderes als die C^k-Konvergenz. Wie oben bereits bemerkt sind die $C_m f$ trigonometrische Polynome und liegen als solche in $\text{lin}\,\{\varphi \cdot x : \varphi \in \mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}), x \in X\}$. Damit folgt die Behauptung des Satzes. ♢

Alle Resultate über 2π-periodische Funktionen auf $\mathbb{R}$ lassen sich natürlich umformulieren als solche über Funktionen auf $\mathbb{T}$. Wir stellen diese im nächsten Satz zusammen; hier wie im folgenden bezeichnen wir mit z kurz die identische Funktion auf $\mathbb{T}$.

1.3.7 Satz. *Definieren wir für eine Funktion $f \in C(\mathbb{T}, X)$ die Fourierkoeffizienten als*

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-ikt} dt \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

so gelten folgende Aussagen:

(a) *Die Fourierreihe $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) z^n$ einer Funktion $f \in \mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ konvergiert in der $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$-Topologie gegen f.*

(b) *Die Fourierentwicklung $F_{\mathbb{T}} : \mathcal{E}(\mathbb{T}, X) \to s_X; \quad f \mapsto (\hat{f}(n))_n$ ist ein topologischer Isomorphismus.*

(c) *Die trigonometrischen Polynome liegen dicht in $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ und in $C^k(\mathbb{T}, X)$ für $k \in N_0$, und es gilt:*

$$\begin{aligned}
C^k(\mathbb{T}, X) &= \overline{lin}\{\varphi \cdot x : \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{T}), x \in X\} \\
\mathcal{E}(\mathbb{T}, X) &= \overline{lin}\{\varphi \cdot x : \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{T}), x \in X\},
\end{aligned}$$

wobei sich der Abschluß auf die Topologie des jeweiligen Oberraumes bezieht.

Beweis.

(a) Mit $f \in \mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ ist $f(e^{i\cdot}) \in \mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}, X)$. Die Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f(e^{i\cdot})}(n)e^{int}$ konvergiert damit jedoch nach (1.3.2) und (1.3.1)(c) in $\mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}, X)$. Nach Definition der Fourierkoeffizienten von f und der Topologie auf $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ ist dies jedoch gleichbedeutend mit der Konvergenz von $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)z^n$ in $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$. Der Grenzwert ist f, denn mit $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\| \sum_{n=-l}^{+l} \hat{f}(n)z^n - f\|_k = \| \sum_{n=-l}^{+l} \widehat{f(e^{i\cdot})}(n)e^{in\cdot} - f(e^{i\cdot})\|_k \to 0$$

nach Lemma (1.3.3).

(b) Man beachte lediglich, daß $F_{\mathbb{T}} = F \circ i_X$ nach Definition der Fourierkoeffizienten einer $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$-Funktion (vgl. (1.1.4) und (1.3.5)), und beide Abbildungen sind topologische Isomorphismen.

(c) Der C^∞-Fall folgt aus (a), für den C^k-Fall setzen wir im Beweis der ersten Aussage die Reihe der Cesàro-Mittel ein (vgl. (1.3.6)). ♢

1.4 Eine Tensorproduktdarstellung von $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$

1.4.1 Für glatte Funktionen $\mathcal{E}(\mathbb{R}, X)$ hat man den topologischen Isomorphismus (Trèves [19], S.533)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(\mathbb{R})\widehat{\otimes}X & \xrightarrow{\Phi_{\mathbb{R}}} & \mathcal{E}(\mathbb{R}, X) \\ \varphi \otimes x & \mapsto & \varphi \cdot x, \end{array}$$

wobei $\Phi_{\mathbb{R}}$ durch diese Angabe eindeutig bestimmt ist, denn die lineare Hülle der Elementartensoren liegt dicht. Wir werden sehen, daß die Einschränkung $\Phi_{\mathbb{R}}|_{\mathcal{E}_{per}(\mathbb{R})\widehat{\otimes}X}$ eine analoge Darstellung von periodischen C^∞-Funktionen ermöglicht. (Was man dazu an Eigenschaften topologischer Tensorprodukte benötigt, findet sich im Anhang.) Zuerst vermerken wir noch:

1.4.2 Lemma. *Folgende Räume sind nuklear: $\mathcal{E}_{per}(\mathbb{R})$, $\mathcal{E}(\mathbb{T})$ und dessen starker Dual $\mathcal{E}'(\mathbb{T})$.*

Beweis. $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ ist nuklear (siehe [19]). Unterräume nuklearer Räume sind nuklear, daher ist $\mathcal{E}_{per}(\mathbb{R})$ nuklear, damit aber auch $\mathcal{E}(\mathbb{T})$, denn die beiden Räume sind topologisch isomorph. Ferner ist ein Fréchetraum genau dann nuklear, wenn sein starker Dual es ist ([19], Prop. 50.6).

Einfacher als die Nuklearität von $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ ist wohl die von s einzusehen, aber auch hier haben wir gezeigt: $\mathcal{E}_{per}(\mathbb{R})$ und $\mathcal{E}(\mathbb{T})$ sind topologisch isomorph zu s, folglich nuklear. ♢

1.4.3 Satz. *Die eindeutig bestimmte stetig lineare Abbildung*

$$\begin{array}{lccc} & \mathcal{E}(\mathbb{T})\widehat{\otimes}X & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{E}(\mathbb{T}, X) \\ \textit{mit} & \Phi(\varphi \otimes x) & = & \varphi \cdot x \quad \textit{für alle } \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{T}),\ x \in X \end{array}$$

ist ein topologischer Isomorphismus.

Beweis. Zunächst überlegen wir uns die Existenz einer eindeutig bestimmten stetig linearen Abbildung $\Phi_0 : \mathcal{E}_{per}(\mathbb{R})\widehat{\otimes}X \to \mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}, X)$, die auf Elementartensoren entsprechend wirkt, d.h. $\Phi_0(\varphi \otimes x) = \varphi \cdot x$ $(\varphi \in \mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}), x \in X)$.

Bezeichnen wir die Einbettungsabbildung $\mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\subset} \mathcal{E}(\mathbb{R})$ mit j, so ist j ein topologischer Monomorphismus (denn $\mathcal{E}_{per}(\mathbb{R})$ ist abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{E}(\mathbb{R})$). Gleiches gilt für die Identität auf X und damit auch für die Abbildung $j \otimes id : \mathcal{E}_{per}(\mathbb{R})\widehat{\otimes}X \to \mathcal{E}(\mathbb{R})\widehat{\otimes}X$ zwischen den Tensorprodukten (beachte: $\mathcal{E}_{per}(\mathbb{R})$ ist nuklear). Identifiziert man nun $\mathcal{E}_{per}(\mathbb{R})\widehat{\otimes}X$ vermöge $j \otimes id$ mit einem abgeschlossenen Unterraum von $\mathcal{E}(\mathbb{R})\widehat{\otimes}X$, so wird die Abbildung Φ_0 zu einer Einschränkung des topologischen Isomorphismus $\Phi_{\mathbb{R}}$ aus (1.4.1). Damit ist Φ_0 topologischer Monomorphismus, und für die Surjektivität braucht man sich nur zu überlegen, daß Φ_0 dichtes Bild hat. Das Bild von Φ_0 enthält aber insbesondere die Bilder von Elementartensoren aus $\mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}) \otimes X$ und damit die Menge lin $\{\varphi \cdot x : \varphi \in \mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}), x \in X\}$, die nach Korollar (1.3.4) dicht in $\mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}, X)$ ist. Die Abbildung Φ entsteht dann aus Φ_0 durch Kombination mit den topologischen Isomorphismen $i_{\mathbb{R}}$ und i_X aus (1.1.4) gemäß des folgenden Diagrammes:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}(\mathbb{T})\widehat{\otimes}X \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "i_{\mathbb{R}}\otimes id"'] & \mathcal{E}(\mathbb{T}, X) \\
\mathcal{E}_{per}(\mathbb{R})\widehat{\otimes}X \arrow[r, "\Phi_0"] & \mathcal{E}_{per}(\mathbb{R}, X). \arrow[u, "(i_X)^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

$\diamondsuit$

Als nächstes wollen wir kurz auf die sich aus der Tensorproduktdarstellung ergebende Dualitätstheorie für $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ eingehen. Vorweg sei an die kanonischen Identifizierungen (E, F Frécheträume, E nuklear)

$$\Theta : E'\widehat{\otimes}F' \xrightarrow{\simeq} (E\widehat{\otimes}F)'$$
$$H : E'\widehat{\otimes}F' \xrightarrow{\simeq} L(E, F')$$

erinnert (zur Funktionsweise siehe Anhang B).

1.4.4 Korollar. *Es gibt eindeutige topologische Isomorphismen:*

(a) $\rho : \mathcal{E}(\mathbb{T}, X)' \longrightarrow (\mathcal{E}(\mathbb{T})\widehat{\otimes}X)'$ *mit* $<\varphi \otimes x, \rho(u)> = <\varphi x, u>$

(b) $\sigma : \mathcal{E}'(\mathbb{T})\widehat{\otimes}X' \longrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{T}, X)'$ *mit* $<\varphi x, \sigma(v \otimes x')> = <\varphi, v><x, x'>$

(c) $\gamma : \mathcal{E}(\mathbb{T}, X)' \longrightarrow L(\mathcal{E}(\mathbb{T}), X')$ *mit* $<x, (\gamma(u))(\varphi)> = <\varphi x, u>$.

Beweis.

(a) Mit der Abbildung Φ aus dem letzten Satz ist natürlich auch die Adjungierte $\rho := \Phi'$ ein topologischer Isomorphismus, dessen Wirkungsweise sich mit beliebigen Elementen $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$, $x \in X$ und $u \in \mathcal{E}(\mathbb{T}, X)'$ wie folgt beschreiben läßt:
$$<\varphi \otimes x, \rho(u)> = <\Phi(\varphi \otimes x), u> = <\varphi x, u> .$$
Weiter ist ρ als stetig lineare Abbildung durch diese Angaben schon eindeutig festgelegt, da die lineare Hülle der Elementartensoren in $\mathcal{E}(\mathbb{T})\widehat{\otimes}X$ dicht liegt.

(b) Mit der Abbildung Θ aus dem Anhang über Tensorprodukte (setze $E := \mathcal{E}(\mathbb{T})$ (nuklear) und $F := X$) und $\rho = \Phi'$ aus Teil (a) setzen wir σ wie folgt zusammen: $\sigma := \rho^{-1} \circ \Theta$. Mit ρ und Θ ist dann auch σ topologischer Isomorphismus, für den man auf Elementartensoren $v \otimes x' \in \mathcal{E}'(\mathbb{T}) \otimes X'$ bestätigt:

$$\begin{aligned} < \varphi x, \sigma(v \otimes x') > &= < \Phi^{-1}(\varphi x), \Theta(v \otimes x') > \\ &= < \varphi \otimes x, \Theta(v \otimes x') > \\ &= < \varphi, v >< x, x' > \end{aligned}$$

für alle $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$, $x \in X$. Wegen der Dichtheitsbeziehungen $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X) = \overline{\text{lin}}\{\varphi x : \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{T}),\ x \in X\}$ (vgl. (1.3.7)(c)) und $\mathcal{E}'(\mathbb{T})\widehat{\otimes} X' = \overline{\text{lin}}\{v \otimes x' : v \in \mathcal{E}'(\mathbb{T}), x' \in X'\}$ legen diese Angaben ρ als stetig lineare Abbildung schon eindeutig fest.

(c) Auch γ können wir aus bereits bekannten Abbildungen zusammensetzen: $\gamma := H \circ \sigma^{-1}$. Nach (b) wissen wir: die lineare Hülle von Elementen der Form $u = \sigma(v \otimes x')$ mit $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{T})$, $x' \in X'$ liegt dicht in $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)'$. Testen wir die Funktionsweise von γ auf einem solchen u, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} < x, (\gamma(u))(\varphi) > &= < x, \big((H \circ \sigma^{-1})(\sigma(v \otimes x'))\big)(\varphi) > \\ &= < x, (H(v \otimes x'))(\varphi) > \\ &= < x, < \varphi, v > x' > \\ &= < \varphi, v >< x, x' > \\ &= < \varphi x, \sigma(v \otimes x') > \\ &= < \varphi x, u > \end{aligned}$$

mit $x \in X$ beliebig. Mit dem Dichtheitsargument von oben (und da X auf X' die Punkte trennt), ist γ durch diese Angaben eindeutig bestimmt. $\diamondsuit$

1.5 $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ als projektiver Limes

Neben der Tensorproduktdarstellung aus dem letzten Abschnitt wird uns eine andere Darstellung von $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ oft von Nutzen sein. An ihr läßt sich auch in besonders einfacher Weise das Konzept des projektiven Limes verdeutlichen. In unserem Fall ist dies die mathematisch exakte Formulierung der Vorstellung, daß der Raum der C^∞-Funktionen sich stufenweise approximieren läßt aus C^k-Funktionen immer höherer Regularitätsklasse. Zunächst zu den grundlegenden Begrifflichkeiten:

1.5.1 Ein System von Fréchetärumen $\{E_k : k \in \mathbb{N}_0\}$ (Stufen) mit einer Familie von stetig linearen Abbildungen $\pi := \{\pi_{kl} : E_l \to E_k;\quad l \geq k\}$ (Strukturabbildungen) bildet ein abzählbares projektives Spektrum von Fréchetärumen, falls folgende beiden Strukturaxiome gelten:

$$\begin{aligned} \pi_{kk} &= id_{E_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \\ \pi_{kl} \circ \pi_{lm} &= \pi_{km} \quad \forall k \leq l \leq m \quad \text{(Konjugiertheitsbedingung).} \end{aligned}$$

Der projektive Limes eines solchen Spektrums $(\{E_k\}, \pi)$ ist definiert als Teilraum des Produktraumes $\Pi_k E_k$:

$$\varprojlim E_k := \{(x_k)_k \in \Pi_k E_k : \quad \pi_{kl} x_l = x_k \quad (\forall l \geq k)\},$$

versehen mit der Relativtopologie des Produktraumes. Algebraisch ist dies die Menge aller Vektoren aus dem Produkt, deren Lage im Produktraum mit den Strukturabbildungen verträglich ist. Mit der angegebenen Topologie ist dies ein abgeschlossener Unterraum des Produktraumes, also für abzählbare projektive Spektren von Fréchetärumen selbst wieder ein Fréchetraum.

Man überlegt sich weiter, daß die Topologie von $\varprojlim E_k$ bereits erzeugt wird von dem Halbnormensystem:

$$\{p \circ \pi_k : \quad k \in \mathbb{N}_0, p \in P_k\},$$

wobei P_k ein erzeugendes Halbnormensystem der jeweiligen Stufe E_k und $\pi_k : \varprojlim E_l \to E_k$ die kanonische Projektion bezeichnen. Für vollständige Beweise der hierbei gemachten Aussagen sei auf [9] verwiesen.

1.5.2 Satz. *Die kanonische Einbettung $i : \mathcal{E}(\mathbb{T},X) \to \varprojlim C^k(\mathbb{T},X); \quad f \mapsto (f)$ ist ein topologischer Isomorphismus. Hierbei bezeichne $(f) \in \Pi_k C^k(\mathbb{T},X)$ das Element des Produktraumes, dessen sämtliche Komponenten gleich f sind.*

Beweis. Als Strukturabbildungen π_{kl} verwenden wir die natürlichen Inklusionen $C^l(\mathbb{T},X) \xrightarrow{\subset} C^k(\mathbb{T},X)$ $(l \geq k)$, die wegen $\|\cdot\|_k \leq \|\cdot\|_l$ für $l \geq k$ jeweils stetig sind und die Strukturaxiome trivialerweise erfüllen. Dadurch erhält der projektive Limes eine besonders einfache Struktur, denn:

$$\begin{aligned}(f_l)_l \in \varprojlim C^k(\mathbb{T},X) \quad &\Leftrightarrow \quad \pi_{kl} f_l = f_k \quad (\forall l \geq k) \\ &\Leftrightarrow \quad f_l = f_0 \in \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\mathbb{T},X) = \mathcal{E}(\mathbb{T},X) \quad (\forall l \in \mathbb{N}).\end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar, daß die Abbildung $\mathcal{E}(\mathbb{T},X) \ni f \overset{i}{\mapsto} (f) \in \varprojlim C^k(\mathbb{T},X)$ bijektiv ist. Offenbar ist i auch linear (gilt komponentenweise) und stetig, denn: $\|\pi_k(i(f))\|_k = \|f\|_k$, wo links ein erzeugendes Halbnormensystem für den projektiven Limes durchlaufen wird. Da $\mathcal{E}(\mathbb{T},X)$ und $\varprojlim C^k(\mathbb{T},X)$ beides Fréchеträume sind, folgt die Stetigkeit von i^{-1} aus dem Prinzip der offenen Abbildung. $\diamondsuit$

2 Verallgemeinert $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalare Operatoren

Im vorliegenden Kapitel werden wir unsere Aufmerksamkeit auf Operatoren mit C^∞-Funktionalkalkül über der Einheitskreislinie richten. Dabei werden wir im Vorbeigehen all das in Form von Korollaren festhalten, was sich über Einschränkungen der betrachteten Operatoren auf einen abgeschlossenen invarianten Unterraum sagen läßt.

Vorweg eine Bemerkung zur Sprechweise: Ist ein stetig linearer Operator T auf einem Banachraum X gegeben, und A eine Algebra komplexwertiger Funktionen (definiert auf einer Obermenge von $\sigma(T)$), so verstehen wir unter einem (stetigen) Funktionalkalkül für T einen (stetigen) Algebrenhomomorphismus $\Phi : A \to L(X)$ mit $\Phi(1) = id, \Phi(z) = T$. (Insbesondere kommen nur solche Algebren in Frage, die die konstante Funktion 1 sowie die identische Funktion z enthalten.)

Falls A in irgendeiner Form topologisiert ist, so betrachten wir nur stetige Funktionalkalküle und unterdrücken die Eigenschaft "stetig" in der Notation. In diesem Falle sagen wir kurz: T hat einen A-Kalkül.

2.1 Eine Charakterisierung $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalarer Operatoren

2.1.1 Definition. *Sei X ein Banachraum, $T \in L(X)$ stetig linear.*

(a) *T heißt (verallgemeinert) $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalar, wenn es einen stetigen $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Kalkül für T gibt. Dafür schreiben wir kurz: $T \in [\mathcal{E}(\mathbb{T})]$.*

(b) *T heißt $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar, wenn es einen Banachraum $\hat{X}$ und einen Operator $\hat{T} \in L(\hat{X})$ gibt, so daß T ähnlich zu einer Einschränkung von $\hat{T}$ auf einen abgeschlossenen invarianten Unterraum $\hat{X}_0$ ist. Ähnlichkeit bedeutet dabei: Es existiert ein topologischer Isomorphismus $i : X \to \hat{X}_0$, so daß $T = i^{-1} \circ \hat{T}|_{\hat{X}_0} \circ i$.*

(c) *Analog definiert man $C^k(\mathbb{T})$-(sub)skalar.*

2.1.2 Zu Beginn eine zwar einfache, aber nützliche Bemerkung über die Eindeutigkeit eines $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Kalküls: Sei $T \in L(X)$ ein Operator mit $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Kalkül $\Phi : \mathcal{E}(\mathbb{T}) \to L(X)$. Ist dann $f \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$ eine beliebige glatte Funktion auf dem Torus, so wissen wir, daß diese durch ihre Fourierreihe dargestellt wird. Mit der Stetigkeit des Kalküls und seinen algebraischen Eigenschaften sieht man daher sofort ein, daß

$$\Phi(f) = \Phi(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)z^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi(\hat{f}(n)z^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)(\Phi(z))^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)T^n.$$

Das heißt insbesondere: der $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Kalkül ist eindeutig, und dies ist die einzige Möglichkeit, ihn zu konstruieren. Weiter liest man ab: Das Wachstumsverhalten der Potenzen von T muß in dem Sinne gemäßigt sein, daß die Konvergenz der letzten Reihe für beliebiges f gewährleistet ist. Hierbei muß natürlich berücksichtigt werden, daß die Fourierkoeffizienten einer $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Funktion schnell fallen.

Im nachfolgenden Satz werden diese Überlegungen präzisiert: Wir werden sehen, daß eine Wachstumsbedingung an die Potenzen - oder äquivalent eine an die Resolvente - notwendig und hinreichend ist für die Existenz eines $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Kalküls. Dieses Resultat stammt ursprünglich von Colojoară und Foiaş (vgl. [5], Kap. 5); der Beweis wird dort allerdings auf mehrere Lemmata verteilt, wobei genau untersucht wird, wie sich die jeweilige Wachstumsordnung in der Qualität des Kalküls (C^k statt C^∞) niederschlägt. Da wir in erster Linie an $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Kalkülen interessiert sind, wird im folgenden ein auf diesen Spezialfall zugeschnittener Beweis gegeben:

2.1.3 Satz. (Colojoară und Foiaş) *Für $T \in L(X)$ sind äquivalent:*

(a) $T \in [\mathcal{E}(\mathbb{T})]$

(b) $\sigma(T) \subset \mathbb{T}$ *und* $\exists c > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N}_0 : \quad \| R(\zeta, T) \| \leq \frac{c}{|1-|\zeta||^k} \quad (0 < |1 - |\zeta|| < 1)$

(c) T *ist bijektiv und* $\exists \tilde{c} > 0 \quad \exists \tilde{k} \in \mathbb{N}_0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} : \quad \| T^n \| \leq \tilde{c}(1 + |n|)^{\tilde{k}}$.

Beweis.

(a) $\Rightarrow$ (b). Sei $\Phi : \mathcal{E}(\mathbb{T}) \to L(X)$ ein Funktionalkalkül für T. Für $|\zeta| \neq 1$ ist die Funktion $(\zeta - z)^{-1} \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$, d.h. $\Phi((\zeta - z)^{-1})$ ist wohldefiniert und gleich der Resolvente von T in ζ (Φ ist Algebrenhomomorphismus). Folglich ist $\sigma(T) \subset \mathbb{T}$. Weiter liefert die Stetigkeit von Φ ein $a > 0$ und $F \subset \mathbb{N}_0$ endlich, so daß für $\zeta \notin \mathbb{T}$ gilt:

$$\| R(\zeta, T) \| = \| \Phi((\zeta - z)^{-1}) \| \leq a \max_{l \in F} \| (\zeta - z)^{-1} \|_l \leq a \| (\zeta - z)^{-1} \|_{\max F}$$

(letzteres, weil die Halbnormen von $\mathcal{E}(\mathbb{T})$ aufsteigend geordnet sind). Um die Halbnorm auf der rechten Seite auszuwerten, überlegen wir uns zunächst induktiv, daß

$$\forall j \in \mathbb{N}_0 \quad \exists f_j \in \mathcal{E}(\mathbb{T}) : \quad \frac{d^j}{dt^j}(\zeta - e^{it})^{-1} = (\zeta - e^{it})^{-(j+1)} f_j(e^{it}) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Für $j = 0$ ist die Aussage klar, und der Induktionsschritt lautet wie folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{d^{j+1}}{dt^{j+1}}(\zeta - e^{it})^{-1} &= \frac{d}{dt}((\zeta - e^{it})^{-(j+1)} f_j(e^{it})) \\
&= (\zeta - e^{it})^{-(j+2)}(j+1)ie^{it} f_j(e^{it}) + (\zeta - e^{it})^{-(j+1)} \frac{d}{dt} f_j(e^{it}) \\
&= (\zeta - e^{it})^{-(j+2)} \left((j+1)ie^{it} f_j(e^{it}) + (\zeta - e^{it}) \frac{d}{dt} f_j(e^{it}) \right) \\
&=: (\zeta - e^{it})^{-(j+2)} f_{j+1}(e^{it}).
\end{aligned}$$

Mit f_j ist also auch f_{j+1} eine glatte Funktion auf dem Torus. Insbesondere sind alle f_j beschränkt, und man erhält folgende Abschätzung:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |\frac{d^j}{dt^j}(\zeta - e^{it})^{-1}| \leq \| f_j \|_0 \sup_{t \in \mathbb{R}} |\zeta - e^{it}|^{-(j+1)} = \| f_j \|_0 \frac{1}{(\mathrm{dist}(\zeta, \mathbb{T}))^{j+1}}.$$

Unter Berücksichtigung der Beziehung $\mathrm{dist}(\zeta, \mathbb{T}) = |1 - |\zeta||$ folgt daraus für $0 < |1 - |\zeta|| < 1$ unmittelbar:

$$\| (\zeta - z)^{-1} \|_m = \sup_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ 0 \leq j \leq m}} |\frac{d^j}{dt^j}(\zeta - e^{it})^{-1}| \leq \left(\max_{0 \leq j \leq m} \| f_j \|_0 \right) \frac{1}{|1 - |\zeta||^{m+1}}.$$

Einsetzen dieser Beziehung mit $m = \max F$ in die Normabschätzung für die Resolvente liefert die Behauptung (mit $k = m + 1$).

(b) $\Rightarrow$ (c). Mit Hilfe des holomorphen Funktionalkalküls kann man die Wachstumsbedingung für die Resolvente umwandeln in eine für die Norm der Potenzen des Operators T. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist $z^n \in \mathcal{O}(\mathbb{C} - \{0\})$ und wegen $\sigma(T) \subset \mathbb{T}$ umrundet $\Gamma_\varepsilon := \partial D_{1+\varepsilon}(0) \ominus \partial D_{1-\varepsilon}(0)$ für kleine ε das Spektrum von T in $\mathbb{C} - \{0\}$, so daß wir die Potenzen von T schreiben können als:

$$T^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon} \zeta^n R(\zeta, T) d\zeta \qquad (0 < \varepsilon < 1).$$

Die Standardabschätzung für Kurvenintegrale liefert mit der in (b) vorausgesetzten Wachstumsbedingung:

$$\begin{aligned} \| T^n \| &\leq (1+\varepsilon)^{n+1} \max_{\zeta \in \partial D_{1+\varepsilon}(0)} \| R(\zeta, T) \| + (1-\varepsilon)^{n+1} \max_{\zeta \in \partial D_{1-\varepsilon}(0)} \| R(\zeta, T) \| \\ &\leq ((1+\varepsilon)^{n+1} + (1-\varepsilon)^{n+1}) \frac{c}{\varepsilon^k} \qquad \text{(mit (b))}. \end{aligned}$$

Wir beschränken uns zunächst auf die positiven Potenzen, betrachten also $n \geq 0$. Dann ist $(1-\varepsilon)^{n+1} < (1+\varepsilon)^{n+1}$ und es gilt:

$$\|T^n\| \leq 2c \frac{(1+\varepsilon)^{n+1}}{\varepsilon^k}.$$

Setzen wir für ε die (hinreichend späten) Glieder der Nullfolge $(\frac{k}{n})_n$ ein, so erhalten wir für $n > k$ die Beziehung:

$$\|T^n\| \leq 2c \frac{(1+\frac{k}{n})^{n+1}}{(\frac{k}{n})^k},$$

weshalb gilt:

$$\frac{\|T^n\|}{n^k} \leq 2c \frac{(1+\frac{k}{n})^{n+1}}{k^k} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 2c \frac{e^k}{k^k} \in \mathbb{R}.$$

Führen wir die gesamte Überlegung für negative Exponenten durch, erhalten wir (nun mit $(1+\varepsilon)^{-n+1} \leq (1-\varepsilon)^{-n+1}$ für $n > 0$):

$$\|T^{-n}\| \leq 2c \frac{(1-\varepsilon)^{-n+1}}{\varepsilon^k},$$

und mit ε wie oben gilt $(n > k)$:

$$\frac{\|T^{-n}\|}{n^k} \leq 2c \frac{(1-\frac{k}{n})^{-n+1}}{k^k} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 2c \frac{e^k}{k^k} \in \mathbb{R}.$$

Die beiden Folgen $\frac{\|T^n\|}{n^k}$ und $\frac{\|T^{-n}\|}{n^k}$ sind somit durch eine positive Konstante $\tilde{c}$ beschränkt, also $\|T^n\| \leq \tilde{c}|n|^k \leq \tilde{c}(1+|n|)^k$ für $n \in \mathbb{Z}$. Es folgt (c) mit $\tilde{k} = k$.

(c) $\Rightarrow$ (a). Wir definieren den Kalkül auf die einzig mögliche Weise, nämlich $\Phi : \mathcal{E}(\mathbb{T}) \to L(X); \quad f \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) T^n$. Falls Φ wohldefiniert ist, also die Reihe jedenfalls konvergiert, ist Φ sicher linear (da $f \mapsto (\hat{f}(n))_n$ linear). Setzen wir unser Wissen über das Wachstumsverhalten der Fourierkoeffizienten einer $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Funktion sowie der Potenzen von T ein, so erhalten wir (unter Verwendung von (1.3.1)(d) im letzten Schritt):

$$\|\Phi(f)\| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| \|T^n\| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| \tilde{c}(1+|n|)^{\tilde{k}} = \tilde{c} \|(\hat{f}(n))\|_{1,\tilde{k}} \leq \tilde{c} c_{\tilde{k}} \|f\|_{\tilde{k}+2}.$$

Dies liefert auf einen Schlag die absolute Konvergenz der Reihe (d.h. für festes f ist $\Phi(f)$ stetig linearer Operator auf X, also Φ wohldefiniert) und die Stetigkeit von Φ.

Die absolute Konvergenz der Reihe erlaubt es uns, mit dem Cauchy-Produkt die Multiplikativität von Φ nachzurechnen:

$$\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) T^n \Big) \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{g}(n) T^n \Big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k) \hat{g}(n-k) \Big) T^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{(fg)}(n) T^n$$

für $f, g \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$, wobei wir die Formel für die Fourierentwicklung eines Produktes benutzt haben. Dies macht Φ zum stetigen Algebrenhomomorphismus.

Man rechnet schließlich leicht nach, daß $\hat{1}(n) = \delta_{0n}$ und $\hat{z}(n) = \delta_{1n}$, eingesetzt also: $\Phi(1) = T^0 = id, \Phi(z) = T$. ◊

Aus der Charakterisierung über Potenzwachstum folgt unmittelbar:

2.1.4 Korollar. *(a) Isometrische Isomorphismen sind $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalar.*

(b) Für $T \in L(X)$ gilt: $T \in [\mathcal{E}(\mathbb{T})] \Leftrightarrow T' \in [\mathcal{E}(\mathbb{T})]$, sowie $T \in [\mathcal{E}(\mathbb{T})] \Leftrightarrow T^{-1} \in [\mathcal{E}(\mathbb{T})]$.

(c) Ist $S, T \in L(X)$ ein kommutierendes Paar von Operatoren mit $S, T \in [\mathcal{E}(\mathbb{T})]$, so gilt: $ST \in [\mathcal{E}(\mathbb{T})]$.

Beweis.

(a) Isometrische Isomorphismen sind invertierbar und erfüllen die Wachstumsbedingung an die Potenzen mit $\tilde{c} = 1$, $\tilde{k} = 0$.

(b) Wegen $\sigma(T') = \sigma(T) \subset \mathbb{T}$ ist mit T auch T' invertierbar und umgekehrt; und über die Norm der Potenzen weiß man (für $n \in \mathbb{Z}$ beliebig): $\|(T')^n\| = \|(T^n)'\| = \|T^n\|$. Also ist das Wachstumsverhalten der Potenzen gleich; wachsen also die Potenzen des einen Operators langsam, so auch die des anderen. Das ist aber nach vorigem Satz notwendig und hinreichend für die Existenz eines Kalküls. Ein ähnliches Argument mit T^{-1} statt T' liefert die Gültigkeit des zweiten Teils der Behauptung.

(c) Mit S und T ist natürlich auch ST invertierbar. Da beide den $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Kalkül besitzen, existieren nach dem Satz Konstanten $c_1, c_2 > 0$ und $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ mit $\|S^n\| \leq c_1(1 + |n|)^{k_1}$ und $\|T^n\| \leq c_2(1 + |n|)^{k_2}$. Also gilt für die Norm von $(ST)^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ (beachte: S, T kommutieren):

$$\|(ST)^n\| = \|S^n T^n\| \leq \|S^n\| \|T^n\| \leq c_1 c_2 (1 + |n|)^{k_1 + k_2}.$$

Das heißt: die Potenzen des Produktes wachsen langsam, also garantiert der Satz die Existenz eines $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Kalküls für das Produkt. $\diamond$

Man beachte, daß die Implikation "$\Rightarrow$" in (a) für alle Kalküle trivialerweise gilt (ist Φ ein Kalkül, so ist $f \mapsto \big(\Phi(f)\big)'$ einer für den adjungierten Operator). Die Betonung liegt daher auf der umgekehrten Implikation, die im allgemeinen Fall keineswegs gelten muß.

Im Hinblick auf $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalare Operatoren stellt sich die Frage, wie sich die Wachstumsbedingung an die Potenzen aus Satz (2.1.3) auf Einschränkungen vererbt. Eine Antwort gibt das nachstehende Korollar, in dem wir gleich noch einige einfache Folgerungen festhalten:

2.1.5 Korollar. *Ist $T \in L(X)$ ein $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalarer Operator, so gelten folgende Aussagen:*

(a) Es gibt Konstanten $a, b > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$: $\frac{a\|x\|}{(1+n)^k} \leq \|T^n x\| \leq b(1+n)^k \|x\| \quad (n \in \mathbb{N}_0, x \in X)$.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ ist T^n injektiv mit abgeschlossenem Bild.

(c) Ist T zusätzlich bijektiv, d.h. $0 \notin \sigma(T)$, so ist T schon selbst $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalar.

(d) Der Spektralradius erfüllt: $r(T) = 1$, insbesondere $\sigma(T) \subset \overline{\mathbb{D}}$.

Beweis.

(a) Wenn T $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar ist, dann gibt es definitionsgemäß einen $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalaren Operator $\hat{T}$ auf einem Banachraum $\hat{X}$ und einen topologischen Isomorphismus $i : X \to \hat{X}_0$ auf einen abgeschlossenen invarianten Teilraum $\hat{X}_0$ von $\hat{T}$, so daß

T sich schreiben läßt als $T = i^{-1} \circ \hat{T}|_{iX} \circ i$. Man sieht sofort, daß sich diese Darstellung auf alle positiven Potenzen überträgt:

$$T^n = i^{-1} \circ \hat{T}|_{iX}^n \circ i \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Daraus resultiert (beachte $\|\hat{T}|_{iX}^n\| \leq \|\hat{T}^n\|$) die Normabschätzung

$$\|T^n\| \leq \|i^{-1}\|\|i\|\|\hat{T}^n\| \leq \|i^{-1}\|\|i\|c(1+|n|)^k \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

mit den Konstanten c und k aus Satz (2.1.3). Das ist die rechte Ungleichung aus der Behauptung mit $b := \|i^{-1}\|\|i\|c$.

Die linke sieht man folgendermaßen ein: für $\hat{T}$ wachsen auch die negativen Potenzen langsam, und i ist als topologische Einbettung nach unten beschränkt, d.h. $\|ix\| \geq m\|x\|$ (mit $m > 0$) für $x \in X$ beliebig. Daher gilt für $n \in \mathbb{N}_0$ (beachte $\hat{T}|_{iX}^n \circ i = i \circ T$):

$$\begin{aligned}
\|x\| &\leq \frac{1}{m}\|\hat{T}^{-n}\hat{T}|_{iX}^n ix\| \\
&\leq \frac{c}{m}(1+|-n|)^k\|\hat{T}|_{iX}^n ix\| \\
&= \frac{c}{m}(1+n)^k\|iT^n x\| \\
&\leq \frac{c}{m}(1+n)^k\|i\|\|T^n x\|
\end{aligned}$$

für alle $x \in X$, oder - auf die richtige Form gebracht:

$$\frac{m}{c\|i\|}\frac{\|x\|}{(1+n)^k} \leq \|T^n x\| \quad (n \in \mathbb{N}_0, x \in X).$$

Das ist die linke Ungleichung, wobei offensichtlich ist, wie man a zu wählen hat.

(b) Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus (a), da die linke Ungleichung besagt: T^n ist nach unten beschränkt.

(c) Ist T $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar, so gelten die Abschätzungen aus (a). Ist T invertierbar, so liefert die linke ($x \in X$, $n \in \mathbb{N}_0$):

$$\frac{a\|T^{-n}x\|}{(1+n)^k} \leq \|T^n T^{-n} x\| = \|x\|,$$

bzw. nach Supremumsbildung über $\{x \in X : \|x\| = 1\}$:

$$\|T^{-n}\| \leq \frac{1}{a}(1+|-n|)^k \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Die rechte Ungleichung aus (a) besagt hingegen:

$$\|T^n\| \leq b(1+|n|)^k \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Mit $c > \max\{\frac{1}{a}, b\}$ werden dann offensichtlich die Wachstumsbedingungen aus Satz (2.1.3) erfüllt, d.h. T ist selbst schon $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalar.

(d) Wir verwenden die bekannte Formel für den Spektralradius und schätzen dazu $\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ mit (a) wie folgt ab:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{(\sqrt[n]{1+n})^k} \leq \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \sqrt[n]{b}(\sqrt[n]{1+n})^k \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Man erkennt: Linke und rechte Seite streben gegen 1 für $n \to \infty$, der Term in der Mitte gegen den Spektralradius $r(T)$. $\diamondsuit$

Das Korollar liefert uns somit notwendige Bedingungen, die ein $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalarer Operator erfüllen muß. Man beachte, daß man langsames Potenzwachstum jetzt nur noch für die positiven Potenzen hat. Anstelle des entsprechenden Verhaltens für die negativen Potenzen (die im Gegensatz zum skalaren Falle nicht notwendig existieren müssen) tritt eine Beschränktheitsbedingung nach unten. Damit hat ein Operator, der kein topologischer Monomorphismus ist, gar nicht erst die Chance, $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar zu sein. Invertierbarkeit ist allerdings eine zu starke Voraussetzung, wie in (c) deutlich wird: dann hat der Operator nämlich selbst schon den $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Kalkül. Die Aussage über das Spektrum aus Teil (d) läßt sich noch wesentlich verbessern:

2.1.6 Satz. *Ist $T \in L(X)$ ein $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalarer Operator, so gilt für das approximative Punktspektrum: $\sigma_{ap}(T) \subset \mathbb{T}$. Insbesondere ist eine der beiden folgenden Alternativen erfüllt:*

(a) $\sigma(T) \subset \mathbb{T}$ oder äquivalent: T ist $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalar

(b) $\sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}$.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Aussage über $\sigma_{ap}(T)$: Sei $\hat{T} \in L(\hat{X})$ eine $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalare Erweiterung von T bis auf Ähnlichkeit, d.h. es gelte $i \circ T = \hat{T} \circ i$ mit einem topologischen Monomorphismus $i : X \to \hat{X}$. Ist dann $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$, so existiert definitionsgemäß eine Folge von Einheitsvektoren $(x_n)_n$ in X mit $(\lambda - T)x_n \to 0$, woraus wir folgern: $i(\lambda - T)x_n \to 0$; und wegen der Vertauschungseigenschaft und Linearität von i heißt das: $(\lambda - \hat{T})ix_n \to 0$.

Angenommen $\lambda \notin \mathbb{T}$, so ist wegen $\sigma(\hat{T}) \subset \mathbb{T}$ die Resolvente von $\hat{T}$ in λ definiert, weshalb:

$$ix_n = R(\lambda, \hat{T})(\lambda - \hat{T})ix_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Aber da i topologischer Monomorphismus ist, folgt unmittelbar: $(x_n)_n$ ist eine Nullfolge, im Widerspruch zu der Voraussetzung, daß alle x_n Norm Eins haben. Damit muß die Annahme $\lambda \notin \mathbb{T}$ falsch gewesen sein, insgesamt also gelten: $\sigma_{ap}(\mathbb{T}) \subset \mathbb{T}$.

Nun zu den beiden Alternativen: Nach (2.1.5)(c) ist klar, daß T im Fall (a) - wo $\sigma(T) \subset \mathbb{T}$ - selbst schon $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalar ist; die Umkehrung ist trivial. Wir müssen also nur noch zeigen: Falls (a) nicht gilt, ist automatisch (b) erfüllt. Dazu überlegen wir uns folgendes: Nach (2.1.5)(d) gilt $r(T) = 1$ und damit $\sigma(T) \subset \overline{\mathbb{D}}$; wenn also $\sigma(T) \not\subset \mathbb{T}$, so heißt das $\sigma(T) \cap \mathbb{D} \neq \emptyset$.

Nun ist $\sigma(\hat{T}) \subset \mathbb{T}$, also $\mathbb{D}$ ganz in einer Zusammenhangskomponente C der Resolventenmenge von $\hat{T}$ enthalten. Da Ähnlichkeitstransformationen das Spektrum erhalten, gilt:

$$\sigma(\hat{T}|_{iX}) \cap C \supset \sigma(T) \cap \mathbb{D} \neq \emptyset.$$

Dann muß aber schon gelten: $C \subset \sigma(\hat{T}|_{ix})$, also sicher auch $\mathbb{D} \subset \sigma(T)$. Mit der Abgeschlossenheit des Spektrums und der Beziehung $\sigma(T) \subset \overline{\mathbb{D}}$ von oben folgt dann die Behauptung. ♢

Es sei noch angemerkt, daß das spektrale Verhalten $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalarer Operatoren dem einer als m-Isometrien bezeichneten Klasse von Operatoren auf Hilberträumen sehr ähnlich sieht (vgl. Agler und Stankus [1], Lemma 1.21). Daß dies zumindest im Fall $m = 2$ keine zufällige Analogie ist, werden wir im letzten Kapitel bei der Behandlung von Beispielen sehen.

Nach diesen ersten Eindrücken über die Gestalt $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalarer Operatoren kehren wir nun noch einmal zu $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalaren Operatoren zurück, und zwar zu der Frage der Fortsetzbarkeit eines $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Kalküls auf gewisse Oberalgebren von $\mathcal{E}(\mathbb{T})$. Unter welchen Bedingungen sich dabei wichtige Eigenschaften des Kalküls auf die Fortsetzung vererben, davon handelt das nächste Lemma.

Wir formulieren die Aussage nicht speziell für $\mathcal{E}(\mathbb{T})$, sondern allgemeiner für Funktionenalgebren, die dieselbe topologische Struktur haben.

2.1.7 Lemma. *Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ beliebig, $E(\Omega)$ eine Algebra von $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen auf Ω, versehen mit einer Fréchetraum-Topologie. $E(\Omega)$ enthalte 1 und z und lasse sich auf folgende Art aus Funktionenräumen $E_k(\Omega)$ darstellen:*

(a) *Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist $E_k(\Omega)$ ein Banachraum, und für alle $l, k \in \mathbb{N}_0$ mit $l \geq k$ existieren stetige Inklusionen $E_l(\Omega) \overset{\subset}{\longrightarrow} E_k(\Omega)$,*

(b) *$E(\Omega) = \bigcap_k E_k(\Omega)$ versehen mit der projektiven-Limes-Topologie*

(c) *$E(\Omega) \subset E_k(\Omega)$ dicht $(\forall k)$.*

Dann gilt:

(a) *Ein (stetiger) $E(\Omega)$-Kalkül Φ läßt sich zu einer stetig linearen Abbildung Φ_0 auf eine Stufe $E_K(\Omega)$ fortsetzen.*

(b) *Ist der Operator $M_z : E_K(\Omega) \to E_K(\Omega); f \mapsto zf$ in dieser Stufe wohldefiniert und stetig, folgt weiter:*

$$\Phi_0(zf) = \Phi(z)\Phi_0(f) \quad (\forall f \in E_k(\Omega)).$$

(c) *Ist $E_K(\Omega)$ eine Algebra mit stetiger Multiplikation, so ist Φ_0 sogar ein stetiger $E_K(\Omega)$-Kalkül.*

Beweis.

(a) Sei $i : \varprojlim E_k(\Omega) \to E(\Omega); (f) \mapsto f$ der natürliche topologische Isomorphismus. Daß $\Phi : E(\Omega) \to L(X)$ stetig ist (bezüglich der projektiven-Limes-Topologie), heißt gerade:

$$\|\Phi(f)\| = \|(\Phi \circ i)(f)\| \leq c \max_{k \in \{k_1, \cdots k_n\}} \|f\|_{E_k(\Omega)} \leq \tilde{c}\|f\|_{E_K(\Omega)},$$

wobei $K = \max\{k_1, \cdots k_n\}$, denn die Einbettungen der Stufen sind stetig. D.h. Φ ist auf der dichten Teilmenge $E(\Omega) \subset E_K(\Omega)$ stetig bezüglich der Relativtopologie von $E_K(\Omega)$, und somit existiert eine eindeutig bestimmte stetig lineare Fortsetzung auf $E_K(\Omega)$.

(b) Es sei $f \in E_K(\Omega)$ beliebig, $(f_n)_n$ eine f in der $E_K(\Omega)$-Topologie approximierende Folge in $E(\Omega)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\Phi_0(zf) &= \Phi_0(z \lim f_n) = \Phi_0(\lim zf_n) = \lim \Phi_0(zf_n) \\
&= \lim \Phi(zf_n) = \lim \Phi(z)\Phi(f_n) = \Phi(z) \lim \Phi_0(f_n) \\
&= \Phi(z)\Phi_0(\lim f_n) = \Phi(z)\Phi_0(f).
\end{aligned}$$

(c) Wir gehen analog vor: zu $f, g \in E_K(\Omega)$ wählen wir Folgen $(f_n)_n, (g_n)_n$ in $E(\Omega)$ mit $f_n \to f, g_n \to g$ in $E_K(\Omega)$. Dann gilt wegen der Stetigkeit von Φ_0 natürlich: $\Phi_0(f_n) \to \Phi_0(f), \Phi_0(g_n) \to \Phi_0(g)$ und damit:

$$\begin{aligned}
\Phi_0(fg) &= \Phi_0(\lim f_n \lim g_n) = \Phi_0(\lim f_n g_n) = \lim \Phi_0(f_n g_n) \\
&= \lim \Phi(f_n g_n) = \lim \Phi(f_n)\Phi(g_n) = \lim \Phi_0(f_n) \lim \Phi_0(g_n) \\
&= \Phi_0(f)\Phi_0(g).
\end{aligned}$$

Damit ist Φ_0 auch multiplikativ. Man beachte nur noch, daß $\Phi_0(1) = \Phi(1)$ und $\Phi_0(z) = \Phi(z)$. ◊

2.1.8 Korollar. *Sei $T \in L(X)$.*

(a) $T \in [\mathcal{E}(\mathbb{T})] \Leftrightarrow T \in [C^k(\mathbb{T})]$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$

(b) T $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar $\Leftrightarrow T$ $C^k(\mathbb{T})$-subskalar für ein $k \in \mathbb{N}_0$.

Beweis.

(a) Die Rückrichtung folgt natürlich durch Einschränken eines C^k- Kalküls; umgekehrt läßt sich ein $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Kalkül nach dem Lemma auch fortsetzen, denn: wir haben im ersten Abschnitt gesehen, daß $\mathcal{E}(\mathbb{T}) = \bigcap_k C^k(\mathbb{T}) \simeq \varprojlim C^k(\mathbb{T})$ und $\mathcal{E}(\mathbb{T}) \subset C^k(\mathbb{T})$ dicht $(\forall k)$. Damit erfüllen $E(\Omega) := \mathcal{E}(\mathbb{T})$ und $E_k(\Omega) := C^k(\mathbb{T})$ mit $\Omega = \mathbb{T}$ die Bedingungen aus dem Lemma.

(b) Wende (a) auf eine Fortsetzung $\hat{T}$ von T an. $\diamondsuit$

2.2 Beispiele $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalarer Operatoren

2.2.1 Passend zum Potenzwachstum $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalarer Operatoren definieren wir gewichtete X-wertige ℓ^1-Räume ($k \in \mathbb{N}_0$):

$$\ell^1_k(\mathbb{Z}, X) := \{(a_n)_n \text{ Folge in } X : \|(a_n)_n\|_{1,k} := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|a_n\|(1+|n|)^k < \infty\}.$$

Man überzeugt sich ähnlich wie im skalaren Fall davon, daß $\|\cdot\|_{1,k}$ eine Norm ist, die diesen Folgenraum zum Banachraum macht.

Im folgenden Satz werden wir zwei wichtige Beispiele $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalarer Operatoren kennenlernen. Den Beweis dafür, daß die betrachteten Operatoren stetig sind, wollen wir nicht gesondert geben: zum einen tauchen im Beweis des Satzes entsprechende Normabschätzungen noch einmal explizit auf, zum anderen sind die Operatoren von so einfacher Bauart, daß kaum jemand ernsthafte Zweifel an ihrer Stetigkeit haben dürfte.

2.2.2 Satz. *Die beiden folgenden Operatoren sind $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalar:*

(a) der zweiseitige Rechtsshift $s : \ell^1_k(\mathbb{Z}, X) \to \ell^1_k(\mathbb{Z}, X)$; $\quad (a_n)_n \mapsto (a_{n-1})_n$, und

(b) der Multiplikationsoperator $M_z : C^k(\mathbb{T}, X) \to C^k(\mathbb{T}, X)$; $\quad f \mapsto zf$.

Der Kalkül für M_z ist dabei explizit gegeben durch:

$$\Phi : \mathcal{E}(\mathbb{T}) \to L(C^k(\mathbb{T}, X)); \varphi \mapsto M_\varphi,$$

wobei $C^k(\mathbb{T}, X) \ni f \overset{M_\varphi}{\longmapsto} \varphi f \in C^k(\mathbb{T}, X)$.

Beweis.

(a) s ist offenbar linear und invertierbar, und die l-te Potenz ($l \in \mathbb{Z}$) kann man explizit angeben als: $(a_n)_n \overset{s^l}{\mapsto} (a_{n-l})_n$. Für die Norm hiervon gilt:

$$\begin{aligned} \|s^l(a_n)_n\|_{1,k} &= \|(a_{n-l})_n\|_{1,k} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|a_{n-l}\|(1+|n|)^k \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|a_n\|(1+|n+l|)^k \\ &\leq (1+|l|)^k \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|a_n\|(1+|n|)^k \\ &= (1+|l|)^k \|(a_n)_n\|_{1,k}. \end{aligned}$$

Die Potenzen von s wachsen also langsam, was nach der Charakterisierung aus Satz (2.1.3) nur zu zeigen ist.

(b) Für M_z überlegen wir uns gleich, daß der Kalkül wie angegeben aussieht: Seien $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$, $f \in C^k(\mathbb{T}, X)$ beliebig vorgegeben. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|M_\varphi(f)\| &= \|\varphi \cdot f\|_k \\
&= \sup_{\substack{t\in\mathbb{R} \\ 0\le m\le k}} \|\frac{d^m}{dt^m}(\varphi f)(e^{it})\| \\
&= \sup_{\substack{t\in\mathbb{R} \\ 0\le m\le k}} \|\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{d^j}{dt^j}\varphi(e^{it}) \frac{d^{m-j}}{dt^{m-j}} f(e^{it})\| \\
&\le (k+1) \max_{0\le j\le k} \binom{k}{j} \sup_{\substack{t\in\mathbb{R} \\ 0\le m\le k}} |\frac{d^j}{dt^j}\varphi(e^{it})| \sup_{\substack{t\in\mathbb{R} \\ 0\le m\le k}} \|\frac{d^j}{dt^j} f(e^{it})\| \\
&= c\|\varphi\|_k \|f\|_k,
\end{aligned}$$

wobei $c > 0$ eine nur von k abhängige Konstante ist.

Man liest ab: bei festem φ ist M_φ stetig, womit nachgewiesen ist, daß die im Satz definierte Abbildung Φ wohldefiniert ist. Φ ist dann offenbar Algebrenhomomorphismus, der zudem $\Phi(1) = id_{C^k(\mathbb{T},X)}$ und $\Phi(z) = M_z$ erfüllt. Die Stetigkeit von Φ läßt sich dann ebenfalls an obiger Normabschätzung ablesen, denn: $\|M_\varphi\| \le c\|\varphi\|_k$. Also hat Φ alle Eigenschaften, die wir von einem $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Kalkül für M_z fordern. $\diamondsuit$

2.3 Die Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}(\mathbb{T})}$

Besitzt $T \in L(X)$ einen $\mathcal{E}(\mathbb{C})$-Kalkül, so läßt sich zeigen (vgl. Eschmeier und Putinar [8], Abschnitt 6.4): Die Abbildung

$$\mathcal{E}(\mathbb{C}, X) \xrightarrow{z-T} \mathcal{E}(\mathbb{C}, X)$$

ist topologischer Monomorphismus. Man sagt: T hat die Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$. Da sich die Eigenschaft, topologischer Monomorphismus zu sein, auf Einschränkungen überträgt, hat jeder subskalare Operator $(\beta)_{\mathcal{E}}$. Hiervon gilt auch die Umkehrung, so daß (vgl. [8], Corollary 6.4.9) die Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ gerade die subskalaren Operatoren auf Banachräumen charakterisiert.

Nach diesen Vorbemerkungen ist die folgende Definition nicht überraschend:

2.3.1 Definition. *Ist X ein Banachraum und $T \in L(X)$, so sagen wir: T hat die Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}(\mathbb{T})}$:⇔ $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X) \xrightarrow{z-T} \mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ ist topologischer Monomorphismus.*

2.3.2 Satz. *Sei $T \in L(X)$ ein $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalarer Operator. Dann ist die Abbildung $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X) \xrightarrow{z-T} \mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ ein topologischer Monomorphismus, d.h. T hat die Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}(\mathbb{T})}$.*

Beweis. (Vgl. hierzu den Beweis zu Theorem 6.4.11 in [8], insbesondere die Abschnitte (2) und (3)). Nach Satz (2.1.3) wissen wir, daß T Normabschätzungen der Form $\|T^n\| \le c(1 + |n|)^{k_0}$ $(\forall n \in \mathbb{Z})$ mit geeigneten Konstanten $c > 0, k_0 \in \mathbb{N}_0$ erfüllt.

Somit können wir für $N \in \mathbb{N}_0$ eine Abbildung

$$\psi_N : \mathcal{E}(\mathbb{T}, X) \to \mathcal{E}(\mathbb{T}, X); \quad f \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} T^{n-N} \hat{f}(n) z^n$$

definieren, denn die Fourierkoeffizienten von $\psi_N f$ erfüllen dann:

$$\begin{aligned}
\|(T^{n-N}\hat{f}(n))_n\|_{1,k} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|T^{n-N}\hat{f}(n)\|(1+|n|)^k \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} c(1+|n-N|)^{k_0}\|\hat{f}(n)\|(1+|n|)^k \\
&\leq c\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|)^{k_0}(1+N)^{k_0}(1+|n|)^k\|\hat{f}(n)\| \\
&= c(1+N)^{k_0}\|(\hat{f}(n))_n\|_{1,k_0+k} \quad < \infty,
\end{aligned}$$

d.h. sie liegen offenbar in s_X und damit ist $\psi_N f$ als $\mathcal{E}(\mathbb{T},X)$-Funktion wohldefiniert. Die Linearität von ψ_N ist unmittelbar einsichtig, und die Stetigkeit folgt dann ebenfalls aus den obigen Abschätzungen, denn wegen der topologischen Isomorphie $\mathcal{E}(\mathbb{T},X) \simeq s_X$ (vgl. (1.3.7)(b)) brauchen wir zwischen der von s_X induzierten und der ursprünglichen Topologie auf $\mathcal{E}(\mathbb{T},X)$ nicht zu unterscheiden.

Nach (2.1.4)(b) ist mit T auch $T^{-1} \in [\mathcal{E}(\mathbb{T})]$, und wir erhalten mit T^{-1} statt T in obiger Rechnung, daß auch die Abbildung

$$\tilde{\psi}_N : \mathcal{E}(\mathbb{T},X) \to \mathcal{E}(\mathbb{T},X); \quad f \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} T^{-(n-N)}\hat{f}(n)z^n$$

für $N \in \mathbb{N}_0$ ein wohldefinierter stetig linearer Operator ist. Damit rechnet man sofort die Gültigkeit der Beziehung $\tilde{\psi}_N \circ \psi_N = \psi_N \circ \tilde{\psi}_N = id$ nach; folglich sind ψ_N und $\tilde{\psi}_N$ topologische Isomorphismen.

Für ein beliebiges $f \in \mathcal{E}(\mathbb{T},X)$ bestätigen wir:

$$\begin{aligned}
\psi_1(z-T)f &= \psi_1(\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\hat{f}(n-1)-T\hat{f}(n))z^n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} T^{n-1}(\hat{f}(n-1)-T\hat{f}(n))z^n \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}(T^{n-1}\hat{f}(n-1)-T^n\hat{f}(n))z^n \\
&= (z-id)(\sum_{n\in\mathbb{Z}} T^n\hat{f}(n)z^n) \\
&= (z-id)\psi_0 f,
\end{aligned}$$

womit nachgewiesen ist, daß das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}(\mathbb{T},X) \arrow[r, "z-T"] \arrow[d, "\psi_0"'] & \mathcal{E}(\mathbb{T},X) \arrow[d, "\psi_1"] \\
\mathcal{E}(\mathbb{T},X) \arrow[r, "z-id"] & \mathcal{E}(\mathbb{T},X).
\end{tikzcd}$$

Da die Spaltenabbildungen topologische Isomorphismen sind, bleibt nur noch nachzuweisen, daß die Abbildung in der unteren Zeile ein topologischer Monomorphismus ist, dann ist es auch die in der oberen. Doch daß $z-id : \mathcal{E}(\mathbb{T},X) \to \mathcal{E}(\mathbb{T},X)$ ein topologischer Monomorphismus ist, sieht man unmittelbar über Halbnormabschätzungen ein (vgl. [8], S. 188). $\Diamond$

Die Eigenschaft, topologischer Monomorphismus zu sein, vererbt sich auf Einschränkungen, und wir vermerken:

2.3.3 Korollar. *Ist T $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar, so ist $\mathcal{E}(\mathbb{T},X) \xrightarrow{z-T} \mathcal{E}(\mathbb{T},X)$ ein topologischer Monomorphismus.*

Beweis. Man überlegt sich leicht, daß die im Korollar angegebene Abbildung sich (bis auf topologische Isomorphie) als Einschränkung von $\mathcal{E}(\mathbb{T},\hat{X}) \overset{z-\hat{T}}{\longmapsto} \mathcal{E}(\mathbb{T},\hat{X})$ gewinnen läßt, wobei $\hat{T} \in L(\hat{X})$ eine $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalare Erweiterung für T bezeichnet. $\diamondsuit$

Bevor wir die Aussage des Satzes (2.3.2) dualisieren, sind zwei Bemerkungen angebracht:

2.3.4 Zuerst sei an ein wohlbekanntes Resultat aus der Dualitätstheorie für Frécheträume erinnert, das im folgenden mehrfach Anwendung finden wird:

Sind E und F Frécheträume, $S \in L(E,F)$ ein stetig linearer Operator, so ist S genau dann ein topologischer Monomorphismus, wenn die adjungierte Abbildung $S' : F' \to E'$ surjektiv ist. Zum Beweis vgl. Köthe [13], §32.3 (4)a und §33.2 (3).

2.3.5 Schließlich noch zwei Vereinbarungen zur Schreibweise: Wann immer topologische Eigenschaften des Dualraumes eine Rolle spielen, bezeichne $\mathcal{E}'(\mathbb{T})$ den mit der starken Dualraumtopologie (d.h. der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf beschränkten Mengen) ausgestatteten topologischen Dual von $\mathcal{E}(\mathbb{T})$. Außerdem schließen wir uns der von Eschmeier und Putinar in [8] verwendeten Notation an und schreiben (falls $T \in L(X)$) kurz

$$\mathcal{E}'(\mathbb{T})\widehat{\otimes}X \overset{z-T}{\longrightarrow} \mathcal{E}'(\mathbb{T})\widehat{\otimes}X$$

für die offenbar stetig lineare Abbildung

$$M_z' \otimes id - id \otimes T : \mathcal{E}'(\mathbb{T})\widehat{\otimes}X \longrightarrow \mathcal{E}'(\mathbb{T})\widehat{\otimes}X.$$

2.3.6 Korollar. *Sei $T \in L(X)$ ein adjungierter Operator, d.h. es existiere ein Banachraum X_0 mit $X_0' = X$ und ein stetig linearer Operator $T_0 \in L(X_0)$ mit $T_0' = T$. Ist T dann $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalar, so ist die Abbildung $\mathcal{E}'(\mathbb{T})\widehat{\otimes}X \overset{z-T}{\longrightarrow} \mathcal{E}'(\mathbb{T})\widehat{\otimes}X$ surjektiv.*

Beweis. Es bezeichne $T_0 : X_0 \to X_0$ wie in der Formulierung des Korollars eine zu X präduale Abbildung. Dann ist nach (2.1.4)(b) mit $T = T_0'$ auch T_0 $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalar und nach Satz (2.3.2) ist $\mathcal{E}(\mathbb{T},X_0) \overset{z-T_0}{\longrightarrow} \mathcal{E}(\mathbb{T},X_0)$ topologischer Monomorphismus.

Über Dualitätstheorie für Tensorprodukte prüfen wir nach, daß die Adjungierte von $z - T_0$ (bis auf Ähnlichkeit) mit der Abbildung $z - T$ auf $\mathcal{E}'(\mathbb{T})\widehat{\otimes}X_0'$ übereinstimmt. Daraus folgt die Behauptung, denn der adjungierte Operator eines topologischen Monomorphismus ist surjektiv (in der Kategorie der Frécheträume). Nun zu der angesprochenen Identifizierung: Wir prüfen auf Elementartensoren nach, daß das folgende Diagramm kommutiert ($\sigma : \mathcal{E}'(\mathbb{T})\widehat{\otimes}X_0' \to \mathcal{E}(\mathbb{T},X_0)'$ sei dabei die Identifizierung aus Korollar (1.4.4)(b)):

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}(\mathbb{T},X_0)' \arrow[d, "\sigma^{-1}"'] & \mathcal{E}(\mathbb{T},X_0)' \arrow[l, "(z-T_0)'"'] \\
\mathcal{E}'(\mathbb{T})\widehat{\otimes}X_0' & \mathcal{E}'(\mathbb{T})\widehat{\otimes}X_0'. \arrow[l, "z-T"'] \arrow[u, "\sigma"']
\end{tikzcd}$$

Beachtet man $T_0' = T$, so genügt dazu folgende Rechnung (wobei $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$, $x \in X$ und $v \otimes x_0' \in \mathcal{E}'(\mathbb{T}) \otimes X_0'$ beliebig vorgegeben sind):

$$\begin{aligned}
< \varphi x, (z-T_0)' \circ \sigma(v \otimes x_0') > &= < z\varphi x - \varphi T_0 x, \sigma(v \otimes x_0') > \\
&= < z\varphi, v >< x, x_0' > - < \varphi, v >< T_0 x, x_0' > \\
&= < \varphi, M_z' v >< x, x_0' > - < \varphi, v >< x, T_0' x_0' > \\
&= < \varphi x, \sigma \circ (z - T_0')(v \otimes x_0') > .
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

2.3.7 In Anlehnung an [8] sagen wir: Eine stetig lineare Abbildung $T : E \to F$ zwischen lokalkonvexen Räumen besitzt die Liftungseigenschaft für beschränkte Mengen, wenn es für jede beschränkte Menge W in F eine beschränkte Menge V in E gibt, so daß $TV = W$.

Grundlegend für den Beweis des nachfolgenden Satzes ist die Tatsache, daß sich die Algebra $\mathcal{E}(\mathbb{T})$ als projektiver Limes von Sobolevräumen $W^k(\mathbb{T})$ schreiben läßt, und zwar im Sinne von Lemma (2.1.7) (b). Die genaue Konstruktion wird in Anhang C durchgeführt.

2.3.8 Satz. *Ist $T \in L(X)$ $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalar, so ist $\mathcal{E}'(\mathbb{T})\widehat{\otimes}X \stackrel{z-T}{\longrightarrow} \mathcal{E}'(\mathbb{T})\widehat{\otimes}X$ surjektiv und hat die Liftungseigenschaft für beschränkte Mengen.*

Beweis. Es bezeichne $\Phi : \mathcal{E}(\mathbb{T}) \to L(X)$ den Kalkül für T. Mit Lemma (2.1.7)(b) finden wir dazu eine stetig lineare Fortsetzung $\Phi_0 : W^k(\mathbb{T}) \to L(X)$ auf eine Stufe, die immer noch M_z mit T vertauscht, d.h. $\Phi_0(zf) = T\Phi_0(f)$ $(\forall f \in W^k(\mathbb{T}))$. Unter Einsatz von Φ_0 definieren wir die Abbildung

$$W^k(\mathbb{T}) \times X \to X; \quad (f, x) \mapsto \Phi_0(f)x,$$

welche offenbar stetig bilinear ist und daher (stetig linear) über das π-Tensorprodukt faktorisiert (vgl. (B.5)). Die so gewonnene (eindeutig bestimmte) stetig lineare Abbildung

$$\Psi : W^k(\mathbb{T})\widehat{\otimes}_\pi X \to X \text{ mit } \Psi(f \otimes x) = \Phi_0(f)x$$

erfüllt dann die Gleichung $\Psi(1 \otimes x) = \Phi_0(1)x = x$ $(x \in X)$, weshalb sie einerseits surjektiv ist, und andererseits eine (stetig lineare) Rechtsinverse gegeben ist durch

$$R : X \to W^k(\mathbb{T})\widehat{\otimes}X; \quad x \mapsto 1 \otimes x.$$

Darüberhinaus gilt auf Elementartensoren:

$$\Psi(zf \otimes x) = \Phi_0(zf)x = T\Phi_0(f)x = T\Psi(f \otimes x) \quad (f \in W^k(\mathbb{T}), x \in X).$$

Damit können wir über das folgende kommutative Diagramm die Surjektivität und Liftungseigenschaft von $z-T$ zurückführen auf die des Operators $M_z' \otimes id - id \otimes M_z$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}'(\mathbb{T})\widehat{\otimes}W^k(\mathbb{T})\widehat{\otimes}_\pi X \arrow[r, "(M_z'\otimes id - id\otimes M_z)\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes\Psi"'] & \mathcal{E}'(\mathbb{T})\widehat{\otimes}W^k(\mathbb{T})\widehat{\otimes}_\pi X \arrow[d, "id\otimes\Psi"] \\
\mathcal{E}'(\mathbb{T})\widehat{\otimes}X \arrow[r, "z-T", "M_z'\otimes id - id\otimes T"'] & \mathcal{E}'(\mathbb{T})\widehat{\otimes}X.
\end{tikzcd}$$

Die Kommutativität folgt sofort durch Nachrechnen auf Elementartensoren $v \otimes f \otimes x \in \mathcal{E}'(\mathbb{T}) \otimes W^k(\mathbb{T}) \otimes X$:

$$\begin{aligned}
& (id \otimes \Psi) \circ (M_z' \otimes id - id \otimes M_z) \otimes id(v \otimes f \otimes x) \\
= \;& id \otimes \Psi(M_z'v \otimes f \otimes x - v \otimes zf \otimes x) \\
= \;& M_z'v \otimes \Psi(f \otimes x) - v \otimes \Psi(zf \otimes x) \\
= \;& M_z'v \otimes \Psi(f \otimes x) - v \otimes T\Psi(f \otimes x) \\
= \;& (M_z' \otimes id - id \otimes T)(v \otimes \Psi(f \otimes x)) \\
= \;& (M_z' \otimes id - id \otimes T) \circ (id \otimes \Psi)(v \otimes f \otimes x).
\end{aligned}$$

Aus der Kommutativität des Diagrammes und der Surjektivität der Spaltenabbildungen liest man nun sofort ab, daß sich die Surjektivität von der oberen Spalte auf die untere überträgt. Ebenso verhält es sich mit der Liftungseigenschaft: Hat die obere Abbildung die Liftungseigenschaft für beschränkte Mengen, so auch die untere, denn wir können folgendermaßen vorgehen: Ist $W \subset \mathcal{E}'(\mathbb{T})\widehat{\otimes}X$ eine beschränkte Menge, so ist $id\otimes R(W)$ ein beschränktes Urbild von W unter $id\otimes\Psi$ (beachte: $id\otimes R$ ist stetige Rechtsinverse). Mit der Liftungseigenschaft der oberen Zeile finden wir aber weiter zu $id\otimes R(W)$ in $\mathcal{E}'(\mathbb{T})\widehat{\otimes}W^k(\mathbb{T})\widehat{\otimes}_\pi X$ ein beschränktes Urbild V. Wegen der Kommutativität des Diagrammes ist dann $id\otimes\Psi(V)$ ein Urbild zu W unter $z-T$, das wegen der Stetigkeit von $id\otimes\Psi$ beschränkt ist.

Bleibt zu zeigen: die obere Zeilenabbildung

$$\mathcal{E}'(\mathbb{T})\widehat{\otimes}W^k(\mathbb{T})\widehat{\otimes}_\pi X \xrightarrow{(M_z'\otimes id - id\otimes M_z)\otimes id} \mathcal{E}'(\mathbb{T})\widehat{\otimes}W^k(\mathbb{T})\widehat{\otimes}_\pi X$$

hat die geforderten Eigenschaften. Beachtet man, daß $\mathcal{E}'(\mathbb{T})$ nuklear und als starker Dual eines Fréchetraumes ein vollständiger (DF)-Raum ist ([12], 12.4, Theorem 5), und daß der Hilbertraum $W^k(\mathbb{T})$ aufgefaßt werden kann als reflexiver Banachraum, so genügt es nach Lemma 6.4.5 aus [8], die Surjektivität von

$$\mathcal{E}'(\mathbb{T})\widehat{\otimes}W^k(\mathbb{T}) \xrightarrow{M_z'\otimes id - id\otimes M_z} \mathcal{E}'(\mathbb{T})\widehat{\otimes}W^k(\mathbb{T})$$

nachzurechnen. Nach Korollar (2.3.6) ist damit nur noch zu zeigen: $M_z : W^k(\mathbb{T}) \to W^k(\mathbb{T})$ ist ein adjungierter Operator mit $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Kalkül. Da $W^k(\mathbb{T})$ ein Hilbertraum ist, gilt: $M_z = (M_z^*)^*$ bezüglich der Hilbertraum-Dualität, also ist die Forderung, adjungierter Operator zu sein, trivialerweise erfüllt.

Daß M_z hingegen $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalar ist, ist ebenfalls nicht schwierig einzusehen: Ein Kalkül ist wie üblich gegeben durch $\varphi \mapsto M_\varphi$. Damit ist der Beweis abgeschlossen.

$\diamondsuit$

Um das gerade gezeigte Resultat auf Quotienten von $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalaren Operatoren zu übertragen, benötigen wir das folgende Lemma:

2.3.9 Lemma. *Seien X, Y Banachräume, E vollständiger nuklearer (DF)-Raum. Ist dann $T \in L(X,Y)$ ein surjektiver Operator, so haben*

(a) $T : X \to Y$ und

(b) $E\widehat{\otimes}X \xrightarrow{id\otimes T} E\widehat{\otimes}Y$

die Liftungseigenschaft für beschränkte Mengen.

Beweis.

(a) Als surjektive stetig lineare Abbildung zwischen Banachräumen ist T offen und damit insbesondere offen am Ursprung. Damit existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß $TB_1(0) \supset B_\varepsilon(0)$, wobei $B_r(0)$ die offene $\|\cdot\|$-Kugel mit Radius r um 0 bezeichnet. Ist nun $W \subset Y$ beschränkt, d.h. $W \subset B_r(0)$ für $r > 0$ geeignet, so gilt wegen der Linearität von T: $TB_{\frac{r}{\varepsilon}}(0) \supset B_r(0)$, weshalb $(T^{-1}W) \cap B_{\frac{r}{\varepsilon}}(0)$ (offensichtlich $\|\cdot\|$-beschränktes) Urbild von W unter T ist.

(b) Wir greifen auf (B.8) zurück (beachte: Y ist Banachraum und folglich ebenfalls ein vollständiger (DF)-Raum). Ist $W \subset E\widehat{\otimes}Y$ beschränkt, so wählen wir zugehörige abgeschlossene, absolutkonvexe, beschränkte Mengen $A \subset E, B \subset Y$ nach (B.8). Unter Verwendung der natürlichen Inklusionen $i : E_A \to E$ und $j : Y_B \to Y$ erstellt man das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} E_A\widehat{\otimes}_\pi Y_B & \xrightarrow{id\otimes j} & E_A\widehat{\otimes}_\pi Y \\ {\scriptstyle i\otimes j}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle i\otimes id} \\ E\widehat{\otimes}Y & = & E\widehat{\otimes}Y. \end{array}$$

Nach (B.8) kann man W unter der linken Spaltenabbildung zu einer beschränkten Menge in $E_A \widehat{\otimes}_\pi X_B$ liften; deren Bild unter der oberen Zeilenabbildung ist jedoch beschränkt in $E_A \widehat{\otimes}_\pi X$ und wird wegen der Kommutativität des Diagrammes unter der rechten Spaltenabbildung wieder auf W abgebildet, so daß man W auch in der rechten Spalte beschränkt liften kann.

Nach dieser Beobachtung folgt die Behauptung (b) unmittelbar durch Anwendung von Teil (a) auf die obere Zeile des folgenden kommutativen Diagrammes

$$\begin{array}{ccc} E_A \widehat{\otimes}_\pi X & \xrightarrow{id \otimes T} & E_A \widehat{\otimes}_\pi Y \\ {\scriptstyle i \otimes id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i \otimes id} \\ E \widehat{\otimes} X & \xrightarrow{id \otimes T} & E \widehat{\otimes} Y, \end{array}$$

was keine Schwierigkeiten bereitet, da mit E_A und X auch $E_A \widehat{\otimes}_\pi X$ ein Banachraum ist, auf dem $id \otimes T$ als Tensorprodukt surjektiver Abbildungen nach (B.6)(a) surjektiv operiert. ♢

Eine direkte Anwendung auf Satz (2.3.8) liefert:

2.3.10 Korollar. *Ist $T \in L(X)$ Quotient eines $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalaren Operators, so ist $\mathcal{E}'(\mathbb{T}) \widehat{\otimes} X \xrightarrow{z-T} \mathcal{E}'(\mathbb{T}) \widehat{\otimes} X$ surjektiv und hat die Liftungseigenschaft für beschränkte Mengen.*

Beweis. Daß T ein solcher Quotient ist, heißt nichts anderes, als daß es eine stetig lineare Surjektion $q : \hat{X} \to X$ gibt ($\hat{X}$ Banachraum), die T mit einem $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalaren Operator $\hat{T} \in L(\hat{X})$ vertauscht, also $T \circ q = q \circ \hat{T}$. Damit rechnet man leicht nach, daß

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}'(\mathbb{T}) \widehat{\otimes} \hat{X} & \xrightarrow{z-\hat{T}} & \mathcal{E}'(\mathbb{T}) \widehat{\otimes} \hat{X} \\ {\scriptstyle id \otimes q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id \otimes q} \\ \mathcal{E}'(\mathbb{T}) \widehat{\otimes} X & \xrightarrow{z-T} & \mathcal{E}'(\mathbb{T}) \widehat{\otimes} X \end{array}$$

kommutiert. Die obere Zeilenabbildung ist surjektiv nach (2.3.8) und hat die Liftungseigenschaft für beschränkte Mengen, ebenso die Spalten nach vorigem Lemma, denn $\mathcal{E}'(\mathbb{T})$ ist nuklear und als starker Dual des Fréchetraumes $\mathcal{E}(\mathbb{T})$ ein vollständiger (DF)-Raum. Damit vererben sich aber Surjektivität und Liftungseigenschaft von der oberen auf die untere Zeile. ♢

2.4 Funktionalkalküle und Modulstrukturen

Der übliche Weg zum holomorphen Funktionalkalkül führt über die Anwendung der Cauchyschen Integralformel auf operatorwertige Integranden. Ein völlig anderer Zugang wird in [8] (S.12ff) vorgeführt. Dort wird die Tatsache ausgenutzt, daß ein stetig linearer Operator mit Kalkül auf einem Banachraum X nichts anderes ist als eine Modulstruktur auf X. Anstatt den Kalkül zu konstruieren, wird die zugehörige Modulstruktur eingeführt. Im Falle des $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Kalküls sind dafür nur wenige Zeilen notwendig, wie wir gleich sehen werden. Für die folgenden Begriffe vergleiche [8], Definition 3.1.1 und 3.1.2:

2.4.1 Unter einer Fréchetalgebra verstehen wir einen Fréchetraum A mit einer stetigen Algebren-Multiplikation $A \times A \to A; (a, b) \mapsto a \cdot b$. Attribute wie "kommutativ" oder "unital" sind dabei im üblichen Sinn zu verstehen.

Sei nun A eine kommutative Fréchetalgebra mit Eins. Unter einem Fréchet- (Banach-) A-Modul verstehen wir dann einen Fréchet- (Banach-) Raum E, versehen mit einer stetigen bilinearen Verknüpfung

$$A \times E \to E; (a,x) \mapsto a \cdot x,$$

die die üblichen Modulaxiome erfüllt (also neben der Bilinearität nur noch $1 \cdot x = x$ und $(a \cdot b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$). Beispiele werden in natürlicher Weise durch Funktionenalgebren gegeben; die Multiplikation zweier Funktionen wird dabei punktweise definiert. Für uns von besonderer Bedeutung sind die folgenden (beachte: $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ ist eine kommutative Fréchetalgebra mit Eins, [8]):

2.4.2 Lemma. *$\mathcal{E}(\mathbb{T})$ ist eine kommutative Fréchetalgebra mit Eins und für jeden Banachraum X ist $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ ein Fréchet-$\mathcal{E}(\mathbb{T})$- sowie ein Fréchet-$\mathcal{O}(\mathbb{C})$-Modul.*

Beweis. Definiert man die postulierten Algebren- und Modulstrukturen jeweils im Sinne der punktweisen Skalarmultiplikation, so ist es überflüssig zu erwähnen, daß dies sämtlichen algebraischen Forderungen gerecht wird. Wir müssen uns also nur noch über die Stetigkeit der entsprechenden Verknüpfungen Gedanken machen. Im Beweis zu (2.2.2) (b) haben wir bereits gesehen: Zu $k \in \mathbb{N}_0$ existiert eine Konstante $c > 0$, so daß für alle $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{T}), f \in \mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ gilt:

$$\|\varphi f\|_k \leq c\|\varphi\|_k\|f\|_k.$$

Damit ist die Verknüpfung

$$\mathcal{E}(\mathbb{T}) \times \mathcal{E}(\mathbb{T}, X) \to \mathcal{E}(\mathbb{T}, X); (\varphi, f) \mapsto \varphi f$$

stetig in $(0,0)$, was wegen der Bilinearität jedoch schon hinreichend ist für die Stetigkeit in jedem Punkt. Setzen wir $X = \mathbb{C}$, so erhalten wir die Stetigkeit der Multiplikation in der Algebra $\mathcal{E}(\mathbb{T})$; für allgemeines X ergibt sich die Stetigkeit der $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Modulverknüpfung auf X.

Für die entsprechenden Aussagen mit $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ beachte man, daß die durch Einschränkung gegebene Einbettung $\mathcal{O}(\mathbb{C}) \to \mathcal{E}(\mathbb{T})$ stetig ist. Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Graphensatz, da die Topologie der beteiligten Funktionenräume jeweils stärker ist als die der punktweisen Konvergenz. $\diamondsuit$

2.4.3 Ist nun A eine kommutative Fréchetalgebra von Funktionen, die 1 und z enthält, X ein Banachraum und $\Phi : A \to L(X)$ ein Funktionalkalkül, so wird X durch die Verknüpfung

$$A \times X \to X; (a,x) \mapsto \Phi(a)x$$

zu einem Fréchet-A-Modul, denn: die Bilinearität ist klar, ebenso die Stetigkeit. Die algebraischen Eigenschaften der Modulverknüpfung rechnet man nach unter Benutzung der algebraischen Eigenschaften des Kalküls: $\Phi(1)x = id(x) = x$ und $\Phi(a)(\Phi(b)x) = \Phi(ab)x$.

Umgekehrt: ist eine Banach-A-Modulstruktur auf X gegeben, so ist der Operator $X \to X; x \mapsto z \cdot x$ stetig linear mit Kalkül $A \to L(X); \varphi \mapsto M_\varphi$, wobei $M_\varphi : X \to X; x \mapsto \varphi \cdot x$ den Operator der (Modul-)Multiplikation mit φ bezeichnet.

Ist ein beliebiger stetig linearer Operator T auf einem Banachraum X gegeben, so hat T zumindest einen $\mathcal{O}(\mathbb{C})$-Kalkül (wie man ihn über die Cauchysche Integralformel definieren kann). In jedem Fall kann also X als $\mathcal{O}(\mathbb{C})$-Modul angesehen werden; diese Tatsache werden wir später benutzen, um die Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}(\mathbb{T})}$ als Transversalitätsrelation zu formulieren.

Über die Modulstruktur bietet sich auch ein völlig neuer Zugang zur Konstruktion von Funktionalkalkülen für einen Operator $T \in L(X)$. Wir wollen dies am Beispiel des $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Kalküls verdeutlichen: Man betrachtet den zu X gehörigen vektorwertigen Funktionenraum $\mathcal{E}(\mathbb{T})\widehat{\otimes}X \simeq \mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$. Dieser hat eine natürliche $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Modulstruktur (vgl. Lemma (2.4.2)), und X ist als Unterraum der konstanten Funktionen in $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ eingebettet. Man kann nun versuchen, einen Kalkül für T auf X zu konstruieren, indem man eine Projektion $\rho_T : \mathcal{E}(\mathbb{T}, X) \to X$ findet, die die $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Modulstruktur von $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ in geeigneter Weise auf X überträgt.

2.4.4 Lemma. *Ist $T \in [\mathcal{E}(\mathbb{T})]$, so induziert die Projektion*

$$\rho_T : \mathcal{E}(\mathbb{T}, X) \to X; f \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} T^n \hat{f}(n)$$

auf X eine $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Modulstruktur, die mit der durch T gegebenen übereinstimmt.

Beweis. Nach (2.1.3) wissen wir: T ist bijektiv und erfüllt Normabschätzungen der Form $\|T^n\| \leq c(1 + |n|)^k \quad (n \in \mathbb{Z})$. Damit ist für $f \in \mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ die Reihe $\rho_T(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T^n \hat{f}(n)$ konvergent, denn:

$$\| \sum_{n=-\infty}^{\infty} T^n \hat{f}(n) \| \leq c \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|\hat{f}(n)\| (1 + |n|)^k.$$

Damit ist ρ_T wohldefiniert und linear, und die Normabschätzung liefert (via topologischer Isomorphie $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X) \simeq s_X$) sofort die Stetigkeit. Nun zur induzierten Modulstruktur: Wir definieren auf X eine Verknüpfung durch:

$$\mathcal{E}(\mathbb{T}) \times X \to X; (\varphi, x) \mapsto \rho_T(\varphi x),$$

wobei die Verknüpfung im Argument von ρ_T in $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ gebildet wird. Aber es ist offenbar:

$$\begin{aligned} \rho_T(\varphi x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} T^n \widehat{(\varphi x)}(n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} T^n \widehat{\varphi}(n) x \\ &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(n) T^n \right) x \\ &= \Phi(\varphi) x, \end{aligned}$$

wenn Φ den (eindeutig bestimmten) $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Kalkül bezeichnet. Damit ist die Behauptung bewiesen. $\diamondsuit$

Unter Voraussetzung der im Beweis verwendeten Wachstumsbedingungen kann man natürlich den $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Kalkül auch auf diese Weise (d.h. durch Projektion der kanonischen $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Modulstruktur von $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$) definieren.

2.4.5 Da wir nun schon einmal den Weg von Funktionalkalkülen zu Modulstrukturen und damit zu der dort zur Verfügung stehenden algebraischen Maschinerie gefunden haben, wollen wir kurz andeuten, wie sich die Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}(\mathbb{T})}$ bzw. die Eigenschaft, Banach-$\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Modul zu sein, in algebraischer Sprache präsentieren. Da wir diese Resultate an keiner anderen Stelle dieser Arbeit mehr benötigen werden, lohnt es sich nicht, die zugehörige algebraische Theorie vollständig zu entwickeln. Statt dessen sei auf [8] verwiesen, speziell die Abschnitte 2.2 und 3.1.

2.4.6 Ist ein stetig linearer Operator $T \in L(X)$ gegeben, so können wir den assoziierten Koszul-Komplex $K_\bullet(T, X)$ betrachten. Dessen Grundbausteine sind die Räume alternierender p-Formen mit Koeffizienten in X: $K_p(T, X) := \Lambda^p(\mathbb{C}, X) = X \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda^p(\mathbb{C})$. Da aber $\Lambda^0(\mathbb{C}) = \Lambda^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ und $\Lambda^p(\mathbb{C}) = 0$ für $p > 1$ ist, gilt: $K_0(T, X) = X \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \simeq X$ und (ebenso) $K_1(T, X) \simeq X$ sind die einzigen nichttrivialen Räume in $K_\bullet(T, X)$. Der Koszul-Komplex reduziert sich somit auf

$$0 \xleftarrow{\delta_0} K_0(T, X) \xleftarrow{\delta_1} K_1(T, X) \xleftarrow{\delta_2} 0,$$

(mit $\delta_1 x = Tx$) bzw. bis auf topologische Isomorphie auf die Sequenz:

$$0 \longleftarrow X \xleftarrow{T} X \longleftarrow 0.$$

Für die nicht-trivialen Homologie-Räume $H_p(K_\bullet(T, X)) = \ker \delta_p / \operatorname{ran} \delta_{p+1}$ erhält man damit bis auf topologische Isomorphie:

$$\begin{aligned} H_0(K_\bullet(T, X)) &\simeq X/TX \\ H_1(K_\bullet(T, X)) &\simeq \ker T. \end{aligned}$$

Wir können nun die Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}(\mathbb{T})}$ als Transversalitätsresultat formulieren. Bevor wir jedoch das Ergebnis festhalten, ein Wort zur im Beweis verwendeten Notation: Ist X ein Banach-$\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Modul, so auch $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ bezüglich punktweiser Anwendung der Moduloperationen. Die punktweise von X geerbte Modul-Multiplikation mit z kürzen wir mit w ab:

$$w : \mathcal{E}(\mathbb{T}, X) \to \mathcal{E}(\mathbb{T}, X); f \mapsto (wf)(\zeta) = z \cdot f(\zeta).$$

Ist etwa $T \in L(X)$ Operator mit $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Kalkül, und X mit der davon induzierten Modulstruktur ausgestattet, so ist w nichts anderes als die punktweise Anwendung von T.

2.4.7 Lemma. *Für $T \in L(X)$ sind äquivalent:*

(a) T hat die Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}(\mathbb{T})}$.

(b) Wird X mit der von T induzierten $\mathcal{O}(\mathbb{C})$-Modulstruktur ausgestattet, gilt: $\mathcal{E}(\mathbb{T}) \perp_{\mathcal{O}(\mathbb{C})} X$.

Beweis. Wir betrachten zunächst den zu $z - T : \mathcal{E}(\mathbb{T}, X) \to \mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ assoziierten Koszul-Komplex. Dessen Homologie-Räume können wir nach den Vorbemerkungen genau angeben:

$$H_p(K_\bullet(z - T, \mathcal{E}(\mathbb{T}, X))) = \begin{cases} \mathcal{E}(\mathbb{T}, X)/(z - T)\mathcal{E}(\mathbb{T}, X) & (p = 0) \\ \ker(z - T) & (p = 1). \end{cases}$$

Punkt (a) besagt nun definitionsgemäß, daß $z - T : \mathcal{E}(\mathbb{T}, X) \to \mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ injektiv ist und abgeschlossenes Bild hat. In Termen der Homologie-Räume bedeutet dies:

$$H_p(K_\bullet(z - T, \mathcal{E}(\mathbb{T}, X))) = \begin{cases} \text{hausdorffsch} & (p = 0) \\ 0 & (p = 1). \end{cases}$$

(beachte: die Hausdorffeigenschaft eines Quotienten ist im lokalkonvexen Fall äquivalent zur Abgeschlossenheit des entsprechenden Faktors). Die Bedingung (b) heißt gerade, daß eine analoge Bedingung für die Räume $\hat{\operatorname{Tor}}_p^{\mathcal{O}(\mathbb{C})}(\mathcal{E}(\mathbb{T}), X)$ gilt. Wir werden uns jedoch überzeugen, daß hier eine topologische Isomorphie besteht, so daß die im Lemma behauptete Äquivalenz gilt. Dazu berechnen wir zunächst die Tôr-Räume über die Koszul-Auflösung.

Nach den Überlegungen auf S.115 von Eschmeier und Putinar [8] ist

$$K_\bullet(z-w, \mathcal{O}(\mathbb{C})\widehat{\otimes}\mathcal{E}(\mathbb{T})) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{T}) \longrightarrow 0$$

topologisch freie Auflösung von $\mathcal{E}(\mathbb{T})$, denn $\mathcal{E}(\mathbb{T})$ ist in natürlicher Weise $\mathcal{O}(\mathbb{C})$-Modul (2.4.2). Da die angegebene Koszul-Auflösung aus nuklearen Frécheträumen besteht (diese Eigenschaften vererben sich von $\mathcal{E}(\mathbb{T})$ und $\mathcal{O}(\mathbb{C})$, vgl. [19], Proposition 50.1 für die Nuklearität), können wir mit Corollary 3.1.13 (α) aus [8] weiter folgern:

$$\widehat{\mathrm{Tor}}_p^{\mathcal{O}(\mathbb{C})}(\mathcal{E}(\mathbb{T}), X) \simeq H_p\Big(K_\bullet(z-w, \mathcal{O}(\mathbb{C})\widehat{\otimes}\mathcal{E}(\mathbb{T}))\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}(\mathbb{C})} X\Big).$$

Nun gilt jedoch nach [8], Lemma 3.1.9:

$$(\mathcal{O}(\mathbb{C})\widehat{\otimes}\mathcal{E}(\mathbb{T}))\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}(\mathbb{C})} X \simeq X\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}(\mathbb{C})}(\mathcal{O}(\mathbb{C})\widehat{\otimes}\mathcal{E}(\mathbb{T})) \simeq X\widehat{\otimes}\mathcal{E}(\mathbb{T}) \simeq \mathcal{E}(\mathbb{T}, X),$$

wobei wir im letzten Schritt die Tensorproduktdarstellung aus (1.4.3) benutzt haben. Vermöge der dabei gemachten Identifikationen stimmen die beiden Operatoren $(z-w)\otimes_{\mathcal{O}(\mathbb{C})} id$ und $z-w$ überein. Damit haben wir die Identifizierung

$$\widehat{\mathrm{Tor}}_p^{\mathcal{O}(\mathbb{C})}(\mathcal{E}(\mathbb{T}), X) \simeq H_p(K_\bullet(z-w, \mathcal{E}(\mathbb{T}, X))).$$

Wie oben bereits angedeutet folgt daraus die im Lemma behauptete Äquivalenz, wenn man sich klarmacht, daß w hier gerade der punktweisen Anwendung von T entspricht. $\diamondsuit$

Ist nun X ein Banach-$\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Modul, so ist durch die Modulverknüpfung mit z, (also $w|_X$) ein $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalarer Operator auf X gegeben; dieser hat $(\beta)_{\mathcal{E}(\mathbb{T})}$ nach Satz (2.3.2), woraus wir mit dem gerade Gezeigten folgern:

2.4.8 Korollar. *Ist X ein Banach-$\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Modul, so gilt $\mathcal{E}(\mathbb{T}) \perp_{\mathcal{O}(\mathbb{C})} X$.*

$\diamondsuit$

Dies ist möglicherweise Ausgangspunkt für mehrdimensionale Betrachtungen (vgl. [8], Proposition 6.4.13).

2.5 Der Quotientenkalkül

Im nächsten Kapitel werden wir zu gewissen stetig linearen Operatoren Fortsetzungen konstruieren, die einen $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Kalkül haben. Die Definitionsbereiche der Fortsetzungen werden geeignete Quotientenräume sein, die Operatoren selbst Quotienten von s und M_z. An dieser Stelle soll deshalb kurz auf Quotienten (von Abbildungen) und auf die Vererbung eines Kalküls auf Quotienten eingegangen werden.

2.5.1 Es sei E ein Banachraum, $F \subset E$ ein abgeschlossener Unterraum, $S \in L(E)$ ein stetig linearer Operator mit invariantem Unterraum F, d.h. $SF \subset F$. Dann induziert S einen Operator $S/F \in L(E/F)$ (beachte: der Quotient ist wieder ein Banachraum) in der folgenden Weise: Man definiert die untere Zeile des Diagrammes

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{S} & E \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi} \\ E/F & \xrightarrow{S/F} & E/F \end{array}$$

(wo π die Quotientenabbildung bezeichnet) explizit durch $S/F(\pi(x)) := \pi(Sx)$. Das liefert nach Voraussetzung an F eine wohldefinierte stetig lineare Abbildung S/F

auf dem Quotienten, die das Diagramm kommutativ macht. Ferner gilt für deren Norm: $\|S/F\| \leq \|S\|$.

Ist nun $\Phi : A \to L(E)$ ein Funktionalkalkül für S (mit einer geeigneten Funktionenalgebra A), und gilt für alle $f \in A$: $\Phi(f)F \subset F$, so definiert

$$\Phi/F : A \to L(E/F); f \mapsto \Phi(f)/F$$

einen (im folgenden als Quotientenkalkül bezeichneten) Funktionalkalkül für den Operator S/F.

2.5.2 Lemma. *Sei E Banachraum, $F \subset E$ abgeschlossener Unterraum, $S \in L(E)$ mit $SF \subset F$.*

(a) Ist $S \in [\mathcal{E}(\mathbb{T})]$ und zusätzlich $S^{-1}F \subset F$, so existiert der Quotientenkalkül für S/F.

(b) $S/F \in [\mathcal{E}(\mathbb{T})] \Leftrightarrow S'|_{F^\perp} : F^\perp \to F^\perp \in [\mathcal{E}(\mathbb{T})]$.

Beweis.

(a) Es ist nur zu zeigen, daß F invariant ist unter $\Phi(f)$, wenn Φ den $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Kalkül bezeichnet. Für $f \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$, $x \in F$ beliebig, gilt: $\Phi(f)x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) S^n x$, aber wenn F invariant unter S und S^{-1} ist, so auch unter jeder beliebigen Potenz von S. Damit sind die Partialsummen der Reihe alle Elemente von F, folglich auch der Reihenwert, da F abgeschlossen ist.

(b) Durch Dualisieren des Quotientendiagrammes erhält man die folgende Situation:

$$\begin{array}{ccc} E' & \xleftarrow{S'} & E' \\ {\scriptstyle \pi'}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \pi'} \\ (E/F)' & \xleftarrow{(S/F)'} & (E/F)', \end{array}$$

wobei sich die Kommutativität natürlich vererbt: $\pi' \circ (S/F)' = S' \circ \pi'$. Nach Definition der Adjungierten gilt jedoch: $\pi' y' = y' \circ \pi$, d.h. schränkt man π' auf sein Bild ein, so ist dies gerade der kanonische isometrische Isomorphismus $\tau : (E/F)' \to F^\perp \subset E'$ zwischen $(E/F)'$ und $F^\perp$ (vgl. etwa Rudin [16]). An der Kommutativität des Diagrammes liest man ab: $S'F^\perp = \operatorname{ran} S' \circ \pi' \subset \operatorname{ran} \pi' = F^\perp$. Daraus folgt unmittelbar: $S'|_{F^\perp} \circ \tau = \tau \circ (S/F)'$, d.h. $(S/F)'$ ist ähnlich zu $S'|_{F^\perp}$ vermöge τ. Also haben entweder beide Operatoren einen $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Kalkül oder keiner. ♢

3 $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalare Operatoren

Zu Beginn des letzten Kapitels haben wir gesehen, daß die $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalaren Operatoren sich in erstaunlich einfacher Weise über Wachstumsbedingungen charakterisieren lassen. Alles, was sich von diesen Wachstumsbedingungen auf Einschränkungen übertragen läßt, liefert natürlich sofort Bedingungen, die ein $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalarer Operator notwendig erfüllen muß.

Andererseits gibt es von der Untersuchung subskalarer Operatoren bekannte Methoden, die - unter vergleichsweise abstrakten Voraussetzungen - die Existenz einer Fortsetzung mit gewünschtem Kalkül garantieren.

Dies ist unser Ansatzpunkt: Zu einem gegebenen Operator werden wir eine Fortsetzung konstruieren, die einen $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Kalkül hat - allerdings unter einer Voraussetzung, die zunächst ganz darauf zugeschnitten scheint, daß die Konstruktion funktioniert. Über die Wachstumsbedingungen werden wir dann eine Brücke schlagen können, und es wird sich zeigen, daß diese abstrakte hinreichende Bedingung auch notwendig ist.

3.1 Konstruktion einer Erweiterung mittels Shifts

Der Rechtsshift $s : \ell^1_k(\mathbb{Z}, X) \to \ell^1_k(\mathbb{Z}, X);\quad (a_n)_n \mapsto (a_{n-1})_n$ ist - wie wir uns in (2.2.2) überzeugt haben - ein $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalarer Operator. Die eingangs erwähnte Konstruktion wird zeigen, daß jeder $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalare Operator ähnlich ist zu einer Einschränkung eines geeigneten Quotienten von s.

3.1.1 Wir wenden uns noch einmal kurz dem oben eingeführten Folgenraum

$$\ell^1_k(\mathbb{Z}, X) := \{(a_n)_n \text{ Folge in } X : \|(a_n)_n\|_{1,k} := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|a_n\|(1+|n|)^k < \infty\}$$

zu: Ist $T \in L(X)$ ein stetig linearer Operator, so können wir durch komponentenweise Anwendung $\ell^1_k(\mathbb{Z}, X) \ni (x_n)_n \mapsto (Tx_n)_n \in \ell^1_k(\mathbb{Z}, X)$ eine ebenfalls stetig lineare Abbildung auf dem Folgenraum - der Kürze halber wiederum mit T bezeichnet - definieren. (Die Linearität ist klar. Zur Stetigkeit beachte man, daß sich die Norm einer Folge unter T höchstens um den Faktor $\|T\|$ verschlechtert.)

Wie im skalarwertigen Fall läßt sich der Dual von $\ell^1_k(\mathbb{Z}, X)$ isometrisch mit einem (allerdings X'-wertigen) ℓ^∞ identifizieren. Setzt man (und dies ist ein Banachraum)

$$\ell^\infty_k(\mathbb{Z}, X') := \{(u'_n)_n \text{ Folge in } X' : \|(u'_n)_n\|_{\infty,k} := \sup_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\|u'_n\|}{(1+|n|)^k} < \infty\},$$

dann läßt sich zeigen (vgl. Anhang A), daß die angesprochene Dualität wie folgt funktioniert:

$$< (a_n)_n, (u'_n)_n >= \sum_{n\in\mathbb{Z}} < a_n, u'_n > \qquad (a_n)_n \in \ell^1_k(\mathbb{Z}, X), (u'_n)_n \in \ell^\infty_k(\mathbb{Z}, X').$$

Wie oben kann man auch im Falle des ℓ^∞ durch komponentenweise Anwendung eine Abbildung $S \in L(X')$ auf $\ell^\infty_k(\mathbb{Z}, X')$ hochheben. Ist $T \in L(X)$, so verifiziert man sofort mit der Dualitätsformel, daß

$$\begin{array}{ccc} \ell^1_k(\mathbb{Z}, X) & \xrightarrow{T} & \ell^1_k(\mathbb{Z}, X) \\ \ell^\infty_k(\mathbb{Z}, X') & \xleftarrow{T'} & \ell^\infty_k(\mathbb{Z}, X') \end{array}$$

zueinander duale stetig lineare Abbildungen sind.

3.1.2 Satz. *Ist für ein $k \in \mathbb{N}_0$ die Abbildung*

$$j : X \longrightarrow \ell^1_k(\mathbb{Z}, X)/\overline{(s-T)\ell^1_k(\mathbb{Z}, X)}; \quad x \mapsto [(x\delta_{n,0})_n]$$

ein topologischer Monomorphismus, so ist T $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar.

Beweis. Wir vergewissern uns zunächst, daß der Quotient des Shifts auf dem rechtsstehenden Quotientenraum den Quotientenkalkül hat. Nach Lemma (2.5.2) müssen wir nur zeigen, daß $\overline{(s-T)\ell^1_k(\mathbb{Z}, X)}$ invarianter Unterraum von s und s^{-1} ist. Aber offensichtlich vertauschen s und T auf $\ell^1_k(\mathbb{Z}, X)$, weshalb auch s und $(s-T)$ sowie s^{-1} und $(s-T)$ auf diesem Raum kommutieren. Daraus folgt sofort, daß $(s-T)\ell^1_k(\mathbb{Z}, X)$ und damit auch der Abschluß (Stetigkeit) unter s und s^{-1} invariant ist.

Der Quotient $s/F := s/\overline{(s-T)\ell^1_k(\mathbb{Z}, X)}$ hat also einen $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Kalkül. Die Einbettung j ist aber gerade so gemacht, daß auf dem Quotienten nicht unterschieden wird zwischen der Anwendung von T und der von s/F, genauer:

$$\begin{aligned} jTx &= [(Tx\delta_{n,0})_n] \\ &= [(Tx\delta_{n,0})_n + (s-T)(x\delta_{n,0})_n] \\ &= [s(x\delta_{n,0})_n] \\ &= s/F[(x\delta_{n,0})_n] \\ &= (s/F)jx. \end{aligned}$$

Damit ist das folgende Diagramm kommutativ

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{j} & jX & \xrightarrow{\subset} & \ell^1_k(\mathbb{Z}, X)/\overline{(s-T)\ell^1_k(\mathbb{Z}, X)} \\ {\scriptstyle T}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle (s/F)|_{jX}} & & \big\downarrow{\scriptstyle s/F} \\ X & \xrightarrow{j} & jX & \xrightarrow{\subset} & \ell^1_k(\mathbb{Z}, X)/\overline{(s-T)\ell^1_k(\mathbb{Z}, X)}, \end{array}$$

und nach Voraussetzung ist j ein topologischer Monomorphismus. D.h. $j : X \to jX$ ist topologischer Isomorphismus, weshalb man am Diagramm abliest: j ist eine Ähnlichkeitstransformation zwischen T und der Einschränkung eines $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalaren Quotienten des Rechtsshifts. ♢

Der auf den ersten Blick recht unnatürlich und unzugänglich erscheinenden Bedingung an j, die im Satz gefordert wird, können wir durch Dualisieren auf den Leib rücken:

3.1.3 Lemma. *Es sei $T \in L(X)$. Dann sind äquivalent:*

(a) $j : X \longrightarrow \ell^1_k(\mathbb{Z}, X)/\overline{(s-T)\ell^1_k(\mathbb{Z}, X)}; \quad x \mapsto [(x\delta_{n,0})_n]$ *ist ein topologischer Monomorphismus*

(b) $\forall x' \in X' \quad \exists (u'_n)_n \in \ell^\infty_k(\mathbb{Z}, X')$ *mit* $u'_{n+1} = T'u'_n$ $(n \in \mathbb{Z})$ *und* $u'_0 = x'$.

Beweis. Wir identifizieren

$$\begin{array}{ccccc} \left(\ell^1_k(\mathbb{Z}, X)/\overline{(s-T)\ell^1_k(\mathbb{Z}, X)}\right)' & \simeq & \left((s-T)\ell^1_k(\mathbb{Z}, X)\right)^\perp & = & \ker(s'-T'), \\ y' & \mapsto & y' \circ \pi & \mapsto & (u'_n)_n \end{array}$$

wobei $(s'-T') : \ell^\infty_k(\mathbb{Z}, X') \longrightarrow \ell^\infty_k(\mathbb{Z}, X')$ die zu $(s-T)$ adjungierte Abbildung ist. Dann folgt:

$$\begin{aligned} < jx, y' > &= < [(x\delta_{n,0})_n], y' > \\ &= < (x\delta_{n,0})_n, y' \circ \pi > \\ &= < (x\delta_{n,0})_n, (u'_n)_n > \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} < x\delta_{n,0}, u'_n > = < x, u'_0 >, \end{aligned}$$

woran man abliest: modulo der obigen Identifizierungen ist die Abbildung

$$X' \xleftarrow{j'} \ker\left((s'-T') : \ell_k^\infty(\mathbb{Z},X') \longrightarrow \ell_k^\infty(\mathbb{Z},X')\right); \quad (u'_n)_n \mapsto u'_0$$

die Adjungierte von j. (Offenbar ist j als Hintereinanderausführung der stetigen Einbettung $X \to \ell_k^1(\mathbb{Z},X)$ und der Quotientenabbildung stetig linear, so daß die Existenz und Stetigkeit des adjungierten Operators gesichert ist). Wie im skalarwertigen Fall bestätigt man, daß s' der Linksshift ist:

$$< s(a_n)_n, (u'_n)_n >= \sum_{n\in\mathbb{Z}} < a_{n-1}, u'_n >= \sum_{n\in\mathbb{Z}} < a_n, u'_{n+1} > .$$

Damit kann man den Kern von $s'-T'$ beschreiben als

$$\ker(s'-T') = \{(u'_n)_n \in l_k^\infty(\mathbb{Z},X') : u'_{n+1} = T'u'_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}\},$$

und die Bedingung (b) ist äquivalent zur Forderung, daß die Abbildung j' surjektiv ist. Allgemein gilt jedoch für stetig lineare Operatoren auf Banachräumen: j ist topologischer Monomorphismus $\Leftrightarrow$ j' surjektiv. Damit ist das Lemma bewiesen. $\diamondsuit$

3.1.4 Nach dem Lemma ist klar: die recht abstrakte Forderung, daß die Abbildung j eine Einbettung ist, kann ersetzt werden durch eine Aussage über Existenz von Folgen (die gewissen Wachstumsbedingungen genügen). Die Frage ist nun, ob sich solche konkreten Objekte wie langsam wachsende Folgen nicht aus der Charakterisierung von $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalaren Operatoren über Wachstumsbedingungen wieder herausholen lassen. Daß dies funktioniert - und sich damit eine Äquivalenzkette schließen läßt, davon handelt der nächste Satz.

3.1.5 Satz. *Für $T \in L(X)$ sind äquivalent:*

(a) T *ist* $\mathcal{E}(\mathbb{T})$*-subskalar*

(b) $j : X \longrightarrow \ell_k^1(\mathbb{Z},X)/\overline{(s-T)\ell_k^1(\mathbb{Z},X)}; \quad x \mapsto [(\cdots,0,x,0,\cdots)]$ *ist topologischer Monomorphismus für ein* $k \in \mathbb{N}_0$

(c) $\exists k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall x' \in X' \quad \exists (u'_n)_n \in \ell_k^\infty(\mathbb{Z},X')$ *mit* $u'_{n+1} = T'u'_n$ $(n \in \mathbb{Z})$ *und* $u'_0 = x'$.

Beweis. Nach dem vorangegangenen Lemma und Satz (3.1.2) ist nur noch zu zeigen: aus (a) folgt (c).

Ist T $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar, so ist T ähnlich zur Einschränkung eines Operators $\hat{T}$ auf einem Banachraum $\hat{X}$, wobei $\hat{T}$ einen $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Kalkül besitzt. Dies bedeutet: Es gibt ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd} \hat{X} \arrow[r, "\hat{T}"] & \hat{X} \\ X \arrow[u, "i"] \arrow[r, "T"] & X \arrow[u, "i"] \end{tikzcd}$$

mit einem topologischen Monomorphismus i. Dann ist aber auch

$$\begin{tikzcd} \hat{X}' \arrow[d, "i'"] & \hat{X}' \arrow[l, "\hat{T}'"'] \arrow[d, "i'"] \\ X' & X' \arrow[l, "T'"'] \end{tikzcd}$$

kommutativ, und hier ist i' surjektiv (als Adjungierte einer Einbettung). Mit $\hat{T}$ hat aber auch $\hat{T}'$ einen $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Kalkül, und wir wissen: $\hat{T}'$ ist invertierbar und die Potenzen wachsen langsam.

Nun zur Konstruktion der Folge: Sei ein beliebiges $x' \in X'$ gegeben. Wir wählen ein Urbild $x' = i'\hat{x}'_0$ von x' unter i' (surjektiv) und bilden die Folge

$$(\hat{x}'_n)_n \text{ in } \hat{X}' \text{ mit den Gliedern } \hat{x}'_n := (\hat{T}')^n \hat{x}'_0 \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Als Kandidat für die in (c) geforderte Folge $(u'_n)_n$ in X' setzen wir:

$$u'_n := i'\hat{x}'_n \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

projizieren also die Folge $(\hat{x}'_n)_n$ mittels i' wieder auf X' herunter. Bleibt noch nachzuweisen, daß die Folge mit den so definierten Gliedern alle gewünschten Eigenschaften hat.

Nach Satz (2.1.3) existieren Konstanten $c > 0$ und $k \in \mathbb{N}_0$, so daß $\|(\hat{T}')^n\| \leq c(1+|n|)^k$; in bezug auf die Folge $(u'_n)_n$ bedeutet dies:

$$\|u'_n\| \leq \|i'\|\|\hat{x}'_n\| = \|i'\|\|(\hat{T}')^n\|\|\hat{x}'_0\| \leq \|i'\|\|\hat{x}'_0\|c(1+|n|)^k.$$

Damit ist $\sup \frac{\|u'_n\|}{(1+|n|)^k} \leq c\|i'\|\|\hat{x}'_0\| < \infty$, weshalb $(u'_n)_n \in \ell^\infty_k(\mathbb{Z}, X')$.

Ferner hat man:

$$T'u'_n = T' \circ i'\hat{x}'_n = i' \circ \hat{T}'\hat{x}'_n = i' \circ \hat{T}'((\hat{T}')^n\hat{x}'_0) = i' \circ (\hat{T}')^{n+1}\hat{x}'_0 = i'\hat{x}'_{n+1} = u'_{n+1},$$

die gewünschte Vertauschungseigenschaft. Nach Wahl von $\hat{x}'_0$ gilt desweiteren: $u'_0 = i'\hat{x}'_0 = x'$. Damit haben wir zu beliebigem x' eine in (c) gewünschte Folge konstruiert. Bleibt noch anzumerken, daß die Konstante k nur von der Erweiterung $\hat{T}$ abhängig - d.h. für alle x' universell - ist. $\Diamond$

Zum Abschluß sei noch erwähnt, daß man in (c) auf den positiven Teil der Folge verzichten kann, wenn man zusätzlich langsames Potenzwachstum für T voraussetzt. Da sich diese Art der Charakterisierung bei der Behandlung von Beispielen noch als nützlich erweisen wird, werden wir sie hier gesondert festhalten:

3.1.6 Korollar. *Für $T \in L(X)$ sind äquivalent:*

(a) T ist $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar

(b) $\exists k \in \mathbb{N}_0 \quad \exists b > 0: \quad \|T^n\| \leq b(1+n)^k \quad (n \in \mathbb{N}_0)$ und
$\forall x' \in X' \quad \exists (x'_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Folge in X' mit $T'x'_{n+1} = x'_n \quad (n \in \mathbb{N}_0), \quad x'_0 = x'$
sowie $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{\|x'_n\|}{(1+n)^k} < \infty$.

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b). Aus (2.1.5)(a) entnehmen wir die Existenz von Konstanten $\tilde{k}$ und b, wie sie für die Wachstumsbedingung an die positiven Potenzen in Teil (b) benötigt werden.

Zur Konstruktion der Folge greifen wir auf den vorigen Satz (3.1.5) zurück und bilden gemäß (c) zu einem $x' \in X'$ die zugehörige Folge $(u'_n)_n \in \ell^\infty_k(\mathbb{Z}, X')$. Daraus wählen wir dann nur den Negativteil aus, indem wir setzen: $x'_n := u'_{-n} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$. Offenbar ist $x'_0 = u'_0 = x'$, $T'x'_{n+1} = T'u_{-(n+1)} = u'_{-(n+1)+1} = u'_{-n} = x'_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Die Wachstumsbedingung läßt sich ebenfalls direkt umsetzen:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{\|x'_n\|}{(1+n)^k} \leq \sup_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\|u'_n\|}{(1+|n|)^k} = \|(u'_n)_n\|_{\infty,k} < \infty.$$

Dabei bleiben alle oben gemachten Wachstumsabschätzungen offenbar gültig, wenn man die Konstanten k und $\tilde{k}$ durch $\max\{\tilde{k}, k\}$ ersetzt. Folglich gilt (b), wenn man in der Behauptung für k dieses Maximum einsetzt.

(b) $\Rightarrow$ (a). Die Rückrichtung beruft sich ebenfalls auf Teil (c) des vorigen Satzes, wonach wir für $x' \in X'$ eine geeignete zweiseitige Folge bilden müssen. Mit der zugehörigen einseitigen Folge $(x'_n)_n$ aus Teil (a) definieren wir diese wie folgt:

$$u'_n := \begin{cases} x'_{-n} & (n < 0) \\ (T')^n x' & (n \geq 0) \end{cases}.$$

Offenbar ist $u'_0 = x'$ und man liest sofort $T'u'_n = u'_{n+1}$ für die positive Seite der Folge ab; für die negative Seite gilt aber ebenso: $T'u'_n = T'x'_{-n} = x'_{-n-1} = u'_{n+1}$. Bleibt die ℓ^∞_k-Norm auf Endlichkeit hin zu untersuchen, aber:

$$\|(u'_n)_n\|_{\infty,k} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{\|(T')^n x'\|}{(1+n)^k} + \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\|x'_n\|}{(1+n)^k},$$

und die Ausdrücke auf der rechten Seite sind nach den in (b) geforderten Wachstumsbedingungen endlich. $\Diamond$

3.2 Konstruktion einer Erweiterung mittels M_z

Die grundlegende Idee zur im letzten Abschnitt vorgestellten Konstruktion einer Erweiterung stammt von Eschmeier und Putinar [8]. Dort werden subskalare Operatoren mit dieser Methode untersucht, allerdings spielen X-wertige Funktionenräume die Rolle der hier verwendeten X-wertigen Folgenräume, und anstelle des Shifts wird der Multiplikationsoperator M_z betrachtet.

Wir werden uns davon überzeugen, daß die analoge (auf den $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Fall angepaßte) Konstruktion gerade die Resultate liefert, die man aufgrund der Kenntnis des $\mathcal{E}(\mathbb{C})$-Falles vermutet.

3.2.1 Im folgenden soll zuerst die Theorie der projektiven Limites ein wenig vertieft werden, da im Beweis an wesentlichen Stellen von solchen Techniken Gebrauch gemacht wird.

Seien also $E = (\{E_k\}, \pi^E)$, $F = (\{F_k\}, \pi^F)$ zwei abzählbare projektive Spektren von Fréchеträumen. Dann heißt eine Familie $(u_k)_k$ stetig linearer Abbildungen $E_k \xrightarrow{u_k} F_k$ Morphismus von E nach F, falls für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$ mit $l \geq k$ gilt: $\pi^F_{kl} \circ u_l = u_k \circ \pi^E_{kl}$, d.h. wenn das folgende Diagramm kommutativ ist ($l \geq k$):

$$\begin{array}{ccc} E_l & \xrightarrow{u_l} & F_l \\ {\scriptstyle \pi^E_{kl}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi^F_{kl}} \\ E_k & \xrightarrow{u_k} & E_k. \end{array}$$

Diese Bedingung garantiert, daß man die Abbildungen u_k zwischen den Stufen liften kann zu einer Abbildung zwischen den projektiven Limites, genauer:

Ein Morphismus $(u_k)_k$ wie oben induziert die stetig lineare Abbildung

$$\varprojlim u_k : \varprojlim E_k \longrightarrow \varprojlim F_k; \quad \varprojlim u_k := \Pi_k u_k|_{\varprojlim E_k}$$

zwischen den projektiven Limites. Zum Beweis: Ist $(x_k)_k \in \varprojlim E_k$, dann stellen wir fest: $\pi^F_{kl}(u_l(x_l)) = \pi^F_{kl} \circ u_l(x_l) = u_k \circ \pi^E_{kl}(x_l) = u_k(\pi^E_{kl}(x_l)) = u_k(x_k)$, d.h. $\Pi_k u_k|_{\varprojlim E_k}$ bildet wirklich nur in $\varprojlim F_k$ ab. Die Linearität ist klar (Produkt linearer Abbildungen), bleibt also noch die Stetigkeit nachzuweisen. Dazu nutzen wir aus, daß $\varprojlim F_k$ die Produkttopologie trägt, demnach ist $\varprojlim u_k$ genau dann stetig, wenn für alle $l \in \mathbb{N}_0$ die Abbildung $\pi_l^F \circ \varprojlim u_k$ stetig ist, wobei π_l^F die Einschränkung der kanonischen Projektion $\Pi_k F_k \to F_l$ auf $\varprojlim F_k$ ist.

Wegen $\pi_l^F \circ \varprojlim u_k(x_n)_n = \pi_l^F(u_k(x_k))_k = u_l(x_l) = u_l(\pi_l^E(x_n)_n) = u_l \circ \pi_l^E(x_n)_n$ ist diese Forderung jedoch trivialerweise erfüllt

$$\begin{tikzcd} \varprojlim E_k \arrow[r, "\varprojlim u_k"] \arrow[d, "\pi_l^E"] & \varprojlim F_k \arrow[d, "\pi_l^F"] \\ E_l \arrow[r, "u_l"] & F_l, \end{tikzcd}$$

denn: die u_l sind nach Definition stetig und die π_l^E als kanonische Projektionen ebenfalls.

Zum Abschluß vereinbaren wir noch folgende Sprechweise: Ein abzählbares projektives Spektrum von Frécheträumen heiße reduziert, wenn alle Strukturabbildungen dichtes Bild haben.

Nun steht dem Beweis des nachfolgenden Satzes nichts mehr im Wege:

3.2.2 Satz. *Die folgende Abbildung ist ein topologischer Isomorphismus*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(\mathbb{T},X)/\overline{(z-T)\mathcal{E}(\mathbb{T},X)} & \xrightarrow{\simeq} & \varprojlim C^k(\mathbb{T},X)/\overline{(z-T)C^k(\mathbb{T},X)} \\ [f] & \mapsto & ([f]_k)_k. \end{array}$$

Beweis. Wir führen den Beweis in mehreren Schritten. Es ist die Ausführung der Überlegungen, die in [8] Corollary 6.4.8 vorausgeschickt werden (und zwar im reduzierten Fall). Die Idee ist, die Exaktheit einer geeigneten Sequenz von linearen Abbildungen zwischen Stufen hochzuheben auf die induzierte Sequenz zwischen den projektiven Limites. Alles weitere ist im wesentlichen nur noch die Identifikation $\mathcal{E}(\mathbb{T},X) \simeq \varprojlim C^k(\mathbb{T},X)$ aus Kapitel 1.

1. Schritt: Wir überlegen uns zunächst, daß die folgende Sequenz exakt ist:

$$0 \to \varprojlim \overline{(z-T)C^k(\mathbb{T},X)}^k \xrightarrow{e} \varprojlim C^k(\mathbb{T},X) \xrightarrow{\varphi} \varprojlim C^k(\mathbb{T},X)/\overline{(z-T)C^k(\mathbb{T},X)}^k \to 0$$

- wobei $e(f_k)_k := (f_k)_k$ die von den Inklusionen und $\varphi(f_k)_k = ([f_k]_k)_k$ die von den Quotientenabbildungen induzierte Abbildung bezeichne.

Wir betrachten zu Beginn für festes k die Sequenz zwischen den Stufen

$$0 \longrightarrow \overline{(z-T)C^k(\mathbb{T},X)}^k \xrightarrow{e_k} C^k(\mathbb{T},X) \xrightarrow{\varphi_k} C^k(\mathbb{T},X)/\overline{(z-T)C^k(\mathbb{T},X)}^k \longrightarrow 0,$$

wobei e_k die jeweilige stetige Inklusion und φ_k die kanonische Quotientenabbildung bezeichnet. Nun ist die Einbettung e_k injektiv, die Quotientenabbildung φ_k surjektiv und man liest ab: ran $e_k = \ker \varphi_k$, d.h. die Sequenz ist offenbar (unabhängig von k) exakt. Die vorkommenden Räume lassen sich auf offensichtliche Weise durch Strukturabbildungen zu projektiven Spektren ergänzen, so daß $(e_k)_k$ und $(\varphi_k)_k$ Morphismen zwischen diesen werden, denn das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \overline{(z-T)C^k(\mathbb{T},X)}^k \arrow[d, "e_k"', "\cap"] & \overline{(z-T)C^l(\mathbb{T},X)}^l \arrow[l, "\supset"'] \arrow[d, "\cap"', "e_l"] \\ C^k(\mathbb{T},X) & C^l(\mathbb{T},X) \arrow[l, "\supset"'] \end{tikzcd}$$

$(l \geq k)$ ist offenbar kommutativ, und alle Inklusionen sind stetig. Also stehen in den Spalten Strukturabbildungen projektiver Spektren (die Strukturaxiome werden von den Inklusionen trivialerweise erfüllt), und $(e_k)_k$ ist ein zugehöriger Morphismus. Somit ist sichergestellt, daß die induzierte Abbildung e zwischen den Limites existiert. Konkret: für $(f_n)_n \in \varprojlim \overline{(z-T)C^k(\mathbb{T},X)}^k$ gilt: $e(f_n)_n = (\varprojlim e_k)(f_n)_n = (e_n(f_n))_n = (f_n)_n$.

Um die Exaktheit auch im Limes zu erhalten, genügt es nach [8], Theorem 3.2.4, sicherzustellen, daß das erste Spektrum reduziert ist, d.h. die jeweilige Strukturabbildung in der oberen Zeile des Diagrammes muß dichtes Bild haben.

Ist aber $f \in (z-T)C^k(\mathbb{T},X)$, etwa $f = (z-T)g$ mit einer C^k-Funktion g, so können wir nach (1.3.7)(c) eine g in $C^k(\mathbb{T},X)$-approximierende Folge $(g_n)_n$ trigonometrischer Polynome wählen. Die g_n liegen offenbar in $C^l(\mathbb{T},X)$ und wegen der Stetigkeit von $z-T$ ist dann $(z-T)g_n$ eine $(z-T)g = f$ approximierende Folge in $C^k(\mathbb{T},X)$. Es ist also gezeigt:

$$(z-T)C^l(\mathbb{T},X) \subset (z-T)C^k(\mathbb{T},X) \subset \overline{(z-T)C^l(\mathbb{T},X)}^k,$$

was jedoch das Gewünschte liefert, wenn man zum C^k-Abschluß übergeht.

Nun zum projektiven Spektrum der Quotientenräume. Als Strukturabbildungen bieten sich an $(l \geq k)$:

$$C^k(\mathbb{T},X)/\overline{(z-T)C^k(\mathbb{T},X)}^k \xleftarrow{\pi_{kl}} C^l(\mathbb{T},X)/\overline{(z-T)C^l(\mathbb{T},X)}^l; \quad [f]_l \mapsto [f]_k.$$

Wegen $\overline{(z-T)C^l(\mathbb{T},X)}^l \subset \overline{(z-T)C^k(\mathbb{T},X)}^k$ ist die Abbildung wohldefiniert (denn: $[f-g]_l = 0 \Rightarrow [f-g]_k = 0$) und stetig (Linearität klar) bezüglich der jeweiligen Quotientennorm (bei C^k erstreckt sich das Infimum über eine größere Menge). Außerdem gilt: $\pi_{kk} = ([f]_k \mapsto [f]_k) = id, \pi_{kl} \circ \pi_{lm}([f]_m) = \pi_{kl}([f]_l) = [f]_k = \pi_{km}([f]_m)$ für $m \geq l \geq k$, d.h. die Strukturaxiome sind erfüllt. Für $l \geq k$ stehen also im Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
C^k(\mathbb{T},X) & \xleftarrow{\supset} & C^l(\mathbb{T},X) \\
\varphi_k \Big\downarrow \cap & & \cap \Big\downarrow \varphi_l \\
C^k(\mathbb{T},X)/\overline{(z-T)C^k(\mathbb{T},X)}^k & \xleftarrow{\pi_{kl}} & C^l(\mathbb{T},X)/\overline{(z-T)C^l(\mathbb{T},X)}^l
\end{array}$$

in den Zeilen jeweils Strukturabbildungen projektiver Spektren; ferner ist für $f \in C^l(\mathbb{T},X)$ beliebig: $\pi_{kl} \circ \varphi_l(f) = \pi_{kl}([f]_l) = [f]_k = \varphi_k(f)$, d.h. das Diagramm ist kommutativ und die Familie $(\varphi_k)_k$ definiert einen Morphismus projektiver Spektren. Wieder ist die Existenz der induzierten Abbildung φ gesichert, und wir können nachrechnen: $\varphi(f_k)_k = (\varphi_k(f_k))_k = ([f_k]_k)_k$.

Wir haben nun also geklärt, wie die zu betrachtenden Spektren aussehen, und nachgewiesen, daß das erste (in der Sequenz auftretende) reduziert ist. Ferner sind die in der Sequenz auftretenden Abbildungen Morphismen zwischen Spektren.

Dann vererbt sich aber nach [8], Theorem 3.2.4, die Exaktheit der Sequenz in jeder Stufe auf die induzierte Sequenz zwischen den Limites und der erste Beweisschritt ist abgeschlossen.

2. Schritt: Als nächstes überlegen wir uns, daß

$$\overline{(z-T)\mathcal{E}(\mathbb{T},X)} \xrightarrow{i_0} \varprojlim \overline{(z-T)C^k(\mathbb{T},X)}^k; \quad i_0(f) = (f)$$

topologischer Isomorphismus ist.

Dazu betrachten wir für $k \in \mathbb{N}_0$ die Abbildung $(z-T)$ zwischen geeigneten Stufen:

$$C^k(\mathbb{T},X) \xrightarrow{z-T} \overline{(z-T)C^k(\mathbb{T},X)}^k,$$

wo sie offenbar stetig linear mit dichtem Bild ist, wobei das folgende Diagramm für alle $l \geq k$ kommutiert, wenn man als Zeilenabbildungen die stetigen Inklusionen einsetzt:

$$\begin{array}{ccc} C^k(\mathbb{T},X) & \xleftarrow{\supset} & C^l(\mathbb{T},X) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (z-T)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (z-T)} \\ \overline{(z-T)C^k(\mathbb{T},X)}^k & \xleftarrow{\supset} & \overline{(z-T)C^l(\mathbb{T},X)}^l. \end{array}$$

In den Zeilen stehen dabei Strukturabbildungen projektiver Spektren (die Inklusion erfüllt trivialerweise alle Strukturaxiome) zu den Stufen $C^k(\mathbb{T},X)$ einerseits bzw. $\overline{(z-T)C^k(\mathbb{T},X)}^k$ andererseits. Daß das Diagramm kommutiert, heißt gerade: Die Familie der Abbildungen $z-T : C^k(\mathbb{T},X) \to \overline{(z-T)C^k(\mathbb{T},X)}^k$ ist ein Morphismus zwischen beiden projektiven Spektren. Da die oberen Spektralabbildungen dichtes Bild haben ($C^l(\mathbb{T},X) \subset C^k(\mathbb{T},X)$ dicht für $l \geq k$) und das Gleiche für $z-T$ in jeder Stufe gilt, folgt nach [8], Remark 3.2.5 (c), daß die induzierte stetig lineare Abbildung $\varprojlim(z-T)$ zwischen den projektiven Limites dichtes Bild hat. Bevor wir dieses Resultat benutzen können, stellen wir fest, daß

$$\begin{array}{ccccc} \varprojlim C^k(\mathbb{T},X) & \xrightarrow{\varprojlim(z-T)} & \varprojlim \overline{(z-T)C^k(\mathbb{T},X)}^k & \xrightarrow{j} & \varprojlim C^k(\mathbb{T},X) \\ {\scriptstyle i}\Big\uparrow & & {\scriptstyle i_0}\Big\uparrow & & {\scriptstyle i}\Big\uparrow \\ \mathcal{E}(\mathbb{T},X) & \xrightarrow{z-T} & \overline{(z-T)\mathcal{E}(\mathbb{T},X)} & \xrightarrow{\subset} & \mathcal{E}(\mathbb{T},X) \end{array}$$

kommutativ ist, wenn $i(f) = (f)$ der topologische Isomorphismus zwischen den Räumen in der linken Spalte und j die von den Einbettungen $\overline{(z-T)C^k(\mathbb{T},X)}^k \hookrightarrow C^k(\mathbb{T},X)$ induzierte Abbildung bezeichnet. An der rechten Diagrammhälfte liest man dann ab, daß i_0 topologischer Monomorphismus ist. Daß i_0 dichtes Bild hat folgt aus der Kommutativität der linken Diagrammhälfte und der Tatsache, daß $\varprojlim(z-T)$ dichtes Bild hat. Als topologischer Monomorphismus mit dichtem Bild zwischen Frécheträumen ist i_0 schließlich topologischer Isomorphismus.

3. Schritt: Mit Hilfe der Abbildung i_0 kann die exakte Sequenz aus dem ersten Beweisschritt für unsere Zwecke nutzbar gemacht werden. Dazu betrachten wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ \overline{(z-T)\mathcal{E}(\mathbb{T},X)} & \xrightarrow{i_0} & \varprojlim \overline{(z-T)C^k(\mathbb{T},X)}^k \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \cap} & & \Big\downarrow{\scriptstyle e} \\ \mathcal{E}(\mathbb{T},X) & \xrightarrow{i} & \varprojlim C^k(\mathbb{T},X) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \varphi\circ i} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ \varprojlim C^k(\mathbb{T},X)/\overline{(z-T)C^k(\mathbb{T},X)}^k & \xrightarrow{id} & \varprojlim C^k(\mathbb{T},X)/\overline{(z-T)C^k(\mathbb{T},X)}^k \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ 0 & & 0. \end{array}$$

Damit überträgt sich die Exaktheit der Sequenz in der rechten Spalte (die wir im 1. Schritt nachgewiesen haben) auf die linke Spalte, denn die Zeilenabbildungen sind topologische Isomorphismen. Ist aber nun sichergestellt, daß die erste Spalte exakt ist, so wissen wir: die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(\mathbb{T},X)/\overline{(z-T)\mathcal{E}(\mathbb{T},X)} & \xrightarrow{\simeq} & \varprojlim C^k(\mathbb{T},X)/\overline{(z-T)C^k(\mathbb{T},X)} \\ [f] & \mapsto & \varphi \circ i(f) \end{array}$$

ist wohldefiniert und liefert eine topologische Identifizierung; wegen $\varphi\circ i(f) = ([f]_k)_k$ (vgl. Definition von i und Wirkungsweise von e aus 1. Schritt) ist dies gerade die gewünschte, und der Beweis ist abgeschlossen. $\diamondsuit$

3.2.3 Lemma. *Sei $(\{E_k\},\pi)$ ein abzählbares projektives Spektrum von Fréchet-räumen, X ein Banachraum und $j : X \to \varprojlim E_k$ ein topologischer Monomorphismus. Dann existiert ein $l \in \mathbb{N}_0$, so daß $\pi_l \circ j : X \to E_l$ ein topologischer Monomorphismus ist.*

Kurz: eine Einbettung in einen projektiven Limes liefert schon eine Einbettung in eine Stufe.

Beweis. Da wir im Fréchetraum-Fall sind, können wir uns auf Folgenstetigkeit zurückziehen, und es genügt zu zeigen: Es existiert ein $l \in \mathbb{N}_0$, so daß für jede Folge $(x_n)_n$ in X mit $\pi_l \circ j(x_n) \to 0$ auch x_n gegen Null konvergiert. Nach Voraussetzung ist j topologischer Isomorphismus auf sein Bild, und die Stetigkeit der Inversen $j^{-1} : jX \to X$ liefert:

$$\|x\| \le c \max_{k\in F} p_k \circ \pi_k(jx) \quad \forall x \in X,$$

mit $c > 0$, $F \subset \mathbb{N}_0$ endlich und einer geeigneten Familie $\{p_k : k \in F\}$ stetiger Halbnormen auf E_k. Man kann daher problemlos eine natürliche Zahl $l \ge \max F$ wählen und mit den Strukturabbildungen auf der rechten Seite bis zur l-ten Stufe hochklettern:

$$\max_{k\in F} p_k \circ \pi_k(jx) = \max_{k\in F} p_k \circ \pi_{kl}\pi_l(jx) = \max_{k\in F}(p_k \circ \pi_{kl})(\pi_l \circ j)x.$$

Da die Strukturabbildungen stetig sind, ist $\max_{k\in F}(p_k \circ \pi_{kl})$ eine stetige Halbnorm auf E_l. Zusammengefaßt: wir haben eine stetige Halbnorm q und eine Konstante $c > 0$ gefunden mit

$$\|x\| \le cq((\pi_l \circ j)x) \quad (x \in X).$$

Die Behauptung folgt nun aus der Eingangsbemerkung, wenn man beachtet, daß aus $\pi_l \circ j(x_n) \to 0$ folgt: $q(\pi_l \circ j(x_n)) \to 0$ für jede stetige Halbnorm q. $\diamondsuit$

3.2.4 Satz. *Ist für $T \in L(X)$ die Abbildung*

$$j : X \longrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{T},X)/\overline{(z-T)\mathcal{E}(\mathbb{T},X)}; \quad x \mapsto [x]$$

ein topologischer Monomorphismus, so ist T $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar.

Beweis. Die Abbildung j induziert wegen Satz (3.2.2) den - ebenfalls mit j bezeichneten - topologischen Monomorphismus

$$X \xrightarrow{j} \varprojlim C^k(\mathbb{T},X)/\overline{(z-T)C^k(\mathbb{T},X)}; \quad x \mapsto ([x]_k)_k,$$

und mit Lemma (3.2.3) finden wir sogar eine Einbettung in eine Stufe

$$X \xrightarrow{\pi_l \circ j} C^l(\mathbb{T},X)/\overline{(z-T)C^l(\mathbb{T},X)}; x \mapsto \pi_l([x]_k)_k = [x]_l.$$

Wir wollen zeigen: via $j_l := \pi_l \circ j$ ist T ähnlich der Einschränkung des Quotienten $M_z/\overline{(z-T)C^l(\mathbb{T},X)}$, für den wir die Existenz des Quotientenkalküls nachweisen können. Zunächst also zu diesem Quotienten:

Setzen wir abkürzend $F := \overline{(z-T)C^l(\mathbb{T},X)}$, so genügt es zu zeigen, daß für alle $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$ gilt: $M_\varphi F \subset F$ (vgl. Lemma (2.5.2) zur Existenz des Quotientenkalküls und Satz (2.2.2) zum Aussehen des $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Kalküls für M_z). Wegen der Stetigkeit von M_φ genügt es zu zeigen, daß $\overline{(z-T)C^l(\mathbb{T},X)}$ invarianter Unterraum von M_φ ist, was jedoch trivial ist.

Somit haben wir sichergestellt: M_z/F existiert als Element von $L(C^l(\mathbb{T},X)/F)$ und hat den Quotientenkalkül, da sich der $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Kalkül von $M_z \in L(C^l(\mathbb{T},X))$ vererbt. Weiter wissen wir über die Wirkungsweise von M_z/F: Es gilt $(M_z/F)([f]_l) = [M_z f]_l = [zf]_l$.

Nun zur behaupteten Ähnlichkeitsbeziehung: Wir rechnen nach, daß das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "j_l"] \arrow[d, "T"'] & j_l X \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "(M_z/F)|_{j_l X}"] & C^l(\mathbb{T},X)/\overline{(z-T)C^l(\mathbb{T},X)} \arrow[d, "M_z/F"] \\
X \arrow[r, "j_l"] & j_l X \arrow[r, "\subset"] & C^l(\mathbb{T},X)/\overline{(z-T)C^l(\mathbb{T},X)}.
\end{tikzcd}$$

Ist aber $x \in X$ beliebig, so haben wir: $(j_l \circ T)x = [Tx]_l = [Tx + (z-T)x]_l = [zx]_l = M_z/F([x]_l)$. Das ist die gewünschte Kommutativität, und man liest ab: T ist ähnlich (via j_l) dem Operator $(M_z/F)|_{j_l X}$, welcher die $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalare Erweiterung M_z/F hat. $\diamondsuit$

Ganz ähnlich wie bei der Konstruktion der Erweiterung über den Rechtsshift, kann man auch hier die hinreichende Bedingung (an die Abbildung j) dualisieren, vgl. Lemma (3.1.3), und erhält:

3.2.5 Lemma. *Für $T \in L(X)$ sind äquivalent:*

(a) $j : X \longrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{T},X)/\overline{(z-T)\mathcal{E}(\mathbb{T},X)}; \quad x \mapsto [x]$ *ist topologischer Monomorphismus*

(b) $\forall x' \in X' \quad \exists u \in L(\mathcal{E}(\mathbb{T}),X')$ *mit* $u(z\varphi) = T'u(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$ *und* $u(1) = x'$.

Beweis. Wir beobachten: Die Abbildung j ist die Hintereinanderausführung der stetigen Einbettung $X \xrightarrow{i} \mathcal{E}(\mathbb{T},X)$ und der (ebenfalls stetigen) Quotientenabbildung $\mathcal{E}(\mathbb{T},X) \xrightarrow{\pi} \mathcal{E}(\mathbb{T},X)/\overline{(z-T)\mathcal{E}(\mathbb{T},X)}$, also ist j ein stetig linearer Operator zwischen Frécheträumen. Die Forderung in (a), daß j topologischer Monomorphismus zwischen Frécheträumen ist, ist deshalb äquivalent zur Forderung, daß die Adjungierte

$$X' \xleftarrow{j'} \left(\mathcal{E}(\mathbb{T},X)/\overline{(z-T)\mathcal{E}(\mathbb{T},X)}\right)'$$

(welche als stetig lineare Abbildung zwischen den starken Dualräumen existiert) surjektiv ist. Auch im Fréchetraum-Fall haben wir die (algebraische) Identifizierung:

$$\begin{array}{ccccc}
\left(\mathcal{E}(\mathbb{T},X)/\overline{(z-T)\mathcal{E}(\mathbb{T},X)}\right)' & \xrightarrow{\tau} & \left((z-T)\mathcal{E}(\mathbb{T},X)\right)^\perp & = & \ker(z-T)' \\
f' & \mapsto & f' \circ \pi, & &
\end{array}$$

wenn π die Quotientenabbildung bezeichnet. Modulo τ wird die Adjungierte von π zur Inklusionsabbildung

$$\ker(z-T)' \xrightarrow[\pi']{\subset} \mathcal{E}(\mathbb{T},X)'.$$

Unter Einsatz des topologischen Isomorphismus $\gamma : \mathcal{E}(\mathbb{T}, X)' \to L(\mathcal{E}(\mathbb{T}), X')$ aus Korollar (1.4.4) erstellt man das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
X' & \xleftarrow[i']{} & \mathcal{E}(\mathbb{T}, X)' & \xleftarrow[\gamma^{-1}]{\simeq} & L(\mathcal{E}(\mathbb{T}), X') \\
\uparrow id & & \cup \uparrow \pi' & & \cup \uparrow \\
X' & \xleftarrow[j']{} & \ker(z-T)' & \xleftarrow[\gamma^{-1}]{\simeq} & \ker\left(L(\mathcal{E}(\mathbb{T}), X') \stackrel{z-T'}{\longrightarrow} L(\mathcal{E}(\mathbb{T}), X')\right).
\end{array}$$

Die Surjektivität von j' (und damit die Forderung (a)) ist nun äquivalent zu der Bedingung

$$X' = (j' \circ \gamma^{-1}) \ker\left(L(\mathcal{E}(\mathbb{T}), X') \stackrel{z-T'}{\longrightarrow} L(\mathcal{E}(\mathbb{T}), X')\right),$$

wobei der Kern auf der rechten Seite gerade gegeben ist durch

$$\ker(z - T') = \{u \in L(\mathcal{E}(\mathbb{T}), X') : \forall \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{T}) \text{ gilt } u(z\varphi) = T'u(\varphi)\}.$$

Weiter gilt für $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{T})$, $x' \in X'$ beliebig, daß

$$\begin{aligned}
< x, (i' \circ \gamma^{-1})(< \cdot, v > x') > &= (\gamma^{-1}(< \cdot, v > x'))(ix) \\
&= < 1, v >< x, x' > \\
&= < x, (< 1, v > x') > \quad (x \in X),
\end{aligned}$$

und da lin $\{< \cdot, v > x' : v \in \mathcal{E}(\mathbb{T}), x' \in X'\}$ in $L(\mathcal{E}(\mathbb{T}), X')$ dicht liegt, folgt damit $(i' \circ \gamma^{-1})(u) = u(1)$ für alle $u \in L(\mathcal{E}(\mathbb{T}), X')$. Ist u speziell aus $\ker(z - T')$, so liefert die Kommutativität des Diagrammes: $(j' \circ \gamma^{-1})(u) = u(1)$. Daran erkennt man: die Forderung (b) ist nur eine Umformulierung von

$$\begin{aligned}
X' &= (j' \circ \gamma^{-1}) \ker(z - T') \\
&= (j' \circ \gamma^{-1})\{u \in L(\mathcal{E}(\mathbb{T}), X') : \forall \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{T}) \text{ gilt } u(z\varphi) = T'u(\varphi)\},
\end{aligned}$$

was jedoch nach den Bemerkungen von oben zur Surjektivität von j' und damit zu (a) äquivalent ist. $\diamondsuit$

Es sollte nicht schwierig sein, Funktionale wie in (b) von Lemma (3.2.5) mit Hilfe eines Kalküls zu konstruieren. Verwirklicht wird diese Idee in folgendem Satz:

3.2.6 Satz. *Für $T \in L(X)$ sind äquivalent:*

(a) T ist $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar

(b) $j : X \longrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{T}, X)/\overline{(z - T)\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)}$; $\quad x \mapsto [x]$ ist topologischer Monomorphismus

(c) $\forall x' \in X' \quad \exists u \in L(\mathcal{E}(\mathbb{T}), X')$ mit $u(z\varphi) = T'u(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$ und $u(1) = x'$.

Beweis. Nach Lemma (3.2.5) und Satz (3.2.4) ist nur noch zu zeigen: $(a) \Rightarrow (c)$. Wie im Beweis von Satz (3.1.5) erhält man, daß T' Quotient eines $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalaren Operators $\hat{T}' : \hat{X}' \to \hat{X}'$ ist, also

$$\begin{array}{ccc}
\hat{X}' & \xleftarrow{\hat{T}'} & \hat{X}' \\
i' \downarrow & & i' \downarrow \\
X' & \xleftarrow{T'} & X'
\end{array}$$

kommutiert.

Ist $x' \in X'$ gegeben, so finden wir wegen der Surjektivität von i' ein $\hat{x}' \in \hat{X}'$, so daß $i'\hat{x}' = x'$. Bezeichnet Φ den Kalkül für $\hat{T}'$, so definieren wir:

$$u(\varphi) := i'\Phi(\varphi)\hat{x}' \quad (\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{T})).$$

Dieses u ist sicher wohldefiniert und stetig linear und wegen ran $i' \subset X'$ somit ein Element von $L(\mathcal{E}(\mathbb{T}), X')$. Die Eigenschaften des Kalküls liefern den Rest:

$$u(1) = i'\Phi(1)\hat{x}' = i'id(\hat{x}') = i'\hat{x}' = x'$$

und

$$\begin{aligned} u(z\varphi) &= i'\Phi(z\varphi)\hat{x}' \\ &= i'\hat{T}'\Phi(\varphi)\hat{x}' \\ &= T'i'\Phi(\varphi)\hat{x}' \\ &= T'u(\varphi) \quad (\forall \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{T})). \end{aligned}$$

Damit ist zu jedem x' eine passende Distribution konstruiert. $\Diamond$

3.2.7 Eine zweite Möglichkeit, den Beweis $(a) \Rightarrow (c)$ zu erbringen, besteht darin, mit Hilfe einer Folge $(u'_n)_n \in \ell^\infty_k(\mathbb{Z}, X')$ mit $u'_{n+1} = T'u'_n$ $(n \in \mathbb{Z})$ und $u'_0 = x'$ - die nach Satz (3.1.5) für jedes x' existiert - ein $u \in L(\mathcal{E}(\mathbb{T}), X')$ zu definieren über die Formel:

$$u(\varphi) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(n)u'_n.$$

Das Wachstumsverhalten der Fourierkoeffizienten und das der Folge $(u'_n)_n$ sichern die absolute Konvergenz der Reihe. Dies liefert die Wohldefiniertheit und Stetigkeit von u, und mittels der Fourierkoeffizienten von 1 und $z\varphi$ bestätigt man unter Ausnutzung von $u'_{n+1} = T'u'_n$ $(n \in \mathbb{Z})$ die Beziehungen $u(1) = x'$ sowie $u(z\varphi) = T'u(\varphi)$.

Ist andererseits ein $u \in L(\mathcal{E}(\mathbb{T}), X')$ gegeben mit $u(1) = x'$ und $u(z\varphi) = T'u(\varphi)$, so können wir die Folge betrachten, die entsteht, wenn wir u auf die Monome $z^n \quad (n \in \mathbb{Z})$ anwenden; wir definieren also:

$$u'_n := u(z^n) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Die Stetigkeit von u liefert, daß $(u'_n)_n \in \ell^\infty_k(\mathbb{Z}, X')$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$, und $u'_0 = u(1) = x'$ sowie $u'_{n+1} = u(z^{n+1}) = T'u(z^n) = T'u'_n$ $(n \in \mathbb{Z})$ folgen unmittelbar.

Damit ist geklärt, wie die so unterschiedlich aussehenden Bedingungen der Sätze (3.1.5) und (3.2.6) zusammenhängen.

3.3 Eine lokale-Resolventen-Bedingung

Für die Dauer dieses Abschnittes vereinbaren wir folgende Schreibweise: $U_1(\mathbb{T}) := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |1 - |z|| < 1\}$. Ausgangspunkt ist dann die folgende einfache Beobachtung:

3.3.1 Satz. *Ist $T \in L(X)$ ein $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalarer Operator, so existieren Konstanten $c > 0$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit:*

$$\forall x' \in X' \quad \exists f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} - \mathbb{T}, X') \text{ mit } (z - T')f(z) = x' \quad (z \in \mathbb{C} - \mathbb{T}),$$

wobei

$$\|f(z)\| \leq \frac{c}{|1 - |z||^k} \quad \forall z \in U_1(\mathbb{T}).$$

Beweis. Wie üblich gehen wir vom Adjungierten $\hat{T}'$ einer $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalaren Erweiterung $\hat{T} : \hat{X} \to \hat{X}$ aus, d.h. mit einer surjektiven Abbildung $i' : \hat{X}' \to X'$ gilt: $T' \circ i' = i' \circ \hat{T}'$ und $\hat{T}'$ hat den $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Kalkül. Wegen der Surjektivität von i' macht es keine Schwierigkeiten, zu $x' \in X'$ ein $\hat{x}' \in \hat{X}'$ zu wählen mit $x' = i'\hat{x}'$. Dann gilt aber für alle $z \in \rho(\hat{T}')$:

$$(z - T')i'R(z, \hat{T}')\hat{x}' = i'(z - \hat{T}')R(z, \hat{T}')\hat{x}' = x'.$$

Die Resolventenmenge von $\hat{T}$ umfaßt aber $\mathbb{C} - \mathbb{T}$, und die Resolvente ist dort analytisch, also wissen wir - da i' stetig linear ist: Die Funktion

$$f : \mathbb{C} - \mathbb{T} \to X'; \quad z \mapsto i'R(z, \hat{T}')\hat{x}'$$

ist analytisch und erfüllt die Eigenschaften einer lokalen Resolvente bei x'.

Bleibt also nur noch ihr Wachstumsverhalten gegen die Kreislinie zu untersuchen: Dabei nutzen wir wieder aus, daß $\hat{T}'$ $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalar ist, denn (2.1.3) liefert: $\exists c > 0,\ k \in \mathbb{N}_0$ mit $\|R(z, \hat{T}')\| \leq \frac{c}{|1-|z||^k}$ für alle $z \in U_1(\mathbb{T})$. Dieses Wachstumsverhalten vererbt sich aber auf f wegen:

$$\|f(z)\| = \|i'R(z, \hat{T}')\hat{x}'\| \leq \|i'\|\|\hat{x}'\|\|R(z, \hat{T}')\|.$$

$\diamondsuit$

Das nächste Lemma gibt Aufschluß über das Wachstumsverhalten einer lokalen Resolvente für T' im Unendlichen.

3.3.2 Lemma. *Es seien $T \in L(X)$ und $x \in X$ beliebig, $K \subset \mathbb{C}$ kompakt. Erfüllt dann eine Funktion $f : \mathbb{C} - K \to X$ die Gleichung*

$$(z - T)f(z) = x \quad (\forall z \in \mathbb{C} - K),$$

so gilt: $\|f(z)\| \to 0$ für $|z| \to \infty$.

Beweis. Außerhalb des Spektrums von T ist $z - T$ bijektiv und somit muß $f(z)$ für $z \in \mathbb{C}$ außerhalb der kompakten Menge $\sigma(T) \cup K$ mit $R(z, T)x$ übereinstimmen. Da die Resolvente selbst im Unendlichen verschwindet, folgt die Behauptung. $\diamondsuit$

Wir werden uns überlegen, daß man aus den Taylor-Koeffizienten der lokalen Resolvente wie aus Satz (3.3.1) eine Folge in $\ell_k^\infty(\mathbb{Z}, X')$ konstruieren kann, deren Existenz nach (3.1.5) hinreichend ist für die Existenz einer $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalaren Erweiterung von T. Vorweg ein Lemma, das die Wachstumsbedingung im Unendlichen ins rechte Licht rückt. Da es später auch noch an einer anderen Stelle benötigt wird, werden wir es hier etwas allgemeiner formulieren.

3.3.3 Lemma. *Ist E ein Banachraum und $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}}, E)$ eine im Unendlichen verschwindende holomorphe Funktion, d.h. $\|f(z)\| \to 0$ für $|z| \to \infty$, so gilt für die Funktion $\tilde{f}(z) := f(\frac{1}{z}) \quad (z \in \mathbb{D} - \{0\})$: $\tilde{f}$ hat eine hebbare Singularität in 0, und setzt man $\tilde{f}(0) := 0$, so ist $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, E)$.*

Beweis. Natürlich ist die Funktion $\tilde{f}$ auf $\mathbb{D} - \{0\}$ holomorph als Verknüpfung holomorpher Funktionen; ist aber $z_n \to 0$ eine beliebige Nullfolge in $\mathbb{D} - \{0\}$, so sieht man: $\tilde{f}(z_n) = f(\frac{1}{z_n}) \to 0$ da f im Unendlichen verschwindet. Also ist $\tilde{f}$ in 0 stetig durch 0 fortsetzbar, und der Riemannsche Hebbarkeitssatz sichert sogar: die Fortsetzung ist holomorph. $\diamondsuit$

3.3.4 Satz. *Für $T \in L(X)$ sind äquivalent:*

(a) T ist $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar

(b) Es existieren $c > 0, k \in \mathbb{N}_0$ mit:

$$\forall x' \in X' \quad \exists f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} - \mathbb{T}, X') \text{ mit } (z - T')f(z) = x' \quad (z \in \mathbb{C} - \mathbb{T}),$$

wobei

$$\|f(z)\| \le \frac{c}{|1 - |z||^k} \quad \forall z \in U_1(\mathbb{T}).$$

Beweis. Es ist nur noch $(b) \Rightarrow (a)$ zu zeigen. Dazu genügt es nach Satz (3.1.5), sich zu überlegen, daß es zu jedem $x' \in X'$ eine Folge $(u'_n)_n \in \ell^\infty_k(\mathbb{Z}, X')$ gibt, so daß $T'u_n = u_{n+1}$ (für alle $n \in \mathbb{Z}$) und $u'_0 = x'$. Sei also ein beliebiges $x' \in X'$ vorgelegt. Nach (b) existiert eine zugehörige langsam wachsende lokale Resolvente $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} - \mathbb{T}, X')$. Wir entwickeln $f|_{\mathbb{D}} \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, X')$ um 0 in seine Taylorreihe, also

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in \mathbb{D})$$

mit einer Koeffizientenfolge $(a_n)_n$ in X'. Da f lokale Resolvente ist, gilt:

$$(z - T') \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = x' \quad (z \in \mathbb{D}),$$

oder wegen der Stetigkeit von T':

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} T' a_n z^n - T' a_0 = x' \quad (z \in \mathbb{D}),$$

zusammengefaßt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - T' a_{n+1}) z^{n+1} - (T' a_0 + x') = 0 \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Damit liefert der Identitätssatz

$$T' a_{n+1} = a_n \quad (n \in \mathbb{N}_0) \text{ und } T' a_0 = -x'.$$

Gelingt es uns nun noch, das Wachstumsverhalten von $(a_n)_n$ zu kontrollieren, so haben wir zumindest eine einseitige Folge gefunden, die den Anforderungen gerecht wird. Zum Wachstumsverhalten bietet sich an, auf die Idee von Colojoară und Foiaş zurückzugreifen (vgl. Satz (2.1.3)): Nach der Cauchyschen Integralformel für die Ableitung wissen wir:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{(1-\varepsilon)}(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

für $0 < \varepsilon < 1$. Also gilt mit der Standardabschätzung für Kurvenintegrale

$$\|a_n\| \le (1 - \varepsilon) \sup_{|\zeta| = 1 - \varepsilon} \frac{\|f(\zeta)\|}{|\zeta|^{n+1}} \le \frac{1 - \varepsilon}{(1 - \varepsilon)^{n+1}} \frac{c}{\varepsilon^k} \le \frac{c}{(1 - \varepsilon)^n \varepsilon^k},$$

wobei wir im vorletzten Schritt das Wachstumsverhalten von f benutzt haben. Für $n > k$ setzen wir $\frac{k}{n} =: \varepsilon$ ein und erhalten so:

$$\|a_n\| \le \frac{c}{(1 - \frac{k}{n})^n (\frac{k}{n})^k} \quad (n > k)$$

bzw.

$$\frac{\|a_n\|}{n^k} \leq \frac{c}{(1-\frac{k}{n})^n k^k} \to \frac{1}{e^{-k}k^k};$$

damit ist $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{\|a_n\|}{(1+n)^k} < \infty$. Die Folge $(a_n)_n$ ist also in geeignetem Sinne langsam wachsend. Nun sind wir allerdings auf eine zweiseitige Folge angewiesen: wie lassen sich also die a_n passend nach unten ergänzen? Da wir oben nur die Taylorkoeffizienten von $f|_{\mathbb{D}}$ benutzt haben, ist es naheliegend, nun die Information über $f|_{\mathbb{C}-\overline{\mathbb{D}}}$ auszuwerten. Vermöge der Inversion am Einheitskreis $z \mapsto \frac{1}{z}$ werden wir $f|_{\mathbb{C}-\overline{\mathbb{D}}}$ in die Einheitskreisscheibe zurückholen. Daß dies funktioniert, sagt Lemma (3.3.2): f verschwindet im Unendlichen, also ist mit (3.3.3) durch $\tilde{f}(z) = f(\frac{1}{z})$ und $\tilde{f}(0) = 0$ eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{D}$ definiert, für die gilt:

$$(\frac{1}{z} - T')\tilde{f}(z) = (\frac{1}{z} - T')f(\frac{1}{z}) = x' \quad (\forall z \in \mathbb{D} - \{0\}).$$

Entwickeln wir $\tilde{f}$ in die Taylor-Reihe um 0, etwa

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \quad (z \in \mathbb{D})$$

(beachte: $\tilde{f}(0) = 0$), so rechnet man wieder unter Ausnutzung der Stetigkeit von T' die Vertauschungseigenschaft für die Folge $(b_n)_n$ in X' nach, denn es gilt:

$$(\frac{1}{z} - T')\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n = x' \quad (z \in \mathbb{D} - \{0\})$$

oder äquivalent:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n - \sum_{n=1}^{\infty} T' b_n z^{n+1} = z x' \quad (z \in \mathbb{D} - \{0\}).$$

Nach Potenzen von z sortiert:

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n - \sum_{n=2}^{\infty} T' b_{n-1} z^n + (b_1 - x')z = 0 \quad (z \in \mathbb{D} - \{0\}).$$

Dann gilt wieder nach dem Identitätssatz $b_1 = x'$ und $T' b_{n-1} = b_n$ für $n \geq 2$. Wir machen nun den Versuch - vom Wachstumsverhalten zunächst einmal abgesehen - die Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zu einer geeigneten Folge $(u'_n)_n$ - wie in (3.1.5)(c) gefordert - zusammenzusetzen; und zwar definieren wir:

$$u'_n := \begin{cases} -a_{n-1} & (n \geq 1) \\ b_{-n+1} & (n \leq 0). \end{cases}$$

Wir rechnen leicht nach:

$$T' u'_{n+1} = \left\{ \begin{array}{ccc} -T' a_n & = & -a'_{n-1} \quad (n \geq 1) \\ -T' a_0 & = & x' = b_1 \quad (n = 0) \\ T' b_{-n} & = & b_{-n+1} \quad (n \leq -1) \end{array} \right\} = u'_n,$$

also gilt offenbar $T' u'_n = u'_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und nach Definition: $u'_0 = b_1 = x'$. Das Wachstumsverhalten der u'_n richtet sich nach dem der beiden einseitigen Folgen $(a_n)_n$ (worüber wir bereits Bescheid wissen) und $(b_n)_n$, welche wir jetzt näher untersuchen wollen.

Wie oben gilt mit der Cauchy-Formel:

$$b_n = \frac{\tilde{f}^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_{(1-\varepsilon)}(0)} \frac{\tilde{f}(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_{(1-\varepsilon)}(0)} \frac{f(\frac{1}{\zeta})}{\zeta^{n+1}} d\zeta.$$

Aber mit der Wachstumsbedingung an die lokale Resolvente aus (b) wissen wir:

$$\|f(\frac{1}{z})\| \leq \frac{c}{|1-|\frac{1}{z}||^k} = \frac{c|z|^k}{|1-|z||^k} \quad (\frac{1}{z} \in U_1(\mathbb{T})),$$

so daß wir für $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ ($\Rightarrow 0 < |1 - \frac{1}{1-\varepsilon}| < 1$) mit der Standardabschätzung für Kurvenintegrale wieder erhalten:

$$\|b_n\| \leq (1-\varepsilon) \sup_{|\zeta|=1-\varepsilon} \frac{\|f(\frac{1}{\zeta})\|}{|\zeta|^{n+1}} \leq \frac{c(1-\varepsilon)^k}{(1-\varepsilon)^n \varepsilon^k}.$$

Wie oben sehen wir dann mit $\varepsilon := \frac{k}{n}$ für $n > 2k$, daß

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\|b_n\|}{(1+n)^k} < \infty.$$

Damit ist schließlich gezeigt, daß die Folge $(u'_n)_n$ in $\ell^\infty_k(\mathbb{Z}, X)$ liegt, denn:

$$\|(u'_n)_n)\|_k = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\|u'_n\|}{(1+|n|)^k} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{\|a_n\|}{(1+n)^k} + \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\|b_n\|}{(1+n)^k} < \infty$$

und der Beweis ist beendet. ◊

3.4 Zugang über die Randverteilungsformel

Der Beweis des letzten Satzes kann noch auf eine ganz andere Art geführt werden.

Als hinreichende Bedingung (zur Konstruktion $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalarer Erweiterungen) haben wir die Existenz von Distributionen der Form $u \in L(\mathcal{E}(\mathbb{T}), X')$ mit $u(z\varphi) = T'u(\varphi)$ $(\forall \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{T}))$ und $u(1) = x'$ erkannt (3.2.6). Die beiden letzten Eigenschaften erinnern an die eines Kalküls für T'. Für die Konstruktion von Kalkülen hat man jedoch mit der Randverteilungsformel ein leistungsfähiges Werkzeug in der Hand. Im Gegensatz zum Kalkül ist die Distribution u X'-wertig, ebenso wie die lokale Resolvente. Es liegt deshalb nahe, in der Randverteilungsformel die Resolvente durch eine langsam wachsende lokale Resolvente zu ersetzen. Wir konkretisieren diese Überlegungen:

3.4.1 Mit einer langsam wachsenden lokalen Resolvente f bei x' wie in (3.3.4)(b) und einer Folge $(r_m)_m$ in $(0,1)$, $r_m \uparrow 1$, setzen wir folgende Definition an:

$$u(\varphi) := \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \varphi(\zeta)\Big(f(\frac{\zeta}{r_m}) - f(\zeta r_m)\Big) d\zeta \quad (\forall\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{T})).$$

Wie wir uns gleich überzeugen werden, wird dieses u den algebraischen Anforderungen gerecht, falls es nur überhaupt existiert. Die Stetigkeit läßt sich in diesem Falle auch recht einfach mit dem Satz von Banach-Steinhaus gewinnen. Die zentrale Frage ist also die der Existenz. Stellen wir diese für einen Augenblick zurück und setzen voraus, daß der Grenzwert der einzelnen Integrale

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \varphi(\zeta) f(\frac{\zeta}{r_m}) d\zeta \quad \text{sowie} \quad \int_{\partial\mathbb{D}} \varphi(\zeta) f(\zeta r_m) d\zeta$$

für jedes $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$ existiert. Dann können wir - unter Beachtung von $(z-T')f(z) = x'$ - folgendes nachrechnen:

3.4.2 Ist $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$, so auch $z\varphi$ und es gilt (unter Voraussetzung der Konvergenzbedingung aus dem letzten Abschnitt):

$$\begin{aligned} u(z\varphi) &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \zeta\varphi(\zeta)\Big(f(\frac{\zeta}{r_m}) - f(\zeta r_m)\Big)d\zeta \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \varphi(\zeta)\Big(\frac{\zeta}{r_m}f(\frac{\zeta}{r_m}) - \zeta r_m f(\zeta r_m)\Big)d\zeta \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \varphi(\zeta)\left(T'f(\frac{\zeta}{r_m}) - T'f(\zeta r_m)\right)d\zeta \\ &= T'\lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \varphi(\zeta)\left(f(\frac{\zeta}{r_m}) - f(\zeta r_m)\right)d\zeta \\ &= T'u(\varphi). \end{aligned}$$

(Beachte hierbei auch: T' ist stetig linearer Operator und als solcher vertauscht er mit dem Integral, vgl. Abschnitt 1.2.) Für $u(1)$ erhält man:

$$\begin{aligned} u(1) &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \Big(f(\frac{\zeta}{r_m}) - f(\zeta r_m)\Big)d\zeta \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} f(\frac{\zeta}{r_m})d\zeta - \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} f(\zeta r_m)d\zeta, \end{aligned}$$

wobei das zweite Integral identisch verschwindet, denn für $0 < r_m < 1$ ist $f(r_m\cdot)$ auf einer offenen Obermenge von $\overline{\mathbb{D}}$ holomorph, also hat das Integral den Wert Null nach dem Cauchyschen Integralsatz. Das erste Integral läßt sich auch anders schreiben:

$$\int_{\partial\mathbb{D}} f(\frac{\zeta}{r_m})d\zeta = r_m \int_0^{2\pi} f(\frac{e^{it}}{r_m})i\frac{e^{it}}{r_m}dt = r_m \int_{|\zeta|=\frac{1}{r_m}} f(\zeta)d\zeta.$$

Nach Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes für Kreisringe nutzen wir die Tatsache aus, daß f eine lokale Resolvente bei x' ist, und erhalten:

$$\begin{aligned} \int_{|\zeta|=\frac{1}{r_m}} f(\zeta)d\zeta &= \int_{|\zeta|=\|T\|+1} f(\zeta)d\zeta \\ &= \int_{|\zeta|=\|T\|+1} R(\zeta,T')x'd\zeta \\ &= 2\pi i x'. \end{aligned}$$

Einsetzen liefert:

$$u(1) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} f(\frac{\zeta}{r_m})d\zeta = \lim_{m\to\infty} r_m x' = x'.$$

3.4.3 Nun zur Stetigkeit von u. Wir definieren für $m \in \mathbb{N}$ die Abbildung $u_m : \mathcal{E}(\mathbb{T}) \to X'$ durch

$$u_m(\varphi) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \varphi(\zeta)\Big(f(\frac{\zeta}{r_m}) - f(\zeta r_m)\Big)d\zeta \quad (\forall\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{T})).$$

Für jedes feste m und jedes $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$ ist das Integral wohldefiniert, denn:

$$f(r_m\cdot), f(\frac{\cdot}{r_m}) \in C(\partial\mathbb{D}, X')$$

(beachte: $0 < r_m < 1$), also ist der gesamte Integrand stetig. Ist aber die Existenz von u_m nun gesichert, so ist die Linearität wegen der Linearität des Integrals klar. Mit der Standardabschätzung für Kurvenintegrale erhalten wir:

$$\|u_m(\varphi)\| \leq \left(\sup_{z\in\mathbb{T}} \|f(r_m z) - f(\frac{z}{r_m})\| \right) \|\varphi\|_0,$$

wobei der Ausdruck in der Klammer für jedes feste m endlich ist (Stetigkeit). Somit ist jedes u_m eine stetig lineare Abbildung. Der Satz von Banach-Steinhaus besagt dann:

Falls $u(\varphi) = \lim_{m\to\infty} u_m(\varphi)$ existiert (für jedes $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$), so ist auch die Abbildung $u : \mathcal{E}(\mathbb{T}) \to X'$ stetig linear.

Damit ist nun alles auf die Frage der Existenz dieses Grenzwertes reduziert. Vorweg zwei Lemmata, in denen die technische Vorarbeit für die Lösung des Existenzproblems geleistet wird. Diese werden später an anderer Stelle noch eine Rolle spielen, daher wollen wir sie gleich etwas allgemeiner formulieren. Im hier benötigten Spezialfall ist f eine lokale Resolvente von T' bei x' auf $\mathbb{C} - \mathbb{T}$, und E ist X'.

3.4.4 Lemma. *Es sei E ein Banachraum, $0 < r < 1$, $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$.*

(a) *Ist eine Funktion $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, E)$ mit einer Folge von Stammfunktionen $(f_n)_n$ in $\mathcal{O}(\mathbb{D}, E)$ gegeben (d.h. $f_0 = f$ und $f'_{n+1} = f_n$), so gilt: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existieren Polynome $p_j^n \in \mathbb{C}[z]$ $(j = 1, \cdots, n)$ (unabhängig von φ, r), so daß gilt:*

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \varphi(\zeta) f(\zeta r) d\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_j^n(e^{-it}) \frac{d^j}{dt^j} \varphi(e^{it}) \right) f_n(re^{it}) dt.$$

(b) *Ist $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}}, E)$ eine im Unendlichen verschwindende Funktion und $(\tilde{f}_n)_n$ eine Folge von Stammfunktionen in $\mathcal{O}(\mathbb{D}, E)$ für die holomorphe Fortsetzung der Funktion $\tilde{f}_0(z) := f(\frac{1}{z})$ $(z \in \mathbb{D} - \{0\})$ auf $\mathbb{D}$. Dann existieren zu jedem $n \in \mathbb{N}_0$ Polynome $q_j^n \in \mathbb{C}[z]$ $(j = 0, \cdots, n)$ (unabhängig von φ, r) mit:*

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \varphi(\zeta) f(\frac{\zeta}{r}) d\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^n} \left(\sum_{j=0}^{n} q_j^n(e^{it}) \frac{d^j}{dt^j} \varphi(e^{it}) \right) \tilde{f}_n(re^{-it}) dt.$$

Beweis. Durch Induktion nach n.

(a) Beachte: $\frac{d}{dt} f_{n+1}(re^{it}) = f_n(re^{it}) ire^{it}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, also

$$\frac{-i}{r} e^{-it} \frac{d}{dt} f_{n+1}(re^{it}) = f_n(re^{it}).$$

Mit einmaliger partieller Integration erhält man:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathbb{D}} \varphi(\zeta) f(\zeta r) d\zeta &= \int_0^{2\pi} \varphi(e^{it}) f_0(re^{it}) ie^{it} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-1}{r} \left(\frac{d}{dt} \varphi(e^{it}) \right) f_1(re^{it}) dt. \end{aligned}$$

Das hat die gewünschte Form. Ist nun

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \varphi(\zeta) f(\zeta r) d\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_j^n(e^{-it}) \frac{d^j}{dt^j} \varphi(e^{it}) \right) f_n(re^{it}) dt$$

bereits gezeigt, so integrieren wir wieder die rechte Seite einmal partiell und erhalten:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{r^{n+1}} \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j^n(e^{-it}) i e^{-it} \frac{d^j}{dt^j}\varphi(e^{it})\right) f_{n+1}(re^{it})dt.$$

Die Summe in der Klammer behandeln wir folgendermaßen: Zuerst können wir den Term ie^{-it} als Faktor iz den Polynomen zuschlagen, danach differenzieren wir mit der Produktregel und fassen so zusammen, daß erneut eine Summe über die Ableitungen von $\varphi(e^{it})$ entsteht. Beim Ableiten der Polynome $p_j^n(z)iz$ erhalten wir wieder Polynome multipliziert mit der inneren Ableitung $const \cdot e^{-it}$. Doch Terme dieser Form lassen sich wie oben als $const \cdot z$ zu den Polynomen hinzufügen, und es ist klar, daß man so alle Vorfaktoren von $\frac{d^j}{dt^j}\varphi(e^{it})$ jeweils wieder zu Polynomen p_j^{n+1} zusammenfassen kann. Man beachte weiter: die Potenz von r im Nenner wird um 1 erhöht.

(b) Wieder ist zu beachten, daß $\frac{d}{dt}\tilde{f}_{n+1}(re^{-it}) = -ire^{-it}\tilde{f}_n(re^{-it})$, also

$$\frac{i}{r}e^{it}\frac{d}{dt}\tilde{f}_{n+1}(re^{-it}) = \tilde{f}_n(re^{-it}).$$

Hier können wir den Induktionsanfang auch bei 0 machen, denn

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathbb{D}} \varphi(\zeta) f(\frac{\zeta}{r})d\zeta &= \int_{\partial\mathbb{D}} \varphi(\zeta)\tilde{f}(\frac{r}{\zeta})d\zeta \\ &= \int_0^{2\pi} \varphi(e^{it})\tilde{f}_0(re^{-it})ie^{it}dt,\end{aligned}$$

demnach ist $q_0^0(z) = iz$ zu wählen. Der Induktionsschritt besteht wie oben aus einer partiellen Integration:

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} \frac{1}{r^n}\left(\sum_{j=0}^{n} q_j^n(e^{it})\frac{d^j}{dt^j}\varphi(e^{it})\right)\tilde{f}_n(re^{-it})dt \\ = &\int_0^{2\pi} \frac{1}{r^{n+1}}\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=0}^{n} q_j^n(e^{it})(-i)e^{it}\frac{d^j}{dt^j}\varphi(e^{it})\right)\tilde{f}_{n+1}(re^{-it})dt.\end{aligned}$$

Wie oben kann man nach Anwendung der Produktregel auf die Terme in der großen Klammer so zusammenfassen, daß wieder Polynome in e^{it} als Vorfaktoren bei den Ableitungen $\frac{d^j}{dt^j}f(e^{it})$ $(j = 0, \cdots, n+1)$ auftreten. ◊

3.4.5 Lemma. *Ist $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, E)$ eine analytische Funktion mit folgendem Wachstumsverhalten: Es existiere ein Sterngebiet $V \subset \mathbb{D}$ mit Sternmittelpunkt 0, und Konstanten $c > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$, so daß gilt:*

$$\|f(z)\| \leq \frac{c}{|1-|z||^k} \quad (\forall z \in V).$$

Dann existiert eine Folge von Stammfunktionen $(f_n)_n$ zu f in $\mathcal{O}(\mathbb{D}, E)$, so daß $f_{k+2}|_V$ eine stetige Fortsetzung auf $\overline{V}$ hat. Das notieren wir kurz als

$$f_{k+2} \in A(V, E) := \{g \in \mathcal{O}(V, E) : g \text{ hat stetige Fortsetzung auf } \overline{V}\}.$$

Beweis. Wir setzen $f_0 := f$ und bilden induktiv Stammfunktionen durch Integration längs der Verbindungsstrecke $\overline{0z} \subset \mathbb{D}$:

$$f_{j+1}(z) := \int_{\overline{0z}} f_j(\zeta)d\zeta \quad (z \in \mathbb{D})$$

(wie im skalaren Fall zeigt man: f_{j+1} ist analytisch in $\mathbb{D}$ mit Ableitung f_j). Für die Wachstumsbedingung läßt sich dann induktiv nachweisen:

$$\|f_j(z)\| \leq \frac{c}{(1-|z|)^{k-j}} \quad (z \in V, j = 0, \cdots, k-1)$$

mit der Konstanten c von oben. Der Induktionsanfang ist klar nach Voraussetzung an $f = f_0$. Zum Induktionsschritt ist nur zu beachten, daß für $z \in V$ gilt:

$$\begin{aligned}
\|f_{j+1}(z)\| &= \|\int_{\overline{0z}} f_j(\zeta)d\zeta\| \\
&\leq \int_0^{|z|} \|f_j(t\frac{z}{|z|})\frac{z}{|z|}\|dt \\
&\leq \int_0^{|z|} \frac{c}{(1-t)^{k-j}}dt \\
&= \left[\frac{c}{-(k-j)+1}\frac{-1}{(1-t)^{k-j-1}}\right]_0^{|z|} \\
&= \frac{c}{k-(j+1)}\left(\frac{1}{(1-|z|)^{k-(j+1)}} - 1\right) \\
&\leq \frac{c}{(1-|z|)^{k-(j+1)}}
\end{aligned}$$

für $j + 1 < k$. Hierbei wurde ausgenutzt, daß $\overline{0z} \subset V$, was wegen der Sternförmigkeitsforderung an V jedoch garantiert wird. Damit ist die Induktion abgeschlossen.

Betrachten wir insbesondere die $(k-1)$-te Stammfunktion, so wissen wir nun über deren Wachstumsverhalten:

$$\|f_{k-1}(z)\| \leq \frac{c}{1-|z|} \quad (z \in V)$$

mit $c > 0$. Bei der nächsten Integration erhalten wir damit:

$$\begin{aligned}
\|f_k(z)\| &\leq \int_0^{|z|} \|f_{k-1}(t\frac{z}{|z|})\frac{z}{|z|}\|dt \\
&\leq \int_0^{|z|} \frac{c}{1-t}dt \\
&= -c\log(1-|z|) \quad (z \in V),
\end{aligned}$$

und eine letzte Integration liefert schließlich:

$$\begin{aligned}
\|f_{k+1}(z)\| &\leq \int_0^{|z|} \|f_k(t\frac{z}{|z|})\frac{z}{|z|}\|dt \\
&\leq \int_0^{|z|} -c\log(1-t)dt \\
&\leq -c\int_0^1 \log u \quad du \\
&= -c\Big[u\log u - u\Big]_{0^+}^1 \\
&= c \quad (z \in V).
\end{aligned}$$

Damit wissen wir: f_{k+1} ist beschränkt auf V, und somit ist f_{k+2} eine auf dem Sterngebiet V holomorphe Funktion mit beschränkter Ableitung f_{k+1}. Folglich läßt sich f_{k+2} stetig auf $\overline{V}$ fortsetzen (Beweis wie im skalarwertigen Fall), was zu zeigen war. $\diamondsuit$

3.4.6 Die Existenz von

$$u(\varphi) := \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \varphi(\zeta)\Big(f(\frac{\zeta}{r_m}) - f(\zeta r_m)\Big)d\zeta$$

sieht man dann folgendermaßen ein: Wir weisen die Existenz der Grenzwerte der einzelnen Integrale

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \varphi(\zeta)f(\frac{\zeta}{r_m})d\zeta \quad \text{sowie} \quad \int_{\partial\mathbb{D}} \varphi(\zeta)f(\zeta r_m)d\zeta$$

für beliebiges φ nach. Daraus folgt zum einen unmittelbar die Existenz von u, zum anderen wird nachträglich die Argumentation in (3.4.1) bzw. (3.4.2) gerechtfertigt.

Zunächst zum zweiten Integral. Wir wissen: f erfüllt die Wachstumsbedingung aus Lemma (3.4.5) mit $V = \mathbb{D}$. Auf diesem Wege erhalten wir zu f eine Folge von Stammfunktionen $(f_n)_n$ in $\mathcal{O}(\mathbb{D}, X')$ mit $f_{k+2} \in A(\mathbb{D}, X')$, also insbesondere $f_{k+2} \in C(\overline{\mathbb{D}}, X')$. Integrieren wir $(k+2)$-mal partiell mit Lemma (3.4.4) (a), so erhalten wir:

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\partial\mathbb{D}} \varphi(\zeta)f(\zeta r)d\zeta = \lim_{m\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^{k+2}} \left(\sum_{j=1}^{k+2} p_j^{k+2}(e^{-it})\frac{d^j}{dt^j}\varphi(e^{it})\right) f_{k+2}(re^{it})dt$$

mit Polynomen p_j^{k+2}. Man beachte folgendes: wegen $f_{k+2} \in C(\overline{\mathbb{D}}, X')$ und des Stetigkeitslemmas für Parameterintegrale kann der Grenzübergang unter dem Integral vollzogen werden, und der Limes existiert.

Beim ersten Integral geht man ähnlich vor: Wir wissen, daß die lokale Resolvente $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}}, X')$ im Unendlichen verschwindet, also ist nach Lemma (3.3.3) die Funktion $\tilde{f} : \mathbb{D} \to X'$ mit $\mathbb{D} - \{0\} \ni z \mapsto f(\frac{1}{z})$ und $f(0) = 0$ holomorph auf $\mathbb{D}$, und über ihr Wachstumsverhalten wissen wir:

$$\|\tilde{f}(z)\| = \|f(\frac{1}{z})\| \le \frac{c}{|1 - |\frac{1}{z}||^k} = c\frac{|z|^k}{||z| - 1|^k} \le \frac{c}{|1 - |z||^k}$$

für alle $z \in \mathbb{D}$. Dann können wir für $\tilde{f}$ eine Folge von Stammfunktionen $(\tilde{f}_n)_n$ in $\mathcal{O}(\mathbb{D}, X')$ wählen, so daß $\tilde{f}_{k+2} \in A(\mathbb{D}, X')$. Mit Lemma (3.4.4) finden wir Polynome q_j^{k+2}, so daß

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\partial\mathbb{D}} \varphi(\zeta)f(\frac{\zeta}{r})d\zeta = \lim_{m\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^{k+2}} \left(\sum_{j=0}^{k+2} q_j^{k+2}(e^{it})\frac{d^j}{dt^j}\varphi(e^{it})\right) \tilde{f}_{k+2}(re^{-it})dt.$$

Wieder gilt: $\tilde{f}_{k+2}$ ist ein Element der Diskalgebra, insbesondere also stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$, weshalb wir den Grenzübergang problemlos unter dem Integral vollziehen können und der Grenzwert insbesondere existiert. $\diamondsuit$

3.5 Die Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}(\mathbb{T})}$ und $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalare Operatoren

Wie zu Beginn von Abschnitt (2.3) schon angeklungen ist, läßt sich zeigen: T hat $(\beta)_{\mathcal{E}} \Leftrightarrow T$ ist subskalar. Ersetzt man in dieser Aussage $(\beta)_{\mathcal{E}}$ durch $(\beta)_{\mathcal{E}(\mathbb{T})}$ und subskalar durch $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar, dann haben wir uns bereits überzeugt, daß die Implikation "$\Leftarrow$" Gültigkeit behält. Die andere Richtung erweist sich im $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Fall als schwer zugänglich, da das wesentliche Hilfsmittel vom skalaren Fall nicht mehr zur Verfügung steht: die $\overline{\partial}$-Sequenz. Im Beweis der entsprechenden Aussage (vgl. [8], S.183) gestattet sie es, eine gewisse Approximationsfolge von Funktionen durch eine Folge holomorpher Funktionen zu ersetzen. Im $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Falle kann man lediglich mit trigonometrischen Polynomen arbeiten, die jedoch Pole in 0 haben. Damit bleibt bei der Integration mit Hilfe des holomorphen Kalküls ein Residuum übrig, was uns später als $\hat{f}_m(-1)$ begegnen wird. Es muß damit zusätzlich gefordert werden, daß diese Residuenfolge gegen 0 konvergiert. Doch zunächst noch ein vorbereitendes Lemma:

3.5.1 Lemma. *Ein Operator $T \in L(X)$ erfülle*

(a) $\|T^n\| \le c(1+n)^{k_0} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad (\text{ mit } c > 0, k_0 \in \mathbb{N}_0)$

(b) $z - T : \mathcal{E}(\mathbb{T}, X) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ *ist topologischer Monomorphismus.*

Dann gilt: Ist $(x_m + (z-T)f_m)_m$ eine Nullfolge in $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ (wobei $(x_m)_m$ eine Folge in X und $(f_m)_m$ eine Folge in $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ bezeichne), so gilt schon: $\hat{f}_m(0) \to 0$ in X.

Beweis. Vermöge Fourierentwicklung heißt $x_m + (z-T)f_m \to 0$ in $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ gerade, daß für alle $k \in \mathbb{N}_0$:

$$\sum_{n \neq 0} \|\hat{f}_m(n-1) - T\hat{f}_m(n)\|(1+|n|)^k + \|x_m + (\hat{f}_m(-1) - T\hat{f}_m(0))\| \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Insbesondere konvergiert der Reihenwert bei festem $k \in \mathbb{N}_0$ gegen Null (für $m \to \infty$). Wir betrachten nun die (Doppel-) Folge:

$$a_m(n) := \begin{cases} \hat{f}_m(n) & n \ge 0 \\ T^{-2n}\hat{f}_m(-n) & n < 0. \end{cases}$$

Für festes m definiert dann die Reihe $a_m := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_m(n) z^n$ eine Funktion in $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$. Zum Beweis berechnen wir

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|a_m(n)\|(1+|n|)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \|\hat{f}_m(n)\|(1+n)^k + \sum_{n=1}^{\infty} \|T^{2n}\hat{f}_m(n)\|(1+n)^k,$$

denn es genügt zu zeigen, daß dieser Ausdruck für alle $k \in \mathbb{N}_0$ endlich ist. Dies ist für die erste Reihe unzweifelhaft der Fall, da f_m eine $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$- Funktion definiert.

Die zweite Reihe bearbeiten wir unter Ausnutzung von (a):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \|T^{2n}\hat{f}_m(n)\|(1+n)^k &\le c\sum_{n=1}^{\infty} \|\hat{f}_m(n)\|(1+2n)^{k_0}(1+n)^k \\ &\le 2^{k_0} c \sum_{n=1}^{\infty} \|\hat{f}_m(n)\|(1+n)^{k_0+k}, \end{aligned}$$

und wieder sieht man: wegen $f_m \in \mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ ist der letzte Ausdruck endlich.

Damit ist für beliebiges m gezeigt: $(a_m(n))_n \in s_X$, was äquivalent ist zu $a_m \in \mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$.

Nun betrachten wir die Bildfolge $(z-T)a_m$. Gelingt es uns zu zeigen, daß sie eine Nullfolge ist, so sichert die Voraussetzung (b) an $z - T$, daß auch a_m eine Nullfolge ist; dann muß aber auch $\hat{a}_m(0) = \hat{f}_m(0)$ eine Nullfolge sein - das ist aber gerade die Behauptung des Lemmas.

Was zu tun bleibt, ist also die Konvergenz von $(z-T)a_m$ gegen 0 nachzuweisen. Wir rechnen dies im Fourierbild nach:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|a_m(n-1) - Ta_m(n)\|(1+|n|)^k \\
= \quad & \sum_{n\geq 1} \|\hat{f}_m(n-1) - T\hat{f}_m(n)\|(1+n)^k + \|T^2\hat{f}_m(1) - T\hat{f}_m(0)\| \\
& + \sum_{n\leq -1} \|T^{-2(n-1)}\hat{f}_m(-n+1) - T^{-2n+1}\hat{f}_m(-n)\|(1+|n|)^k \\
\leq \quad & (1+\|T\|)\sum_{n\neq 0} \|\hat{f}_m(n-1) - T\hat{f}_m(n)\|(1+|n|)^k \\
& + \sum_{n\geq 1} \|T^{2n+1}\|\|T\hat{f}_m(n+1) - \hat{f}_m(n)\|(1+n)^k.
\end{aligned}$$

Wie wir uns jedoch zu Beginn des Beweises überlegt haben, konvergiert der Wert der ersten Reihe bei festem $k \in \mathbb{N}_0$ gegen Null (für $m \to \infty$), und wir können uns darauf beschränken, die zweite Reihe weiter nach oben abzuschätzen. Nach einer Indextransformation erhalten wir für diese:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 2} \|\hat{f}_m(n-1) - T\hat{f}_m(n)\|\|T^{2n-1}\|n^k \\
\leq \quad & c\sum_{n\geq 2} \|\hat{f}_m(n-1) - T\hat{f}_m(n)\|(2n)^{k_0}(1+n)^k \\
\leq \quad & 2^{k_0}c\sum_{n\neq 0} \|\hat{f}_m(n-1) - T\hat{f}_m(n)\|(1+|n|)^{k_0+k},
\end{aligned}$$

wobei dieser letzte Ausdruck - wie zu Beginn des Beweises festgestellt - für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ eine Nullfolge in m darstellt. $\Diamond$

3.5.2 Satz. *Ein Operator $T \in L(X)$ ist genau dann $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar, wenn er die drei nachfolgenden Eigenschaften hat:*

(a) $z - T : \mathcal{E}(\mathbb{T}, X) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ ist topologischer Monomorphismus

(b) $\|T^n\| \leq c(1+n)^{k_0} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad$ (mit $c > 0, k_0 \in \mathbb{N}_0$)

(c) Für jede Nullfolge $(x_m + (z-T)f_m)_m$ in $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ (mit Folgen $(x_m)_m$ in X und $(f_m)_m$ in $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$) gilt: $\hat{f}_m(-1) \to 0$ in X.

Beweis.

"$\Rightarrow$": Die Eigenschaften (a) und (b) folgen mit (2.3.3) bzw. (2.1.5). Bleibt noch (c) zu zeigen. Seien dazu die Folgen $(x_m)_m$ in X und $(f_m)_m$ in $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ wie in (c) gefordert gegeben, d.h. $\|x_m + (z-T)f_m\|_k \to 0$ für alle $k \geq 0$, so gilt erst recht:

$$\inf\{\|x_m + f\|_k : f \in \overline{(z-T)\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)}\} \to 0 \quad (m \to \infty),$$

weshalb $[x_m] \to 0$ in $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)/\overline{(z-T)\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)}$. Mit (3.2.6) erhalten wir dann sofort: $x_m \to 0$ in X.

Nun ist $(x_m + (z-T)f_m)_m$ nach Voraussetzung eine Nullfolge in $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$, damit muß insbesondere die Folge der 0-ten Fourierkoeffizienten dieses Ausdrucks gegen 0 konvergieren; wir wissen also weiter: $\|x_m + \hat{f}_m(-1) - T\hat{f}_m(0)\| \to 0$.

Damit sieht man aber:

$$\|\hat{f}_m(-1)\| \leq \|x_m + \hat{f}_m(-1) - T\hat{f}_m(0)\| + \|x_m\| + \|T\|\|\hat{f}_m(0)\|,$$

und die Terme auf der rechten Seite sind Nullfolgen (für den letzten siehe voriges Lemma), also bleibt $(\hat{f}_m(-1))_m$ nichts anderes übrig, als selbst eine Nullfolge zu sein.

"$\Leftarrow$": Wir zeigen: (a) - (c) implizieren, daß

$$j : X \to \mathcal{E}(\mathbb{T}, X)/\overline{(z-T)\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)}; x \mapsto [x]$$

ein topologischer Monomorphismus ist. Dabei nutzen wir aus, daß $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ und der Quotientenraum $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)/\overline{(z-T)\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)}$ beides Fréchetrüume und somit metrisierbar sind. Geben wir uns nämlich eine Nullfolge $([x_m])_m$ im Quotienten vor, so bedeutet dies:

$$\rho([x_n], 0) \to 0 \quad (n \to \infty),$$

wobei ρ eine translationsinvariante Metrik auf dem Quotientenraum bezeichne, die dessen Topologie erzeugt. Ist d eine ebensolche Metrik auf $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$, kann man ρ wie folgt wählen (vgl. Rudin [16], Theorem 1.41):

$$\rho([x], [y]) := \inf\{d(x-y, z) : z \in (z-T)\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)\}$$

(beachte: $z - T$ hat abgeschlossenes Bild). Das Infimum erlaubt es uns, folgende Wahl zu treffen: zu $m \in \mathbb{N}$ wähle man eine Funktion $f_m \in \mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$, so daß

$$d(x_m, -(z-T)f_m) \leq \rho([x_m], 0) + \frac{1}{m} \quad (\to 0).$$

Die Translationsinvarianz von d liefert unmittelbar, daß $(x_m + (z-T)f_m)_m$ eine Nullfolge in $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ ist. Damit ist die Folge der 0-ten Fourierkoeffizienten $(x_m + \hat{f}_m(-1) - T\hat{f}_m(0))_m$ eine Nullfolge in X, d.h. $(x_m)_m$ selbst ist Nullfolge in X, denn für die Norm von x_m gilt:

$$\|x_m\| \leq \|x_m + \hat{f}_m(-1) - T\hat{f}_m(0)\| + \|\hat{f}_m(-1)\| + \|T\|\|\hat{f}_m(0)\|,$$

und rechts stehen nach dem oben Gesagten, der Voraussetzung (c) und Lemma (3.5.1) - dafür die Voraussetzungen (a) und (b) - nur Nullfolgen. $\diamondsuit$

3.5.3 Es läßt sich noch folgendes anfügen: Wie einfache Beispiele zeigen, - und hier bricht die Symmetrie zum $\mathcal{E}(\mathbb{C})$-Fall - kann man aus der Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}(\mathbb{T})}$ alleine im allgemeinen nicht auf $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar schließen. Ist etwa das Spektrum eines Operators $T \in L(X)$ disjunkt zu $\overline{\mathbb{D}}$, so kann T einerseits nach (2.1.6) nicht $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar sein, andererseits hat T sicher $(\beta)_{\mathcal{E}(\mathbb{T})}$. Die Voraussetzung an das Spektrum von T garantiert nämlich, daß $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X) \xrightarrow{z-T} \mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ sogar topologischer Isomorphismus ist.

Ferner stellt man fest: Die drei Eigenschaften (a)-(c) im vorigen Satz sind nicht unabhängig voneinander. Es genügt beispielsweise in (a) zu verlangen, daß $z - T$ abgeschlossenes Bild hat, wie das nächste Lemma zeigt:

3.5.4 Lemma. *Wachsen die positiven Potenzen eines Operators $T \in L(X)$ langsam im Sinne von (3.5.2)(b), so ist die Abbildung $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X) \xrightarrow{z-T} \mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ injektiv.*

Beweis. Angenommen, $z - T$ wäre nicht injektiv. Ist dann $f \in \mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ ein nichttriviales Element aus $\ker(z - T)$, so hat man: $zf(z) - Tf(z) = 0 \quad (z \in \mathbb{T})$ oder via Fouriertransformation: $\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\hat{f}(n-1) - T\hat{f}(n))z^n = 0$, weshalb wegen der Injektivität der Fourierentwicklung bereits

$$T\hat{f}(n) = \hat{f}(n-1) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

gelten muß. Mit dieser Gleichung und der Tatsache, daß $\hat{f}(l) \neq 0$ für ein $l \in \mathbb{Z}$ (f war als nichttrivial vorausgesetzt), erhalten wir induktiv:

$$T^n \hat{f}(l+n) = \hat{f}(l) \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Aus den Wachstumsbedingungen an die positiven Potenzen folgt damit sofort:

$$\|\hat{f}(l)\| = \|T^n \hat{f}(l+n)\| \leq c(1+n)^{k_0} \|\hat{f}(l+n)\| \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Das verträgt sich jedoch nicht mit der Voraussetzung, daß $f \in \mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ ist. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|\hat{f}(n)\|(1+|n|)^{k_0} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|\hat{f}(n+l)\|(1+|n+l|)^{k_0} \\
&\geq \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \|\hat{f}(n+l)\|(1+n+l)^{k_0} \\
&\geq \frac{\|\hat{f}(l)\|}{c} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{(1+n+l)^{k_0}}{(1+n)^{k_0}} \\
&= +\infty,
\end{aligned}$$

denn die Summanden der Reihe sind positiv und bilden keine Nullfolge. Für $f \in \mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ müßte der Ausdruck allerdings endlich sein, denn die Fourierkoeffizienten einer $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$-Funktion sind schnell fallend. $\diamondsuit$

Wünschenswert im Hinblick auf die Analogie zum $\mathcal{E}(\mathbb{C})$-Fall wäre allerdings ein Resultat, das es umgekehrt erlaubt, aus der Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}(\mathbb{T})}$ auf Teile der Voraussetzungen (b) oder (c) von Satz (3.5.2) zu schließen. In diesem Zusammenhang stellt sich insbesondere die Frage, ob und wie man die Forderungen in (b) und (c) geeignet abschwächen kann, ohne daß der Satz seine Gültigkeit verliert.

4 Kalküle mit Ausnahmemengen

Von einem konkreten Beispiel - dem Cesàro-Operator auf dem Hardyraum - geleitet, stellt sich die Frage, ob man nicht durch Abschwächung der Wachstumsbedingungen an die Resolvente noch Kalküle über geeigneten Unteralgebren von $\mathcal{E}(\mathbb{T})$ erhält. Eine naheliegende Forderung an solche Funktionenalgebren ist etwa, daß die Funktionen auf geeigneten offenen Mengen U ($U \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$) mit holomorphen Funktionen übereinstimmen. Wir werden diese Idee im folgenden Abschnitt präzisieren.

4.1 Geeignete Funktionenalgebren

4.1.1 Definition. *Es wird sich als zweckmäßig erweisen, mit offenen Mengen der folgenden Form zu arbeiten:*

(a) *Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ und $0 < \varepsilon < 1$ definieren wir*

$$Q_\varepsilon(\alpha, \beta) := \{re^{i\theta} : |r - 1| < \varepsilon,\ \alpha < \theta < \beta\},$$

d.h. $Q_\varepsilon(\alpha, \beta)$ ist ein offenes Kreisringsegment der Breite 2ε mit einem Öffnungswinkel $\beta - \alpha$.

(b) *Eine Teilmenge $W \subset \mathbb{C}$ heiße segmentiert, wenn W sich schreiben läßt als disjunkte Vereinigung solcher Segmente - genauer, falls*

$$W = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} Q_\varepsilon(\alpha_i, \beta_i)$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in [0, 2\pi)$, $\alpha_i < \alpha_{i+1}$, $\alpha_i < \beta_i < \alpha_i + 2\pi$ und $0 < \varepsilon < 1$.

Wenn in Zukunft von einer Darstellung $W = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} Q_\varepsilon(\alpha_i, \beta_i)$ einer segmentierten Menge die Rede ist, so wird immer stillschweigend vorausgesetzt, daß sie den Bedingungen aus (b) genügt. Man überlegt sich leicht, daß eine solche Darstellung eindeutig ist, und daß für die Winkel α_i, β_i folgendes gilt:

$$0 \leq \alpha_1 < \beta_1 \leq \alpha_2 < \beta_2 \leq \cdots \leq \alpha_n < \beta_n \leq \alpha_1 + 2\pi.$$

Desweiteren ist ein einzelnes Segment $Q_\varepsilon(\alpha, \beta)$ genau dann eine segmentierte Menge, wenn neben den Forderungen aus Teil (a) der Definition noch die Bedingungen $\alpha \in [0, 2\pi)$, $\beta < \alpha + 2\pi$ erfüllt sind.

4.1.2 Lemma. *Wenn wir uns in Zukunft auf segmentierte offene Mengen zurückziehen können, so hat das den folgenden Grund:*

(a) *Für $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ bilden die Mengen der Form $Q_{\frac{1}{n}}(\theta - \frac{1}{n}, \theta + \frac{1}{n})$ $(n \in \mathbb{N})$ eine Umgebungsbasis.*

(b) *Ist $\emptyset \neq S \subsetneq \mathbb{T}$ kompakt, und $U \supset S, U \subset \mathbb{C}$ offen, so existiert eine segmentierte Menge $W \subset \mathbb{C}$ mit $S \subset W \subset U$.*

Beweis.

(a) Es ist klar, daß in jeder ε-Umgebung um $e^{i\theta}$ ein solches Segment liegt, falls man n nur groß genug wählt.

(b) Zu jedem $x \in S$ existiert nach (a) eine Umgebung der Form

$$Q_{\varepsilon(x)}(\alpha(x), \beta(x)) \subset U$$

mit $\alpha(x) < \beta(x)$ und $0 < \varepsilon(x) < 1$. Da S von all diesen Umgebungen überdeckt wird, erlaubt es die Kompaktheit, endlich viele davon auszuwählen, die

S immer noch überdecken: $S \subset \cup_{i=1}^n Q_{\varepsilon_i}(\alpha_i, \beta_i)$. Wegen $S \subset \mathbb{T}$ gilt auch mit $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$ noch: $S \subset \cup_{i=1}^n Q_\varepsilon(\alpha_i, \beta_i)$. Wir können dabei ohne Einschränkung annehmen, daß die α_i in $[0, 2\pi)$ liegen und aufsteigend sortiert sind. Da die Vereinigung zweier solcher Q_ε - Segmente entweder disjunkt ist oder selbst wieder ein Q_ε - Segment bildet, können wir ferner voraussetzen, daß $S \subset \dot\cup_{i=1}^n Q_\varepsilon(\alpha_i, \beta_i)$ mit $0 < \varepsilon < 1$, $\alpha_i \in [0, 2\pi)$, $\alpha_i < \beta_i \leq \alpha_{i+1}$.

Die einzige Bedingung, die jetzt noch fehlt, ist $\beta_i < \alpha_i + 2\pi$ für $i = 1, \cdots, n$. Ist sie erfüllt, hat $W := \dot\cup_{i=1}^n Q_\varepsilon(\alpha_i, \beta_i)$ alle geforderten Eigenschaften. Ist sie jedoch falsch, so ist notwendigerweise $n = 1$ und $\beta_1 \geq \alpha_1 + 2\pi$. Falls in dieser letzten Beziehung Gleichheit gilt, so kann man (beachte: S kompakt) ein $\delta > 0$ so klein wählen, daß $S \subset Q_\varepsilon(\alpha_1, \beta_1 - \delta) =: W$, und ist ebenfalls am Ziel.

Ist hingegen $\beta_1 > \alpha_1 + 2\pi$, so ist zwangsläufig $U \supset Q_\varepsilon(\alpha_1, \beta_1) = \{z \in \mathbb{C} : |1 - |z|| < \varepsilon\}$, und man kann folgendermaßen vorgehen: Wähle $e^{i\varphi_0} \in \mathbb{T} - S$ ($\neq \emptyset$ nach Voraussetzung), und beachte, daß für ein $\delta > 0$ klein genug immer noch gilt: $S \subset Q_\varepsilon(\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi - \delta) \subset U$. $\diamondsuit$

4.1.3 Lemma. *Sei $W \subset \mathbb{C}$ segmentiert.*

(a) *$\mathbb{D} - \overline{W}$ ist ein Sterngebiet mit Sternmittelpunkt 0.*

(b) *W besitzt eine abzählbare Ausschöpfung $(W_k)_k$ durch segmentierte Mengen W_k, wobei $\overline{W_k} \subset W_{k+1}$ (und eine solche ist im folgenden immer gemeint, wenn von einer segmentierten Ausschöpfung die Rede ist).*

Beweis.

(a) $\mathbb{D} - \overline{W} = \mathbb{D} \cap (\overline{W})^C$, also offen, und mit jedem Punkt aus $\mathbb{D} - \overline{W}$ gehört die Verbindungsstrecke $\overline{0z}$ noch ganz dazu.

(b) Ist $W = \dot\cup_{i=1}^n Q_\varepsilon(\alpha_i, \beta_i)$ mit passenden $\alpha_i \in [0, 2\pi), \beta_i$ und ε, so setze

$$W_k := \cup_{i=1}^n Q_{(1-\frac{1}{k})\varepsilon}(\alpha_i + \frac{1}{k}, \beta_i - \frac{1}{k}).$$

Dann ist W_k ab einem hinreichend großen Index k_0 segmentiert, und es gilt offenbar $\overline{W_k} \subset W_{k+1}$. $\diamondsuit$

4.1.4 Definition. *Wir führen folgende Funktionenräume ein:*

(a) *Für $U \subset \mathbb{C}$ offen, $U \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$ definieren wir*

$$\mathcal{E}_U(\mathbb{T}, X) := \{f : \mathbb{T} \cup U \to X; f|_\mathbb{T} \in \mathcal{E}(\mathbb{T}, X), f|_U \in \mathcal{O}(U, X)\},$$

ausgestattet mit der Initialtopologie bezüglich der algebraischen Einbettung

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_U(\mathbb{T}, X) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbb{T}, X) \oplus \mathcal{O}(U, X) \\ f & \mapsto & f|_\mathbb{T} \oplus f|_U. \end{array}$$

Ein erzeugendes Halbnormensystem für die Topologie wird dann etwa gegeben durch $\|f\|_k := \|f|_\mathbb{T}\|_k + \|f|_{U_k}\|_\infty \quad (k \in \mathbb{N}_0)$, wenn $(U_k)_k$ eine kompakte Ausschöpfung von U bezeichnet. (Hierzu beachte man, daß die verwendeten Halbnormen der beiden direkten Summanden aufsteigend geordnet sind.)

(b) *Ist $W = \dot{\bigcup}_{i=1}^n Q_\varepsilon(\alpha_i, \beta_i) \subset \mathbb{C}$ segmentiert, definieren wir:*

$$\mathcal{E}(\mathbb{T} \cap W, X) := \{f : \mathbb{T} \cap W \to X; (t \mapsto f(e^{it})) \in \mathcal{E}(\dot{\bigcup}_{i=1}^n (\alpha_i, \beta_i), X)\},$$

versehen mit der durch den algebraischen Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(\mathbb{T} \cap W, X) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\dot{\bigcup}_{i=1}^n (\alpha_i, \beta_i), X) \\ f & \mapsto & (t \mapsto f(e^{it})) \end{array}$$

induzierten Initialtopologie.

(c) *Ist W segmentiert mit segmentierter Ausschöpfung $(W_k)_k$, so setzen wir*

$$C^k_{W_k}(\mathbb{T}, X) := \{f : \mathbb{T} \cup \overline{W_k} \to X; f|_\mathbb{T} \in C^k(\mathbb{T}, X), f|_{\overline{W_k}} \in A(W_k, X)\},$$

versehen mit der Initialtopologie der Einbettung

$$\begin{array}{ccc} C^k_{W_k}(\mathbb{T}, X) & \longrightarrow & C^k(\mathbb{T}, X) \oplus A(W_k, X) \\ f & \mapsto & f|_\mathbb{T} \oplus f|_{\overline{W_k}}, \end{array}$$

also der Norm $\|f\|_k = \|f|_\mathbb{T}\|_k + \|f|_{\overline{W_k}}\|_\infty$.

(d) *Im skalarwertigen Fall ($X = \mathbb{C}$) schreiben wir wie üblich abkürzend $\mathcal{E}_U(\mathbb{T})$, $\mathcal{E}(\mathbb{T} \cap W)$ bzw. $C^k_{W_k}(\mathbb{T})$.*

4.1.5 Lemma. *Für die soeben definierten Räume gilt:*

(a) *$\mathcal{E}_U(\mathbb{T}, X)$ und $\mathcal{E}(\mathbb{T} \cap W, X)$ sind Frécheträume.*

(b) *$\mathcal{E}_U(\mathbb{T})$ und $\mathcal{E}(\mathbb{T} \cap W)$ sind nuklear.*

(c) *Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ ist $C^k_{W_k}(\mathbb{T}, X)$ ein Banachraum.*

Beweis.

(a) Zunächst zu $\mathcal{E}_U(\mathbb{T}, X)$: Das Bild der in der Definition angegebenen Abbildung $\mathcal{E}_U(\mathbb{T}, X) \xrightarrow{i} \mathcal{E}(\mathbb{T}, X) \oplus \mathcal{O}(U, X)$ ist offenbar die Menge

$$\operatorname{ran} i = \{f \oplus g : \quad f|_{\mathbb{T} \cap U} \equiv g|_{\mathbb{T} \cap U}\} \subset \mathcal{E}(\mathbb{T}, X) \oplus \mathcal{O}(U, X).$$

Da die Topologie von $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ wie die von $\mathcal{O}(U, X)$ stärker ist als die punktweise Konvergenz, erhält man sofort, daß ran i in der direkten Summe $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X) \oplus \mathcal{O}(U, X)$ abgeschlossen (und damit wie diese ein Fréchetraum) ist. Die Topologie auf $\mathcal{E}_U(\mathbb{T}, X)$ ist jedoch definitionsgemäß die Initialtopologie der Injektion i, die damit zum topologischen Monomorphismus wird. Mit ran i ist daher auch $\mathcal{E}_U(\mathbb{T}, X)$ ein Fréchetraum.

Zum Raum $\mathcal{E}(\mathbb{T} \cap W, X)$: Der algebraische Isomorphismus $\mathcal{E}(\mathbb{T} \cap W, X) \longrightarrow \mathcal{E}(\dot{\bigcup}_{i=1}^n (\alpha_i, \beta_i), X)$ ist nach Definition der Topologie auf dem Definitionsbereich eine topologische Identifizierung von $\mathcal{E}(\mathbb{T} \cap W, X)$ mit einem Fréchetraum.

(b) Mit $\mathcal{E}(\mathbb{T})$ und $\mathcal{O}(U)$ ist deren direkte Summe und jeder Teilraum davon nuklear. Vermöge der Abbildung $\mathcal{E}_U(\mathbb{T}) \to \mathcal{E}(\mathbb{T}) \oplus \mathcal{O}(U)$ aus der Definition kann $\mathcal{E}_U(\mathbb{T})$ jedoch als ein solcher Teilraum aufgefaßt werden.

Ferner ist allgemein $\mathcal{E}(U)$ (für $U \subset \mathbb{R}$ offen) nuklear (vgl. [8], Theorem A1.4). $\mathcal{E}(\mathbb{T} \cap W)$ stimmt jedoch definitionsgemäß bis auf topologische Isomorphie mit einem Raum dieses Typs überein.

(c) Die in obiger Definition angegebene Norm ist gerade die direkte Summen-Norm für die direkte Summe der Banachräume $C^k(\mathbb{T},X)$ und $A(W_k,X)$. Somit ist die Summe selbst wieder ein Banachraum und $C^k_{W_k}(\mathbb{T},X) \xrightarrow{i} C^k(\mathbb{T},X) \oplus A(W_k,X)$ stetig. Wie in (a) überlegt man sich, daß i abgeschlossenes Bild hat; daraus folgt die Behauptung, da $C^k_{W_k}(\mathbb{T},X)$ schließlich topologisch isomorph ist zu einem abgeschlossenen Unterraum eines Banachraumes.

$\diamondsuit$

Es ist klar, daß $\mathcal{E}_U(\mathbb{T})$ nicht nur ein Vektorraum, sondern auch eine Algebra ist. In diesem Zusammenhang ist folgende Aussage von Interesse:

4.1.6 Lemma. *Ist W segmentiert mit segmentierter Ausschöpfung $(W_k)_k$, so ist*

(a) $\mathcal{E}_W(\mathbb{T})$ eine unitale Fréchetalgebra und

(b) $C^k_{W_k}(\mathbb{T},X)$ ein Banach-$\mathcal{E}_W(\mathbb{T})$-Modul,

wobei die Verknüpfung wie üblich durch punktweise Multiplikation gegeben ist. Darüberhinaus ist für (a) eine Segmentierung von W nicht erforderlich.

Beweis. Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}_W(\mathbb{T}) \times C^k_{W_k}(\mathbb{T},X) & \to & C^k_{W_k}(\mathbb{T},X) \\ (\varphi, f) & \mapsto & \varphi \cdot f \end{array}$$

ist bilinear und erklärt offenbar eine $\mathcal{E}_W(\mathbb{T})$-Moduloperation auf $C^k_{W_k}(\mathbb{T},X)$. Bleibt nur noch die Stetigkeit zu überprüfen, doch das bereitet keine große Mühe, denn ist $\varphi \in \mathcal{E}_W(\mathbb{T})$ und $f \in C^k_{W_k}(\mathbb{T},X)$, so gilt:

$$\|\varphi f\|_k = \|(\varphi f)|_{\mathbb{T}}\|_k + \|(\varphi f)_{\overline{W_k}}\|_\infty,$$

aber da $\varphi|_{\mathbb{T}} \in \mathcal{E}(\mathbb{T}), f \in C^k(\mathbb{T},X)$, wissen wir aus (2.2.2)(b), daß eine universelle Konstante c existiert, so daß wir den gesamten Ausdruck abschätzen können gegen:

$$\begin{array}{rcl} \cdots & \leq & c\|\varphi|_{\mathbb{T}}\|_k\|f|_{\mathbb{T}}\|_k + \|\varphi_{\overline{W_k}}\|_\infty\|f_{\overline{W_k}}\|_\infty \\ & \leq & \max\{1,c\}(\|\varphi|_{\mathbb{T}}\|_k + \|\varphi_{\overline{W_k}}\|_\infty)(\|f|\mathbb{T}\|_k + \|f_{\overline{W_k}}\|_\infty) \\ & \leq & C\|\varphi\|_k\|f\|_k. \end{array}$$

Sehen wir f nun zuerst als $\mathcal{E}_W(\mathbb{T})$-Funktion an (und dies ist ein Spezialfall obiger Voraussetzungen), so zeigt die Abschätzung die Stetigkeit der Produktbildung in $\mathcal{E}_W(\mathbb{T})$. (Die Abschätzung funktioniert immer noch, wenn man die $\overline{W_k}$ durch eine beliebige kompakte Ausschöpfung ersetzt.) $\mathcal{E}_W(\mathbb{T})$ ist also als unitale (klar) Fréchetalgebra identifiziert. Dann liefert aber die obige Abschätzung (nun für $f \in C^k(\mathbb{T},X)$) analog die Stetigkeit der $\mathcal{E}_W(\mathbb{T})$-Modulmultiplikation auf $C^k(\mathbb{T},X)$. $\diamondsuit$

4.1.7 Satz. *Ist W segmentiert, so ist die kanonische Tensorproduktdarstellung*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}_W(\mathbb{T})\widehat{\otimes}X & \xrightarrow{\tilde{\Phi}} & \mathcal{E}_W(\mathbb{T},X) \\ f \otimes x & \mapsto & f \cdot x \end{array}$$

ein topologischer Isomorphismus.

Beweis. Sei $W = \dot\bigcup_{i=1}^n Q_\varepsilon(\alpha_i,\beta_i)$. Wir betrachten die folgende Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_W(\mathbb{T},X) \xrightarrow{R_1} \mathcal{E}(\mathbb{T},X)\oplus\mathcal{O}(W,X) \xrightarrow{R_2} \mathcal{E}(\mathbb{T}\cap W,X),$$

wobei R_1 die natürliche Einbettung bezeichnet, und R_2 definiert ist durch

$$R_2(\varphi\oplus f) = \varphi|_{\mathbb{T}\cap W} - f|_{\mathbb{T}\cap W}.$$

Wohldefiniertheit und Linearität von R_2 sind offensichtlich. Zur Stetigkeit beachte man, daß für eine Nullfolge $(\varphi_n\oplus f_n)\subset\mathcal{E}(\mathbb{T},X)\oplus\mathcal{O}(W,X)$ gilt: $\varphi_n\to 0$ in $\mathcal{E}(\mathbb{T},X)$ und somit auch in $\mathcal{E}(\mathbb{T}\cap W,X)$, und $f_n\to 0$ in $\mathcal{O}(W,X)$, d.h. lokal gleichmäßig auf W in allen Ableitungen. Das liefert aber: $f_n(e^{i\cdot})\to 0$ lokal gleichmäßig in allen Ableitungen auf $\dot\bigcup_{i=1}^n(\alpha_i,\beta_i)$. Somit:

$$R_2(\varphi_n\oplus f_n) = \varphi_n|_{\mathbb{T}\cap W} - f|_{\mathbb{T}\cap W}\to 0 \quad \text{in } \mathcal{E}(\mathbb{T}\cap W,X).$$

Desweiteren gilt: $\ker R_2 = \{\varphi\oplus f\in\mathcal{E}(\mathbb{T},X)\oplus\mathcal{O}(W,X) : \varphi|_{\mathbb{T}\cap W} = f|_{\mathbb{T}\cap W}\} =$ ran R_1, und da außerdem R_1 als topologischer Monomorphismus injektiv ist, ist die Sequenz für jede Wahl eines Banachraumes X als Bildraum exakt; insbesondere ist die zugehörige Sequenz skalarwertiger Funktionenräume

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_W(\mathbb{T}) \xrightarrow{L_1} \mathcal{E}(\mathbb{T})\oplus\mathcal{O}(W) \xrightarrow{L_2} \mathcal{E}(\mathbb{T}\cap W)$$

exakt, und durch zweimalige Anwendung von (B.6)(c) erhalten wir die Exaktheit der mit $id: X\to X$ tensorierten Sequenz (hier gehen die Nuklearitätsresultate aus (4.1.5) ein):

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_W(\mathbb{T})\widehat{\otimes}X \xrightarrow{L_1\otimes id} (\mathcal{E}(\mathbb{T})\oplus\mathcal{O}(W))\widehat{\otimes}X \xrightarrow{L_2\otimes id} \mathcal{E}(\mathbb{T}\cap W)\widehat{\otimes}X.$$

Diese und die X-wertige Funktionenraum-Sequenz von oben stellen im folgenden Diagramm die Spalten:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\mathcal{E}_W(\mathbb{T})\widehat{\otimes}X \arrow[r, "H"] \arrow[d, "L_1\otimes id"'] & \mathcal{E}_W(\mathbb{T},X) \arrow[d, "R_1"'] \\
(\mathcal{E}(\mathbb{T})\oplus\mathcal{O}(W))\widehat{\otimes}X \arrow[r, "H_1"] \arrow[d, "L_2\otimes id"'] & \mathcal{E}(\mathbb{T},X)\oplus\mathcal{O}(W,X) \arrow[d, "R_2"'] \\
\mathcal{E}(\mathbb{T}\cap W)\widehat{\otimes}X \arrow[r, "H_2"] & \mathcal{E}(\mathbb{T}\cap W,X).
\end{tikzcd}$$

Linke und rechte Spalte sind somit exakt. Nun zu den Zeilenabbildungen: wir brauchen (aus Stetigkeitsgründen, s.u.) nur zu beschreiben, wie sie auf Elementartensoren wirken. H ist dabei natürlich der Kandidat für den gesuchten topologischen Isomorphismus.

$$\begin{aligned}
H(\varphi\otimes x) &= \varphi x\\
H_1((\varphi\oplus f)\otimes x) &= \varphi x\oplus f x\\
H_2(\varphi\otimes x) &= \varphi x.
\end{aligned}$$

H_1 ist ein topologischer Isomorphismus, denn wie man leicht sieht, ist H_1 Hintereinanderausführung der wohlbekannten topologischen Identifizierungen

$$(\mathcal{E}(\mathbb{T})\oplus\mathcal{O}(W))\widehat{\otimes}X \xrightarrow{\simeq} (\mathcal{E}(\mathbb{T})\widehat{\otimes}X)\oplus(\mathcal{O}(W)\widehat{\otimes}X) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{E}(\mathbb{T},X)\oplus\mathcal{O}(W,X).$$

(Zur ersten Identifizierung siehe [12], 15.5.3, und beachte, daß X normierbar; die zweite folgt mit den kanonischen Isomorphismen $\mathcal{E}(\mathbb{T},X) \simeq \mathcal{E}(\mathbb{T})\widehat{\otimes}X$ (aus dem ersten Kapitel dieser Arbeit) bzw. $\mathcal{O}(W,X) \simeq \mathcal{O}(W)\widehat{\otimes}X$ ([12], 16.7.5).)

H_2 ist ebenfalls ein topologischer Isomorphismus, da

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(\mathbb{T}\cap W)\widehat{\otimes}X & \xrightarrow{H_2} & \mathcal{E}(\mathbb{T}\cap W,X) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{E}(\dot\cup_{i=1}^n(\alpha_i,\beta_i))\widehat{\otimes}X & \longrightarrow & \mathcal{E}(\dot\cup_{i=1}^n(\alpha_i,\beta_i),X) \end{array}$$

kommutativ ist, wenn die Spalten und die untere Zeilenabbildung kanonisch gegeben sind. Nun sind jedoch Spaltenabbildungen und untere Zeilenabbildung topologische Isomorphismen, also wegen der Kommutativität auch H_2.

Die Abbildung H ist stetig, denn die Abschätzung

$$\sup_{\substack{0\le j\le k\\ t\in\mathbb{R}}} \|\frac{d^j}{dt^j}\varphi(e^{it})x\| + \sup_{z\in\overline{W_k}}\|\varphi(z)x\| \le (\|\varphi|_{\mathbb{T}}\|_k + \|\varphi|_{\overline{W_k}}\|_\infty)\|x\|$$

zeigt die Stetigkeit der bilinearen Abbildung

$$\mathcal{E}_W(\mathbb{T})\times X \to \mathcal{E}_W(\mathbb{T},X); \quad (\varphi,x)\mapsto \varphi x,$$

und damit die Stetigkeit von H als Faktorisierung hiervon über $\mathcal{E}_W(\mathbb{T})\widehat{\otimes}X$ (vgl. (B.5) im Anhang).

Die Kommutativität des Ausgangsdiagrammes überlegt man sich nun einfach auf auf Elementartensoren.

Mit Hilfe des Diagrammes lesen wir ab: H ist topologischer Monomorphismus, denn ist $(x_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{E}_W(\mathbb{T})\widehat{\otimes}X$ mit $Hx_n\to 0$, so gilt:

$$(R_1\circ H)x_n\to 0 \Rightarrow (H_1\circ(L_1\otimes id))x_n\to 0 \Rightarrow (L_1\otimes id)x_n\to 0\Rightarrow x_n\to 0,$$

wobei wir ausgenutzt haben, daß H_1 topologischer Isomorphismus und $L_1\otimes id$ topologischer Monomorphismus ist. H ist aber auch surjektiv (also schließlich ein topologischer Isomorphismus). Ist nämlich $f\in\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)$, so folgt:

$$\begin{aligned} (R_2\circ R_1)f = 0 \quad &\Rightarrow \quad (R_2\circ H_1)H_1^{-1}(R_1(f)) = 0 \\ &\Rightarrow \quad H_2\circ(L_2\otimes id)H_1^{-1}(R_1(f)) = 0 \\ &\Rightarrow \quad (L_2\otimes id)H_1^{-1}(R_1(f)) = 0, \end{aligned}$$

und die Exaktheit der linken Spalte liefert die Existenz eines $f_0\in\mathcal{E}_W(\mathbb{T})\widehat{\otimes}X$ mit $H_1^{-1}(R_1(f)) = (L_1\otimes id)f_0$. Damit gilt aber:

$$R_1(f) = H_1\circ(L_1\otimes id)f_0 = (R_1\circ H)f_0 = R_1(Hf_0).$$

Also schließlich $f = Hf_0$, da R_1 injektiv. ◊

Wir überzeugen uns sogleich, daß auch die von $\mathcal{E}(\mathbb{T},X)$ gewohnte Dualitätstheorie funktioniert, was für die nachfolgende Charakterisierung $\mathcal{E}_W(\mathbb{T})$-subskalarer Operatoren von zentraler Bedeutung ist.

4.1.8 Korollar. *Es gibt eindeutige topologische Isomorphismen:*

(a) $\tilde\sigma : \mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)' \longrightarrow (\mathcal{E}_W(\mathbb{T})\widehat{\otimes}X)'$ *mit* $<\varphi\otimes x, \tilde\sigma(u)> = <\varphi x, u>$

(b) $\tilde\rho : \mathcal{E}_W'(\mathbb{T})\widehat{\otimes}X' \longrightarrow \mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)'$ *mit* $<\varphi x, \tilde\rho(v\otimes x)> = <\varphi, v><x, x'>$

(c) $\tilde\gamma : \mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)' \longrightarrow L(\mathcal{E}_W(\mathbb{T}),X')$ *mit* $<x, (\tilde\gamma(u))(\varphi)> = <\varphi x, u>$.

Beweis. Neben dem Resultat aus dem letzten Satz ist lediglich zu beachten, daß $\mathcal{E}_W(\mathbb{T})$ ein nuklearer Fréchetraum ist. Dann läuft alles völlig analog zum Beweis von (1.4.4). ◊

4.2 Charakterisierung $\mathcal{E}_W(\mathbb{T})$-subskalarer Operatoren

Wir vereinbaren die folgende Schreibweise: Ist W segmentiert mit segmentierter Ausschöpfung $(W_k)_k$ und $M \subset \mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)$, so schreiben wir kurz $\overline{M}^k$ für den Abschluß der Menge

$$\{f|_{\mathbb{T}\cup\overline{W_k}} : f \in M\} \subset C^k_{W_k}(\mathbb{T},X)$$

in der $C^k_{W_k}(\mathbb{T},X)$-Topologie. Die gleiche Abkürzung verwenden wir, falls M eine Teilmenge von $C^l_{W_l}(\mathbb{T})$ mit $l \geq k$ ist.

4.2.1 Lemma. *Sei W segmentiert mit segmentierter Ausschöpfung $(W_k)_k$. Dann hat einen $\mathcal{E}_W(\mathbb{T})$-Kalkül*

(a) der Multiplikationsoperator $M_z : C^k_{W_k}(\mathbb{T},X) \longrightarrow C^k_{W_k}(\mathbb{T},X); f \mapsto zf$

(b) der davon auf dem Quotienten induzierte Multiplikationsoperator

$$\hat{M}_z : C^k_{W_k}(\mathbb{T},X)/\overline{(z-T)\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)}^k \longrightarrow C^k_{W_k}(\mathbb{T},X)/\overline{(z-T)\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)}^k.$$

Beweis.

(a) Wie im $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Falle definiert $\varphi : \mathcal{E}_W(\mathbb{T}) \to L(C^k_{W_k}(\mathbb{T},X)); \quad \varphi \mapsto M_\varphi$ einen Kalkül für M_z. Die algebraischen Eigenschaften folgen wie oben, die Wohldefiniertheit und Stetigkeit aus der $\mathcal{E}_W(\mathbb{T})$-Modulstruktur von $C^k_{W_k}(\mathbb{T},X)$, denn es gilt (vgl. (4.1.6)):

$$\|\Phi(\varphi)f\|_k = \|M_\varphi f\|_k \leq c\|\varphi\|_k\|f\|_k,$$

woraus die Stetigkeit von M_φ sowie die von Φ abgelesen werden kann.

(b) Für die Existenz des Quotientenkalküls ist nur zu zeigen: $\overline{(z-T)\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)}^k$ ist invarianter Unterraum von $\Phi(\varphi)$ für alle φ. Aus Stetigkeitsgründen genügt es nachzuweisen, daß $M_\varphi(z-T)\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X) \subset (z-T)\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)$, was wegen $\varphi(z-T)f = (z-T)(\varphi f)$ (wobei für $\varphi \in \mathcal{E}_W(\mathbb{T}), f \in \mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)$ gilt: $\varphi f \in \mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)$) offensichtlich ist. $\diamondsuit$

Wir streben eine Charakterisierung $\mathcal{E}_W(\mathbb{T})$-subskalarer Operatoren nach dem Muster von Satz (3.2.6) an. Zur Vorbereitung dienen die nächsten Lemmata.

4.2.2 Lemma. *Ist W segmentiert mit segmentierter Ausschöpfung $(W_k)_k$, so hat man folgende kanonische topologische Identifizierungen:*

(a) $\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X) \xrightarrow{j} \varprojlim C^k_{W_k}(\mathbb{T},X); \quad f \mapsto (f|_{\mathbb{T}\cup\overline{W_k}})_k$

(b) $\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X) \xrightarrow{i} \varprojlim \overline{\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)}^k; \quad f \mapsto (f|_{\mathbb{T}\cup\overline{W_k}})_k$

(c) $\overline{(z-T)\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)} \xrightarrow{i_0} \varprojlim \overline{(z-T)\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)}^k; \quad f \mapsto (f|_{\mathbb{T}\cup\overline{W_k}})_k$

Die Spektren in (b) und (c) sind darüberhinaus reduziert.

Beweis.

(a) Das projektive Spektrum ist gegeben durch die natürlichen Inklusionen

$$\begin{array}{ccc} C^l_{W_l}(\mathbb{T},X) & \stackrel{inj}{\longrightarrow} & C^k_{W_k}(\mathbb{T},X) \quad (l \geq k) \\ f & \mapsto & f|_{\mathbb{T}\cup\overline{W_k}}. \end{array}$$

Die Inklusionen sind - wie man sich leicht überlegt - normreduzierend, also stetig, und erfüllen trivialerweise alle Strukturaxiome. Damit ist geklärt, wie der projektive Limes zu bilden ist, und wir können die angegebene Abbildung

$$\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X) \longrightarrow \lim_{\longleftarrow} C^k_{W_k}(\mathbb{T},X); \quad f \mapsto (f|_{\mathbb{T}\cup\overline{W_k}})_k$$

untersuchen. Die Wohldefiniertheit ist nach obiger Definition der Spektralabbildungen unmittelbar einsichtig; die Linearität ist ebenfalls klar. Wir stellen fest: Ist $(f|_{\mathbb{T}\cup\overline{W_k}})_k = 0$, so folgt: $f|_{\mathbb{T}\cup\overline{W_k}} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, somit $0 = f|_{\mathbb{T}\cup(\cup_{k\in\mathbb{N}_0}\overline{W_k})} = f|_{\mathbb{T}\cup W}$, also $f = 0$ in $\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)$. Damit ist die Abbildung injektiv. Die Surjektivität sieht man wie üblich, indem man sich überzeugt, daß für ein Element eines projektiven Limes dieser Form alle Komponenten übereinstimmen müssen. Ist nämlich $(f_k)_k \in \lim\limits_{\longleftarrow} C^k_{W_k}(\mathbb{T},X)$, so können wir definieren:

$$f(z) := \begin{cases} f_0(z) & (z \in \mathbb{T}) \\ f_l(z) & (z \in \overline{W_l}), \end{cases}$$

denn da die Spektralabbildungen die Einschränkungen sind, wissen wir:

$$f|_{\mathbb{T}\cup\overline{W_l}}(z) = f|_{\mathbb{T}\cup\overline{W_k}}(z) \quad (l \geq k, z \in W_k).$$

Damit ist die Definition sinnvoll. Insbesondere gilt für $k = 0$: $f|_{\mathbb{T}} = f_0|_{\mathbb{T}} = f_l|\mathbb{T} \in C^l(\mathbb{T},X) \quad (\forall l)$, also ist $f|_{\mathbb{T}} \in \mathcal{E}(\mathbb{T},X)$ und weiter: $f|_{W_k} = f_k|_{W_k} \in \mathcal{O}(W_k,X)$, somit: $f \in \mathcal{O}(W,X)$. D.h. $f \in \mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)$ und nach Konstruktion von f gilt: $(f|_{\mathbb{T}\cup\overline{W_k}})_k = (f_k)_k$, was zur Surjektivität zu zeigen war. Damit ist die in (a) angegebene Abbildung eine Bijektion zwischen Frécheträumen. Zur Stetigkeit in beiden Richtungen genügt es anzumerken, daß die Normen in den Stufen des projektiven Limes gerade ein erzeugendes Halbnormensystem von $\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)$ durchlaufen, d.h. bezeichnet $p_n = \|\cdot|_{\mathbb{T}}\|_n + \|\cdot|_{\overline{W_n}}\|_\infty$, so gilt: $p_n \circ \pi_n(f|_{\mathbb{T}\cup\overline{W_k}})_k = p_n(f|_{\mathbb{T}\cup\overline{W_n}}) = p_n(f)$.

(b) Als Strukurabbildungen im projektiven Spektrum verwenden wir die Einschränkungen der Inklusionen aus Teil (a): (für $l \geq k$)

$$\overline{\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)}^l \stackrel{inj}{\longrightarrow} \overline{\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)}^k.$$

Die weitere Argumentation verläuft dann vollkommen analog zum Teil (a). Bleibt noch anzumerken, daß die Strukturabbildungen dichtes Bild haben, doch das ist trivial, denn im Bild ist immer $\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)$ enthalten, was natürlich für jedes k in $\overline{\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)}^k$ dicht liegt.

(c) Auch für $\lim\limits_{\longleftarrow} \overline{(z-T)\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)}^k$ nehmen wir die Inklusionen

$$\overline{(z-T)\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)}^l \stackrel{inj}{\longrightarrow} \overline{(z-T)\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)}^k \quad (l \geq k)$$

als Spektralabbildungen (mit gleicher Rechtfertigung wie oben); ebenfalls wie oben sieht man sofort ein: diese haben dichtes Bild.

Nun betrachten wir die Abbildung $(z-T)$ zwischen den Stufen

$$\overline{\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)}^k \stackrel{z-T}{\longrightarrow} \overline{(z-T)\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)}^k,$$

wo sie offenbar dichtes Bild hat. Außerdem sieht man sofort, daß

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)}^l & \xrightarrow{z-T} & \overline{(z-T)\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)}^l \\ {\scriptstyle inj}\downarrow & & {\scriptstyle inj}\downarrow \\ \overline{\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)}^k & \xrightarrow{z-T} & \overline{(z-T)\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)}^k \end{array}$$

kommutativ ist, d.h. $z-T$ ist Morphismus der projektiven Spektren mit in jeder Stufe dichtem Bild. Dann hat aber auch (vgl. [8], Remark 3.2.5 (c)) die induzierte Abbildung zwischen den projektiven Limites - im folgenden kommutativen Diagramm die linke obere Zeile - dichtes Bild:

$$\begin{array}{ccccc} \varprojlim \overline{\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)}^k & \xrightarrow{\varprojlim(z-T)} & \varprojlim \overline{(z-T)\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)}^k & \xrightarrow{\tilde{j}} & \varprojlim \overline{\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)}^k \\ {\scriptstyle i}\uparrow & & {\scriptstyle i_0}\uparrow & & {\scriptstyle i}\uparrow \\ \mathcal{E}_W(\mathbb{T},X) & \xrightarrow{z-T} & \overline{(z-T)\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)} & \xrightarrow{\subset} & \mathcal{E}_W(\mathbb{T},X). \end{array}$$

Die mittlere Vertikale ist dabei durch die kanonische Abbildung $i_0(f)=(f)$ gegeben, und $\tilde{j}$ ist von den Inklusionen induzierte Abbildung. Wie im zweiten Beweisschritt von (3.2.2) überzeugt man sich dann davon, daß i_0 topologischer Isomorphismus ist. $\diamondsuit$

4.2.3 Satz. *Ist W segmentiert mit segmentierter Ausschöpfung $(W_k)_k$, so ist die folgende Abbildung ein topologischer Isomorphismus:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)/\overline{(z-T)\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)} & \xrightarrow{\simeq} & \varprojlim C^k_{W_k}(\mathbb{T},X)/\overline{(z-T)\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)}^k \\ f & \mapsto & ([f]_k)_k. \end{array}$$

Beweis. Der Beweis verläuft völlig analog zu dem von Satz (3.2.2); insbesondere handelt es sich um den zugehörigen nicht-reduzierten Fall der Überlegungen aus der Vorbemerkung zu Corollary 6.4.8, [8]. Wir können uns daher kurz fassen: In einer festen Stufe ($k \in \mathbb{N}_0$) ist die Sequenz

$$0 \to \overline{(z-T)\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)}^k \overset{e_k}{\to} C^k_{W_k}(\mathbb{T},X) \overset{\varphi_k}{\to} C^k_{W_k}(\mathbb{T},X)/\overline{(z-T)\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)}^k \to 0$$

offenbar exakt, wenn e_k die jeweilige Inklusion, φ_k die kanonische Quotientenabbildung bezeichnet. Die zu den Stufen gehörigen Spektralabbildungen sind für die ersten beiden Spektren die Inklusionen, vgl. voriges Lemma, wo wir auch festgestellt haben, daß das erste Spektrum reduziert ist. Für die Quotienten bieten sich wieder folgende Spektralabbildungen an:

$$C^k_{W_l}(\mathbb{T},X)/\overline{(z-T)\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)}^l \overset{\pi_{kl}}{\to} C^k_{W_k}(\mathbb{T},X)/\overline{(z-T)\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)}^k; [f]_l \mapsto [f|_{\mathbb{T}\cup\overline{W_k}}]_k.$$

Wie im Beweis zu Satz (3.2.2) überzeugt man sich, daß diese alle gewünschten Eigenschaften haben, und daß zudem die Einbettungen $(e_k)_k$ und $(\varphi_k)_k$ Morphismen zwischen den angegebenen Spektren sind. Dann können wir wegen der Reduziertheit des ersten Spektrums die Exaktheit der Sequenz zwischen den Stufen in den Limes retten und erhalten, daß die rechte Spalte des folgenden Diagrammes exakt ist:

$$\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\overline{(z-T)\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)} & \xrightarrow{i_0} & \varprojlim \overline{(z-T)\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)}^k \\
\downarrow \cap & & \downarrow e \\
\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X) & \xrightarrow{j} & \varprojlim C^k_{W_k}(\mathbb{T},X) \\
\downarrow \varphi\circ j & & \downarrow \varphi \\
\varprojlim C^k_{W_k}(\mathbb{T},X)/\overline{(z-T)\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)}^k & \xrightarrow{id} & \varprojlim C^k_{W_k}(\mathbb{T},X)/\overline{(z-T)\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)}^k \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0,
\end{array}$$

wobei $e = \varprojlim e_k$ und $\varphi = \varprojlim \varphi_k$ bezeichnet, und die topologischen Identifizierungen j und i_0 aus Lemma (4.2.2) benutzt werden. Offenbar sind die Spalten ähnlich zueinander, also ist mit der rechten auch die linke exakt. $\diamondsuit$

Nun haben wir alle Hilfsmittel zusammen, um eine zur Charakterisierung von $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalaren Operatoren völlig analoge Beschreibung von $\mathcal{E}_W(\mathbb{T})$-subskalaren Operatoren geben zu können.

4.2.4 Satz. *Für $T \in L(X)$ und $W \subset \mathbb{C}$ segmentiert sind äquivalent:*

(a) T ist $\mathcal{E}_W(\mathbb{T})$-subskalar

(b) Die Abbildung $j : X \longrightarrow \mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)/\overline{(z-T)\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)}$; $\quad x \mapsto [x]$ ist ein topologischer Monomorphismus

(c) $\forall x' \in X' \quad \exists u \in L(\mathcal{E}_W(\mathbb{T}), X')$ mit $u(z\varphi) = T'u(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{E}_W(\mathbb{T})$ und $u(1) = x'$.

Beweis. Der Beweis verläuft nun völlig analog zu dem von (3.2.4) bzw. (3.2.6). Wir werden ihn daher nur skizzieren und für die Details auf die entsprechenden Stellen verweisen.

(b) $\Rightarrow$ (a). Die Abbildung j induziert nach (4.2.3) den topologischen Monomorphismus

$$X \xhookrightarrow{j} \varprojlim C^k_{W_k}(\mathbb{T},X)/\overline{(z-T)\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)}^k; \quad x \mapsto ([x]_k)_k,$$

so daß wir wieder mit Lemma (3.2.3) eine Einbettung

$$X \stackrel{\pi_l\circ j}{\hookrightarrow} C^l_{W_l}(\mathbb{T},X)/\overline{(z-T)\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)}^l; \quad x \mapsto [x]_l$$

in eine Stufe finden. Mit $F := \overline{(z-T)\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)}^l$ wissen wir aber nach Lemma (4.2.1): M_z/F hat einen $\mathcal{E}_W(\mathbb{T})$-Kalkül. Also folgt die Behauptung wie in (3.2.4) aus der Kommutativität des folgenden Diagrammes:

$$\begin{array}{ccccc}
X & \xrightarrow{j_l} & j_l X & \xrightarrow{\subset} & C^l_{W_l}(\mathbb{T},X)/\overline{(z-T)\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)}^l \\
{\scriptstyle T}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle (M_z/F)|_{j_l X}} & & \downarrow {\scriptstyle M_z/F} \\
X & \xrightarrow{j_l} & j_l X & \xrightarrow{\subset} & C^l_{W_l}(\mathbb{T},X)/\overline{(z-T)\mathcal{E}_W(\mathbb{T},X)}^l.
\end{array}$$

(c) $\Rightarrow$ (b). Dies ist dieselbe Dualitätstheorie wie in Lemma (3.2.5). Man beachte, daß wegen Korollar (4.1.8) der Beweis wortwörtlich gültig bleibt, wenn man nur jeweils $\mathcal{E}(\mathbb{T}, X)$ gegen $\mathcal{E}_W(\mathbb{T}, X)$ und γ gegen $\tilde{\gamma}$ austauscht.

(a) $\Rightarrow$ (c). Auch hier erhält man durch Dualisieren der Ähnlichkeitsbeziehung von T zu einer Einschränkung eines $\mathcal{E}_W(\mathbb{T})$-skalaren Operators $\hat{T} : \hat{X} \to \hat{X}$ auf einen invarianten Unterraum, daß T' Quotient des ebenfalls $\mathcal{E}_W(\mathbb{T})$-skalaren Operators $\hat{T}'$ ist. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \hat{X}' \arrow[d, "i'"'] & \hat{X}' \arrow[l, "\hat{T}'"'] \arrow[d, "i'"'] \\ X' & X' \arrow[l, "T'"'] \end{tikzcd}$$

ist kommutativ, wobei i' surjektiv ist. Mit dem $\mathcal{E}_W(\mathbb{T})$-Kalkül Φ für $\hat{T}'$ und einem Urbild $\hat{x}'$ von x' unter i' definiert man ganz analog wie in (3.2.6)

$$u(\varphi) := i'\Phi(\varphi)\hat{x}' \quad (\varphi \in \mathcal{E}_W(\mathbb{T})).$$

Wie dort begründet man, daß dies das in (c) gesuchte Funktional ist. $\diamondsuit$

4.3 Eine hinreichende Bedingung für $(\beta)_{\mathcal{E}}$ modulo S

Auch für subskalare Operatoren gibt es eine Theorie, die Ausnahmemengen berücksichtigt. Bevor wir ihre Ergebnisse festhalten, ein Wort zur Notation: für $U \subset \mathbb{C}$ offen bezeichnen wir mit $\mathcal{E}(U, X)$ den Raum aller C^∞-Funktionen auf U mit Werten in X (X Banachraum), versehen mit der Topologie der kompakt gleichmäßigen Konvergenz aller Ableitungen. (Diese sind wie im ersten Kapitel über Normkonvergenz des Differenzenquotienten definiert.)

Analog zur Vorgehensweise im $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Fall definiert man ($U \subset \mathbb{C}$ offen)

$$\mathcal{E}_U(\mathbb{C}, X) := \{f \in \mathcal{E}(\mathbb{C}, X) : f|_U \in \mathcal{O}(U, X)\},$$

welches mit der Relativtopologie von $\mathcal{E}(\mathbb{C}, X)$ zum Fréchetraum wird. Man schreibt auch hier kurz $\mathcal{E}_U(\mathbb{C})$ im Falle $X = \mathbb{C}$.

Die zentrale Aussage lautet nun (zum Beweis vgl. [4]):

4.3.1 Satz. *Es sei X ein Banachraum, $T \in L(X)$ und $S \subset \sigma(T)$ kompakt. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

(a) $\mathcal{E}(\mathbb{C} - S, X) \xrightarrow{z-T} \mathcal{E}(\mathbb{C} - S, X)$ *ist topologischer Monomorphismus*

(b) $\mathcal{E}_U(\mathbb{C}, X) \xrightarrow{z-T} \mathcal{E}_U(\mathbb{C}, X)$ *ist topologischer Monomorphismus für jede Wahl von $U \supset S$, U offen und beschränkt*

(c) *Für jedes $U \supset S$ offen und beschränkt existiert eine Erweiterung von T mit $\mathcal{E}_U(\mathbb{C})$-Kalkül.*

Ist eine dieser Bedingungen erfüllt, sagen wir: T hat die Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ modulo S.

Bedingung (c) dient uns dabei als Ausgangspunkt: die dort geforderten Erweiterungen werden wir unter den Voraussetzungen des nachfolgenden Satzes konstruieren können, wie das Korollar im Anschluß zeigt.

4.3.2 Satz. *Es sei ein $T \in L(X)$ gegeben mit folgenden Eigenschaften:*

(a) $\sigma(T) \subset \overline{\mathbb{D}}$

(b) Es existiere eine analytische Linksresolvente für T, d.h.

$$\exists L \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, L(X)) \ \ mit \ L(z)(z-T) = id \quad (\forall z \in \mathbb{D}),$$

und eine kompakte Ausnahmemenge $\emptyset \neq S \subsetneq \mathbb{T}$, außerhalb der die Linksresolvente lokal langsam wächst:

$$\forall U \supset S, U \text{ offen } \exists c_U > 0, k_U \in \mathbb{N}_0 : \quad \|L(z)\| \leq \frac{c_U}{|1-|z||^{k_U}} \quad (\forall z \in \mathbb{D} - U).$$

(c) Die Resolvente erfülle eine Wachstumsbedingung der Form:

$$\exists c > 0, k \in \mathbb{N}_0 : \quad \|R(z,T)\| \leq \frac{c}{|1-|z||^k} \quad (\forall z \in \mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}}).$$

Dann gilt für jede offene Obermenge W der Ausnahmemenge S:

$$\forall x' \in X' \quad \exists u \in L(\mathcal{E}_W(\mathbb{T}), X') \text{ mit } u(z\varphi) = T'u(\varphi) \quad (\forall \varphi \in \mathcal{E}_W(\mathbb{T})) \text{ und } u(1) = x'.$$

Beweis. Zunächst bemerken wir: es genügt, in der Aussage des Satzes W segmentiert anzunehmen. Ist W nicht segmentiert, so wähle man einfach ein segmentiertes $\tilde{W}$ mit $W \supset \tilde{W} \supset S$ nach Lemma (4.1.2). Ist nämlich für $\tilde{W}$ eine Distribution u gefunden, so ist die Hintereinanderausführung

$$\mathcal{E}_W(\mathbb{T}) \xrightarrow{i} \mathcal{E}_{\tilde{W}}(\mathbb{T}) \xrightarrow{u} X'$$

eine geeignete Distribution in $L(\mathcal{E}_W(\mathbb{T}), X')$, wobei i die stetige Einschränkungsabbildung bezeichnet. Wir können also ohne Einschränkung W als segmentiert voraussetzen.

Durch punktweises Dualisieren der Linksresolvente in (b) erhalten wir: $L' \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, L(X'))$ mit $(z - T')L'(z) = id$, also eine Rechtsresolvente für T', die wegen $\|L'(z)\| = \|L(z)\|$ dasselbe Wachstumsverhalten zeigt wie L.

Wir wollen nun u über die Randverteilungsformel definieren, unter Benutzung der Rechtsresolvente L'. Dazu fixieren wir eine Folge $(r_m)_m$ in $(0,1)$ mit $r_m \uparrow 1$, ein beliebiges $x' \in X'$ und ein segmentiertes $W \supset S$. Dann setzen wir als Definition an:

$$u(\varphi) := \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \varphi(\zeta) \left(R(\frac{\zeta}{r_m}, T') - L'(r_m\zeta) \right) d\zeta x' \quad (\varphi \in \mathcal{E}_W(\mathbb{T})).$$

Wir werden nun zeigen, daß dieses u wohldefiniert ist und die geforderten Eigenschaften hat. Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten, und zwar werden wir uns zur Existenz des Grenzwertes wieder auf die Existenz der Grenzwerte der einzelnen Integrale zurückziehen. Wir führen unsere Überlegungen mit einem beliebig gewählten $\varphi \in \mathcal{E}_W(\mathbb{T})$ durch:

1. Schritt: Existenz von $\lim_{m\to\infty} \int_{\partial\mathbb{D}} \varphi(\zeta)L'(r_m\zeta)d\zeta$.

Wir haben für W eine Zerlegung der Form $W := \dot{\bigcup}_{i=1}^n Q_\varepsilon(\alpha_i, \beta_i)$. Da $W \supset S$ und $S \subsetneq \mathbb{T}$ kompakt, finden wir sicher ein $\delta > 0$, so daß für $W_0 := \dot{\bigcup}_{i=1}^n Q_{\frac{\varepsilon}{2}}(\alpha_i + \delta, \beta_i - \delta) \subset W$ immer noch gilt: $W_0 \supset S$.

Wir setzen $V := \mathbb{D} - \overline{W_0}$, was nach Lemma (4.1.3) ein Sterngebiet mit Sternmittelpunkt 0 ist. Nach den Vorbemerkungen über das Wachstumsverhalten von L' existieren dann Konstanten $c > 0$ und $k \in \mathbb{N}_0$, so daß

$$\|L'(z)\| \leq \frac{c}{|1-|z||^k} \quad (z \in V).$$

Mit Lemma (3.4.5) finden wir (wähle dort $E := L(X')$) eine Folge von Stammfunktionen $(f_n)_{n\geq 0}$ in $\mathcal{O}(\mathbb{D}, L(X'))$ zu $f_0 := L'$ mit $f_{k+2} \in A(V, L(X'))$. Passend dazu gibt es nach Lemma (3.4.4) Polynome p_j^{k+2}, so daß

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \varphi(\zeta)L'(r_m\zeta)d\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r_m^{k+2}} \left(\sum_{j=1}^{k+2} p_j^{k+2}(e^{-it}) \frac{d^j}{dt^j}\varphi(e^{it}) \right) f_{k+2}(r_m e^{it})dt.$$

Von entscheidender Bedeutung ist nun die Tatsache, daß sich der Ausdruck in Klammern darstellen läßt als $g(e^{it})$ mit einer Funktion $g \in \mathcal{E}_W(\mathbb{T})$. Da $\mathcal{E}_W(\mathbb{T})$ eine Algebra ist und offenbar mit jedem Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ die Funktion $\mathbb{T} \cup W \to \mathbb{C}; z \mapsto p(\frac{1}{z})$ in $\mathcal{E}_W(\mathbb{T})$ liegt, ist dafür die folgende Bedingung hinreichend:

Zu jedem $\varphi \in \mathcal{E}_W(\mathbb{T})$ existiert ein $g \in \mathcal{E}_W(\mathbb{T})$ mit $\frac{d}{dt}\varphi(e^{it}) = g(e^{it})$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Eine solche Funktion g zu finden, macht jedoch keine großen Schwierigkeiten, denn für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $e^{iz} \in W$ gilt offenbar die Beziehung $\frac{d}{dz}\varphi(e^{iz}) = \varphi'(e^{iz})ie^{iz}$, was es ermöglicht, g wie folgt zu definieren:

$$g : \mathbb{T} \cup W \to \mathbb{C}; z \mapsto \begin{cases} \frac{d}{dt}\varphi(e^{it}) & (z = e^{it} \in \mathbb{T}) \\ \varphi'(z)iz & (z \in W). \end{cases}$$

(Man prüft leicht nach, daß g den geforderten Bedingungen gerecht wird.)

Haben wir nun ein $g \in \mathcal{E}_W(\mathbb{T})$ gewählt, welches

$$g(e^{it}) = \sum_{j=1}^{k+2} p_j^{k+2}(e^{-it}) \frac{d^j}{dt^j}\varphi(e^{it}) \quad (t \in \mathbb{R})$$

erfüllt (und dies ist nach der Zwischenbemerkung möglich), so gilt offenbar:

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \varphi(\zeta)L'(r_m\zeta)d\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r_m^{k+2}} g(e^{it}) f_{k+2}(r_m e^{it})dt.$$

Unter Ausnutzung der Holomorphie von g auf W werden wir nun das letzte Integral ein wenig umschreiben. Dazu zerlegen wir zunächst das Integrationsintervall $[0, 2\pi]$ geeignet, und zwar im wesentlichen in Argumente von Zahlen aus "gewissen Abschnitten" der "unkritischen Menge" $\mathbb{T} \cap (W - \overline{W_0})$ und den Rest. Zur Erinnerung: $W := \dot\bigcup_{i=1}^n Q_\varepsilon(\alpha_i, \beta_i)$ und $W_0 := \dot\bigcup_{i=1}^n Q_{\frac{\delta}{2}}(\alpha_i + \delta, \beta_i - \delta)$, so daß es sich anbietet, Intervalle der Form $(\alpha_i + \frac{\delta}{2}, \beta_i - \frac{\delta}{2})$ zu betrachten. Also ist:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathbb{D}} \varphi(\zeta)L'(r_m\zeta)d\zeta &= \frac{1}{r_m^{k+2}} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\alpha_\nu+\frac{\delta}{2}}^{\beta_\nu-\frac{\delta}{2}} g(e^{it}) f_{k+2}(r_m e^{it})dt \\ &+ \frac{1}{r_m^{k+2}} \sum_{\nu=1}^{n-1} \int_{\beta_\nu-\frac{\delta}{2}}^{\alpha_{\nu+1}+\frac{\delta}{2}} g(e^{it}) f_{k+2}(r_m e^{it})dt \\ &+ \frac{1}{r_m^{k+2}} \int_{\beta_n-\frac{\delta}{2}}^{\alpha_1+\frac{\delta}{2}+2\pi} g(e^{it}) f_{k+2}(r_m e^{it})dt. \end{aligned}$$

Nun bemerken wir: mit Ausnahme der Integrale in der ersten Summe bewegen wir uns beim Grenzübergang $m \to \infty$ mit dem Argument von f_{k+2} nur im Bereich $V = \mathbb{D} - \overline{W_0}$. Aber f_{k+2} stammt aus $A(V, L(X'))$ und hat somit eine stetige Fortsetzung auf $\overline{V}$. Der Integrand der betreffenden Integrale ist somit stetig bis zum Rand, weshalb der Grenzübergang unter dem Integral durchgeführt werden kann.

Probleme bereiten die Integrale in der ersten Summe. Hier überstreicht man bei der Integration gerade den Winkelbereich, der W_0 schneidet, d.h. für den kein langsames Wachstum des Integranden gegen den Torus vorliegt. Allerdings gilt für $\nu \in \{1, \cdots, n\}$ beliebig:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_\nu+\frac{\delta}{2}}^{\beta_\nu-\frac{\delta}{2}} g(e^{it}) f_{k+2}(r_m e^{it})dt &= \int_{\alpha_\nu+\frac{\delta}{2}}^{\beta_\nu-\frac{\delta}{2}} \frac{g(e^{it})}{ie^{it}} f_{k+2}(r_m e^{it}) ie^{it}dt \\ &= \int_{\gamma_\nu} \frac{g}{iz}(\zeta) f_{k+2}(r_m\zeta)d\zeta, \end{aligned}$$

d.h. jedes kritische Integral läßt sich in ein Kurvenintegral umschreiben, wobei offenbar

$$\gamma_\nu : [\alpha_\nu + \frac{\delta}{2}, \beta_\nu - \frac{\delta}{2}] \to \mathbb{T}; t \mapsto e^{it}$$

die zugehörige Parametrisierung ist. Entscheidend ist nun das folgende: weil $\frac{1}{iz}$ holomorph ist auf $\mathbb{C} - \{0\}$, ist sicher $\frac{g}{iz}$ auf W holomorph; und $f_{k+2}(r_m \cdot)$ ist holomorph auf der offenen Umgebung $\frac{1}{r_m}\mathbb{D}$ von $\mathbb{T}$. Damit liegt sp $\gamma_i \Subset W \cap \frac{1}{r_m}\mathbb{D}$, dem Holomorphiegebiet des Integranden; nach dem Cauchyschen Integralsatz wissen wir: Der Integrationsweg kann darin bei festem Anfangs- und Endpunkt beliebig abgeändert werden, ohne daß sich der Wert des Integrals ändert. Wir können nun einen Integrationsweg wählen, der ganz außerhalb der kritischen Menge W_0 verläuft, auf dem wir also das Wachstum des Integranden kontrollieren können. Wir setzen den Integrationsweg aus drei Stücken zusammen, zwei radialen Strahlen und einem Kreissegment mit Radius $(1 - \frac{2}{3}\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
\omega_\nu^1 &: [0, \frac{2}{3}\varepsilon] \to \mathbb{C}; t \mapsto e^{i(\alpha_\nu + \frac{\delta}{2})}(1-t) \\
\omega_\nu^2 &: [\alpha_\nu + \frac{\delta}{2}, \beta_\nu - \frac{\delta}{2}] \to \mathbb{C}; t \mapsto (1 - \frac{2}{3}\varepsilon)e^{it} \\
\omega_\nu^3 &: [0, \frac{2}{3}\varepsilon] \to \mathbb{C}; t \mapsto e^{i(\beta_\nu - \frac{\delta}{2})}(1 - \frac{2}{3}\varepsilon + t).
\end{aligned}$$

Man setze $\omega_\nu := \omega_\nu^1 \oplus \omega_\nu^2 \oplus \omega_\nu^3$ und überzeuge sich mit einem Blick auf die Zerlegungen $W := \dot\bigcup_{i=1}^n Q_\varepsilon(\alpha_i, \beta_i)$ und $W_0 := \dot\bigcup_{i=1}^n Q_{\frac{\varepsilon}{2}}(\alpha_i + \delta, \beta_i - \delta)$, daß sp $\omega_\nu \Subset W - \overline{W_0}$. Mit dem Cauchyschen Integralsatz wissen wir also:

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha_\nu + \frac{\delta}{2}}^{\beta_\nu - \frac{\delta}{2}} (\cdots) dt &= \int_{\gamma_\nu} \frac{g}{iz}(\zeta) f_{k+2}(r_m \zeta) d\zeta \\
&= \int_{\omega_\nu} \frac{g}{iz}(\zeta) f_{k+2}(r_m \zeta) d\zeta,
\end{aligned}$$

was wir auswerten können als

$$\begin{aligned}
\cdots &= \int_{\alpha_\nu + \frac{\delta}{2}}^{\beta_\nu - \frac{\delta}{2}} \frac{g}{iz}\Big((1 - \frac{2}{3}\varepsilon)e^{it}\Big) f_{k+2}\Big(r_m(1 - \frac{2}{3}\varepsilon)e^{it}\Big) i(1 - \frac{2}{3}\varepsilon)e^{it} dt \\
&- \int_0^{\frac{2}{3}\varepsilon} \frac{g}{iz}\Big(e^{i(\alpha_\nu + \frac{\delta}{2})}(1-t)\Big) f_{k+2}\Big(r_m e^{i(\alpha_\nu + \frac{\delta}{2})}(1-t)\Big) dt \\
&+ \int_0^{\frac{2}{3}\varepsilon} \frac{g}{iz}\Big(e^{i(\beta_\nu - \frac{\delta}{2})}(1 - \frac{2}{3}\varepsilon + t)\Big) f_{k+2}\Big(r_m e^{i(\beta_\nu - \frac{\delta}{2})}(1 - \frac{2}{3}\varepsilon + t)\Big) dt.
\end{aligned}$$

Sieht man sich nun die Integranden an, so stellt man fest: beim Grenzübergang $m \to \infty$ (d.h. $r_m \uparrow 1$) bewegt man sich im Argument von f_{k+2} nur in der Menge $\mathbb{D} - \overline{W_0} = V$, aber f_{k+2} ist stetig fortsetzbar auf $\overline{V}$. Damit kann mit dem Stetigkeitslemma für Parameterintegrale der Grenzübergang unter dem Integral vollzogen werden, und die Existenz des Grenzwertes ist gesichert.

2. Schritt: Existenz von $\lim_{m\to\infty} \int_{\partial\mathbb{D}} \varphi(\zeta) R(\frac{\zeta}{r_m}, T') d\zeta$.

Wir bilden die Funktion $\tilde{R}(z) := R(\frac{1}{z}, T')$ für $z \in \mathbb{D} - \{0\}$, von der wir nach Lemma (3.3.3) wissen: sie wird durch $\tilde{R}(0) := 0$ holomorph fortgesetzt. Die Wachstumsbedingungen von $R(\cdot, T)$ vererben sich dann auf $\tilde{R}$, denn

$$\|\tilde{R}(z)\| = \|R(\frac{1}{z}, T')\| \le \frac{c}{|1 - |\frac{1}{z}||^k} = c\frac{|z|^k}{||z| - 1|^k} \le \frac{c}{|1 - |z||^k} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Wieder liefert Lemma (3.4.5) eine Folge von Stammfunktionen $(f_n)_{n\geq 0}$ zu $f_0 := \tilde{R}$ in $\mathcal{O}(\mathbb{D}, L(X'))$ mit $f_{k+2} \in A(\mathbb{D}, L(X'))$, und nach Lemma (3.4.4) existieren passende Polynome q_j^{k+2}, so daß

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \varphi(\zeta) R(\frac{\zeta}{r_m}, T') d\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r_m^{k+2}} \left(\sum_{j=0}^{k+2} q_j^{k+2}(e^{it}) \frac{d^j}{dt^j} \varphi(e^{it}) \right) f_{k+2}(r_m e^{-it}) dt.$$

Wegen der Stetigkeit von f_{k+2} auf $\overline{\mathbb{D}}$ kann man den Grenzübergang $m \to \infty$ unter dem Integral durchführen.

3. Schritt: Die algebraischen Eigenschaften von u folgen ähnlich wie in Abschnitt (3.4.2); alles was man dort benötigt, sind die Gleichungen: $(z-T')L'(z) = id$ und $(z-T')R(z,T') = id$, sowie die im 1. und 2. Schritt nachgewiesene Existenz des Grenzwertes der einzelnen Integrale. Dann überlegt man sich wie oben zunächst:

$$\begin{aligned}
& \lim_{m\to\infty} \int_{\partial\mathbb{D}} \zeta\varphi(\zeta) \left(R(\frac{\zeta}{r_m}, T') - L'(r_m\zeta) \right) d\zeta \\
= \; & \lim_{m\to\infty} \int_{\partial\mathbb{D}} \varphi(\zeta) \left(\frac{\zeta}{r_m} R(\frac{\zeta}{r_m}, T') - \zeta r_m L'(\zeta r_m) \right) d\zeta \\
= \; & \lim_{m\to\infty} \int_{\partial\mathbb{D}} \varphi(\zeta) \left(T' R(\frac{\zeta}{r_m}, T') - T' L'(\zeta r_m) \right) d\zeta \\
= \; & \lim_{m\to\infty} T' \int_{\partial\mathbb{D}} \varphi(\zeta) \left(R(\frac{\zeta}{r_m}, T') - L'(r_m\zeta) \right) d\zeta.
\end{aligned}$$

Da der Limes also sogar in der Norm-Topologie von $L(X')$ existiert, bleibt die Beziehung richtig, wenn man jeweils an der Stelle x' auswertet. Wir haben somit gezeigt: $u(z\varphi) = T'u(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathcal{E}_W(\mathbb{T})$.

Zur Ermittlung von $u(1)$ gehen wir ebenfalls vor wie in (3.4.2):

$$\begin{aligned}
u(1) &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \left(R(\frac{\zeta}{r_m}, T') - L'(r_m\zeta) \right) d\zeta x' \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi i} r_m \int_{\partial D_{\frac{1}{r_m}}(0)} R(\zeta, T') d\zeta x' \\
&= x',
\end{aligned}$$

wobei wir den holomorphen Kalkül für T' benutzt haben, sowie die Tatsache, daß $L'(r_m \cdot)$ auf einer offenen Obermenge von $\overline{\mathbb{D}}$ holomorph ist.

4. Schritt: Die Stetigkeit von u.
Hierzu vgl. (3.4.3): Für $m \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$u_m(\varphi) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \varphi(\zeta) \left(R(\frac{\zeta}{r_m}, T') - L'(r_m\zeta) \right) d\zeta x' \quad (\varphi \in \mathcal{E}_W(\mathbb{T})).$$

Für festes m ist $0 < r_m < 1$ und der Integrand auf dem Integrationsweg stetig. Das Integral existiert also als Wert in $L(X')$, womit u_m als Abbildung $\mathcal{E}_W(\mathbb{T}) \to X'$ wohldefiniert ist (und dann offenbar linear). Die Stetigkeit des Integranden erlaubt weiter folgende Abschätzung:

$$\|u_m(\varphi)\| \leq \left(\|R(\frac{\cdot}{r_m}, T') - L'(r_m \cdot)\|_0 \right) \|\varphi\|_0 \|x'\|,$$

wobei $\|\cdot\|_0$ wie üblich die Supremums-Norm auf dem Torus bezeichnet. Der Term in der Klammer ist aus Stetigkeitsgründen für jedes feste m endlich und damit u_m sogar eine stetige lineare Abbildung. Da nach dem ersten und zweiten Schritt die Existenz des punktweisen Limes der $u_m(\varphi)$ gesichert ist, liefert der Satz von Banach-Steinhaus, daß auch die Abbildung u (als punktweiser Limes der u_m) stetig linear ist. $\diamondsuit$

Als Bemerkung ist noch festzuhalten: Der Beweis läßt sich wohl auch auf den Fall $S = \emptyset$ ausdehnen, falls man in der Voraussetzung die Forderung

$$\forall U \supset S$$

ersetzt durch

$$\forall U \subset \mathbb{C} \text{ offen mit } U \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$$

und in der Behauptung des Satzes die entsprechenden Änderungen für W statt U durchführt. Im Beweis ist dann nur zu beachten, daß zu einer jeden solchen offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$, $U \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$ eine segmentierte Teilmenge existiert. Das ist jedoch mit (4.1.2)(b) leicht einzusehen, wenn man dort $S := \{z_0\}$ setzt, wobei $z_0 \in U \cap \mathbb{T}$ beliebig gewählt werden kann.

Auch der Fall $S = \mathbb{T}$ ließe sich behandeln. Um den Integrationsweg geeignet abzuändern, läßt sich dabei der Cauchysche Integralsatz für Kreisringe verwenden; eine Zerlegung in Segmente wie im vorgeführten Beweis ist nicht notwendig.

4.3.3 Korollar. *Unter den Bedingungen von Satz (4.3.2) gilt:*

(a) Für jede offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ mit $S \subset U$ gilt: T ist $\mathcal{E}_U(\mathbb{T})$-subskalar.

(b) T hat die Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ modulo S.

Beweis.

(a) Wähle ein segmentiertes W zwischen S und U (nach Lemma (4.1.2)). Nach dem vorigen Satz ist dann die Bedingung (c) von Satz (4.2.4) erfüllt, der die Existenz einer Erweiterung mit $\mathcal{E}_W(\mathbb{T})$-Kalkül sicherstellt (bis auf Ähnlichkeit). Für $U \supset W$ liefert dies jedoch wegen der stetigen, durch die Einschränkung gegebenen Einbettung $\mathcal{E}_U(\mathbb{T}) \to \mathcal{E}_W(\mathbb{T})$ auch einen $\mathcal{E}_U(\mathbb{T})$-Kalkül.

(b) Hierzu genügt es nach Becker [4], Satz 1.27, zu zeigen: Für jede beschränkte offene Obermenge von S existiert eine Erweiterung mit einem Funktionalkalkül über $\mathcal{E}_U(\mathbb{C})$. Allerdings haben wir so etwas in (a) konstruiert, denn die Einbettung

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_U(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{E}_U(\mathbb{T}) \\ f & \mapsto & f|_{\mathbb{T}\cup U} \end{array}$$

ist stetig, weil normreduzierend. Hintereinanderschalten der Einbettung und des $\mathcal{E}_U(\mathbb{T})$-Kalküls aus (a) liefern den gewünschten $\mathcal{E}_U(\mathbb{C})$-Kalkül für die Erweiterung. $\diamondsuit$

Ein Anwendungsbeispiel hierfür findet sich in Abschnitt 5.3. In diesem Zusammenhang ist insbesondere Lemma (5.3.10) zu beachten, wonach sich die Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ modulo einer Ausnahmemenge bei Translationen und Streckungen des Operators vererbt.

5 Beispiele

Wir werden uns im vorliegenden Kapitel davon überzeugen, daß die bisher entwickelte Theorie stark genug ist, um interessante Beispiele behandeln zu können. Zunächst werden wir mit Hilfe des Folgenkriteriums aus Satz (3.1.5) bzw. der daraus abgeleiteten Bedingung (3.1.6) eine ganze Klasse von Operatoren auf Hilberträumen als $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar identifizieren. Im Anschluß daran werden wir untersuchen, wie sich $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalare gewichtete Hilbertraum-Shifts durch Wachstumsbedingungen an ihre Gewichtsfolge charakterisieren lassen. Als letzte Anwendung wird schließlich - aufbauend auf der Arbeit von T.L. Miller, V.G. Miller und R.C. Smith [14] - unter Einsatz des Kriteriums aus Korollar (4.3.3) die Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ modulo $\{0\}$ für den Cesàro-Operator C_p auf dem Hardyraum H^p $(1 < p < \infty)$ nachgewiesen.

5.1 2-Hyperexpansionen

5.1.1 In den letzten Jahren wurde eine Klasse von stetig linearen Operatoren auf Hilberträumen betrachtet, die für $k \in \mathbb{N}$ der folgenden Bedingung genügen:

$$\sum_{0 \leq p \leq n} (-1)^p \binom{n}{p} T^{*p} T^p \leq 0 \quad (\text{für } 1 \leq n \leq k).$$

Ist H ein Hilbertraum, so nennen wir in Anlehnung an Athavale [3] einen Operator $T \in L(H)$, der dieser Bedingung genügt, eine k-Hyperexpansion. Man sieht sofort, daß jede k-Hyperexpansion auch eine l-Hyperexpansion ist für $1 \leq l \leq k$. Wird hingegen die Bedingung für ein n mit $=$ statt $\leq$ erfüllt, so spricht man von einer n-Isometrie (vgl. [1]). Für uns sind in erster Linie die 2-Hyperexpansionen interessant. Diese werden - wie man durch einfaches Einsetzen in die obige Formel verifiziert - charakterisiert durch die beiden Bedingungen

$$\begin{aligned} id - T^*T &\leq 0 \\ id - 2T^*T + T^{*2}T^2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Ausgehend von der zweiten Bedingung werden wir - in Anlehnung an den Artikel von Richter [15] - zeigen, daß 2-Hyperexpansionen gewissen Wachstumsbedingungen genügen. Nebenbei stellt man fest (vgl. Teil (b) des nachfolgenden Lemmas), daß die erste Bedingung in der zweiten schon enthalten ist:

5.1.2 Lemma. (Richter, [15]) *Ist $T \in L(H)$ mit $id - 2T^*T + T^{*2}T^2 \leq 0$, so gilt:*

(a) $\exists c \geq 1: \quad \|x\| \leq \|T^n x\| \leq c(1+n)^{\frac{1}{2}} \|x\| \quad (x \in H)$

(b) T ist 2-Hyperexpansion.

Beweis. (vgl. [15], Lemma 1)

(a) Wir fixieren ein beliebiges $x \in H$ und betrachten die Folge

$$\alpha_k := \|T^{k+1}x\|^2 - \|T^k x\|^2 \quad (k \geq 1).$$

Aus $id - 2T^*T + T^{*2}T^2 \leq 0$ folgt sofort: $\|x\|^2 - 2\|Tx\|^2 + \|T^2x\|^2 \leq 0$, also

$$\|T^2x\|^2 - \|Tx\|^2 \leq \|Tx\|^2 - \|x\|^2.$$

Daran liest man ab: $\alpha_1 \leq \|Tx\|^2 - \|x\|^2$. Außerdem erhält man mit $T^k x$ statt x in obiger Ungleichung:

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} &= \|T^2(T^k x)\|^2 - \|T(T^k x)\|^2 \\ &\leq \|T(T^k x)\|^2 - \|T^k x\|^2 \\ &= \alpha_k. \end{aligned}$$

Damit ist die Folge $(\alpha_k)_k$ monoton fallend, also sind sicher alle Glieder kleiner oder gleich α_1. Man hat somit für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\alpha_k = \|T^{k+1}x\|^2 - \|T^k x\|^2 \leq \|Tx\|^2 - \|x\|^2.$$

Die Terme auf der linken Seite lassen sich zu einer Teleskop-Summe zusammenfassen, denn für $n \in \mathbb{N}$ gilt offenbar:

$$\|T^n x\|^2 - \|x\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (\|T^{k+1}x\|^2 - \|T^k x\|^2) \leq n(\|Tx\|^2 - \|x\|^2),$$

d.h.

$$\|T^n x\|^2 \leq \|x\|^2 + n(\|Tx\|^2 - \|x\|^2) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Daraus folgen beide Ungleichungen aus (a), denn die rechte Seite ist $\cdots \leq \|x\|^2 + n(\|T\|^2 - 1)\|x\|^2$, was mit $\tilde{c} := \max\{1, \|T\|^2 - 1\}$ dominiert wird durch $\tilde{c}(1+n)\|x\|^2$. Dies liefert die rechte Ungleichung in (a). Zur linken beachte man, daß insbesondere $\|T^n x\|^2 \geq 0$ und somit

$$0 \leq \|x\|^2 + n(\|Tx\|^2 - \|x\|^2) \quad (n \in \mathbb{N})$$

gilt, weshalb: $0 \leq n\|Tx\|^2 + (1-n)\|x\|^2$ und schließlich

$$\|Tx\|^2 \geq \frac{n-1}{n}\|x\|^2 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Da die Ungleichung im Limes für $n \to \infty$ erhalten bleibt, gilt die linke Abschätzung in (a).

(b) Was T noch fehlt zur 2-Hyperexpansion, ist die Bedingung $id - T^*T \leq 0$. Das heißt jedoch nichts anderes als $\|x\|^2 \leq \|Tx\|^2$ für alle $x \in H$, was wir gerade für Teil (a) nachgerechnet haben. $\diamondsuit$

Das Wachstumsverhalten aus Teil (a) erkennen wir als Spezialfall der Voraussetzungen des folgenden Satzes:

5.1.3 Satz. *Sei X ein Banachraum, $T \in L(X)$. Existieren Konstanten $c > 0$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit*

$$\|x\| \leq \|T^n x\| \leq c(1+n)^k \|x\| \quad (x \in X, n \in \mathbb{N}_0),$$

so ist T ein $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalarer Operator.

Beweis. Die rechte Ungleichung aus der Voraussatzung entspricht dem ersten Teil des Kriteriums aus Korollar (3.1.6)(b).

Von der linken Ungleichung benutzen wir die Aussage für $n = 1$, welche besagt: $\|Tx\| \geq \|x\|$, was impliziert: T ist injektiv mit abgeschlossenem Bild. Damit können wir eine Liftungseigenschaft für T' nachrechnen: Ist nämlich $x' \in X'$, so finden wir zu x' ein Urbild y' mit $\|y'\| \leq \|x'\|$. Dies sieht man wie folgt ein: gesucht ist ein stetig lineares Funktional y' auf X mit $< x, T'y' > \; = \; < x, x' >$ $(x \in X)$ oder äquivalent: $< Tx, y' > \; = \; < x, x' >$ für alle x. Doch da T injektiv mit abgeschlossenem Bild ist, können wir ein solches y' auf dem Bild von T einfach durch diese Formel definieren, d.h. wir setzen $y'(Tx) := x'(x)$ für alle $x \in X$. Die Injektivität von T sichert, daß y' auf ran T wohldefiniert ist. Nach dem Satz von Hahn-Banach kann y' normerhaltend auf ganz X fortgesetzt werden. Die Fortsetzung ist dann nach Konstruktion ein Urbild zu x' unter T'. Ihre Norm ist nicht größer als die von y' auf ran T. Für die gilt aber: $\sup_{\|Tx\|=1} |y'(Tx)| \leq \|x'\|$, da $\|x\| \leq \|Tx\| = 1$. Damit ist die behauptete Liftungseigenschaft nachgewiesen.

Ist nun $x' \in X'$ beliebig, so nutzen wir die gerade gewonnene Liftungseigenschaft, um eine zu x' passende Folge im Sinne von (3.1.6)(b) zu finden; und zwar wählen wir induktiv ausgehend von $x'_0 = x'$ das Folgenglied x'_n als ein Urbild von x'_{n-1} unter T' mit $\|x'_n\| \leq \|x'_{n-1}\|$. Damit gilt schließlich:

$$T'x'_n = x'_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

und da das Wachstum mit $\|x'_n\| \leq \|x'_0\| = \|x'\|$ langsamer ist als das von $(1+n)^k$ und damit das der positiven Potenzen von T, ist das Kriterium aus Korollar (3.1.6) erfüllt. $\diamondsuit$

Aus dem Satz und dem vorhergehenden Lemma ergibt sich sofort:

5.1.4 Korollar. *2-Hyperexpansionen sind $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar.*

$\diamondsuit$

Als Abschlußbemerkung halten wir fest: 2-Isometrien sind wegen Lemma (5.1.2) automatisch 2-Hyperexpansionen und damit $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar. Dies erklärt die Ähnlichkeit im Spektralverhalten (vgl. Satz (2.1.6) dieser Arbeit und Lemma 1.21 in [1]).

5.2 Gewichtete unilaterale Hilbertraum-Shifts

Für die Dauer dieses Abschnittes bezeichne nun H einen separablen Hilbertraum, $(e_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ eine Hilbertraum-Orthonormalbasis von H und $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{C} - \{0\}$. Unter diesen Voraussetzungen verstehen wir unter dem Shift-Operator zur Gewichtsfolge $(\alpha_\nu)_\nu$ die Abbildung

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu e_\nu \xmapsto{T} \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu \alpha_\nu e_{\nu+1}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß T stetig linear ist und damit die eindeutig bestimmte stetig lineare Abbildung darstellt, die

$$Te_\nu = \alpha_\nu e_{\nu+1} \quad (\nu \in \mathbb{N}_0)$$

auf Basisvektoren bewirkt. Unser Ziel ist eine Charakterisierung der $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-skalaren Shift-Operatoren über das Wachstumsverhalten der Koeffizientenfolge.

Für die Umsetzung dieses Vorhabens ist die folgende Feststellung entscheidend (vgl. Shields [17]):

5.2.1 Lemma. *Ist T der Shift zur Gewichtsfolge $(\alpha_\nu)_\nu$, so gilt:*

$$\|T^n\| = \sup_{\nu\in\mathbb{N}_0} |\alpha_\nu \cdots \alpha_{\nu+n-1}| \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

(Wie üblich wird dabei der Wert des leeren Produktes als 1 angenommen).

Beweis. Aus der Wirkungsweise von T auf Basisvektoren erhält man induktiv

$$T^n e_\nu = \alpha_\nu \cdots \alpha_{\nu+n-1} e_{\nu+n} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Da aber alle e_ν auf 1 normiert sind, können wir damit eine Abschätzung für die Operatornorm nach unten angeben:

$$\begin{aligned} \|T^n\| &\geq \sup_{\nu\in\mathbb{N}_0} \|T^n e_\nu\| \\ &= \sup_{\nu\in\mathbb{N}_0} \|\alpha_\nu \cdots \alpha_{\nu+n-1} e_{\nu+n}\| \\ &= \sup_{\nu\in\mathbb{N}_0} |\alpha_\nu \cdots \alpha_{\nu+n-1}|. \end{aligned}$$

Um eine entsprechende Abschätzung nach oben zu erhalten, fixieren wir ein $x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu e_\nu \in H$ beliebig und berechnen damit:

$$\begin{aligned}
\|T^n x\|^2 &= \|T^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu e_\nu\|^2 \\
&= \|\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu T^n e_\nu\|^2 \\
&= \|\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu \alpha_\nu \cdots \alpha_{\nu+n-1} e_{\nu+n}\|^2 \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} |\lambda_\nu|^2 |\alpha_\nu \cdots \alpha_{\nu+n-1}|^2 \\
&\leq \sup_{\nu\in\mathbb{N}_0} |\alpha_\nu \cdots \alpha_{\nu+n-1}|^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} |\lambda_\nu|^2 \\
&= \big(\sup_{\nu\in\mathbb{N}_0} |\alpha_\nu \cdots \alpha_{\nu+n-1}|\big)^2 \|x\|^2,
\end{aligned}$$

woraus unmittelbar die Normabschätzung nach oben folgt. $\diamondsuit$

Das Lemma gibt uns eine Charakterisierung des Potenzwachstums von T in Termen der Gewichtsfolge an die Hand. Die Kontrolle der positiven Potenzen ist jedoch - wie wir aus (3.1.6) wissen - ein fester Bestandteil der Charakterisierung $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalarer Operatoren. Bleibt noch eine Folge wie in Teil (b) des oben zitierten Kriteriums zu konstruieren. Es ist nicht überraschend, daß man eine solche bei Shifts explizit angeben kann; man kann sogar unter allen Folgen mit der gewünschten Eigenschaft eine in gewissem Sinne minimale Folge konkret angeben, wie das nächste Lemma zeigt:

5.2.2 Lemma. *Die zu T gehörige Gewichtsfolge $(\alpha_\nu)_\nu$ genüge der folgenden Bedingung:*

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \inf_{\nu\in\mathbb{N}_0} |\alpha_\nu \cdots \alpha_{\nu+n-1}| > 0.$$

Ist dann $x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu e_\nu \in H$, so wird durch

$$x_n := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda_\nu}{\overline{\alpha}_\nu \cdots \overline{\alpha}_{\nu+n-1}} e_{n+\nu} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

eine Folge in H erklärt, für die gilt:

(a) $x_0 = x$ *und* $T^* x_{n+1} = x_n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$

(b) *Die Folge $(x_n)_n$ ist minimal in folgendem Sinne: Ist $(y_n)_n$ eine weitere Folge, die der Bedingung aus (a) genügt, so gilt: $\|x_n\| \leq \|y_n\|$ $(\forall n \in \mathbb{N}_0)$.*

Beweis. Wegen $\inf_{\nu\in\mathbb{N}_0} |\alpha_\nu \cdots \alpha_{\nu+n-1}| > 0 \Leftrightarrow \sup_{\nu\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{|\alpha_\nu \cdots \alpha_{\nu+n-1}|} < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\frac{\lambda_\nu}{\overline{\alpha}_\nu \cdots \overline{\alpha}_{\nu+n-1}}|^2 \leq \left(\sup_{\nu\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{|\alpha_\nu \cdots \alpha_{\nu+n-1}|}\right)^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} |\lambda_\nu|^2$$

und die Summe auf der rechten Seite ist gleich $\|x\|^2$, also endlich. Damit ist die zu $x_n := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda_\nu}{\overline{\alpha}_\nu \cdots \overline{\alpha}_{\nu+n-1}} e_{n+\nu}$ gehörige Koeffizientenfolge aus ℓ^2, und somit x_n selbst als Element von H wohldefiniert, $(x_n)_n$ also eine Folge in H - wie behauptet. Nun zu deren Eigenschaften:

(a) Trivial: $x = x_0$; und zur Wirkungsweise des Adjungierten T^* überlegen wir uns:

$$< T^*e_\nu, e_\mu >=< e_\nu, Te_\mu >=< e_\nu, \alpha_\mu e_{\mu+1} >= \overline{\alpha}_\mu \delta_{\mu+1,\nu}.$$

Somit:

$$\begin{aligned} T^*e_\nu &= \sum_{\mu=0}^{\infty} < T^*e_\nu, e_\mu > e_\mu \\ &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \overline{\alpha}_\mu \delta_{\mu+1,\nu} e_\mu \\ &= \begin{cases} 0 & (\nu = 0) \\ \overline{\alpha}_{\nu-1} e_{\nu-1} & (\nu \neq 0). \end{cases} \end{aligned}$$

Dies bedeutet für die Anwendung von T^* auf ein Folgenglied x_{n+1} ($n \in \mathbb{N}_0$):

$$\begin{aligned} T^*x_{n+1} &= T^* \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda_\nu}{\overline{\alpha}_\nu \cdots \overline{\alpha}_{\nu+n}} e_{n+1+\nu} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda_\nu}{\overline{\alpha}_\nu \cdots \overline{\alpha}_{\nu+n}} T^* e_{n+1+\nu} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda_\nu}{\overline{\alpha}_\nu \cdots \overline{\alpha}_{\nu+n}} \overline{\alpha}_{\nu+n} e_{n+\nu} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda_\nu}{\overline{\alpha}_\nu \cdots \overline{\alpha}_{\nu+n-1}} e_{n+\nu} \\ &= x_n, \end{aligned}$$

und Teil (a) ist bewiesen.

(b) Die Wirkung von T^* auf beliebige Elemente der Orthonormalbasis $(e_\nu)_\nu$ (in (a) berechnet) offenbart: $\ker T^* = \text{lin}\,\{e_0\}$, und wegen $T^*e_\nu = \overline{\alpha}_{\nu-1}e_{\nu-1}$ gilt: $\ker(T^*)^n = \text{lin}\,\{e_0, \cdots, e_{n-1}\}$. Damit steht nach Konstruktion das Folgenglied $x_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda_\nu}{\overline{\alpha}_\nu \cdots \overline{\alpha}_{\nu+n-1}} e_{n+\nu} \in \overline{\text{lin}}\{e_\nu : \nu \geq n\}$ senkrecht auf $\ker(T^*)^n$.

Ist nun $(y_n)_n$ eine weitere Folge wie in (a), so gilt für diese wie für $(x_n)_n$: $(T^*)^n y_n = x = (T^*)^n x_n$ ($n \in \mathbb{N}_0$). Damit ist aber $y_n - x_n \in \ker(T^*)^n$ und mit $x_n \perp \ker(T^*)^n$ und dem Satz von Pythagoras erhalten wir:

$$\|y_n\|^2 = \|y_n - x_n + x_n\|^2 = \|y_n - x_n\|^2 + \|x_n\|^2 \geq \|x_n\|^2,$$

unabhängig von $n \in \mathbb{N}$. $\diamondsuit$

Mit Hilfe dieser Vorüberlegungen gewinnt man folgendes Resultat:

5.2.3 Satz. *Es bezeichne T den Shift zur Gewichtsfolge $(\alpha_\nu)_\nu$. Dann gilt: T ist genau dann $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar, wenn es Konstanten $a, b > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$ gibt, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt werden:*

(a) $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \quad \sup_{\nu \in \mathbb{N}_0} |\alpha_\nu \cdots \alpha_{\nu+n-1}| \leq b(1+n)^k$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \quad \inf_{\nu \in \mathbb{N}_0} |\alpha_\nu \cdots \alpha_{\nu+n-1}| \geq \frac{1}{a(1+n)^k}$.

Beweis. Wir beweisen zuerst, daß die beiden Bedingungen hinreichend sind: Mit Lemma (5.2.1) und der Bedingung (a) folgt, daß die positiven Potenzen von T

langsam wachsen, wie im Kriterium (3.1.6) für $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalare Operatoren gefordert. Bleibt noch die Folgenbedingung aus (3.1.6) nachzuprüfen, die wir für den Hilbertraum-Adjungierten T^* nachweisen wollen. (Dies genügt, da die Identifizierung $H \simeq H'$ isometrisch ist, d.h. Wachstumsbedingungen invariant bleiben beim Übergang zum Banachraum-Dual.) Hier hilft uns jedoch das vorige Lemma (5.2.2) weiter: Fixieren wir nämlich ein beliebiges $x \in H$, so liefert ebendieses Lemma (beachte: nach (b) ist dessen Voraussetzung erfüllt) eine Folge $(x_n)_n$ in H mit $x_0 = x$ und $T^* x_{n+1} = x_n$. Ist diese konkret gegeben wie im Lemma, so finden wir mit (b) für die Norm folgende Abschätzung (beachte: $x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu e_\nu$ mit 2-summierbarer Koeffizientenfolge):

$$\begin{aligned}
\left(\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{\|x_n\|}{(1+n)^k} \right)^2 &= \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{\|x_n\|^2}{(1+n)^{2k}} \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{(1+n)^{2k}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{|\lambda_\nu|^2}{|\overline{\alpha}_\nu \cdots \overline{\alpha}_{\nu+n-1}|^2} \\
&\le \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{(1+n)^{2k}} \left(\sup_{\nu\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{|\alpha_\nu \cdots \alpha_{\nu+n-1}|^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} |\lambda_\nu|^2 \right) \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{(1+n)^{2k}} \left(\frac{1}{\inf_{\nu\in\mathbb{N}_0} |\alpha_\nu \cdots \alpha_{\nu+n-1}|^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} |\lambda_\nu|^2 \right) \\
&\le \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{(1+n)^{2k}} a^2 (1+n)^{2k} \|x\|^2 \\
&\le a^2 \|x\|^2 \\
&< \infty .
\end{aligned}$$

Insgesamt sind damit die Voraussetzungen von (3.1.6) erfüllt und T folglich $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar.

Nun zur Notwendigkeit der Bedingungen (a) und (b): Ist T $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar, so existieren gemäß (2.1.5) Konstanten $a, b > 0$ und $k \in \mathbb{N}_0$, so daß

$$\frac{a\|x\|}{(1+n)^k} \le \|T^n x\| \le b(1+n)^k \|x\| \quad (x \in X, n \in \mathbb{N}_0).$$

Die rechte Ungleichung liefert mit Lemma (5.2.1) unmittelbar die Bedingung (a). Die linke wenden wir auf die Basisvektoren $x = e_\nu$ an ($\nu \in \mathbb{N}_0$) und erhalten:

$$\frac{a}{(1+n)^k} = \frac{a\|e_\nu\|}{(1+n)^k} \le \|T^n e_\nu\| = \|\alpha_\nu \cdots \alpha_{\nu+n-1} e_{\nu+n}\| = |\alpha_\nu \cdots \alpha_{\nu+n-1}|$$

für alle $n, \nu \in \mathbb{N}_0$. Daraus erhält man bei festem, aber beliebigem $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\inf_{\nu\in\mathbb{N}_0} |\alpha_\nu \cdots \alpha_{\nu+n-1}| \ge \frac{a}{(1+n)^k};$$

das ist die Bedingung (b), denn mit a ist $\frac{1}{a} > 0$. ◊

Der Beweis zeigt: Jeder Hilbertraum-Shift, der eine Wachstumsbedingung der Form

$$\frac{a\|x\|}{(1+n)^k} \le \|T^n x\| \le b(1+n)^k \|x\| \quad (x \in X, n \in \mathbb{N}_0)$$

erfüllt, ist $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar. Umgekehrt erfüllt jeder $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalare Operator eine solche Bedingung. Eine interessante Frage (die wir hier allerdings nicht beantworten werden) ist die nach weiteren Klassen von Operatoren, für die eine solche Wachstumsbedingung hinreichend (und damit auch äquivalent) ist zur Eigenschaft $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-subskalar.

5.3 Der Cesàro-Operator auf H^p

Um dem Cesàro-Operator die Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ modulo $\{0\}$ nachzuweisen, müssen wir auf Konstruktionen und Beweistechniken aus [14] zurückgreifen, die ihrerseits auf Resultate von Siskakis aufbauen. Daher dienen die nächsten Abschnitte in erster Linie dazu, eine saubere Schnittstelle zwischen dem erstgenannten Artikel und der vorliegenden Arbeit zu schaffen, zumindest, was Notation und Bezeichnungen angeht. Wir werden dabei nur das beweisen, was wirklich über bereits bekannte Ergebnisse hinausgeht.

Wir beginnen mit einer Erinnerung an die Definition der Hardyräume über der Einheitskreisscheibe. Exakte Beweise der hier angegebenen Resultate findet man etwa in dem Buch von Duren [7].

5.3.1 (Die H^p-Räume) Für $1 \leq p < \infty$ bezeichnen wir mit H^p den Hardyraum über $\mathbb{D}$:

$$H^p = \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) : \|f\|_{H^p} < \infty\},$$

wobei $\|\cdot\|_{H^p}$ definiert ist durch

$$\|f\|_{H^p} := \left(\sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dies liefert bekanntermaßen eine Norm auf H^p, die diesen zu einem Banachraum macht ($1 \leq p < \infty$).

Es läßt sich zeigen, daß eine Funktion $f \in H^p$ Randwerte in $L^p(\mathbb{T})$ hat, d.h. der Grenzwert $\lim_{r\uparrow 1} f(re^{it})$ existiert für fast alle $t \in [0, 2\pi]$ und liefert eine L^p-Funktion auf $\mathbb{T}$, die wir im folgenden mit f^* bezeichnen wollen.

Man erhält auf diese Weise sogar eine isometrische Identifizierung von H^p mit dem abgeschlossenen Unterraum

$$H^p_- := \{f \in L^p(\mathbb{T}) : \hat{f}(n) = 0 \text{ für alle } n < 0\} \subset L^p(\mathbb{T}),$$

vermöge der Zuordnung $i_p : H^p \to H^p_-; f \mapsto f^*$. Dieser Unterraum H^p_- ist insbesondere komplementiert in $L^p(\mathbb{T})$, denn die Abbildung

$$\rho_p : L^p(\mathbb{T}) \to H^p_-; (\rho_p f)(e^{it}) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int}$$

definiert eine stetig lineare Projektion. Wenn nun $k : L^p(\mathbb{T}) \to L^p(\mathbb{T}); f \mapsto \overline{f}$ die komplexe Konjugation bezeichnet (k ist konjugiert-linearer isometrischer Isomorphismus), so ergibt sich für den Kern der Komposition $(\rho_p \circ k)$:

$$\ker(\rho_p \circ k) = \{f \in L^p(\mathbb{T}) : \hat{f}(n) = 0 \text{ für alle } n \leq 0\} =: H^p_0.$$

Damit induziert $\rho_p \circ k$ eine wohldefinierte, konjugiert-lineare und bijektive Abbildung

$$\varphi_p : L^p(\mathbb{T})/H^p_0 \to H^p_-; [g] \mapsto (\rho_p \circ k)(g).$$

Diese ist stetig mit Norm $\|\varphi_p\| \leq \|\rho_p\|$, und nach dem Prinzip der offenen Abbildung somit ein topologischer Isomorphismus.

Dessen Umkehrabbildung werden wir benutzen, um eine sesquilineare Dualität zwischen H^p und $H^{p'}$ für $1 < p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ zu definieren.

Für $1 \leq p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ hat man einen isometrischen Isomorphismus zwischen $L^{p'}(\mathbb{T})/H^{p'}_0$ und $(H^p)'$, vermittelt durch die Abbildung

$$u_p : L^{p'}(\mathbb{T})/H^{p'}_0 \to (H^p)'; (u_p([g]))(f) = \int_{\mathbb{T}} f^* g d\lambda,$$

wobei λ das normalisierte Lebesgue-Maß auf $\mathbb{T}$ bezeichnet (vgl. [7], Theorem 7.3).

Ist nun $1 < p < \infty$ und p' konjugiert, so können wir die Komposition

$$\omega_p : H^{p'} \to (H^p)'; f \mapsto (u_p \circ \varphi_{p'}^{-1} \circ i_{p'})(f)$$

bilden, welche dann zum konjugiert-linearen topologischen Isomorphismus wird. Die Abbildung ω_p vermittelt eine sesquilineare Dualität zwischen H^p und $H^{p'}$, definiert durch die Formel

$$< f, g >:= (\omega_p(g))(f) = \int_{\mathbb{T}} f^* \overline{g^*} d\lambda \quad (f \in H^p, g \in H^{p'}).$$

Den bezüglich dieser sesquilinearen Dualität gebildeten Adjungierten eines Operators $T \in L(H^p)$ wollen wir mit T^* bezeichnen; er macht definitionsgemäß das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} (H^p)' & \xrightarrow{T'} & (H^p)' \\ {\scriptstyle \omega_p}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \omega_p} \\ H^{p'} & \xrightarrow{T^*} & H^{p'}. \end{array}$$

Damit ist die Adjungiertenbildung

$$L(H^p) \ni T \mapsto T^* \in L(H^{p'})$$

konjugiert-linear, und es gelten die Normabschätzungen $\|T'\| \leq c_p^* \|T^*\|$ und $\|T^*\| \leq c_p^* \|T'\|$ mit $c_p^* := \|\omega_p\| \|\omega_p^{-1}\| \geq 1$.

5.3.2 (Der Cesàro-Operator auf H^p) Ist $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ eine H^p-Funktion, so definiert man

$$(C_p f)(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right) z^n,$$

d.h. man bildet die Funktion, deren Taylorkoeffizienten gerade die Cesàro-Mittel der Koeffizienten von f darstellen. Es läßt sich zeigen, daß C_p den Raum H_p in sich abbildet, mehr noch: $C_p : H^p \to H^p$ ist sogar ein beschränkter linearer Operator für $1 \leq p < \infty$. Diese keineswegs offensichtliche Tatsache wurde von Siskakis unter Verwendung von Operatorhalbgruppen nachgewiesen, die uns später noch begegnen werden.

Für $1 < p < \infty$ bezeichnen wir wie in der Arbeit von T.L. Miller, V.G. Miller und R.C. Smith [14], an der wir von nun an die gesamte Notation ausrichten wollen, den bezüglich der $H^p - H^{p'}$-Dualität zu C_p adjungierten Operator mit $A_{p'}$ (vgl. [14], S.6). In der zitierten Arbeit wird die ganze Argumentation nicht für C_p, sondern $T_p := 1 - C_p$ durchgeführt. Wir schließen uns dieser Betrachtungsweise an und halten sogleich fest:

5.3.3 Satz. (A. Siskakis, T.L. Miller, V.G. Miller, R.C. Smith) *Falls $1 < p < \infty$, gelten folgende Aussagen:*

(a) $\sigma(T_p) = \overline{D}_{\frac{p}{2}}(1 - \frac{p}{2})$

(b) $\exists k > 0 : \quad \|(\lambda - T_p)^{-1}\| \leq \frac{k}{dist(\lambda, \partial\sigma(T_p))} \quad (\lambda \in \rho(T_p))$

(c) Es gibt eine Linksresolvente für T_p, die langsam wächst, d.h. es existiert eine Funktion $L : int\ \sigma(T_p) \to L(H^p)$ mit

$$L(\lambda)(\lambda - T_p) = id \quad (\lambda \in int\ \sigma(T_p) = D_{\frac{p}{2}}(1 - \frac{p}{2}))$$

und es existieren Konstanten $a, b > 0$, so daß auf int $\sigma(T_p)$ gilt:

$$\|L(\lambda)\| \le \frac{a\exp(b|1-\lambda|^{-2})}{dist(\lambda, \partial\sigma(T_p))}.$$

Der Beweis von (a) ergibt sich (wie in [14] (S.6) erwähnt) unmittelbar aus der Tatsache, daß (und hierzu siehe Siskakis, Thm. 2, S.163) $\sigma(A_{p'}) = D_{\frac{p}{2}}(\frac{p}{2})$. Also $\sigma(T_p) = 1 - \sigma(C_p) = 1 - \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(A_{p'})\}$.

Die Aussage in (b) entspricht exakt der Nummer (iv) von Theorem 2.1 in [14] (S.7).

Die Linksresolvente aus Teil (c) taucht in der Formulierung dieses Theorems nicht mehr auf, ist jedoch das zentrale Hilfsmittel im zugehörigen Beweis ([14], S.10ff), wo auch die Wachstumsbedingung sichergestellt wird. Genauere Aussagen darüber zu machen, ist erst sinnvoll, wenn wir uns mit ein paar Fakten über die von Siskakis eingeführten Operatorhalbgruppen vertraut gemacht haben. Dann werden wir auch für (c) eine sichere Referenz angeben können.

5.3.4 (Mit T_p verwandte Operatorhalbgruppen) Wir beginnen mit der Definition zweier einfacher Zuordnungsvorschriften; für $t \ge 0$ und $z \in \overline{\mathbb{D}}$ setzen wir:

$$\begin{aligned} k_t(z) &:= (e^{-t} - 1)z + 1 \\ \psi_t(z) &:= e^{-t}z(k_t(z))^{-1}. \end{aligned}$$

Die Definition von ψ_t ist sinnvoll, da $k_t(\overline{\mathbb{D}}) = \overline{D}_{(1-e^{-t})}(1) \subset \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0\}$. Damit lassen sich über den Hauptzweig des Logarithmus sogar alle Potenzen $(e^t k_t(z))^\alpha = \exp(\alpha \mathrm{Log}\, e^t k_t(z))$ bilden für $\alpha \in \mathbb{C}, z \in \overline{\mathbb{D}}$. Da weiter für beliebige $\alpha \in \mathbb{C}$ die Abbildung $\mathbb{D} \ni z \mapsto (e^t k_t(z))^\alpha \in \mathbb{C}$ aus der Diskalgebra $A(\mathbb{D})$ stammt, ist der zugehörige Multiplikationsoperator auf H^p:

$$M_{(e^t k_t)^\alpha} : H^p \to H^p; \quad f \longmapsto (z \mapsto (e^t k_t(z))^\alpha f(z))$$

wohldefiniert. Weiter wissen wir aus [14]: der Operator

$$Q_t : H^p \to H^p; \quad f \mapsto f \circ \psi_t$$

ist für jedes $t \ge 0$ eine Kontraktion auf H^p (das folgt sofort aus dem Schwarzschen Lemma der Funktionentheorie und Littlewood's subordination theorem (siehe Duren [7]), wenn man beachtet, daß $\psi_t \mathbb{D} \subset \mathbb{D}$ und $\psi(0) = 0$). Wir können nun die von Siskakis eingeführte Operatorhalbgruppe angeben: Schreiben wir ($\alpha \in \mathbb{C}$)

$$\Gamma_{t,\alpha} := M_{(e^t k_t)^{-\alpha}} \circ Q_t,$$

so gilt : $(\Gamma_{t,\alpha})_{t \ge 0}$ ist eine stark stetige Halbgruppe von Operatoren auf H^p (für $1 \le p < \infty$) (vgl. Lemma 2.4 (i) in [14]). Ihren infinitesimalen Erzeuger wollen wir mit $\Lambda_{p,\alpha}$ bezeichnen, ihren Typ mit $\omega_{p,\alpha}$.

Ist $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\, z > \omega_{p,\alpha}$, so wird durch

$$R(z, \Lambda_{p,\alpha})x = \int_0^\infty e^{-zt}\Gamma_{t,\alpha}(x)dt \quad (x \in H^p)$$

ein stetig linearer Operator auf H^p erklärt, der $(z - \Lambda_{p,\alpha})$ invertiert (vgl. Dunford-Schwartz [6], Theorem VIII.1.11).

Dem Beweis von Theorem 2.1 in [14] (S.10) entnimmt man, daß für $\lambda \in \mathrm{int}\, \sigma(T_p)$ gilt:

$$\mathrm{Re}\, \frac{\lambda}{1-\lambda} > \omega_{p',1-\frac{\lambda}{1-\lambda}},$$

wobei p' zu p konjugiert ist. Damit ist

$$R\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}, \Lambda_{p',1-\frac{\lambda}{1-\lambda}}\right)$$

stetig linearer Operator auf $H^{p'}$.

5.3.5 (Die Linksresolvente für T_p) Das letzte noch fehlende Konstruktionselement für die Linksresolvente ist der (stetig lineare) Operator der Multiplikation mit dem Argument auf $H^{p'}$, welchen wir der Notation von [14] folgend hier nicht mit M_z sondern mit S bezeichnen wollen.

Für $\lambda \in \operatorname{int} \sigma(T_p)$ bilde man nun den (stetig linearen!) Operator:

$$U_\lambda := \frac{1}{\lambda - 1}\left(id - \frac{\lambda}{1-\lambda} S \circ R\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}, \Lambda_{p',1-\frac{\lambda}{1-\lambda}}\right)\right),$$

$U_\lambda \in L(H^{p'})$. Damit kann nun endlich die Formel für die besagte Linksresolvente von T_p angegeben werden: (vgl. [14], S.10)

$$L : \operatorname{int} \sigma(T_p) \to L(H^p); \quad \lambda \mapsto (U_{\overline{\lambda}})^*(id - A_p S^*).$$

Auch die in (5.3.3) angegebene Wachstumsbedingung kann man der Arbeit [14] entnehmen: Dort findet man auf S.11 die Abschätzung für

$$\begin{aligned}
\|L(\lambda)\| &\leq c_p^* \|L^*(\lambda)\| \\
&= c_p^* \|(id - SC_{p'})U_{\overline{\lambda}}\| \\
&\leq c_p^* \frac{a \exp(b|1-\overline{\lambda}|^{-2})}{dist(\overline{\lambda}, \partial\sigma(T_p))} \\
&= \frac{a c_p^* \exp(b|1-\lambda|^{-2})}{dist(\lambda, \partial\sigma(T_p))}.
\end{aligned}$$

(Für die letzte Gleichheit beachte man, daß der entsprechende Ausdruck invariant ist unter Austausch von $\overline{\lambda}$ gegen λ.) Dies ist die gewünschte Normabschätzung.

Nach dieser Zusammenstellung bereits bekannter Resultate wollen wir uns nun überzeugen, daß die oben konstruierte Linksresolvente sogar analytisch ist. Der Kern des Beweises wird darin bestehen, die Analytizität des Resolventenintegrals $\int_0^\infty e^{-\alpha t}\Gamma_{t,\alpha}(x)dt$ nachzurechnen.

Dabei werden wir auf das folgende wohlbekannte Resultat über Holomorphie von Parameterintegralen zurückgreifen:

5.3.6 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum (μ positives oder komplexes Maß auf M), X ein Banachraum. Die Abbildung $f : \Omega \times M \to X$ erfülle:*

(a) $f(\omega, \cdot) \in L^1(\mu, X)$ für alle $\omega \in \Omega$

(b) $f(\cdot, t)$ ist holomorph auf Ω für alle $t \in M$

(c) $\forall \omega \in \Omega \quad \exists U \subset \Omega$ offen, $\omega \in U$ und eine Funktion $g \in L^1(\mu)$ mit:

$$\sup_{z \in U} \|f(z,t)\| \leq g(t).$$

Dann ist die durch

$$F : \Omega \to X; \quad \omega \mapsto \int_M f(\omega, t) d\mu(t)$$

definierte Funktion holomorph auf Ω. (Die Ableitung kann durch Differentiation unter dem Integral gewonnen werden.)

Beweis. (Der Satz ist Standard, daher zum Beweis nur Stichworte: Mit Hilfe von Partialbruchzerlegung und Cauchyschem Integralsatz nutzt man die Bedingung (c), um für die Norm des Differenzenquotienten eine integrierbare Majorante hinzuschreiben. Das übliche dominated convergence - Argument liefert dann die Behauptung. Im Falle eines komplexen Maßes μ bediene man sich dazu der Jordan-Zerlegung.) $\Diamond$

Wir kommen nun zum zentralen Resultat dieses Abschnittes:

5.3.7 Satz. *Die oben definierte Linksresolvente $L : \mathrm{int}\, \sigma(T_p) \to L(H^p); \lambda \mapsto (U_{\overline{\lambda}})^*(id - A_p S^*)$ ist analytisch.*

Beweis. Im folgenden bezeichne $D := \mathrm{int}\ \sigma(T_p) = D_{\frac{p}{2}}(1-\frac{p}{2})$. Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten:

1. Schritt: Wir analysieren den Aufbau der Linksresolvente und isolieren den auf Holomorphie zu untersuchenden Term.

Da $L(\lambda) = (U_{\overline{\lambda}})^* \circ (id - A_p S^*)$ genügt es offenbar zu zeigen: $(U_{\overline{\lambda}})^*$ hängt analytisch von $\lambda \in D$ ab. Da aber $(\cdots)^*$ konjugiert-linear und stetig ist, gilt wegen

$$\frac{(U_{\overline{\lambda}_n})^* - (U_{\overline{\lambda}})^*}{\lambda_n - \lambda} = \left(\frac{U_{\overline{\lambda}_n} - U_{\overline{\lambda}}}{\overline{\lambda}_n - \overline{\lambda}} \right)^* \qquad (\lambda_n \neq \lambda),$$

daß $(U_{\overline{\lambda}})^*$ jedenfalls holomorph von $\lambda \in D$ abhängt, wenn U_λ holomorph von λ abhängt für $\overline{\lambda} \in D$. Da D allerdings symmetrisch zur reellen Achse liegt, also invariant ist unter komplexer Konjugation, haben wir die Aussage des Satzes reduziert auf den Beweis der Analytizität der Abbildung:

$$D \to L(H^{p'}); \quad \lambda \mapsto U_\lambda = \frac{1}{\lambda - 1}\left(id - \frac{\lambda}{1-\lambda} S \circ R\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}, \Lambda_{p',1-\frac{\lambda}{1-\lambda}} \right) \right).$$

Da jedoch $1 \notin D = D_{\frac{p}{2}}(1-\frac{p}{2})$, erkennt man sofort: es genügt zu überprüfen, daß

$$D \to L(H^{p'}); \quad \lambda \mapsto R\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}, \Lambda_{p',1-\frac{\lambda}{1-\lambda}} \right)$$

analytisch ist. Da die Abbildung $\eta : D \to \mathbb{C}; \lambda \mapsto \frac{\lambda}{1-\lambda}$ injektiv und holomorph ist, ist sie eine biholomorphe Abbildung auf ihr Bild $W := \eta(D)$, welches dann wie D ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist. In einem weiteren Schritt können wir uns also wegen der Kettenregel darauf beschränken, daß

$$W \to L(H^{p'}); \alpha \mapsto R(\alpha, \Lambda_{p',1-\alpha})$$

analytisch ist. Hierzu sei angemerkt, daß in [14] (S.10) gezeigt wird: $W = \eta(\sigma(T_p)) \subset \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ z > \omega_{p',1-z}\}$. Wie in (5.3.4) bereits erwähnt, liefert dann die Theorie der stark stetigen Operatorhalbgruppen eine Integraldarstellung für $R(\alpha, \Lambda_{p',1-\alpha})$.

Nach einem wohlbekannten Resultat ist jedoch $R(\alpha, \Lambda_{p',1-\alpha})$ schon analytisch in α, wenn nur für jedes $x \in H^{p'}$ die Auswertung $R(\alpha, \Lambda_{p',1-\alpha})x$ analytisch von α abhängt.

Unter Ausnutzung besagter Integraldarstellung ist also zu prüfen, ob für beliebiges $x \in H^{p'}$ die Funktion

$$W \to H^{p'}; \alpha \mapsto R(\alpha, \Lambda_{p',1-\alpha})x = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \Gamma_{t,1-\alpha}(x) dt$$

analytisch ist. Damit ist die weitere Vorgehensweise klar: wir werden versuchen, den Vertauschungssatz (5.3.6) auf das Integral anzuwenden. Von der Gültigkeit der

Integrierbarkeitsvoraussetzung (a) haben wir uns gerade überzeugt. Bleibt also in einem zweiten und dritten Schritt die Holomorphie und lokale Majorisierbarkeit des Integranden im Parameter α nachzuweisen.

2. Schritt: Holomorphie des Integranden.
Wir zeigen etwas mehr als nötig: Für $t \in [0, \infty)$ ist die Abbildung

$$\mathbb{C} \to L(H^{p'}); \alpha \mapsto e^{-\alpha t}\Gamma_{t,1-\alpha} = e^{-\alpha t} M_{(e^t k_t)^{-(1-\alpha)}} \circ Q_t$$

holomorph. (Die Holomorphie bleibt natürlich erhalten, wenn man die betrachtete Operatorfunktion punktweise auf ein festes $x \in H^{p'}$ anwendet.)

Mit der Produktregel können wir uns dabei auf die Holomorphie der beteiligten Familie von Multiplikationsoperatoren zurückziehen. Genauer: wir werden zeigen, daß $M_{(e^t k_t)^\alpha}$ für festes $t \in [0, \infty)$ analytisch in α ist auf ganz $\mathbb{C}$.

Weil die Zuordnung $A(\mathbb{D}) \to L(H^p); f \mapsto M_f$ stetig linear ist, genügt es hierfür, bei festem $t \in [0, \infty)$ die Holomorphie der Abbildung

$$G_t : \mathbb{C} \to A(\mathbb{D}); (G_t(\alpha))(z) = (e^t k_t(z))^\alpha = \exp(\alpha \mathrm{Log}\ (e^t k_t(z))) \quad (z \in \mathbb{D})$$

zu bestätigen (zur Erinnerung: $k_t(\overline{\mathbb{D}})$ liegt ganz in der rechten Halbebene, so daß man für Log den Hauptzweig des komplexen Logarithmus wählen kann).

Dazu ist nur zu beachten, daß für festes $t \in [0, \infty)$ die durch

$$f_t : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}; z \mapsto \mathrm{Log}\ (e^t k_t(z))$$

definierte Funktion in $A(\mathbb{D})$ liegt. Damit läßt sich für $t \in [0, \infty)$ die Funktion G_t offenbar schreiben als

$$\mathbb{C} \to A(\mathbb{D}); \alpha \mapsto G_t(\alpha) = \exp(\alpha f_t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f_t)^n}{n!} \alpha^n,$$

woran man unmittelbar die Holomorphie von G_t abliest.

An dieser Stelle bietet es sich an, eine einfache Normabschätzung für G_t durchzuführen, die in den nächsten Beweisschritt entscheidend eingeht. Die obige Darstellung von G_t erlaubt offenbar folgenden Schluß:

$$\|G_t(\alpha)\|_\infty \leq \exp(|\alpha| \|f_t\|_\infty) \quad (t \in [0, \infty), \alpha \in \mathbb{C}),$$

so daß nun alles daran liegt, wie sich $f_t(z) = \mathrm{Log}\ (e^t k_t(z))$ verhält. Es gilt jedoch (vgl. (5.3.4)) die folgende Abschätzung: $e^{-t} \leq |k_t(z)| \leq 2 - e^{-t} \leq 2$, also $1 \leq |e^t k_t(z)| \leq 2e^t$. Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} |\mathrm{Log}\ (e^t k_t(z))| &\leq \log |e^t k_t(z)| + \frac{\pi}{2} \\ &\leq \log 2e^t + 2 \\ &\leq t + 3. \end{aligned}$$

Das liefert unmittelbar $\|f_t\|_\infty \leq t + 3$ bzw. eingesetzt in die Abschätzung für G_t schließlich:

$$\|G_t(\alpha)\|_\infty \leq e^{|\alpha|(t+3)} \quad (t \in [0, \infty), \alpha \in \mathbb{C}),$$

und wir können zum letzten Beweisschritt übergehen.

3. Schritt: Die Majorantenbedingung.
Nachdem wir im ersten und zweiten Schritt die Bedingungen (a) und (b) von Satz (5.3.6) für das Parameterintegral

$$W \to L(H^{p'}); \quad \alpha \mapsto \int_0^\infty e^{-\alpha t}\Gamma_{t,1-\alpha}(x) dt$$

nachgeprüft haben, müssen wir uns nun nur noch von der Gültigkeit der Bedingung (c) überzeugen. Da $x \in H^{p'}$ fest gewählt ist, genügt es, die Existenz einer lokal von α unabhängigen Majorante für $\|e^{-\alpha t}\Gamma_{t,1-\alpha}\|$ nachzuweisen. Fixieren wir dazu zunächst ein beliebiges $\alpha_0 \in W$, so können wir schreiben:

$$\begin{aligned} e^{-\alpha t}\Gamma_{t,1-\alpha} &= e^{-\alpha_0 t}e^{-(\alpha-\alpha_0)t}M_{(e^t k_t)^{-(1-\alpha)}} \circ Q_t \\ &= e^{-\alpha_0 t}e^{-(\alpha-\alpha_0)t}M_{(e^t k_t)^{-(1-\alpha)+(1-\alpha_0)}} \circ M_{(e^t k_t)^{-(1-\alpha_0)}} \circ Q_t \\ &= e^{-(\alpha-\alpha_0)t}M_{(e^t k_t)^{(\alpha-\alpha_0)}}e^{-\alpha_0 t}\Gamma_{t,1-\alpha_0}. \end{aligned}$$

Wir greifen nun aus dem zweiten Beweisschritt die Abschätzung für $G_t(\alpha) = (e^t k_t)^\alpha$ wieder auf und erhalten für die Norm des Multiplikationsoperators aus der letzten Zeile folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \|M_{(e^t k_t)^{(\alpha-\alpha_0)}}\| &= \|M_{G_t(\alpha-\alpha_0)}\| \\ &\leq \|G_t(\alpha-\alpha_0)\|_\infty \\ &\leq e^{|\alpha-\alpha_0|(t+3)} \\ &= e^{3|\alpha-\alpha_0|}e^{|\alpha-\alpha_0|t}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir insgesamt folgende Normabschätzung:

$$\begin{aligned} \|e^{-\alpha t}\Gamma_{t,1-\alpha}\| &= |e^{-(\alpha-\alpha_0)t}| \quad \|M_{(e^t k_t)^{(\alpha-\alpha_0)}}\| \quad |e^{-\alpha_0 t}|\|\Gamma_{t,1-\alpha_0}\| \\ &\leq e^{|\alpha_0-\alpha|t} \quad e^{3|\alpha-\alpha_0|}e^{|\alpha-\alpha_0|t} \quad \exp(-\mathrm{Re}\ \alpha_0 t)\|\Gamma_{t,1-\alpha_0}\| \\ &\leq e^{3|\alpha-\alpha_0|} \quad \exp\big(t(2|\alpha-\alpha_0| - \mathrm{Re}\ \alpha_0)\big) \quad \|\Gamma_{t,1-\alpha_0}\|. \end{aligned}$$

Bleibt noch die Halbgruppe in der Operatornorm abzuschätzen, doch wir wissen: $\omega_{p',1-\alpha_0} < \mathrm{Re}\ \alpha_0$ (denn $\alpha_0 \in W \subset \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ z > \omega_{p',1-z}\}$). Damit existiert eine reelle Zahl τ mit $\omega_{p',1-\alpha_0} < \tau < \mathrm{Re}\ \alpha_0$, und wir können ein $\varepsilon > 0$ so klein wählen, daß

$$\omega_{p',1-\alpha_0} < \tau + 2\varepsilon < \mathrm{Re}\ \alpha_0.$$

Ohne Einschränkung (nach eventueller Verkleinerung von ε) können wir annehmen, daß $D_\varepsilon(\alpha_0) \subset W$ (W offen). Weiter wissen wir aus der Theorie der Operatorhalbgruppen, daß (vgl. [6], Corollary VIII.1.5) wegen $\tau > \omega_{p',1-\alpha_0}$ eine Konstante M_τ existiert, so daß

$$\|\Gamma_{t,1-\alpha_0}\| \leq M_\tau e^{\tau t} \quad (t \geq 0).$$

Setzen wir dies in obige Abschätzung ein, so finden wir für alle $\alpha \in D_\varepsilon(\alpha_0)$ die Beziehung:

$$\begin{aligned} \|e^{-\alpha t}\Gamma_{t,1-\alpha}\| &\leq e^{3|\alpha-\alpha_0|} \quad \exp\big(t(2|\alpha-\alpha_0| - \mathrm{Re}\ \alpha_0)\big) \quad \|\Gamma_{t,1-\alpha_0}\| \\ &\leq e^{3\varepsilon}M_\tau \exp\big(t(2\varepsilon - \mathrm{Re}\ \alpha_0)\big)e^{\tau t}, \end{aligned}$$

also mit $C := e^{3\varepsilon}M_\tau$ gilt:

$$\|e^{-\alpha t}\Gamma_{t,1-\alpha}\| \leq C \exp\big(t(\tau + 2\varepsilon - \mathrm{Re}\ \alpha_0)\big) \quad (\alpha \in D_\varepsilon(\alpha_0)).$$

Die rechte Seite ist jedoch zweifellos in t über $[0,\infty)$ integrierbar, da der Faktor bei t im Argument der Exponentialfunktion negativ ist, denn nach Wahl von τ und ε gilt: $\tau + 2\varepsilon - \mathrm{Re}\ \alpha_0 < 0$. Damit ist die Majorantenbedingung nachgewiesen und (5.3.6) anwendbar, und der Satz ist bewiesen. $\diamondsuit$

Nun werden wir die analytische Linksresolvente benutzen, um mit dem Kriterium aus Satz (4.3.2) bzw. Korollar (4.3.3) die Eigenschaft $(\beta)_\mathcal{E}$ modulo $\{1\}$ für den Cesàro-Operator nachzuweisen. Zunächst einmal stellen wir jedoch fest: die Operatoren T_p und C_p sind der dort entwickelten Theorie zunächst nicht zugänglich, da ihr Spektrum nicht in der Einheitskreisscheibe enthalten ist. Hier schafft eine affine Transformation Abhilfe:

5.3.8 Satz. *Ist $1 < p < \infty$, so gelten für den Operator $S_p := \frac{2}{p}(T_p - (1 - \frac{p}{2})) \in L(H^p)$ die folgenden Aussagen:*

(a) $S_p = 1 - \frac{2}{p} C_p$

(b) $\sigma(S_p) = \overline{\mathbb{D}}$

(c) $\exists k > 0 : \quad \|R(\lambda, S_p)\| \leq \frac{k}{|1-|\lambda||} \quad (\lambda \notin \overline{\mathbb{D}})$

(d) $\exists L_p \in \mathcal{O}(\mathbb{D}, L(H^p))$ *mit* $L_p(\lambda)(\lambda - S_p) = id$ $(\lambda \in \mathbb{D})$ *und es existieren Konstanten* $\tilde{a}, \tilde{b} > 0$, *so daß*

$$\|L_p(\lambda)\| \leq \frac{\tilde{a}\exp(\tilde{b}|1-\lambda|^{-2})}{|1-|\lambda||} \quad (\lambda \in \mathbb{D}).$$

Beweis.

(a) Es ist $T_p = 1 - C_p$, daher $S_p = \frac{2}{p}(1 - C_p - (1 - \frac{p}{2})) = \frac{2}{p}(\frac{p}{2} - C_p) = 1 - \frac{2}{p} C_p$.

(b) Wir wissen: $\sigma(T_p) = \overline{D}_{\frac{p}{2}}(1 - \frac{p}{2})$, also nach dem spektralen Abbildungssatz $\sigma(S_p) = \frac{2}{p}(\sigma(T_p) - (1 - \frac{p}{2})) = \overline{\mathbb{D}}$.

(c) Wir übertragen die Wachstumsbedingung der Resolvente von T_p aus Satz (5.3.3). Für $\lambda \notin \overline{\mathbb{D}}$ gilt demnach:

$$\begin{aligned}
\|(\lambda - S_p)^{-1}\| &= \|(\lambda + \frac{2}{p} - 1 - \frac{2}{p} T_p)^{-1}\| \\
&= \frac{p}{2}\|(\frac{p}{2}(\lambda + \frac{2}{p} - 1) - T_p)^{-1}\| \\
&\leq \frac{p}{2} \quad \frac{k}{dist(1 - \frac{p}{2} + \frac{p}{2}\lambda, \partial D_{\frac{p}{2}}(1 - \frac{p}{2}))} \\
&= \frac{p}{2} \quad \frac{k}{|\frac{p}{2} - |\frac{p}{2}\lambda||} \\
&= \frac{k}{|1 - |\lambda||}.
\end{aligned}$$

(d) Wir setzen

$$L_p : \mathbb{D} \to L(H^p); \quad \lambda \mapsto \frac{p}{2} L\left(\frac{p}{2}\lambda + 1 - \frac{p}{2}\right),$$

wobei L die nach (5.3.7) analytische Linksresolvente für T_p auf int $\sigma(T_p) = D_{\frac{p}{2}}(1 - \frac{p}{2})$ bezeichnet. L_p ist daher auf $\mathbb{D}$ wohldefiniert und analytisch, und wir rechnen nach:

$$\begin{aligned}
L_p(\lambda)(\lambda - S_p) &= \frac{p}{2} L\left(\frac{p}{2}\lambda + 1 - \frac{p}{2}\right)(\lambda + \frac{2}{p} - 1 - \frac{2}{p} T_p) \\
&= \frac{p}{2} L\left(\frac{p}{2}\lambda + 1 - \frac{p}{2}\right) \frac{2}{p}(\frac{p}{2}\lambda + 1 - \frac{p}{2} - T_p) \\
&= id \quad (\lambda \in \mathbb{D}).
\end{aligned}$$

D.h. L_p ist Linksresolvente für S_p, über deren Wachstumsverhalten wir mit (5.3.3) ableiten:

$$\begin{aligned}
\|L_p(\lambda)\| &= \|\frac{p}{2} L\left(\frac{p}{2}\lambda + 1 - \frac{p}{2}\right)\| \\
&\leq \frac{p}{2} \cdot \frac{a\exp\left(b|1 - (\frac{p}{2}\lambda + 1 - \frac{p}{2})|^{-2}\right)}{dist\left(\frac{p}{2}\lambda + 1 - \frac{p}{2}, \partial D_{\frac{p}{2}}(1 - \frac{p}{2})\right)}.
\end{aligned}$$

Behandeln wir den Nenner wie in (c), so ist dies

$$\begin{aligned} \cdots &= \frac{p}{2} \frac{a \exp\left(b|\frac{p}{2}\lambda - \frac{p}{2}|^{-2}\right)}{\frac{p}{2}|1-|\lambda||} \\ &= \frac{a \exp\left(b(\frac{p}{2})^{-2}|1-\lambda|^{-2}\right)}{|1-|\lambda||} \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{D}$. Damit ist klar, wie die Konstanten $\tilde{a}$ und $\tilde{b}$ zu wählen sind. $\diamondsuit$

5.3.9 Korollar. *Für $1 < p < \infty$ hat der Operator $S_p = 1 - \frac{2}{p}C_p \in L(H^p)$ die Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ modulo $\{1\}$.*

Beweis. Die Aussage folgt aus Anwendung von Korollar (4.3.3) auf S_p. Dazu haben wir für S_p die Voraussetzungen von Satz (4.3.2) zu überprüfen, wobei wir die einpunktige Ausnahmemenge $S := \{1\}$ betrachten. Die Bedingungen (a) und (c) folgen dann unmittelbar aus dem letzten Satz. Um die Voraussetzung (b) zu bestätigen müssen wir das Wachstumsverhalten der analytischen Linksresolvente L_p aus (5.3.8)(d) richtig deuten. Ist $U \supset S$ offen, d.h. hier: ist U eine offene Umgebung der Zahl 1, so wähle man darin eine δ-Umgebung $D_\delta(1) \subset U$. Dann gilt für alle $\lambda \in \mathbb{D} - D_\delta(1)$: $|1-\lambda| \geq \delta$, also $|1-\lambda|^{-2} \leq \delta^{-2}$ und dann mit (5.3.8)(d):

$$\|L_p(\lambda)\| \leq \frac{\tilde{a}\exp(\tilde{b}\delta^{-2})}{|1-|\lambda||} \quad (\lambda \in \mathbb{D} - D_\delta(1)),$$

und damit sicher für $\lambda \in \mathbb{D} - U$. Somit ist auch die Voraussetzung (b) von Satz (4.3.2) erfüllt und das Korollar bewiesen. $\diamondsuit$

Wir werden uns nun noch davon überzeugen, daß sich die Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ modulo S von S_p auf C_p vererbt. Zunächst überlegen wir uns:

5.3.10 Lemma. *Sind $G, H \subset \mathbb{C}$ offen, $g : G \to H$ ein C^∞-Diffeomorphismus, so ist die Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(H,X) & \xrightarrow{j} & \mathcal{E}(G,X) \\ f & \mapsto & f \circ g \end{array}$$

ein topologischer Isomorphismus mit Inverser $f \mapsto f \circ g^{-1}$.

Beweis. Wohldefiniertheit und Linearität sind offensichtlich, ebenso klar ist die Gestalt der im Satz angegebenen Umkehrabbildung. Da die Topologie in den beiden beteiligten Funktionenräumen jeweils stärker ist als die der punktweisen Konvergenz, folgt die Stetigkeit von j unmittelbar aus dem Graphensatz. Da j^{-1} vom gleichen Typ ist wie j, zeigt dies auch die Stetigkeit von j^{-1}. $\diamondsuit$

5.3.11 Lemma. *Hat $T \in L(X)$ die Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ modulo S, so hat für $a, b \in \mathbb{C}$ $aT + b$ die Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ modulo $aS + b$.*

Beweis. Offenbar ist die Abbildung $g : \mathbb{C} - S \to \mathbb{C} - (aS + b); z \mapsto az + b$ ein C^∞-Diffeomorphismus mit Inverser $g^{-1}(z) = \frac{z-b}{a}$. Damit ist nach dem vorigen Lemma die induzierte Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(\mathbb{C} - S, X) & \xrightarrow{j} & \mathcal{E}(\mathbb{C} - (aS+b), X) \\ f & \mapsto & f \circ g^{-1} \end{array}$$

ein topologischer Isomorphismus mit Umkehrabbildung $f \mapsto f \circ g$. Um die Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ modulo $aS + b$ für $aT + b$ nachzuweisen, haben wir nach [4] nur zu zeigen:

$$(z - (aT + b)) : \mathcal{E}(\mathbb{C} - (aS + b), X) \to \mathcal{E}(\mathbb{C} - (aS + b), X)$$

ist injektiv mit abgeschlossenem Bild. Dazu genügt es zu zeigen, daß für jede Folge $(f_n)_n \in \mathcal{E}(\mathbb{C} - (aS + b), X)$ mit $(z - (aT + b))f_n \to 0$ schon gilt: $f_n \to 0$. Die Konvergenz bezieht sich hier immer auf die Topologie von $\mathcal{E}(\mathbb{C} - (aS + b), X)$, ebenso in der folgenden Äquivalenzkette:

$$\begin{aligned}(z - (aT + b))f_n(z) \to 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a(\frac{z - b}{a} - T)f_n \circ g(g^{-1}(z)) \to 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a(g^{-1}(z) - T)f_n \circ g(g^{-1}(z)) \to 0 \\ &\Leftrightarrow \quad aj(z - T)f_n \circ g \to 0.\end{aligned}$$

Da j topologischer Isomorphismus ist, heißt das (Konvergenz in $\mathcal{E}(\mathbb{C} - S, X)$): $(z - T)f_n \circ g \to 0$, aber T hat $(\beta)_{\mathcal{E}}$ modulo S, damit folgt: $f_n \circ g = j^{-1}f_n \to 0$ in $\mathcal{E}(\mathbb{C} - S, X)$. Aber j^{-1} ist topologischer Isomorphismus, also: $f_n \to 0$ in der Topologie von $\mathcal{E}(\mathbb{C} - (aS + b), X)$. Damit ist die Behauptung bewiesen. $\diamondsuit$

Nach dieser Vorarbeit ergibt sich mühelos:

5.3.12 Satz. *Für $1 < p < \infty$ hat der Cesàro-Operator C_p auf dem Hardyraum H^p die Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ modulo $\{0\}$.*

Beweis. Wir haben in Korollar (5.3.9) gesehen: S_p hat die Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ modulo $\{1\}$, aber $S_p = 1 - \frac{2}{p}C_p$, also $C_p = -\frac{p}{2}S_p + \frac{p}{2}$. Folglich hat nach vorigem Lemma C_p die Eigenschaft $(\beta)_{\mathcal{E}}$ modulo $\{-\frac{p}{2}1 + \frac{p}{2}\} = \{0\}$. $\diamondsuit$

A Die $\ell^1_k(\mathbb{Z},X)$-$\ell^\infty_k(\mathbb{Z},X')$-Dualität

A.1 Satz. *Die Abbildung*

$$H : \ell^\infty_k(\mathbb{Z},X') \longrightarrow \left(\ell^1_k(\mathbb{Z},X)\right)' \text{ mit } (H(x'_n)_n)(x_n)_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} < x_n, x'_n >$$

ist ein isometrischer Isomorphismus.

Beweis. Ist $(x'_n)_n \in \ell^\infty_k(\mathbb{Z},X')$ beliebig, dann gilt für jede Folge $(x_n)_n \in \ell^1_k(\mathbb{Z},X)$:

$$|\sum_{n\in\mathbb{Z}} < x_n, x'_n > | \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|\|x'_n\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|(1+|n|)^k \frac{\|x'_n\|}{(1+|n|)^k},$$

was wir mit den Normen von ℓ^1_k und ℓ^∞_k weiter abschätzen können gegen

$$\cdots \leq \|(x_n)_n\|_{1,k}\|(x'_n)_n\|_{\infty,k} < \infty.$$

Demzufolge ist $H(x'_n)_n$ in der angegebenen Weise als Linearform auf $\ell^1_k(\mathbb{Z},X)$ wohldefiniert, und die Abbildung H selbst ist linear und stetig mit $\|H\| \leq 1$.

Um die Isometrie zu zeigen, definieren wir zunächst die Einbettungen

$$e_m : X \to \ell^1_k(\mathbb{Z},X); x \mapsto (\delta_{nm}x)_n \quad (m \in \mathbb{Z}),$$

die sicher wohldefiniert und linear sind. Ferner ist e_m wegen

$$\|e_m x\|_{1,k} = \|(\delta_{nm}x)_n\|_{1,k} = (1+|m|)^k\|x\|$$

stetig mit Norm $\|e_m\| = (1+|m|)^k$. Daraus schließen wir mit beliebigem $m \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
\|H(x'_n)_n\| &\geq \sup_{\substack{x\in X\\ \|e_m x\|_{1,k}=1}} | < e_m x, H(x'_n)_n > | \\
&\geq \sup_{\|x\|=\frac{1}{(1+|m|)^k}} | < x, x'_m > | \\
&= \frac{1}{(1+|m|)^k} \sup_{\|x\|=1} | < x, x'_m > | \\
&= \frac{\|x'_m\|}{(1+|m|)^k},
\end{aligned}$$

woraus nach Bildung des Supremums über $m \in \mathbb{Z}$ die zur Isometrie von H noch fehlende Ungleichung folgt.

Bleibt nur noch die Surjektivität von H zu zeigen. Auch hier sind die Einbettungen e_m nützlich, denn ist $(x_n)_n \in \ell^1_k(\mathbb{Z},X)$, so gilt:

$$\|(x_n)_n - \sum_{m=-l}^{l} e_m(x_m)\|_{1,k} = \sum_{|n|\geq l+1} \|x_n\|(1+|n|)^k \overset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

wobei der letzte Ausdruck deshalb gegen Null konvergiert, weil er der zur absolut konvergenten Reihe $\|(x_n)_n\|_{1,k} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|(1+|n|)^k$ gehörige Reihenrest ist.

Ist nun $y' \in \left(\ell^1_k(\mathbb{Z},X)\right)'$ gegeben, so können wir nach diesen Vorbemerkungen die Folge mit den Gliedern $x'_m := y' \circ e_m$ bilden. Dies ist dann eine Folge in X', mehr noch: mit den Norm-Abschätzungen für e_m wissen wir: $\|x'_m\| \leq \|y'\|(1+|m|)^k$, d.h. $(x'_m)_m \in \ell^\infty_k(\mathbb{Z},X')$.

Nun rechnen wir nach (beachte die Konvergenz von $\sum e_n(x_n)$ gegen $(x_n)_n$)

$$\begin{aligned}
< (x_n)_n, (H(x'_m)_m) > &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} < x_n, y' \circ e_n > \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} y'(e_n(x_n)) \\
&= y' \sum_{n\in\mathbb{Z}} e_n(x_n) \\
&= y'(x_n)_n \quad = \quad < (x_n)_n, y' > .
\end{aligned}$$

Also stellt $(x'_m)_m$ gerade das y' dar. Da dieses beliebig gewählt war, folgt die Surjektivität und damit schließlich die Behauptung. $\diamondsuit$

B Topologische Tensorprodukte

Vorausgesetzt werden elementare Kenntnisse über das algebraische Tensorprodukt, wie man sie in jedem Lehrbuch über multilineare Algebra, etwa Greub [10], findet.

B.1 Seien E, F Vektorräume, $E \otimes F$ ihr algebraisches Tensorprodukt. Dann gilt: $E \otimes F = \text{lin}\ \{x \otimes y : x \in E, y \in F\}$, wobei die dadurch gegebene Darstellung für ein Element des Tensorproduktes bekanntermaßen nicht eindeutig ist (z.B. $x_1 \otimes y_1 - x_2 \otimes y_2 = (x_1 - x_2) \otimes y_1 + x_2 \otimes (y_1 - y_2)$).

Für $x' \in E', y' \in F'$ bezeichnen wir mit $x' \otimes y' : E \otimes F \to \mathbb{C}$ die eindeutige Linearform mit $x' \otimes y'(x \otimes y) = < x, x' >< y, y' >$ für alle $x \in E$, $y \in F$. (Hierbei müssen x' und y' nur aus dem algebraischen Dual stammen; wenn wir jedoch im Anschluß topologische Vektorräume betrachten werden, sind natürlich nur noch stetige Linearformen von Interesse.)

Sind schließlich G, H zwei weitere Vektorräume, und $S : E \to G$, $T : F \to H$ linear, so gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $S \otimes T : E \otimes F \to G \otimes H$, die auf Elementartensoren wie folgt wirkt:

$$(S \otimes T)(x \otimes y) = (Sx) \otimes (Ty) \quad (x \in E, y \in F)$$

und als Tensorprodukt der Abbildungen S und T bezeichnet wird.

B.2 Fortan wollen wir nur noch den Fall betrachten, daß E und F lokalkonvex sind. Dann wird für beliebige absolutkonvexe Nullumgebungen $U \subset E, V \subset F$ mit zugehörigen Minkowski-Funktionalen μ_U, μ_V durch die Zuordnung

$$\pi_{U,V}(x) := \inf \left\{ \sum_i \mu_U(x_i)\mu_V(y_i) : x = \sum_i x_i \otimes y_i \right\} \quad (x \in E \otimes F)$$

eine Halbnorm auf $E \otimes F$ erklärt ($\sum_i$ steht für eine endliche Summe). Man sieht sofort: sind $U_0 \subset U, V_0 \subset V$ zwei weitere absolutkonvexe Nullumgebungen, so gilt: $\pi_{U,V} \leq \pi_{U_0,V_0}$. Diese Eigenschaft stellt sicher, daß die folgende Definition sinnvoll, d.h. unabhängig von der dabei fixierten Nullumgebungsbasis ist:

Wählen wir absolutkonvexe Nullumgebungsbasen $\mathcal{U}_E$ in E und $\mathcal{U}_F$ in F, so bezeichnen wir die durch das Halbnormensystem

$$\{\pi_{U,V} : U \in \mathcal{U}_E, V \in \mathcal{U}_F\}$$

definierte lokalkonvexe Topologie auf $E \otimes F$ als projektive (kurz: π-) Topologie.

Daneben gibt es auch die injektive (oder ε-) Topologie, deren erzeugendes Halbnormensystem man wie folgt aufbaut: Für beliebige Teilmengen $U \subset E, V \subset F$ bezeichnen wir mit $U^\circ \subset E', V^\circ \subset F'$ die zugehörigen absoluten Polaren, die wegen $U^\circ = \{x' \in E' : |x'(U)| \subset \overline{D}_1(0)\}$ (analog bei V°) jeweils gleichstetige Mengen linearer Funktionale im entsprechenden Dual darstellen. Man erklärt Halbnormen durch

$$\varepsilon_{U,V}(x) := \sup\{|x' \otimes y'(x)| : x' \in U^\circ, y' \in V^\circ\} \quad (x \in E \otimes F)$$

und bestätigt wiederum elementar, daß mit $U_0 \subset U$, $V_0 \subset V$ die Abschätzung $\varepsilon_{U,V} \leq \varepsilon_{U_0,V_0}$ Gültigkeit hat (beachte dabei: $(U_0)^\circ \supset U^\circ$, analog bei V). Damit ist auch die folgende Definition sinnvoll, d.h. wie oben unabhängig von der Wahl der absolutkonvexen Nullumgebungsbasen $\mathcal{U}_E,\mathcal{U}_F$: Die ε-Topologie ist die vom Halbnormensystem

$$\{\varepsilon_{U,V} : U \in \mathcal{U}_E, V \in \mathcal{U}_F\}$$

erzeugte lokalkonvexe Topologie auf $E \otimes F$.

Statten wir das algebraische Tensorprodukt mit der π- bzw. ε-Topologie aus, so sprechen wir auch kurz vom π- bzw. ε-Tensorprodukt und schreiben $E \otimes_\pi F$ oder $E \otimes_\varepsilon F$.

Man kann sich nun überlegen, wie diese beiden Topologien miteinander zusammenhängen, und wie sich topologische Eigenschaften von lokalkonvexen Räumen auf ihr Tensorprodukt (versehen mit einer der beiden gerade eingeführten Topologien) vererben. Wir fassen die Resultate in folgendem Satz zusammen (bis auf Teil (b) ist der Beweis nicht schwierig; man nutze die Tatsache, daß die Wahl der Nullumgebungsbasen in der Definition der erzeugenden Halbnormensysteme keine Rolle spielt):

B.3 Satz. *Es seien E, F, G, H lokalkonvexe Räume, $S \in L(E, G)$, $T \in L(F, H)$. Dann gilt:*

(a) *Die π-Topologie auf $E \otimes F$ ist feiner als die ε-Topologie.*

(b) *Sind E, F Hausdorffsch und E zusätzlich nuklear, so gilt: $E \otimes_\pi F = E \otimes_\varepsilon F$.*

(c) *Sind E, F Hausdorffsch, so auch $E \otimes_\pi F$ und $E \otimes_\varepsilon F$.*

(d) *Sind E, F beide metrisierbar (beide normierbar), so auch $E \otimes_\pi F$ und $E \otimes_\varepsilon F$.*

(e) *$S \otimes T$ ist stetig als Abbildung $E \otimes_\pi F \overset{S \otimes T}{\longrightarrow} G \otimes_\pi H$ sowie $E \otimes_\varepsilon F \overset{S \otimes T}{\longrightarrow} G \otimes_\varepsilon H$.*

Die Beweise findet man in Jarchow [12], für (b) siehe auch Theorem A1.5 in Eschmeier und Putinar [8].

B.4 Eine zentrale topologische Eigenschaft überträgt sich allerdings nicht notwendigerweise von den Ausgangsräumen auf ihr Tensorprodukt: die Vollständigkeit. Allerdings sind die Topologien von $E \otimes_\pi F$ bzw. $E \otimes_\varepsilon F$ definitionsgemäß lokalkonvex und - geht man von lokalkonvexen Hausdorffräumen E und F aus - auch Hausdorffsch. Ein lokalkonvexer Hausdorffraum läßt sich jedoch in kanonischer Weise vervollständigen (vgl. [9], §4.3.3). Entsprechend bezeichnen wir mit $E \widehat{\otimes}_\pi F$ bzw. $E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$ die Vervollständigung des π- bzw. ε-Tensorproduktes bezüglich der zugrundeliegenden Topologie. Geht man insbesondere von Frécheträumen (Banachräumen) E, F aus, sind auch $E \widehat{\otimes}_\pi F$ und $E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$ wieder Frécheträume (Banachräume). Natürlich läßt sich jede stetig lineare Abbildung von $E \otimes_\pi F$ bzw. $E \otimes_\varepsilon F$ in einen vollständigen lokalkonvexen Raum G fortsetzen auf $E \widehat{\otimes}_\pi F$ bzw. $E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$. Andererseits liegt die lineare Hülle der Elementartensoren $E \otimes F$ nach Definition der Vervollständigung dicht in dieser, weshalb eine stetig lineare Abbildung auf einem vervollständigten Tensorprodukt bereits durch ihre Wirkung auf Elementartensoren eindeutig festgelegt ist.

Ist E nuklear, so stimmen offensichtlich auch die vervollständigten Tensorprodukte $E \widehat{\otimes}_\pi F$ und $E \widehat{\otimes}_\varepsilon F$ überein. Wir schreiben in diesem Fall einfach $E \widehat{\otimes} F$ für die Vervollständigung.

Was Stetigkeitsuntersuchungen bzgl. des π-Tensorproduktes angeht, ist die folgende Beobachtung von Interesse:

B.5 Satz. *Sind E, F, G lokalkonvexe Hausdorffräume, G vollständig, so faktorisiert jede stetige bilineare Abbildung $B : E \times F \to G$ über $E \widehat{\otimes}_\pi F$, d.h. es existiert genau eine stetig lineare Abbildung*

$$\begin{array}{rccc} & E \widehat{\otimes}_\pi F & \longrightarrow & G \\ \textit{mit} & x \otimes y & \mapsto & B(x, y). \end{array}$$

Zum Beweis vgl. Köthe [13], §41.3 (1).

Im folgenden Satz fassen wir die zentralen Stabilitätseigenschaften im Zusammenhang mit Tensorprodukten von linearen Abbildungen zusammen (unter Beschränkung auf den Fréchetraum-Fall). Zuvor sei an eine allgemein gebräuchliche

Sprechweise erinnert: Eine stetig lineare Abbildung $T : E \to F$ zwischen lokalkonvexen Räumen nennt man topologischen Homomorphismus, wenn T offen ist als Abbildung von E nach ran $T \subset F$ (ausgestattet mit der Relativtopologie). Ist T ein injektiver topologischer Homomorphismus, oder äquivalent T als Abbildung von E nach ran T (mit der Relativtopologie) ein topologischer Isomorphismus, so heißt T topologischer Monomorphismus.

B.6 Satz. *Sind E, F, G, H Frécheträume, $S \in L(E, G)$, $T \in L(F, H)$, $\alpha \in L(E, F)$ und $\beta \in L(F, G)$, so gelten folgende Aussagen:*

(a) *Sind S und T surjektiv, so auch $S \otimes T : E\widehat{\otimes}_\pi F \to G\widehat{\otimes}_\pi H$.*

(b) *Sind S und T topologische Monomorphismen, so auch $S \otimes T : E\widehat{\otimes}_\varepsilon F \to G\widehat{\otimes}_\varepsilon H$.*

(c) *Ist $E \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} G$ eine exakte Sequenz und zusätzlich F oder H nuklear, dann ist auch die Sequenz*

$$E\widehat{\otimes}_\pi H \xrightarrow{\alpha\otimes id} F\widehat{\otimes}H \xrightarrow{\beta\otimes id} G\widehat{\otimes}_\varepsilon H$$

exakt.

Zum Beweis sei wieder auf den Anhang A in [8] verwiesen (Theorem A1.6).

B.7 Ist E ein folgenvollständiger lokalkonvexer Hausdorffraum, $A \subset E$ eine abgeschlossene, absolutkonvexe und beschränkte Teilmenge, so überlegt man sich leicht, daß $E_A := \bigcup_{n\geq 0} nA$ ein linearer Teilraum von E ist, der mit dem Minkowski-Funktional μ_A als Norm zum Banachraum wird. Darüberhinaus ist die kanonische Inklusion $E_A \xrightarrow{\subset} E$ stetig. Nach dieser Vorbemerkung sind wir in der Lage, ein Liftungsresultat für beschränkte Mengen zu formulieren:

B.8 Satz. *Es seien E und F zwei Frécheträume (oder zwei vollständige (DF)-Räume) und E sei zusätzlich nuklear. Dann existieren zu jeder beschränkten Menge $M \subset E\widehat{\otimes}F$ abgeschlossene, absolutkonvexe, beschränkte Mengen $A \subset E$ und $B \subset F$, so daß M enthalten ist im Bild der abgeschlossenen Einheitskugel unter der Abbildung:*

$$E_A\widehat{\otimes}_\pi F_B \xrightarrow{i\otimes j} E\widehat{\otimes}B,$$

wobei $i : E_A \xrightarrow{\subset} E$ und $j : F_B \xrightarrow{\subset} F$ die kanonischen Inklusionen bezeichnen.

Auch hier findet man den Beweis in [8], (vgl. A1.10 und A1.11).

Zum Abschluß wollen wir noch einen kurzen Blick auf die Dualitätstheorie für topologische Tensorprodukte werfen. Dreh- und Angelpunkt sind dabei die folgenden topologischen Identifizierungen:

B.9 Satz. *Sind E, F Frécheträume, E nuklear, so gibt es eindeutig bestimmte topologische Isomorphismen*

(a) $\Theta : E'\widehat{\otimes}F' \longrightarrow (E\widehat{\otimes}F)'$ *mit* $< x \otimes y, \Theta(x' \otimes y') >=< x, x' >< y, y' >$

(b) $H : E'\widehat{\otimes}F' \longrightarrow L(E, F')$ *mit* $(H(x' \otimes y'))(x) =< x, x' > y'$,

wenn E' und F' die starke Dualraumtopologie tragen, und $L(E, F')$ ausgestattet wird mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf beschränkten Mengen.

Man macht sich leicht klar, daß diese Abbildungen durch die gemachten Angaben eindeutig bestimmt sind. Die Beweise hierzu findet man in [8] (Theorem A1.12) bzw. in dem Buch von Trèves [19] (Prop. 50.5 sowie 50.7).

C Die Sobolevräume $W^k(\mathbb{T})$

C.1 Ist $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, so ist der Sobolevraum der k-mal schwach-differenzierbaren Funktionen definiert als

$$W^k(a,b) := \{f \in L^2(a,b) : D^j f \in L^2(a,b) \text{ für } j = 1, \cdots k\},$$

wobei die L^2-Räume bezüglich des eingeschränkten Lebesgue-Maßes λ auf (a,b) gebildet werden. k-fache schwache Differenzierbarkeit bedeutet dabei gerade, daß die schwache Ableitung sich bezüglich partieller Integration gegen Testfunktionen (d.h. C^∞-Funktionen mit kompaktem Träger in (a,b)) wie eine C^k-Funktion verhält, d.h. alle $f \in W^k(a,b)$ erfüllen die Gleichung

$$< D^j f, \varphi >_{L^2(a,b)} = (-1)^j < f, \frac{d^j}{dt^j}\varphi >_{L^2(a,b)} \quad (j = 1, \cdots, k)$$

bei beliebiger Wahl von $\varphi \in \mathcal{D}(a,b) := \{f \in C^\infty(a,b) : \text{supp } f \subset (a,b)\}$. Versehen mit dem Skalarprodukt

$$< f, g >_{W^k(a,b)} := \sum_{j=0}^{k} < D^j f, D^j g >_{L^2(a,b)}$$

wird $W^k(a,b)$ zu einem Hilbertraum (vgl. Werner [20], S.162).

Eine Verbindung zwischen klassisch- und schwach-differenzierbaren Funktionen stellt das Lemma von Sobolev her, das in diesem Spezialfall besagt:

$$\forall f \in W^{k+1}(a,b) \quad \exists f_k \in C^k(a,b): \quad f_k(t) = f(t) \text{ für } \lambda\text{-fast alle } t \in (a,b).$$

In jeder L^2-Äquivalenzklasse einer (k+1)-mal schwach differenzierbaren Funktion auf (a,b) findet man also einen Vertreter mit um eins verminderter klassischer Differenzierbarkeitsordnung.

C.2 Möchte man Sobolevräume auf dem Torus definieren, so führt man diese mit der Parametrisierung $t \mapsto e^{it}$ zurück auf die oben eingeführten Sobolevräume über einem reellen Intervall. Eine Möglichkeit ist etwa die folgende: Man setze

$$W^k(\mathbb{T}) := \{f \in L^2(\mathbb{T}) : f(e^{i\cdot})|_{(-2\pi,2\pi)} \in W^k(-2\pi, 2\pi)\}.$$

Dann ist die Abbildung

$$j : W^k(\mathbb{T}) \longrightarrow W^k(-2\pi, 2\pi); f \mapsto f(e^{i\cdot})|_{(-2\pi,2\pi)}$$

injektiv und linear, weshalb sie vermöge

$$< f, g >_{W^k(\mathbb{T})} := \frac{1}{2} < jf, jg >_{W^k(-2\pi,2\pi)}$$

ein Skalarprodukt auf $W^k(\mathbb{T})$ induziert. Damit ausgestattet ist $W^k(\mathbb{T})$ ein Prä-Hilbertraum und vermöge j topologisch isomorph zu ran $j \subset W^k(-2\pi, 2\pi)$.

Um zu zeigen, daß $W^k(\mathbb{T})$ mit dem angegebenen Skalarprodukt sogar ein Hilbertraum ist, genügt es also sicherzustellen, daß j abgeschlossenes Bild hat. Dazu schreiben wir das Bild von j als Kern einer geeigneten stetig linearen Abbildung. Man betrachte etwa die exakte Sequenz

$$W^k(\mathbb{T}) \xrightarrow{\ j\ } W^k(-2\pi, 2\pi) \xrightarrow{\ d\ } L^2(-2\pi, 0),$$

wobei d die Abbildung

$$W^k(-\pi, 2\pi) \to L^2(-2\pi, 0); f \mapsto f|_{(-2\pi,0)} - f(\cdot + 2\pi)|_{(-2\pi,0)}$$

bezeichnet.

Zur Exaktheit ist nur anzumerken, daß eine Funktion $f \in W^k(-2\pi, 2\pi)$ mit $f \in \ker d$ die Beziehung $f(t) = f(t+2\pi)$ λ-fast überall auf $(-2\pi, 0)$ erfüllt. Dies ermöglicht die Wahl einer Funktion $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{T})$ mit $\tilde{f}(e^{it}) = f(t)$ λ-fast überall auf $(-2\pi, 2\pi)$, also ist $\tilde{f}$ Urbild von f unter j, und somit liegt f im Bild von j.

Die folgenden einfachen Normabschätzungen zeigen die Stetigkeit von d:

$$\begin{aligned} \|dg\|_{L^2(-2\pi,0)} &= \|g - g(\cdot + 2\pi)\|_{L^2(-2\pi,0)} \\ &\leq \|g\|_{L^2(-2\pi,0)} + \|g(\cdot + 2\pi)\|_{L^2(-2\pi,0)} \\ &\leq 2\|g\|_{L^2(-2\pi,2\pi)} \\ &\leq 2\|g\|_{W^k(-2\pi,2\pi)} \quad (g \in W^k(-2\pi, 2\pi)), \end{aligned}$$

was den Nachweis, daß $W^k(\mathbb{T})$ ein Hilbertraum ist, abschließt. Wie üblich schreiben wir $\|\cdot\|_{W^k(\mathbb{T})}$ für die vom Skalarprodukt induzierte Norm, d.h.

$$\|f\|_{W^k(\mathbb{T})} := (< f, f >_{W^k(\mathbb{T})})^{\frac{1}{2}} \quad (f \in W^k(\mathbb{T})).$$

C.3 Lemma. *Zu $f \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} W^k(\mathbb{T})$ existiert genau eine Funktion $f^* \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$, so daß $f = f^*$ (L^2).*

Beweis. Nach dem Sobolev-Lemma (vgl. C.1) existieren für alle $k \in \mathbb{N}_0$ Funktionen $f_k \in C^k(-2\pi, 2\pi)$ und Nullmengen $N_k \subset (-2\pi, 2\pi)$ mit $f_k(t) = f(e^{it})$ für alle $t \in (-2\pi, 2\pi) - N_k$. Dann gilt also außerhalb der Nullmenge $\bigcup_k N_k$ auf $(-2\pi, 2\pi)$ die Gleichheit

$$f_k(t) = f(e^{it}) = f_0(t) \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Da stetige Funktionen, die außerhalb einer Nullmenge übereinstimmen, schon gleich sind, folgt sofort $f_k = f_0$ auf ganz $(-2\pi, 2\pi)$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$. Damit muß f_0 aber automatisch eine C^∞-Funktion sein, die ferner

$$f_0(t) = f(e^{it}) = f(e^{i(t+2\pi)}) = f_0(t + 2\pi) \quad (\lambda\text{-fast überall auf } (-2\pi, 0))$$

erfüllt. Aus Stetigkeitsgründen gilt damit $f_0|_{(-2\pi,0)} = f_0(\cdot + 2\pi)|_{(-2\pi,0)}$, und f_0 läßt sich periodisch auf auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen. Die Fortsetzung liegt dann sogar in $\mathcal{E}_{per}(\mathbb{R})$, denn die Differenzierbarkeit läßt sich lokal immer zurückführen auf die Differenzierbarkeit in einem Punkt des Intervalls $(-2\pi, 2\pi)$. Also können wir eine Funktion $f^* \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$ so wählen, daß

$$f^*(e^{it}) = f_0(t) = f(e^{it})$$

λ-fast überall auf $\mathbb{R}$ gilt, weshalb $f^* = f$ (L^2). $\Diamond$

C.4 Lemma. *Man hat eine kanonische topologische Identifizierung*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbb{T}) &\to \varprojlim W^k(\mathbb{T}) \\ f &\mapsto (f). \end{aligned}$$

Beweis. Als Strukturabbildungen dienen wie üblich die Inklusionsabbildungen ($l \geq k$) $W^l(\mathbb{T}) \to W^k(\mathbb{T})$, die normreduzierend, also stetig sind. Ein Element $(f_k)_k$ des projektiven Limes $\varprojlim W^k(\mathbb{T})$ besteht daher schon aus lauter identischen Elementen, d.h. $f_k = f_1 \in \bigcap_k W^k(\mathbb{T})$. Dazu gehört aber - wie wir uns im vorigen Lemma überzeugt haben - genau eine $\mathcal{E}(\mathbb{T})$-Funktion, die mit f fast überall übereinstimmt. Damit ist die im Lemma angegebene Abbildung offenbar surjektiv. Injektivität und Linearität sind offensichtlich. Wir brauchen also nach dem Satz über die offene

Abbildung nur noch die Stetigkeit in eine Richtung zu zeigen. Ist aber $k \in \mathbb{N}_0$, $f \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$, so gilt offenbar:

$$\begin{aligned}\|f\|_{W^k(\mathbb{T})} &= \frac{1}{2}\|f(e^{i\cdot})\|^2_{W^k(-2\pi,2\pi)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k}\int_{-2\pi}^{2\pi}|(D^j f(e^{i\cdot}))(t)|^2 dt \\ &\leq 2\pi(k+1)\sup_{\substack{t\in\mathbb{R}\\ 0\leq j\leq k}}|\frac{d^j}{dt^j}f(e^{it})|^2 \\ &= 2\pi(k+1)\|f\|_k^2,\end{aligned}$$

womit die Stetigkeit nachgewiesen ist. ◊

C.5 Für die nachfolgenden Betrachtungen sind zwei einfache Feststellungen über W^k-Funktionen auf Intervallen hilfreich. Seien dazu $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

(a) Ist $f \in W^k(a,b)$ und $c \in \mathbb{R}$, so gilt $f(\cdot + c) \in W^k(a-c, b-c)$ und

$$(D^j f(\cdot + c))(t-c) = (D^j f)(t) \quad (\lambda\text{-fast überall auf } (a,b)).$$

(b) Sind $f \in W^k(a,b)$ und $c, d \in \mathbb{R}$ mit $a \leq c < d \leq b$, so gilt $f|_{(c,d)} \in W^k(c,d)$ und

$$(D^j f|_{(c,d)}) = (D^j f)|_{(c,d)}.$$

Kurz: die Bildung der schwachen Ableitung ist mit der Bildung von Translationen und Einschränkungen verträglich. (Die Beweise ergeben sich unmittelbar aus der Definition der schwachen Differenzierbarkeit.) Eine Anwendung findet sich im Beweis des folgenden Lemmas:

C.6 Lemma. *Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ liegt $\mathcal{E}(\mathbb{T}) \subset W^k(\mathbb{T})$ dicht bezüglich der W^k-Norm.*

Beweis. Die Inklusion ist klar. Zur Dichtheit: Ist $f \in W^k(\mathbb{T})$ eine beliebig vorgegebene Funktion, so werden wir von der Folge der zugehörigen trigonometrischen Polynome $p_l = \sum_{n=-l}^{l}\hat{f}(n)z^n$ zeigen: $\|p_l - f\|_{W^k(\mathbb{T})} \to 0$, oder gleichbedeutend: $\|p_l(e^{i\cdot}) - f(e^{i\cdot})\|_{W^k(-2\pi,2\pi)} \to 0$. Dies wiederum ist sichergestellt, wenn für $0 \leq j \leq k$ beliebig gilt:

$$\|D^j p_l(e^{i\cdot}) - D^j f(e^{i\cdot})\|_{L^2(-2\pi,2\pi)} \to 0.$$

Der Beweis hierzu erfolgt in mehreren Schritten:

1. Schritt: Für $f \in W^k(\mathbb{T})$ gilt:

$$\widehat{D^j f(e^{i\cdot})}(n) = (in)^j \hat{f}(n) \quad (0 \leq j \leq k),$$

wobei $D^j f(e^{i\cdot})$ - wie für die Dauer des gesamten Beweises - die j-te schwache Ableitung der Funktion

$$f(e^{i\cdot})|_{(-2\pi,2\pi)} \in W^k(-2\pi, 2\pi)$$

bezeichnet.

Zum Beweis wählen wir eine Partition der Eins auf $\mathbb{T}$ bestehend aus zwei C^∞-Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{T} \to [0,1]$ mit kompaktem Träger supp $\varphi_1 \subset \mathbb{T} - \{1\}$, supp $\varphi_2 \subset \mathbb{T} - \{-1\}$. Dann gilt: $\varphi_1(e^{i\cdot})|_{(0,2\pi)} \in \mathcal{D}(0,2\pi)$, $\varphi_2(e^{i\cdot})|_{(-\pi,\pi)} \in \mathcal{D}(-\pi,\pi)$).

$$\begin{aligned}\widehat{D^j f(e^{i\cdot})}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(D^j f(e^{i\cdot}))(t)e^{-int}(\varphi_1(e^{it}) + \varphi_2(e^{it}))dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(D^j f(e^{i\cdot}))(t)e^{-int}\varphi_1(e^{it})dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(D^j f(e^{i\cdot}))(t)e^{-int}\varphi_2(e^{it})dt.\end{aligned}$$

Nun ist $f(e^{i\cdot})|_{(-2\pi,2\pi)} \in W^k(-2\pi,2\pi)$, dann ist nach (C.5)(a) auch $f(e^{i\cdot})|_{(0,2\pi)} \in W^k(0,2\pi)$, und es gilt: $D^j f(e^{i\cdot})|_{(0,2\pi)} = (D^j f(e^{i\cdot}))|_{(0,2\pi)}$. Im ersten Integral kann also nach Definition der schwachen Ableitung von $f(e^{i\cdot})|_{(0,2\pi)}$ "partiell integriert werden", und man erhält:

$$\int_0^{2\pi} (D^j f(e^{i\cdot}))(t)e^{-int}\varphi_1(e^{it})dt = (-1)^j \int_0^{2\pi} f(e^{it})\frac{d^j}{dt^j}(e^{-int}\varphi_1(e^{it}))dt,$$

denn $\varphi_1(e^{i\cdot})|_{(0,2\pi)} \in \mathcal{D}(0,2\pi)$.

Die Bearbeitung des zweiten Integrals ist etwas aufwendiger (beachte: $\varphi_2(e^{i\cdot})$ hat kompakten Träger in $(-\pi,\pi)$). Eine kurze Rechnung, die wir im nächsten Beweisschritt nachtragen werden, zeigt jedoch:

$$\int_0^{2\pi} (D^j f(e^{i\cdot}))(t)e^{-int}\varphi_2(e^{it})dt = \int_{-\pi}^{\pi} (D^j f(e^{i\cdot})|_{(-\pi,\pi)})(t)e^{-int}\varphi_2(e^{it})dt.$$

Unter Ausnutzung der Definition der schwachen Differenzierbarkeit formt man dies sofort weiter um zu:

$$\cdots = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\frac{d^j}{dt^j}(e^{-int}\varphi_2(e^{it}))dt = \int_0^{2\pi} f(e^{it})\frac{d^j}{dt^j}(e^{-int}\varphi_2(e^{it}))dt.$$

Durch Zusammenfassen ergibt sich schließlich die gewünschte Identität

$$\begin{aligned}
\widehat{D^j f(e^{i\cdot})}(n) &= \frac{(-1)^j}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\frac{d^j}{dt^j}\big(e^{-int}(\varphi_1(e^{it})+\varphi_2(e^{it}))\big)dt \\
&= \frac{(in)^j}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-int}dt \\
&= (in)^j\hat{f}(n).
\end{aligned}$$

2. Schritt: Nachzutragen bleibt der Beweis der Beziehung

$$\int_0^{2\pi} (D^j f(e^{i\cdot}))(t)\varphi(e^{it})dt = \int_{-\pi}^{\pi} (D^j f(e^{i\cdot})|_{(-\pi,\pi)})(t)\varphi(e^{it})dt$$

(mit $\varphi = z^{-in}\varphi_2 \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$) unter den Voraussetzungen des ersten Beweisschrittes.

Mit Hilfe der Eigenschaften (C.5)(a) und (b) der schwachen Ableitung bestätigt man die Beziehung:

$$\begin{aligned}
\int_\pi^{2\pi} (D^j f(e^{i\cdot}))(t)\varphi(e^{it})dt &= \int_\pi^{2\pi} (D^j f(e^{i(\cdot-2\pi)})|_{(-2\pi,2\pi)})(t)\varphi(e^{it})dt \\
&= \int_{-\pi}^{0} (D^j f(e^{i(\cdot-2\pi)})|_{(-2\pi,2\pi)})(t+2\pi)\varphi(e^{it})dt \\
&= \int_{-\pi}^{0} (D^j f(e^{i\cdot})|_{(-\pi,\pi)})(t)\varphi(e^{it})dt,
\end{aligned}$$

wobei unter dem letzten Integral schließlich die schwache Ableitung der Funktion $f(e^{i\cdot})|_{(-2\pi,2\pi)} \in W^k(-2\pi,2\pi)$ steht. Durch Ausnutzen dieser Identität gewinnt man sofort die Behauptung.

3. Schritt: Für $f \in W^k(\mathbb{T})$ und $0 \le j \le k$ werden wir zeigen, daß:

$$\|D^j p_l(e^{i\cdot}) - D^j f(e^{i\cdot})\|_{L^2(-2\pi,2\pi)} \to 0 \quad (l \to \infty),$$

wobei $p_l = \sum_{n=-l}^{l} \hat{f}(n)z^n$ die Folge der zu f gehörenden trigonometrischen Polynome bezeichnet.

Mit Hilfe des im ersten Schritt gewonnenen Resultates können wir schreiben:

$$
\begin{aligned}
(D^j p_l(e^{i\cdot}))(t) &= \frac{d^j}{dt^j} \sum_{n=-l}^{l} \hat{f}(n) e^{int} \\
&= \sum_{n=-l}^{l} \hat{f}(n)(in)^j e^{int} \\
&= \sum_{n=-l}^{l} \widehat{D^j f(e^{i\cdot})}(n) e^{int}.
\end{aligned}
$$

Die Behauptung ist damit äquivalent zu:

$$
\int_{-2\pi}^{2\pi} \left| \sum_{n=-l}^{l} \widehat{D^j f(e^{i\cdot})}(n) e^{int} - (D^j f(e^{i\cdot}))(t) \right|^2 dt \to 0 \quad (l \to \infty).
$$

Durch eine Argumentation wie im zweiten Schritt (man nutze die Verträglichkeit der schwachen Ableitung mit Translationen und Einschränkungen (C.5)) läßt sich schließlich das Teilintegral $\int_{-2\pi}^{0}(\cdots)dt$ auch als $\int_0^{2\pi}(\cdots)dt$ schreiben, so daß man insgesamt erhält:

$$
\|D^j p_l(e^{i\cdot}) - D^j f(e^{i\cdot})\|_{L^2(-2\pi,2\pi)} \le 2 \| \sum_{n=-l}^{l} \widehat{D^j f(e^{i\cdot})}(n) e^{in\cdot} - (D^j f(e^{i\cdot}))\|_{L^2(0,2\pi)},
$$

und der rechte Ausdruck konvergiert gegen Null nach der L^2-Theorie für Fourierreihen.

Damit ist gezeigt: die trigonometrischen Polynome (welches allesamt $\mathcal{E}(\mathbb{T})$- Funktionen sind) liegen dicht in $W^k(\mathbb{T})$, und der Beweis ist abgeschlossen. $\diamondsuit$

Literatur

[1] J. Agler, M. Stankus (1995). *m-isometric Transformations of Hilbert space I.* Integral Equations and Operator Theory 21, 383-429.

[2] E. Albrecht, J. Eschmeier (1997). *Analytic functional models and local spectral theory.* Proc. Lond. Math. Soc., 75, 323-348.

[3] A. Athavale (1996). *On completely hyperexpansive operators.* Proc. Amer. Math. Soc. 124, Nr.12, 3745-3752.

[4] T. Becker (1998). *Die Lokalisierung von Eigenschaft* $(\beta)_{\mathcal{E}}$ *und residualzerlegbare Operatortupel.* Diplomarbeit. Universität des Saarlandes.

[5] I. Colojoară, C. Foiaş (1968). *Theory of Generalized Spectral Operators.* Gordon and Breach, New York.

[6] N. Dunford, J. Schwartz (1958). *Linear Operators, Part I.* Interscience Publishers, Inc., New York.

[7] P.L. Duren (1970). *Theory of* H^p *spaces.* Academic Press, New York.

[8] J. Eschmeier, M. Putinar (1996). *Spectral decompositions and analytic sheaves.* Clarendon Press, Oxford.

[9] K. Floret, L. Wloka (1967). *Eine Einführung in die Theorie der lokalkonvexen Räume.* Lect. Notes Math. Vol. 56. Springer-Verlag, Berlin.

[10] W. Greub (1978). *Multilinear Algebra (2nd Edition).* Springer-Verlag, Berlin.

[11] H. Heuser (1992). *Lehrbuch der Analysis 2 (7. Aufl.).* B.G.Teubner, Stuttgart.

[12] H. Jarchow (1981). *Locally convex spaces.* B.G.Teubner, Stuttgart.

[13] G. Köthe (1979). *Topological vector spaces II.* Springer-Verlag, New York.

[14] T.L. Miller, V.G. Miller, R.C. Smith (1997). *Bishop's Property* (β) *and the Cesàro Operator.* Preprint.

[15] S. Richter (1988). *Invariant subspaces of the Dirichlet shift.* J. reine angew. Math. 386, 205-220.

[16] W. Rudin (1991). *Functional analysis.* McGraw-Hill.

[17] A. Shields (1974). *Weighted shift operators and analytic function theory,* in *Topics in Operator Theory.* Herausgeber: C. Pearcy, Math. Surveys 13, AMS, Providence.

[18] A. Siskakis (1987). *Composition semigroups and the Cesàro operator on* H^p, J. London Math. Soc. (2), 36, 153-164.

[19] F. Trèves (1967). *Topological vector spaces, distributions and kernels.* Academic Press, New York.

[20] D. Werner (1995). *Funktionalanalysis.* Springer-Verlag, Berlin.

[21] R. Wolff (1996). *Spectral theory on Hardy spaces in several complex variables.* Dissertation. Westfälische Wilhelms-Universität Münster.

Hiermit erkläre ich an Eides statt, daß ich die vorliegende Arbeit selbst angefertigt und nur die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Saarbrücken, den