Wesentlich normale Hilbertmoduln über Gebieten in $\mathbb{C}^d$

Diplomarbeit
zur Erlangung des Grades eines
Diplom-Mathematikers
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät I
der Universität des Saarlandes

von

Michael Wernet

Saarbrücken
Juli 2008

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In seiner Arbeit [Avr98] hat William Arveson den nach ihm benannten Arveson-Raum H_A untersucht. Dieser funktionale Hilbertraum über $B_1(0) \subset \mathbb{C}^d$ hat den reproduzierenden Kern

$$K_A(z,w) = \frac{1}{1 - \langle z, w \rangle} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle z, w \rangle^n.$$

Da die Koordinatenfunktionen $z_1, \ldots, z_d$ Multiplikatoren für H_A sind, kann man H_A sehr einfach zu einem $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$- oder kurz $\mathbb{C}[z]$-Modul machen, indem man die Multiplikation mit Polynomen $p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$ definiert als

$$p \cdot h = p(M_{z_1}, \ldots, M_{z_d})h \qquad h \in H_A,$$

wobei die M_{z_i} die Multiplikationsoperatoren mit den Koordinatenfunktionen z_i sind. Aufgrund dieser Struktur wird H_A auch als Hilbertmodul bezeichnet. Wie man leicht nachprüft, ist nach dieser Definition ein abgeschlossener Teilraum $M \subset H_A$ genau dann ein Untermodul von H_A, wenn $M \in \mathrm{Lat}(M_z)$ ist, also M ein unter M_z invarianter abgeschlossener Teilraum von H_A ist, wobei $M_z = (M_{z_1}, \ldots, M_{z_d})$. Arveson konnte zeigen, dass H_A wesentlich normal ist, d.h. dass die Kommutatoren

$$[M_{z_i}, M_{z_j}^*] \in \mathcal{K}(H_A) \qquad i,j = 1, \ldots, d,$$

kompakt sind und dass H_A sogar schon p-wesentlich normal ist für jedes $p > d$, d.h. dass

$$[M_{z_i}, M_{z_j}^*] \in \mathcal{L}^p(H_A) \qquad i,j = 1, \ldots, d,$$

für jedes $p > d$. Dabei bezeichnet man den Raum der Operatoren $T \in L(H_A)$ für die $\mathrm{tr}|T|^p < \infty$ ist als die p-Schattenklasse $\mathcal{L}^p(H_A)$. Mit der oben definierten Modul-Struktur kommt nun natürlich die Frage auf, ob sich die wesentliche Normalität oder sogar die p-wesentliche Normalität auf die Untermoduln von H_A überträgt. Diese Fragestellung lässt sich natürlich auch auf andere funktionale Hilberträume mit dieser Modul-Struktur verallgemeinern [Avr02]. Im allgemeinen Fall ist die Antwort jedoch negativ, denn für nicht graduierte Untermoduln gibt es in [GRS] schon Gegenbeispiele für die wesentliche Normalität. Allerdings konnte Arveson in [Arv05] zeigen, dass alle Untermoduln von H_A, die von einer beliebigen Familie von Monomen erzeugt werden, p-wesentlich normal sind für $p > d$. Dieses Resultat konnte Douglas in [Dou06a] sogar für allgemeinere, vertauschende, gewichtete Shifts beweisen. Das führte Arveson zu der Vermutung, dass zumindest alle homogenen Untermoduln von H_A wieder p-wesentlich normal sind für $p > d$, also alle Untermoduln M der Form $M = \bigvee_{n=0}^{\infty} M \cap \mathbb{H}_n$, wobei $\mathbb{H}_n$ den Raum der homogenen komplexen Polynome vom Grad n in $z_1, \ldots, z_d$ bezeichnet. Douglas hat diese Vermutung von Arveson für Quotientenmoduln noch verfeinert. Er vermutet, dass für homogene Ideale I in $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$ und Untermoduln der Form $M = [I]$ der Quotientenmodul H_A/M sogar p-wesentlich normal ist für $p > \dim Z(I)$, wobei $Z(I)$ die Nullstellenmenge von I ist [Dou06b]. Für p-wesentlich normale Hilbertmoduln H konnte Arveson allerdings zeigen, dass die p-wesentliche Normalität eines Untermoduls M äquivalent zur p-wesentlichen Normalität des Quotientenmoduls H/M ist [Arv07].

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit funktionalen Hilberträumen H_d^f über einem Gebiet Ω in $\mathbb{C}^d$, deren reproduzierender Kern

$$K_f(z, w) = f(\langle z, w \rangle)$$

durch eine eindimensionale konvergente Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit positiven Koeffizienten $a_n > 0$ gegeben ist. Deren Hilbertraum-Tensorprodukte $H_d^f \otimes \mathbb{C}^r$ mit $\mathbb{C}^r$ kann man unter geeigneten Bedingungen an die Koeffizienten a_n wie den Arveson-Raum zu einem $\mathbb{C}[z]$-Modul machen. Wir werden diese Räume zunächst in Abhängigkeit der Koeffizienten der Potenzreihe f bezüglich ihrer wesentlichen und p-wesentlichen Normalität charakterisieren und anschließend für diejenigen Räume $H_d^f \otimes \mathbb{C}^r$, die p-wesentlich normal sind für $p > d$, Arvesons Vermutung untersuchen. Außerdem werden wir im wesentlich normalen Fall die Spektren und wesentlichen Spektren von M_z auf H_d^f (Theorem 2.22) sowie von $M_z|_M$ und M_z/M (Theorem 4.6) für wesentlich normale Untermoduln der Form $M = [I] \subset H_d^f$ berechnen. Dabei bezeichne $[I]$ den Abschluss eines homogenen Ideals in H_d^f. Als Grundlage für unsere Betrachtungen dient eine Arbeit von Guo und Wang [GW06]. Im Fall $d = 2$ können wir die Vermutung für diese Hilbertmoduln beweisen (Theorem 3.22). Für den Fall $d > 2$ können wir zumindest eine zusätzliche Bedingung angeben, unter der die Vermutung richtig ist (Theorem 3.25). Guo und Wang haben mittlerweile eine weitere Arbeit veröffentlicht [GW08], in der sie beweisen, dass Arvesons Vermutung für den Arveson-Raum H_A sogar im Fall $d = 3$ ohne zusätzliche Bedingungen richtig ist. Leider konnten die Ergebnisse dieser neuen Arbeit von uns nicht mehr berücksichtigt werden.

Im ersten Kapitel beginnen wir zunächst mit einer allgemeinen Einführung von funktionalen Hilberträumen und deren Eigenschaften. Wir werden sehen, dass es eine eindeutige Korrespondenz zwischen funktionalen Hilberträumen und ihren zugehörigen reproduzierenden Kernen gibt. Bereits hier erkennt man, dass Eigenschaften der Räume stark mit den Eigenschaften der reproduzierenden Kerne zusammenhängen. Im Folgenden beschränken wir uns dann auf diejenigen Räume H_d^f, deren Kern von der Form

$$K_f(z, w) = f(\langle z, w \rangle)$$

ist mit einer eindimensionalen konvergenten Potenzreihe $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Für diese können wir eine Orthonormalbasis aus Monomen angeben.

Im zweiten Kapitel untersuchen wir die Multiplikationsoperatoren M_{z_i} mit den Koordinatenfunktionen $z_1, \ldots, z_d$. Hier können wir Zusammenhänge zwischen den Koeffizienten a_n der Potenzreihe f und Eigenschaften von $M_z = (M_{z_1}, \ldots, M_{z_d})$, wie Beschränktheit und wesentliche Normalität, angeben. Für wesentlich normale Tupel $M_z = (M_{z_1}, \ldots, M_{z_d})$ erhalten wir schließlich für das Spektrum und das wesentliche Spektrum (Definitionen siehe Kapitel 2) von M_z

$$\begin{aligned} \sigma(M_z) &= \{z \in \mathbb{C}^d; |z| \leq t\}, \\ \sigma_e(M_z) &= \{z \in \mathbb{C}^d; s \leq |z| \leq t\}, \end{aligned}$$

wobei $s^2 = \liminf\limits_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ und $t^2 = \limsup\limits_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ ist. Spektrum und wesentliches Spektrum von M_z hängen also ausschließlich von den Eigenschaften der Koeffizienten der Potenzreihe f ab.

Im dritten Kapitel verfeinern wir den Begriff der Kompaktheit durch die Einführung der p-Schattenklassen und definieren damit die p-wesentliche Normalität von Operatortupeln $T = (T_1, \ldots, T_d) \in L(H)^d$ auf einem Hilbertraum H. Betrachtet man eine sogenannte stark reguläre Potenzreihe f (Definition siehe Kapitel 3), so lässt sich zeigen, dass dann das Tupel $M_z \in L(H_d^f)^d$, und damit auch der Raum H_d^f, p-wesentlich normal ist für $p > d$ (Korollar 3.10). Aufgrund der unitären Äquivalenz von $M_{z_i} \otimes 1_{\mathbb{C}^r}$

zu $\bigoplus_{j=1}^{r} M_{z_i}$ übertragen sich wesentliche und p-wesentliche Normalität von H_d^f auf $H_d^f \otimes \mathbb{C}^r$. Danach gehen wir zu homogenen invarianten Teilräumen $M \in \text{Lat}\,(M_z, H_d^f \otimes \mathbb{C}^r)$ über und beschreiben die Eigenschaften der Einschränkungen von $M_z|_M$ auf M und der Quotiententupel M_z/M. Hierbei wird sich herausstellen, dass sich für $p > d$ die p-wesentliche Normalität unter der zusätzlichen Voraussetzung

$$\dim_{\mathbb{C}} Z(\text{Ann}\,(H_d^f \otimes \mathbb{C}^r/M)) \leq 1$$

(Definitionen siehe Kapitel 3) auf die Einschränkungen $M_z|_M$ überträgt. In diesem Zusammenhang beweisen wir auch, dass Arvesons Vermutung richtig ist im Fall $d = 2$ (Theorem 3.22). Im Fall der Quotiententupel M_z/M lassen sich die gefundenen Resultate sogar noch verbessern. Diese sind unter derselben Voraussetzung sogar p-wesentlich normal für $p > 1$ (Theorem 3.29). Zum Abschluss des Kapitels geben wir noch eine Bedingung an, unter der invariante Teilräume $M \in \text{Lat}\,(M_z, H_d^f)$ endlich kodimensional sind.

Das letzte Kapitel beschäftigt sich schließlich damit, die Spektren und wesentlichen Spektren der Einschränkungen $M_z|_M$ und Quotiententupel M_z/M für homogene Untermoduln der Form $M = [I]$ zu berechnen. Ist dieser Untermodul wesentlich normal, so lassen sich die Spektren komplett durch die Nullstellenmenge von I und die Koeffizienten der Potenzreihe f angeben. Im nicht wesentlich normalen Fall können wir die Spektren nur noch teilweise beschreiben.

Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr. J. Eschmeier für das interessante Thema und die geduldige Betreuung. Weiterhin bedanke ich mich bei Herrn Dr. Christoph Barbian, Herrn Dipl. Math. Dominik Faas und Herrn Kevin Everard für die vielen fachlichen Diskussionen. Schließlich danke ich meinen Eltern und meiner Freundin Katharina Bell, ohne deren moralische Unterstützung mein Studium nicht möglich gewesen wäre.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Grundlagen funktionaler Hilberträume

In diesem Kapitel werden funktionale Hilberträume eingeführt und bereits einige wichtige Eigenschaften für den weiteren Verlauf bereitgestellt.

Definition 1.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^d$ offen. Ein funktionaler Hilbertraum über Ω ist ein Hilbertraum $H \subset \{f; f : \Omega \to \mathbb{C}\}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $\lambda \in \Omega$ die Punktauswertungen*

$$\delta_\lambda : H \to \mathbb{C}, f \mapsto f(\lambda)$$

stetig sind.

Da der topologische Dualraum eines Hilbertraums H kanonisch isomorph zu H ist, wirkt die Punktauswertung δ_λ in einem funktionalen Hilbertraum H wie das Skalarprodukt mit einem geeigneten Vektor aus H.

Satz 1.2. *Sei H ein funktionaler Hilbertraum. Dann existiert eine eindeutige Abbildung $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ so, dass für alle $f \in H, \lambda \in \Omega$ gilt:*

$$\begin{array}{ll} (i) & K(\cdot, \lambda) \in H \\ (ii) & f(\lambda) = \langle f, K(\cdot, \lambda) \rangle_H. \end{array}$$

In diesem Fall ist die Menge $\{K(\cdot, \lambda); \lambda \in \Omega\}$ total in H.

Beweis. Für $\lambda \in \Omega$ folgt die Existenz eines Elementes $K(\cdot, \lambda) \in H$ mit

$$f(\lambda) = \langle f, K(\cdot, \lambda) \rangle_H \quad (f \in H)$$

direkt aus dem Satz von Riesz-Fréchet. Die Eindeutigkeit folgt aus der positiven Definitheit des Skalarprodukts. Denn sind $K(\cdot,\lambda), \tilde{K}(\cdot,\lambda)$ zwei solche Elemente, dann gilt

$$0 = f(\lambda) - f(\lambda) = \langle f, K(\cdot,\lambda) - \tilde{K}(\cdot,\lambda)\rangle_H$$

für alle $f \in H, \lambda \in \Omega$, also insbesondere für $f = K(\cdot,\lambda) - \tilde{K}(\cdot,\lambda)$. Offensichtlich definiert dann

$$K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C},\ (\mu,\lambda) \mapsto K(\cdot,\lambda)(\mu)$$

die eindeutige Abbildung, die die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt. Dass die Menge der $K(\cdot,\lambda)$ total ist in H, ist klar. □

Die Abbildung $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ heißt der reproduzierende Kern von H. Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen den Eigenschaften eines funktionalen Hilbertraums und denen des zugehörigen reproduzierenden Kerns untersuchen.

Definition 1.3. *Eine Abbildung $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ heißt positiv definit, falls für alle endlichen Folgen $(\lambda_i)_{i=1}^r$ in Ω und $(x_i)_{i=1}^r$ in $\mathbb{C}$*

$$\sum_{i,j} K(\lambda_j,\lambda_i) x_i \overline{x_j} \geq 0$$

gilt.

Man sieht leicht, dass jeder reproduzierende Kern zu einem funktionalen Hilbertraum positiv definit ist.

Lemma 1.4. *Sei H ein funktionaler Hilbertraum mit reproduzierendem Kern K. Dann ist K positiv definit.*

Beweis. Seien $(\lambda_i)_{i=1}^r$, $(x_i)_{i=1}^r$ endliche Folgen in Ω bzw. $\mathbb{C}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} K(\lambda_j,\lambda_i) x_i \overline{x_j} &= \sum_{i,j} \langle K(\cdot,\lambda_i), K(\cdot,\lambda_j)\rangle x_i \overline{x_j} \\
&= \langle \sum_{i=1}^r K(\cdot,\lambda_i) x_i, \sum_{j=1}^r K(\cdot,\lambda_j) x_j \rangle \\
&= \| \sum_{i=1}^r K(\cdot,\lambda_i) x_i \|^2 \geq 0
\end{aligned}$$

□

Umgekehrt ist jede positiv definite Abbildung $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ reproduzierender Kern eines geeigneten funktionalen Hilbertraums über Ω. Dieser ist durch K sogar eindeutig bestimmt.

Satz 1.5. *Sei $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ positiv definit. Dann gibt es genau einen funktionalen Hilbertraum $H = H(K)$ über Ω mit reproduzierendem Kern K.*

Beweis. Siehe [Barbian, Satz 1.6] mit $X = \Omega, \mathcal{E} = \mathbb{C}$. □

Kennt man eine Orthonormalbasis des funktionalen Hilbertraums $H(K)$, so lässt sich der reproduzierende Kern sehr einfach bestimmen.

Bemerkung 1.6. *Ist I eine beliebige Indexmenge und $(e_i)_{i\in I}$ eine Orthonormalbasis in einem funktionalen Hilbertraum $H(K)$ mit reproduzierendem Kern $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$, so gilt für jedes $w \in \Omega$*

$$K(\cdot, w) = \sum_{i\in I} \langle K(\cdot, w), e_i\rangle e_i = \sum_{i\in I} \overline{e_i(w)} e_i,$$

wobei die Summe in $H(K)$ gegen $K(\cdot, w)$ konvergiert, also insbesondere auch punktweise auf Ω.

Mit Hilfe des reproduzierenden Kerns K kann man auch leicht überprüfen, ob eine Abbildung $h : \Omega \to \mathbb{C}$ im funktionalen Hilbertraum $H(K)$ über Ω enthalten ist.

Satz 1.7. *Sei H ein funktionaler Hilbertraum über Ω mit reproduzierendem Kern K und sei $h : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:*
(i) $h \in H$
(ii) Es existiert ein $c \geq 0$ so, dass die Abbildung

$$\gamma_c : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C},\ (z, w) \mapsto c^2 K(z, w) - h(z)\overline{h(w)}$$

positiv definit ist.
In diesem Fall ist $\|h\| = \min\{c \geq 0; \gamma_c \text{ positiv definit}\}$.

Beweis. Siehe [Barbian, Satz 1.9 b)] mit $X = \Omega, \mathcal{E} = \mathbb{C}$. □

Zur weiteren Verwendung notieren wir noch den folgenden Satz von Schur.

Satz 1.8. *Sind $K_1, K_2 : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ positiv definit, so ist auch die Abbildung $K_1 \cdot K_2 : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ positiv definit.*

Beweis. Siehe [Barbian, Satz 1.15]. □

Definition 1.9. *(i) Seien $r > 0$, $B_r(0) = \{z \in \mathbb{C}^d; |z| < r\}$ die offene r-Kugel um 0 und $\mathcal{U} = \{U \in End(\mathbb{C}^d); U$ unitär$\}$. Eine Abbildung*

$$K : B_r(0) \times B_r(0) \to \mathbb{C}$$

heißt $\mathcal{U}$-invariant, falls für alle $z, w \in B_r(0),\ U \in \mathcal{U}$ gilt:

$$K(z,w) = K(Uz, Uw).$$

(ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^d$ offen und $\tilde{\Omega} := \{\overline{z}; z \in \Omega\}$. Eine Abbildung $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ heißt sesquianalytisch, wenn die Abbildung

$$C : \Omega \times \tilde{\Omega} \to \mathbb{C},\ C(z,w) := K(z, \overline{w})$$

analytisch ist.

Mit Hilfe dieser Definition lassen sich funktionale Hilberträume analytischer Funktionen wie folgt charakterisieren.

Lemma 1.10. *Sei H ein funktionaler Hilbertraum über Ω mit reproduzierendem Kern K. Dann sind äquivalent:*
(i) $H \subset \mathcal{O}(\Omega)$,
(ii) K ist sesquianalytisch.

Beweis. Siehe [Barbian, Lemma 1.3 e)]. □

1.2 Der funktionale Hilbertraum H_d^f

Bevor wir die uns im Folgenden interessierende Klasse von funktionalen Hilberträumen definieren, erinnern wir noch an die übliche Multiindexnotation.

Bemerkung 1.11. *Seien $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ ein Multiindex und $z \in \mathbb{C}^d$. Dann definieren wir $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$, $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_d!$ und $\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_d^{\alpha_d}}$, $\overline{\partial}^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \overline{z}_1^{\alpha_1} \cdots \partial \overline{z}_d^{\alpha_d}}$, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_d^{\alpha_d}$.*

Satz 1.12. *Sei $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ein Potenzreihe in einer komplexen Variablen mit Konvergenzradius $R = r^2 > 0$ und $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Abbildung*

$$K_f : B_r(0) \times B_r(0) \to \mathbb{C},\ K_f(z,w) = f(\langle z, w\rangle) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \langle z, w\rangle^n$$

positiv definit, $\mathcal{U}$-invariant und sesquianalytisch.

Beweis. Die Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : B_r(0)\times B_r(0)\to\mathbb{C}, (z,w)\mapsto\langle z,w\rangle$ ist positiv definit. Nach Satz 1.8 sind dann auch die Abbildungen $\langle\cdot,\cdot\rangle^n$ positiv definit für alle $n\in\mathbb{N}$. Da alle $a_n\geq 0$ sind, ist auch $K_f=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\langle\cdot,\cdot\rangle^n$ positiv definit. Seien $U\in\mathcal{U},\ z,w\in B_r(0)$. Dann gilt:

$$K_f(Uz,Uw)=f(\langle Uz,Uw\rangle)=f(\langle z,w\rangle)=K_f(z,w).$$

Also ist K_f $\mathcal{U}$-invariant. Um zu begründen, dass K_f auch sesquianalytisch ist, beachte, dass gilt:

$$K_f(z,w)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\langle z,w\rangle^n=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d}a_{|\alpha|}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}z^\alpha\overline{w}^\alpha.$$

□

Nach Satz 1.5 existiert für jede solche Potenzreihe ein eindeutiger funktionaler Hilbertraum mit K_f als reproduzierendem Kern. Der weitere Verlauf dieser Arbeit beschäftigt sich im Wesentlichen mit der Charakterisierung dieser Räume, durch die Eigenschaften der zu Grunde liegenden Potenzreihen.

Definition 1.13. *Sei $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ eine Potenzreihe in einer komplexen Variablen mit Konvergenzradius $R=r^2>0$ und $a_0=1, a_n>0$ für alle $n\geq 1$ und $K_f : B_r(0)\times B_r(0)\to\mathbb{C},\ K_f(z,w)=f(\langle z,w\rangle)$. Dann bezeichne $H_d^f= H(K_f)$ den zugehörigen funktionalen Hilbertraum über $B_r(0)$.*

Im Folgenden seien die Bezeichnungen immer wie in Definition 1.13 gewählt. Das folgende Lemma beschreibt wichtige Eigenschaften von $\mathbb{H}_n$, dem Raum der homogenen komplexen Polynome vom Grad n in den komplexen Variablen $z_1,\ldots,z_d$.

Lemma 1.14. *Seien $R>0,\ f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ wie in Definition 1.13 und*

$$K_n : B_{\sqrt{R}}(0)\times B_{\sqrt{R}}(0)\to\mathbb{C},\ (z,w)\mapsto\langle z,w\rangle^n.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} &(i) && \dim\mathbb{H}_n=\frac{(n+d-1)!}{(d-1)!n!},\\ &(ii) && H(K_n)=\mathbb{H}_n|_{B_{\sqrt{R}}(0)} \text{ als Vektorräume},\\ &(iii) && \mathbb{H}_n|_{B_{\sqrt{R}}(0)}\subset H_d^f. \end{aligned}$$

Beweis. (i) Sei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ mit $|\alpha| = n$. Das Verteilen von n auf die d Komponenten von α entspricht einer Ziehung von n Kugeln mit Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge aus einer Menge von d Kugeln. Dafür gibt es $\frac{(n+d-1)!}{(d-1)!n!}$ Möglichkeiten. Also gibt es in $\mathbb{H}_n$ auch $\frac{(n+d-1)!}{(d-1)!n!}$ verschiedene Monome und damit ist $\dim \mathbb{H}_n = \frac{(n+d-1)!}{(d-1)!n!}$.
(ii) Sei $r = \sqrt{R}$. Dann ist der Raum $\mathbb{H}_n|_{B_r(0)}$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle \sum_{|\alpha|=n} a_\alpha z^\alpha, \sum_{|\alpha|=n} b_\alpha z^\alpha \rangle = \sum_{|\alpha|=n} a_\alpha \overline{b_\alpha} \frac{1}{\gamma_\alpha} \quad (\gamma_\alpha = \frac{|\alpha|!}{\alpha!})$$

ein funktionaler Hilbertraum über $B_r(0)$ mit Orthonormalbasis $(\sqrt{\gamma_\alpha} z^\alpha)_{|\alpha|=n}$. Also ist der reproduzierende Kern nach Bemerkung 1.6 gegeben durch

$$K(z,w) = K(\cdot, w)(z) = \sum_{|\alpha|=n} \overline{\sqrt{\gamma_\alpha} w^\alpha} (\sqrt{\gamma_\alpha} z^\alpha) = \langle z, w \rangle^n = K_n(z,w)$$

für $z, w \in B_r(0)$. Damit sind $H(K_n)$ und $\mathbb{H}_n|_{B_r(0)}$ als funktionale Hilberträume gleich, insbesondere als Vektorräume.
(iii) Nach (ii) genügt es zu zeigen, dass $H(K_n) \subset H_d^f = H(K_f)$ ist. Hierzu beachte man, dass nach dem Beweis von Satz 1.12 die Abbildung

$$K_f - a_n K_n : B_{\sqrt{R}}(0) \times B_{\sqrt{R}}(0) \to \mathbb{C}$$

positiv definit ist. Sei $h \in H(K_n)$ mit $\|h\| \leq 1$. Dann ist nach Satz 1.7 die Abbildung $B_{\sqrt{R}}(0) \times B_{\sqrt{R}}(0) \to \mathbb{C}$, $(z,w) \mapsto K_n(z,w) - h(z)\overline{h(w)}$ positiv definit. Dann ist aber auch

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_n} K_f(z,w) - h(z)\overline{h(w)} &= \frac{1}{a_n} K_f(z,w) - K_n(z,w) + K_n(z,w) - h(z)\overline{h(w)} \\ &= \frac{1}{a_n}(K_f(z,w) - a_n K_n(z,w)) + (K_n(z,w) - h(z)\overline{h(w)})\end{aligned}$$

wegen $\frac{1}{a_n} > 0$ als Summe zweier positiv definiter Abbildungen wieder positiv definit. Erneut unter Verwendung von Satz 1.7 folgt daraus $h \in H_d^f$. □

Das vorangegangene Lemma sagt im Wesentlichen aus, dass alle Polynome in den d komplexen Variablen $z_1, \dots, z_d$ in H_d^f enthalten sind. Bei genauerer Betrachtung kann man sogar eine Orthonormalbasis von H_d^f aus Polynomen angeben.

Satz 1.15. *Der funktionale Hilbertraum H_d^f über $B_{\sqrt{R}}(0)$ hat die Orthonormalbasis*

$$([a_{|\alpha|} \frac{|\alpha|!}{\alpha!}]^{1/2} z^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^d}.$$

Beweis. Definiere $\gamma_\alpha = a_{|\alpha|}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}$ für $\alpha \in \mathbb{N}^d$ und $\gamma = (\gamma_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^d}$. Dann definiert

$$\|(c_\alpha)\| = (\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} \frac{|c_\alpha|^2}{\gamma_\alpha})^{\frac{1}{2}}$$

eine Norm auf

$$l^2(\gamma) = \{c = (c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^d}; c_\alpha \in \mathbb{C} \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}^d \text{ und } \|c\| < \infty\}.$$

Die Norm ist vollständig und wird induziert durch das Skalarprodukt

$$\langle (c_\alpha), (\lambda_\alpha)\rangle = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} \frac{c_\alpha\overline{\lambda_\alpha}}{\gamma_\alpha}.$$

Da für alle $(c_\alpha) \in l^2(\gamma)$ und $z \in B_{\sqrt{R}}(0)$ gilt

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} |c_\alpha z^\alpha| &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} \frac{|c_\alpha|}{\sqrt{\gamma_\alpha}}\sqrt{\gamma_\alpha}|z^\alpha| \leq \|(c_\alpha)\|(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} \gamma_\alpha|z^\alpha|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|(c_\alpha)\| f(|z|^2)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

(denn $f(\langle z, w\rangle) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{|\alpha|=n} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} z^\alpha\overline{w}^\alpha = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} \gamma_\alpha z^\alpha \overline{w}^\alpha$ für alle $z, w \in B_{\sqrt{R}}(0)$), ist die Abbildung

$$\rho : l^2(\gamma) \to \mathcal{O}(B_{\sqrt{R}}(0)),\ \rho((c_\alpha)) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} c_\alpha z^\alpha$$

wohldefiniert. Da ρ injektiv und linear ist, wird Im ρ versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle \rho((c_\alpha)), \rho((\lambda_\alpha))\rangle = \langle (c_\alpha), (\lambda_\alpha)\rangle = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} \frac{c_\alpha\overline{\lambda_\alpha}}{\gamma_\alpha}$$

zu einem Hilbertraum, der vermöge ρ isometrisch isomorph zu $l^2(\gamma)$ ist. Nach Konstruktion sind die Punktauswertungen stetig auf Im ρ und die Monome $\sqrt{\gamma_\alpha} z^\alpha (\alpha \in \mathbb{N}^d)$ bilden eine Orthonormalbasis von Im ρ. Also ist Im ρ der funktionale Hilbertraum mit reproduzierendem Kern (siehe Bemerkung 1.6)

$$K(z, \lambda) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} (\gamma_\alpha \overline{\lambda}^\alpha) z^\alpha \quad (z, \lambda \in B_{\sqrt{R}}(0)).$$

Insbesondere ist damit gezeigt, dass H_d^f die angegebene Orthonormalbasis besitzt. □

Zum Abschluss dieses Abschnitts folgt noch ein wichtiges Lemma, das später den Umgang mit dem funktionalen Hilbertraum H_d^f etwas erleichtern wird.

Lemma 1.16. *Sei $u \in M(n, \mathbb{C})$ unitär. Dann ist die Abbildung*

$$\Gamma_u : H_d^f \to H_d^f,\ (\Gamma_u h)(z) = h(u^{-1}z)$$

wohldefiniert, unitär und es gilt $\Gamma_u^{-1} = \Gamma_{u^{-1}}$.

Beweis. Sei $u \in M(n, \mathbb{C})$ unitär und $h \in ball(H_d^f)$. Dann ist nach Satz 1.7 die Abbildung

$$K_h : B_{\sqrt{R}}(0) \times B_{\sqrt{R}}(0) \to \mathbb{C},\ (\lambda, \mu) \mapsto K_f(\lambda, \mu) - h(\lambda)\overline{h(\mu)}$$

positiv definit. Da $u \in M(n, \mathbb{C})$ unitär ist, ist dann auch die Abbildung

$$B_{\sqrt{R}}(0) \times B_{\sqrt{R}}(0) \to \mathbb{C},\ (\lambda, \mu) \mapsto K_f(u^{-1}\lambda, u^{-1}\mu) - h(u^{-1}\lambda)\overline{h(u^{-1}\mu)}$$

positiv definit. Aufgrund der $\mathcal{U}$-Invarianz von K_f folgt wieder mit Satz 1.7, dass die Funktion

$$\Gamma_u h : B_{\sqrt{R}}(0) \to \mathbb{C},\ \lambda \mapsto (\Gamma_u h)(\lambda) = h(u^{-1}\lambda)$$

in $ball(H_d^f)$ liegt. Also ist die Abbildung

$$\Gamma_u : H_d^f \to H_d^f,\ h \mapsto \Gamma_u h$$

wohldefiniert und stetig linear mit $\|\Gamma_u\| \leq 1$.
Weiter ist offensichtlich $\Gamma_{u^{-1}} = \Gamma_u^{-1}$, denn für alle $h \in H_d^f$ und $\lambda \in B_{\sqrt{R}}(0)$ gilt:

$$(\Gamma_u \Gamma_{u^{-1}} h)(\lambda) = (\Gamma_{u^{-1}} h)(u^{-1}\lambda) = h(\lambda) = (\Gamma_u h)(u\lambda) = (\Gamma_{u^{-1}} \Gamma_u h)(\lambda).$$

Wegen $\|\Gamma_u\| \leq 1$ und $\|\Gamma_u^{-1}\| = \|\Gamma_{u^{-1}}\| \leq 1$ folgt, dass Γ_u isometrisch und bijektiv, also unitär ist. □

1.3 Allgemeine Grundlagen

In diesem zweiten Abschnitt werden noch weitere grundlegende Resultate zusammengestellt, die in dieser Arbeit häufig verwendet werden. Das erste Lemma ist ein wichtiges Hilfsmittel bei der Charakterisierung kompakter Operatoren.

Lemma 1.17. *Seien H ein Hilbertraum, $P_n \in L(H)\backslash\{0\}$ $(n \in \mathbb{N})$ Orthogonalprojektionen mit paarweise orthogonalem Bild und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$.*
(i) Es sind äquivalent:
1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n P_n$ konvergiert in τ_{SOT},
2. $s = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |c_n| < \infty$.
In diesem Fall gilt $\|\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n P_n\| = s$.
(ii) Ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n P_n$ eine τ_{SOT}-konvergente Reihe und sind die Orthogonalprojektionen P_n endlich dimensional, dann sind äquivalent:
1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n P_n$ ist kompakt,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$.

Beweis. (i) Seien $x \in H$ und $N \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|\sum_{n=0}^{N} c_n P_n x\|^2 &= \sum_{n=0}^{N} |c_n|^2 \|P_n x\|^2 \leq (\sup_{n=0,\dots,N} |c_n|)^2 \sum_{n=0}^{N} \|P_n x\|^2 \\ &\leq s^2 \|(\sum_{n=0}^{N} P_n) x\|^2 \leq s^2 \|x\|^2.\end{aligned}$$

Dabei wurde benutzt, dass $\sum\limits_{n=0}^{N} P_n$ wieder eine Orthogonalprojektion ist. Also konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n P_n$ in der starken Operatortopologie und erfüllt $\|\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n P_n\| \leq s$, falls s endlich ist.

Konvergiert andererseits die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n P_n$ punktweise, so gilt für $x \in P_{n_0} H$ mit $\|x\| = 1$

$$|c_{n_0}|^2 = \|\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n x\|^2 \leq \|\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n\|^2.$$

Also ist $s \leq \|\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n P_n\|$.
(ii) Sei $N \in \mathbb{N}$. Dann gilt nach (i):

$$\|\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n - \sum_{n=0}^{N} c_n P_n\| = \|\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n P_n\| = \sup_{n\geq N+1} |c_n|$$

Also ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n P_n$ $\|\cdot\|$-konvergent genau dann, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$. In diesem Fall ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n P_n$ kompakt als $\|\cdot\|$-Limes einer Folge stetiger Operatoren endlichen Ranges.
Sei umgekehrt $K = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n P_n$ kompakt. Da eine punktweise konvergente Folge stetiger Operatoren auf H gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von H konvergiert und da $KB_1(0) \subset H$ relativ kompakt ist, konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{N} c_n^2 P_n = (\sum\limits_{n=0}^{N} c_n P_n)K$ in der Operatornorm gegen K^2. Also ist $(c_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$, und damit auch $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, eine Nullfolge in $\mathbb{C}$. □

Lemma 1.18. *Sei H ein Hilbertraum und seien $T_1, \ldots, T_d$ stetige Operatoren auf H. Dann gilt:*

$$(\bigcap_{i=1}^{d} \text{Ker } T_i^*)^{\perp} = \overline{\sum_{i=1}^{d} \text{Im } T_i}$$

Beweis. Dies folgt aus $(\sum\limits_{i=1}^{d} \text{Im } T_i)^{\perp} = \bigcap\limits_{i=1}^{d} (\text{Im } T_i)^{\perp} = \bigcap\limits_{i=1}^{d} \text{Ker } T_i^*$. □

Der nächste Satz gibt eine hinreichende Bedingung für die Abgeschlossenheit der Bilder von stetigen Operatoren auf einem Banachraum.

Satz 1.19. *Sei X ein Banachraum und $S \in L(X)$ so, dass ein endlich kodimensionaler abgeschlossener Teilraum $X_1 \subset X$ existiert, auf dem S nach unten beschränkt ist. Dann ist* Im $S \subset X$ *abgeschlossen.*

Beweis. Ist S auf X_1 nach unten beschränkt, so ist $SX_1 \subset X$ abgeschlossen. Da die Abbildung

$$X/X_1 \to SX/SX_1, \; x + X_1 \mapsto Sx + SX_1$$

surjektiv und X/X_1 endlich dimensional nach Voraussetzung ist, ist SX/SX_1 endlich dimensionaler Teilraum von X/SX_1 und damit abgeschlossen. Bezeichnet $q : X \to X/SX_1$ die Quotientenabbildung, dann ist auch $SX = q^{-1}(SX/SX_1)$ als stetiges Urbild einer abgeschlossenen Menge abgeschlossen. □

Die beiden folgenden Ergebnisse dienen der Berechnung des wesentlichen Spektrums eines Operators auf einem Banachraum bzw. eines normalen Operators auf einem Hilbertraum.

Satz 1.20. *Sei X ein Banachraum und $S \in L(X)$. Dann gehört jeder Punkt $\lambda \in \partial\sigma(S)$, der kein isolierter Punkt von $\sigma(S)$ ist, zum wesentlichen Spektrum $\sigma_e(S)$ von S.*

Beweis. Siehe [Conway, Theorem 5.3] unter Benutzung von [Conway, Proposition 2.2 a)]. □

Satz 1.21. *Sei H ein Hilbertraum und $N \in L(H)$ ein normaler Operator. Dann besteht $\sigma(N)\backslash\sigma_e(N)$ nur aus isolierten Punkten λ mit*

$$\dim \operatorname{Ker}\,(\lambda - N) < \infty.$$

Beweis. Siehe [Conway, Proposition 2.9]. □

Zum Abschluss des Kapitels der Grundlagen notieren wir noch zwei elementare Lemmata.

Lemma 1.22. *Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, die den folgenden Bedingungen genügen:*

$$\begin{array}{ll} 1. & \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} p_n < \infty \\ 2. & \lim\limits_{n\to\infty} [p_{n+1} - p_n] = 0. \end{array}$$

Dann gilt

$$\overline{\{p_0, p_1, \ldots\}} \supset [a, b],$$

wobei $a = \liminf\limits_{n\to\infty} p_n$ und $b = \limsup\limits_{n\to\infty} p_n$.

Beweis. Für $a = b$ ist die Behauptung klar. Sei $a < b$ und $r \in (a, b)$. Es genügt zu zeigen, dass $r \in \overline{\{p_0, p_1, \ldots\}}$. Setze $p_{-1} = 0$ und $t_n = p_n - p_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $p_n = \sum\limits_{i=0}^{n} t_i$ und $t_n \xrightarrow{n} 0$. Wähle streng monoton wachsende Folgen $\{n_k^{(1)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ und $\{n_k^{(2)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ mit

$$\begin{array}{ccc} p_{n_k^{(1)}} & \xrightarrow{k} & a \\ p_{n_k^{(2)}} & \xrightarrow{k} & b \end{array}$$

Dann gibt es ein $K \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $k \geq K$ gilt

$$\sum_{i=0}^{n_k^{(1)}} t_i = p_{n_k^{(1)}} < r < p_{n_k^{(2)}} = \sum_{i=0}^{n_k^{(2)}} t_i.$$

Für jedes $k \geq K$ existiert also eine natürliche Zahl m_k mit

$$\sum_{i=0}^{n_k^{(1)}+m_k} t_i < r \text{ , aber } \sum_{i=0}^{n_k^{(1)}+m_k+1} t_i \geq r.$$

Definiert man $n_k^{(3)} = n_k^{(1)} + m_k$ für $k \in \mathbb{N}$, so erhält man daraus

$$0 < r - p_{n_k^{(3)}} = r - \sum_{i=0}^{n_k^{(3)}} t_i \leq t_{n_k^{(3)}+1} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Also ist r Grenzwert von $\{p_{n_k^{(3)}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ und damit $r \in \overline{\{p_1, p_2, \ldots\}}$. □

Lemma 1.23. *Für* $d \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+d-1)!}{n!}}{(n+1)^{d-1}} = 1.$$

Beweis. Benutzt man die Stirlingsche Formel $\lim\limits_{n\to\infty}(n!/\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}) = 1$, so folgt die Behauptung aus der Beobachtung, dass

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi}(n+d-1)^{n+\frac{1}{2}+d-1}e^{-n-d+1}}{\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}(n+1)^{(d-1)}} \\
= \;& e^{1-d} \lim_{n\to\infty} (\frac{n+d-1}{n})^{n+\frac{1}{2}}(\frac{n+d-1}{n+1})^{d-1} \\
= \;& e^{1-d} \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{d-1}{n})^{n}(1 + \frac{d-1}{n})^{\frac{1}{2}}(1 + \frac{d-2}{n+1})^{d-1} \\
= \;& e^{1-d}e^{d-1} = 1.
\end{aligned}$$

□

Kapitel 2

Eigenschaften von M_z

2.1 Wesentliche Normalität von H_d^f

Sei im Folgenden $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ immer eine Potenzreihe in einer komplexen Variablen mit Konvergenzradius $R = r^2 > 0$ und $a_0 = 1, a_n > 0 \ \forall n \geq 1$ und H_d^f der nach Definition 1.13 zugehörige funktionale Hilbertraum. Weiter setzen wir $a_{-1} = 0$.

Definition 2.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^d$ und H ein funktionaler Hilbertraum über Ω. Eine Funktion $g : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt Multiplikator von H, falls $gH \subset H$ gilt. Für einen Multiplikator $g : \Omega \to \mathbb{C}$ bezeichne $M_g : H \to H,\ h \mapsto gh$ den zugehörigen Multiplikationsoperator.*

Eine einfache Anwendung des Graphensatzes zeigt, dass der von einem Multiplikator induzierte Multiplikationsoperator $M_g : H \to H$ automatisch stetig ist. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit den Eigenschaften des d-Tupels $M_z = (M_{z_1}, \ldots, M_{z_d})$, wobei die M_{z_i} die Multiplikationsoperatoren mit den Koordinatenfunktionen z_i bezeichnen. Unser primäres Ziel ist dabei eine Bedingung zu finden, unter der die Räume H_d^f wesentlich normal sind.

Definition 2.2. *Sei H ein funktionaler Hilbertraum über $\Omega \subset \mathbb{C}^d$. Ein Tupel $T = (T_1, \ldots, T_d)$ vertauschender linearer Operatoren $T_i : H \to H$ heißt beschränkt, falls alle T_i beschränkt sind. Ist T beschränkt, so nennt man T wesentlich normal, wenn $T_i^* T_i - T_i T_i^*$ kompakt ist für $i = 1, \ldots, d$. Ist $M_z = (M_{z_1}, \ldots, M_{z_d})$ wesentlich normal, so nennt man H wesentlich normal.*

Aus dieser Definition erhält man direkt einen einfachen Zusammenhang zwischen der Beschränktheit von M_z und den Koeffizienten der H_d^f zu Grunde liegenden Potenzreihe.

Satz 2.3. *Es sind äquivalent:*

$$
\begin{array}{rl}
(i) & \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} < \infty, \\
(ii) & M_{z_i} : H_d^f \to H_d^f \text{ ist beschränkt für ein } i \in \{1,\dots,d\}, \\
(iii) & M_{z_i} : H_d^f \to H_d^f \text{ ist beschränkt für } i = 1,\dots,d.
\end{array}
$$

In diesem Fall gilt: $\|M_{z_i}\| = (\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{a_{n+1}})^{1/2}$ *für* $i = 1,\dots,d$.

Beweis. $(iii) \Rightarrow (ii)$: Ist klar.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Sei M_{z_i} beschränkt für ein festes $i \in \{1,\dots,d\}$. Dann gilt für $C = \|M_{z_i}\|$ und alle $\alpha \in \mathbb{N}^d$

$$
\begin{aligned}
\frac{(\alpha+e_i)!}{a_{|\alpha|+1}(|\alpha|+1)!} &= \|z^{\alpha+e_i}\|^2 \\
= \quad \|M_{z_i} z^\alpha\|^2 &\leq C^2 \|z^\alpha\|^2 = C^2 \frac{\alpha!}{a_{|\alpha|}|\alpha|!}
\end{aligned}
$$

und damit

$$\frac{\alpha_i+1}{|\alpha|+1} \frac{a_{|\alpha|}}{a_{|\alpha|+1}} \leq C^2.$$

Also ist

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq C^2 = \|M_{z_i}\|^2.$$

$(i) \Rightarrow (iii)$: Ist umgekehrt das letzte Supremum endlich, so gilt für beliebige $h = \sum\limits_{\alpha\in\mathbb{N}^d} b_\alpha z^\alpha \in H_d^f$ mit $C = (\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{a_{n+1}})^{\frac{1}{2}}$ für $i = 1,\dots,d$:

$$
\begin{aligned}
\|\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} b_\alpha z^{\alpha+e_i}\|^2 &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} |b_\alpha|^2 \|z^{\alpha+e_i}\|^2 \\
&\leq \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} |b_\alpha|^2 C^2 \|z^\alpha\|^2 \\
&= C^2 \|\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} b_\alpha z^\alpha\|^2 \\
&= C^2 \|h\|^2.
\end{aligned}
$$

Also ist M_{z_i} beschränkt für $i = 1,\dots,d$ mit $\|M_{z_i}\|^2 \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{a_{n+1}}$. □

Ist M_{z_i} beschränkt, so kann man die Wirkung von $M_{z_i}^*$ leicht angeben und erhält als Anwendung von Lemma 1.17 die Darstellungen von $\sum_{i=1}^{d} M_{z_i} M_{z_i}^*$ und $\sum_{i=1}^{d} M_{z_i}^* M_{z_i}$ über die Koeffizienten der Potenzreihe f.

Lemma 2.4. *Bezeichne E_n die Orthogonalprojektion von H_d^f auf $\mathbb{H}_n$, den Raum der homogenen Polynome vom Grad n. Sei $M_z = (M_{z_1}, \ldots, M_{z_d})$ beschränkt. Dann gilt für $i = 1, \ldots, d$ und $\alpha \in \mathbb{N}^d$:*

$$(i) \quad M_{z_i}^* z^\alpha = \frac{\alpha_i}{|\alpha|} \frac{a_{|\alpha|-1}}{a_{|\alpha|}} z^{\alpha - e_i} \quad (= 0, \text{ falls } \alpha_i = 0),$$

$$(ii) \quad \sum_{i=1}^{d} M_{z_i}^* M_{z_i} = \text{SOT-}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (n+d)}{a_{n+1}(n+1)} E_n,$$

$$\sum_{i=1}^{d} M_{z_i} M_{z_i}^* = \text{SOT-}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} E_n.$$

Beweis. (i) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ erhält man:

$$\begin{aligned} \langle M_{z_i}^* z^\alpha, z^\beta \rangle &= \langle z^\alpha, M_{z_i} z^\beta \rangle \\ &= \langle z^\alpha, z^{\beta + e_i} \rangle \\ &= \begin{cases} \frac{\alpha!}{|\alpha|! a_{|\alpha|}}, & \alpha = \beta + e_i \\ 0 \quad, & \alpha \neq \beta + e_i. \end{cases} \end{aligned}$$

Also ist $M_{z_i}^* z^\alpha = C z^{\alpha - e_i}$ für ein $C > 0$. Aus

$$\begin{aligned} \langle M_{z_i}^* z^\alpha, z^{\alpha - e_i} \rangle &= C \langle z^{\alpha - e_i}, z^{\alpha - e_i} \rangle \\ &= C \frac{(\alpha - e_i)!}{|\alpha - e_i|! a_{|\alpha - e_i|}}, \end{aligned}$$

erhält man für C:

$$\begin{aligned} C &= \frac{\alpha!}{(\alpha - e_i)!} \frac{|\alpha - e_i|!}{|\alpha|!} \frac{a_{|\alpha - e_i|}}{a_{|\alpha|}} \\ &= \alpha_i \frac{(|\alpha| - 1)!}{|\alpha|!} \frac{a_{|\alpha|-1}}{a_{|\alpha|}} \\ &= \frac{\alpha_i}{|\alpha|} \frac{a_{|\alpha|-1}}{a_{|\alpha|}}. \end{aligned}$$

Also gilt:

$$M_{z_i}^* z^\alpha = \frac{\alpha_i}{|\alpha|} \frac{a_{|\alpha|-1}}{a_{|\alpha|}} z^{\alpha - e_i}.$$

(ii) Nach (i) gilt für $\alpha \in \mathbb{N}^d$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{d} M_{z_i}^* M_{z_i} z^\alpha &= \frac{|\alpha|+d}{|\alpha|+1} \frac{a_{|\alpha|}}{a_{|\alpha|+1}} z^\alpha \\
\sum_{i=1}^{d} M_{z_i} M_{z_i}^* z^\alpha &= \frac{a_{|\alpha|-1}}{a_{|\alpha|}} z^\alpha.
\end{aligned}$$

Aus Lemma 1.17 erhält man, dass die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(n+d)}{a_{n+1}(n+1)} E_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} E_n$ τ_{SOT}-konvergent sind und durch Vergleich der Werte auf z^α ($\alpha \in \mathbb{N}^d$) folgt die Behauptung. □

Mit den soeben gewonnenen Darstellungen lässt sich nun eine Bedingung an die Koeffizienten der Potenzreihe f angeben, die sicherstellt, dass der Raum $z_1 H_d^f + \dots + z_d H_d^f \subset H_d^f$ abgeschlossen ist.

Satz 2.5. *Sei M_z beschränkt. Dann sind äquivalent:*

$$\begin{aligned}
&(i) && z_1 H_d^f + \dots + z_d H_d^f \subset H_d^f \text{ ist abgeschlossen,} \\
&(ii) && z_1 H_d^f + \dots + z_d H_d^f = \{h \in H_d^f; h(0) = 0\}, \\
&(iii) && \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{a_{n+1}} > 0.
\end{aligned}$$

Beweis. $(i) \Leftrightarrow (ii)$: Da für alle $n \in \mathbb{N}$ $a_n \neq 0$ gilt, folgt mit Lemma 2.4:

$$\bigcap_{i=1}^{d} \text{Ker } M_{z_i}^* = \mathbb{C}(= \{h \in H_d^f; h = const.\}).$$

Nach Lemma 1.18 gilt also: $\overline{\sum\limits_{i=1}^{d} z_i H_d^f} = \{h \in H_d^f; h(0) = 0\}$.

$(i) \Rightarrow (iii)$: Sei

$$A = (M_{z_1}, \dots, M_{z_d}) : (H_d^f)^d \to H_d^f.$$

Dann ist Im $A = z_1 H_d^f + \dots + z_d H_d^f$ abgeschlossen. Also ist auch Im A^* abgeschlossen. Damit erhält man die folgende Zerlegung:

$$(H_d^f)^d = \overline{\text{Im } A^*} \oplus (\overline{\text{Im } A^*})^\perp = \text{Im } A^* \oplus \text{Ker } A.$$

Also erhält man für $AA^* = \sum\limits_{i=1}^{d} M_{z_i} M_{z_i}^* = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} E_n$, dass

$$\text{Im } AA^* = \text{Im } A \subset H_d^f$$

abgeschlossen ist. Daher ist

$$AA^* : (\text{Ker } AA^*)^\perp \to H_d^f$$

injektiv mit abgeschlossenem Bild, also nach unten beschränkt. Folglich existiert ein $C > 0$ so, dass für alle $n \geq 1$ und $x \in E_n H_d^f$ gilt:

$$C\|x\| \leq \|AA^*x\| = \|\frac{a_{n-1}}{a_n}x\|.$$

Damit ist $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{a_{n-1}}{a_n} > 0$.
$(iii) \Rightarrow (i)$: Ist umgekehrt $r = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{a_{n-1}}{a_n} > 0$, so folgt für alle

$$x = \sum_{n=1}^\infty x_n \in \bigoplus_{n=1}^\infty \mathbb{H}_n = (\text{Ker } A^*)^\perp = (\text{Ker } AA^*)^\perp,$$

dass

$$\|AA^*x\|^2 = \sum_{n=1}^\infty (\frac{a_{n-1}}{a_n})^2 \|x_n\|^2 \geq r^2 \sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^2 = r^2\|x\|^2.$$

Nach Satz 1.19 ist Im $(AA^*) \subset H_d^f$ abgeschlossen. Wegen

$$\overline{\text{Im } A} = \overline{A\overline{\text{Im } A^*}} \subset \text{Im } AA^* \subset \text{Im } A$$

ist auch $z_1 H_d^f + \cdots + z_d H_d^f = \text{Im } A \subset H_d^f$ abgeschlossen. □

Der folgende Satz gibt nun die Charakterisierung der Potenzreihen an, für die der zugehörige funktionale Hilbertraum H_d^f wesentlich normal ist und stellt damit einen zentralen Punkt in dieser Arbeit dar.

Satz 2.6. *Sei M_z beschränkt. Dann ist M_z wesentlich normal genau dann, wenn*

$$\lim_{n\to\infty} [\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{a_{n-1}}{a_n}] = 0.$$

Beweis. Nach Lemma 2.4 gilt für alle $\alpha \in \mathbb{N}^d$ und $i = 1, \ldots, d$:

$$\begin{aligned}
(M_{z_i}^* M_{z_i} - M_{z_i} M_{z_i}^*) z^\alpha &= (\frac{\alpha_i + 1}{|\alpha| + 1} \frac{a_{|\alpha|}}{a_{|\alpha|+1}} - \frac{\alpha_i}{|\alpha|} \frac{a_{|\alpha|-1}}{a_{|\alpha|}}) z^\alpha \\
&= (\frac{\alpha_i|\alpha| + |\alpha|}{|\alpha|(|\alpha|+1)} \frac{a_{|\alpha|}}{a_{|\alpha|+1}} - \frac{\alpha_i|\alpha| + \alpha_i}{|\alpha|(|\alpha|+1)} \frac{a_{|\alpha|-1}}{a_{|\alpha|}}) z^\alpha \\
&= (\frac{\alpha_i}{|\alpha|}(\frac{a_{|\alpha|}}{a_{|\alpha|+1}} - \frac{a_{|\alpha|-1}}{a_{|\alpha|}}) + \frac{|\alpha| - \alpha_i}{|\alpha|(|\alpha|+1)} \frac{a_{|\alpha|}}{a_{|\alpha|+1}}) z^\alpha.
\end{aligned}$$

Seien E_α die Orthogonalprojektion auf $\mathbb{C}z^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{N}^d)$ und

$$c_\alpha^{(i)} := \frac{\alpha_i}{|\alpha|}\left(\frac{a_{|\alpha|}}{a_{|\alpha|+1}} - \frac{a_{|\alpha|-1}}{a_{|\alpha|}}\right) + \frac{|\alpha|-\alpha_i}{|\alpha|(|\alpha|+1)}\frac{a_{|\alpha|}}{a_{|\alpha|+1}} \quad (\alpha \in \mathbb{N}^d, i = 1, \ldots, d).$$

Dann erhält man aus der Beschränktheit von M_z für jede Abzählung $j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^d$ und $i = 1, \ldots, d$, dass

$$\begin{aligned}
\sup_{n\in\mathbb{N}} |c_{j(n)}^{(i)}| &= \sup_{\alpha\in\mathbb{N}^d} |c_\alpha^{(i)}| \\
&= \sup_{\alpha\in\mathbb{N}^d} \left|\frac{\alpha_i}{|\alpha|}\left(\frac{a_{|\alpha|}}{a_{|\alpha|+1}} - \frac{a_{|\alpha|-1}}{a_{|\alpha|}}\right) + \frac{|\alpha|-\alpha_i}{|\alpha|(|\alpha|+1)}\frac{a_{|\alpha|}}{a_{|\alpha|+1}}\right| \\
&\le \sup_{\alpha\in\mathbb{N}^d} \left(\left|\frac{a_{|\alpha|}}{a_{|\alpha|+1}} - \frac{a_{|\alpha|-1}}{a_{|\alpha|}}\right| + \frac{1}{|\alpha|+1}\frac{a_{|\alpha|}}{a_{|\alpha|+1}}\right) \\
&\le \sup_{\alpha\in\mathbb{N}^d} \left|\frac{a_{|\alpha|}}{a_{|\alpha|+1}}\right| + \left|\frac{a_{|\alpha|-1}}{a_{|\alpha|}}\right| + \frac{1}{|\alpha|+1}\frac{a_{|\alpha|}}{a_{|\alpha|+1}} \\
&\le \sup_{\alpha\in\mathbb{N}^d} \left(2 + \frac{1}{|\alpha|+1}\right)\frac{a_{|\alpha|}}{a_{|\alpha|+1}} < \infty.
\end{aligned}$$

Aus Lemma 1.17 (i) folgt damit für $i = 1, \ldots, d$:

$$\sum_{n=0}^\infty c_{j(n)}^{(i)} E_{j(n)} \text{ ist } \tau_{SOT}\text{-konvergent.}$$

Durch Vergleich der Werte auf z^α $(\alpha \in \mathbb{N}^d)$ erhält man

$$M_{z_i}^* M_{z_i} - M_{z_i} M_{z_i}^* = \sum_{n=0}^\infty c_{j(n)}^{(i)} E_{j(n)} \qquad (i = 1, \ldots, d).$$

Setze

$$d_\alpha^{(i)} = \frac{\alpha_i}{|\alpha|}\left(\frac{a_{|\alpha|}}{a_{|\alpha|+1}} - \frac{a_{|\alpha|-1}}{a_{|\alpha|}}\right) \quad (\alpha \in \mathbb{N}^d,\ i = 1, \ldots, d).$$

Da

$$c_{j(n)}^{(i)} - d_{j(n)}^{(i)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

gilt, folgt mit Lemma 1.17 (ii), dass $M_{z_i}^* M_{z_i} - M_{z_i} M_{z_i}^*$ kompakt ist genau dann, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} d_{j(n)}^{(i)} = 0$ ist. Wenn

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{a_{n-1}}{a_n}\right) = 0$$

ist, dann gilt auch

$$d_{j(n)}^{(i)} = \frac{j(n)_i}{|j(n)|}\left(\frac{a_{|j(n)|}}{a_{|j(n)|+1}} - \frac{a_{|j(n)|-1}}{a_{|j(n)|}}\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Sei umgekehrt die Folge $(d_{j(n)}^{(i)})_{n\geq 0}$ eine Nullfolge. Wäre $(\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{a_{n-1}}{a_n})_{n\geq 1}$ keine Nullfolge, so würde ein $\epsilon > 0$ existieren so, dass

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \geq \epsilon$$

wäre für unendlich viele $n \geq 1$. Zu jeder dieser Zahlen n gäbe es ein $k_n \in \mathbb{N}$ mit $j(k_n) = ne_i$. Für diese n wäre dann aber

$$|d_{j(k_n)}^{(i)}| = \frac{j(k_n)_i}{|j(k_n)|}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \geq \epsilon.$$

Dies widerspricht der Voraussetzung, dass $(d_{j(n)}^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. □

Betrachtet man noch einmal die vorangegangenen Resultate, so erscheint die folgende Definition sinnvoll.

Definition 2.7. *Sei $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Wir nennen f regulär, wenn gilt:*

1. $0 < \inf_n \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \sup_n \frac{a_n}{a_{n+1}} < \infty$
2. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{a_{n-1}}{a_n}\right] = 0.$

Mit dieser Definition erhalten wir direkt das folgende Korollar.

Korollar 2.8. *Die Potenzreihe $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ist genau dann regulär, wenn $z_1 H_d^f + \cdots + z_d H_d^f \subset H_d^f$ abgeschlossen und der funktionale Hilbertraum H_d^f wesentlich normal ist.*

2.2 Mehrdimensionale Spektralbegriffe

Sei X ein Banachraum und $T = (T_1, \ldots, T_d) \in L(X)^d$ ein vertauschendes Tupel. Für $p = 0, \ldots, d$ sei

$$\Lambda^p(\sigma, X) = \{\sum_{1\leq i_1 < \ldots < i_p \leq d} x_{i_1\ldots i_p} s_{i_1} \wedge \ldots \wedge s_{i_p}; x_{i_1\ldots i_p} \in X\}$$

die Menge der p-Formen in d Unbestimmten $s_1, \ldots, s_d$ und Koeffizienten in X. Abkürzend schreiben wir die Elemente von $\Lambda^p(\sigma, X)$ in der Form

$$\sum_{|I|=p} x_I s_I.$$

Hierbei durchläuft I alle Multiindizes $1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq d$. Man macht $\Lambda^p(\sigma, X)$ zu einem Banachraum vermöge der Identifizierung

$$\Lambda^p(\sigma, X) \cong X^{\binom{d}{p}}.$$

Die Abbildungen

$$\delta_T^p : \Lambda^p(\sigma, X) \to \Lambda^{p+1}(\sigma, X), \ \sum_{|I|=p} x_I s_I \mapsto \sum_{j=1}^{d} \sum_{|I|=p} T_j x_I s_j \wedge s_I$$

bilden einen Komplex stetig linearer Operatoren

$$K^\bullet(T, X) : 0 \to \Lambda^0(\sigma, X) \xrightarrow{\delta_T^0} \Lambda^1(\sigma, X) \xrightarrow{\delta_T^1} \ldots \xrightarrow{\delta_T^{d-1}} \Lambda^d(\sigma, X) \to 0$$

zwischen Banachräumen. Diesen bezeichnet man als Koszul-Komplex von T. Die Quotientenvektorräume

$$H^p(T, X) = \text{Kern } \delta_T^p / \text{Im } \delta_T^{p-1}$$

heißen die Kohomologiegruppen von $K^\bullet(T, X)$. Mit diesen Bezeichnungen können wir das Spektrum und das wesentliche Spektrum vertauschender Tupel $T = (T_1, \ldots, T_d) \in L(X)^d$ auf einem Banachraum X definieren.

Definition 2.9. *Sei X ein Banachraum und $T = (T_1, \ldots, T_d) \in L(X)^d$ ein vertauschendes Tupel. Man nennt T Fredholmsch, falls*

$$\dim H^p(T, X) < \infty \qquad \forall p = 0, \ldots, d.$$

In diesem Fall definiert man durch

$$\text{ind } T = \sum_{p=0}^{d} (-1)^p \dim H^p(T, X)$$

den Index von T. Weiter bezeichnet man

$$\sigma(T) = \sigma(T, X) = \{z \in \mathbb{C}^d; K^\bullet(z - T, X) \text{ ist nicht exakt}\}$$

als (Taylor-)Spektrum von T und

$$\sigma_e(T) = \{z \in \mathbb{C}^d; z - T \text{ ist nicht Fredholmsch}\} \ (\subset \sigma(T))$$

als wesentliches (Taylor-)Spektrum von T.

Unser Ziel ist es, das Spektrum und das wesentliche Spektrum von M_z zu berechnen. Dazu benötigen wir jedoch noch ein paar vorbereitende Bemerkungen.

Lemma 2.10. *Seien N, K, M Vektorräume mit $\dim N = n < \infty$ und $\dim M = m < \infty$ und seien $j : N \to K, q : K \to M$ lineare Abbildungen so, dass die Sequenz*

$$\cdots \to N \xrightarrow{j} K \xrightarrow{q} M \to \cdots$$

in K exakt ist. Dann ist $\dim K < \infty$. Falls $n = m = 0$ gilt, ist $K = \{0\}$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\dim K &= \dim \operatorname{Ker} q + \dim \operatorname{Im} q \\
&= \dim \operatorname{Im} j + \dim \operatorname{Im} q \\
&= \dim N - \dim \operatorname{Ker} j + \dim \operatorname{Im} q \\
&\leq n + m < \infty.
\end{aligned}$$

Daran erkennt man auch, dass man für $n = m = 0$ auch $K = \{0\}$ erhält. □

Theorem 2.11. *Seien X, Y, Z Hilberträume und $j : Y \to X, q : X \to Z$ stetig lineare Abbildungen so, dass die Sequenz*

$$0 \to Y \xrightarrow{j} X \xrightarrow{q} Z \to 0$$

exakt ist. Seien weiter $R \in L(Y)^d, T \in L(X)^d, S \in L(Z)^d$ vertauschende Tupel so, dass komponentenweise $j \circ R = T \circ j$ und $q \circ T = S \circ q$ gilt. Dann ist das (wesentliche) Spektrum von R (bzw. T,S) in der Vereinigung der (wesentlichen) Spektren der beiden jeweils anderen enthalten.

Beweis. Sei $0 \to Y \xrightarrow{j} X \xrightarrow{q} Z \to 0$ eine kurze exakte Sequenz wie in der Voraussetzung. Dann gibt es für $z \in \mathbb{C}^d$ nach [Lang, Theorem IV.2.1] Abbildungen

$$d^i : H^{i-1}(z - S, Z) \to H^i(z - R, Y) \quad (i = 1, \ldots, d)$$

so, dass die lange Sequenz

$$\begin{aligned}
0 &\to H^0(z-R,Y) \xrightarrow{j^0} H^0(z-T,X) \xrightarrow{q^0} H^0(z-S,Z) \\
&\xrightarrow{d^1} H^1(z-R,Y) \xrightarrow{j^1} H^1(z-T,X) \xrightarrow{q^1} H^1(z-S,Z) \\
&\ \vdots \\
&\xrightarrow{d^d} H^d(z-R,Y) \xrightarrow{j^d} H^d(z-T,X) \xrightarrow{q^d} H^d(z-S,Z) \to 0
\end{aligned}$$

exakt ist. Dabei sind für $i = 0, \dots, d$:

$$\begin{gathered} j^i : H^i(z - R, Y) \to H^i(z - T, X), \\ \sum_{|I|=i} y_I s_I + \operatorname{Im}\, \delta^{i-1}_{z-R} \mapsto \sum_{|I|=i} j(y_I) s_I + \operatorname{Im}\, \delta^{i-1}_{z-T} \end{gathered}$$

und

$$\begin{gathered} q^i : H^i(z - T, X) \to H^i(z - S, Z), \\ \sum_{|I|=i} x_I s_I + \operatorname{Im}\, \delta^{i-1}_{z-T} \mapsto \sum_{|I|=i} q(x_I) s_I + \operatorname{Im}\, \delta^{i-1}_{z-S}. \end{gathered}$$

Dann folgt die Behauptung aus Lemma 2.10. Denn ist $z \notin \sigma(R) \cup \sigma(S)$ (bzw. $z \notin \sigma_e(R) \cup \sigma_e(S)$), dann liefert das Lemma angewendet auf die exakten Sequenzen

$$\cdots \to H^i(z - R, Y) \xrightarrow{j^i} H^i(z - T, X) \xrightarrow{q^i} H^i(z - S, Y) \to \cdots$$

für $i = 0, \dots, d$, dass $\dim H^i(z - T, X) = 0$ (bzw. $\dim H^i(z - T, X) < \infty$) ist. Dann ist aber z auch nicht im (wesentlichen) Spektrum von T enthalten. Es gilt also $\sigma(T) \subset \sigma(R) \cup \sigma(S)$ (bzw. $\sigma_e(T) \subset \sigma_e(R) \cup \sigma_e(S)$). Die übrigen Inklusionen folgen analog. □

Satz 2.12. *Seien $S = (S_1, \dots, S_d) \in L(X)^d$ und $T = (T_1, \dots, T_d) \in L(Y)^d$ zwei vertauschende Tupel auf Banachräumen X und Y und $R \in L(X, Y)$ bijektiv so, dass*

$$RS_i = T_i R \quad 1 \leq i \leq d.$$

Dann gilt $\sigma(S) = \sigma(T)$ und $\sigma_e(S) = \sigma_e(T)$.

Beweis. Dies folgt direkt aus Theorem 2.11 mit $Z = \{0\}$. □

Wie im eindimensionalen Fall erhält man auch für d-Tupel von stetigen Operatoren und mehrdimensionale, analytische Abbildungen einen entsprechenden spektralen Abbildungssatz.

Satz 2.13. *Sei $S = (S_1, \dots, S_d) \in L(X)^d$ ein vertauschendes Tupel auf einem Banachraum X, U eine offene Umgebung von $\sigma(S)$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt für jede analytische Funktion $f : U \to \mathbb{C}^m$:*

$$\sigma(f(S)) = f(\sigma(S)) \text{ und } \sigma_e(f(S)) = f(\sigma_e(S)).$$

Beweis. Siehe [EP, Theorem 2.5.10] und [EP, Korollar 2.6.9]. □

Wir definieren nun den Begriff des gemeinsamen Spektrums in kommutativen Banachalgebren und stellen einen Zusammenhang zwischen den beiden Spektralbegriffen her.

Definition 2.14. *Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative Banachalgebra mit Einselement e und sei*

$$\triangle_{\mathcal{A}} = \{\lambda; \lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{C} \text{ nicht triviale multiplikative Linearform}\}$$

der Strukturraum von $\mathcal{A}$. Für $a = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathcal{A}^d$ nennt man die Menge

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \{z = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{C}^d;\; e \notin \sum_{i=1}^{d} (z_i - a_i)\mathcal{A}\} \subset \mathbb{C}^d$$

das gemeinsame Spektrum von a.

Mit elementarer Gelfandtheorie kann man zeigen, dass das gemeinsame Spektrum von $a = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathcal{A}^d$ wie im eindimensionalen Fall das Bild von $\triangle_{\mathcal{A}}$ unter der Gelfandtransformierten $\hat{a} = (\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_d)$ von a ist.

Lemma 2.15. *Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative Banachalgebra mit Einselement e und sei $a = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathcal{A}^d$. Dann gilt:*

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \{(\lambda(a_1), \ldots, \lambda(a_d)); \lambda \in \triangle_{\mathcal{A}}\}.$$

Beweis. Nach Definition gilt $z \in \sigma_{\mathcal{A}}(a)$ genau dann, wenn das Ideal

$$\sum_{i=1}^{d} (z_i - a_i)\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$$

echt ist. Nach allgemeiner Gelfandtheorie ist dies äquivalent zur Existenz einer multiplikativen Linearform $\lambda \in \triangle_{\mathcal{A}}$ mit

$$\sum_{i=1}^{d} (z_i - a_i)\mathcal{A} \subset \text{Ker } \lambda.$$

Die Gültigkeit dieser Inklusion ist äquivalent dazu, dass

$$\lambda(z_i - a_i) = 0, \text{für } i =, 1 \ldots, d$$

oder dass $z = (\lambda(a_1), \ldots, \lambda(a_d))$ gilt. $\square$

Das gemeinsame Spektrum von a kann man auch auffassen als Taylorspektrum eines geeigneten Tupels vertauschender Operatoren auf $\mathcal{A}$.

Lemma 2.16. *Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative Banachalgebra mit Einselement e. Für $a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathcal{A}^d$ sei $\sigma(L_a, \mathcal{A})$ das Taylorspektrum des vertauschenden Tupels $L_a = (L_{a_1}, \dots, L_{a_d}) \in L(\mathcal{A})^d$ der Multiplikationsoperatoren*

$$L_{a_i} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \ x \mapsto a_i x \qquad (i = 1, \dots, d).$$

Dann gilt:

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \sigma(L_a, \mathcal{A}).$$

Beweis. Gehört $z \in \mathbb{C}^d$ nicht zum Taylorspektrum $\sigma(L_a, \mathcal{A})$ von L_a, so ist insbesondere die letzte Abbildung im Koszul-Komplex $K^\bullet(z - L_a, \mathcal{A})$ surjektiv. Diese wirkt bis auf das Vorzeichen wie

$$\mathcal{A}^d \to \mathcal{A}, \ (x_i) \mapsto \sum_{i=1}^{d} (z_i - L_{a_i}) x_i = \sum_{i=1}^{d} (z_i - a_i) x_i.$$

Also ist $e \in \sum\limits_{i=1}^{d} (z_i - a_i)\mathcal{A}$ und $z \notin \sigma_{\mathcal{A}}(a)$.
Aus $z \notin \sigma_{\mathcal{A}}(a)$ folgt umgekehrt die Existenz von $x_1, \dots, x_d \in \mathcal{A}$ mit

$$\sum_{i=1}^{d} (z_i - a_i) x_i = e.$$

Dann ist aber auch $\sum\limits_{i=1}^{d} (z_i - L_{a_i}) L_{x_i} = 1_{\mathcal{A}}$. Weil für $i = 1, \dots, d$ der Operator L_{x_i} im Kommutanten von L_a liegt, folgt mit [EP, Lemma 2.2.4], dass der von $1_{\mathcal{A}} = \sum\limits_{i=1}^{d} (z_i - L_{a_i}) L_{x_i}$ induzierte Operator auf den Kohomologiegruppen

$$H^p(z - L_a, \mathcal{A}) \to H^p(z - L_a, \mathcal{A}), \ [x] \mapsto [1_{\mathcal{A}} x] = [x] \ , p = 0, \dots, d$$

der Nulloperator ist. Also ist

$$H^p(z - L_a, \mathcal{A}) = 0 \ , p = 0, \dots, d$$

und $z \notin \sigma(L_a, \mathcal{A})$. □

Wie im eindimensionalen Fall kann man zeigen, dass sich das Taylorspektrum von $L_a = (L_{a_1}, \dots, L_{a_d})$ für vertauschende Elemente $a_1, \dots, a_d$ einer unitalen C^*-Algebra $\mathcal{B}$ nicht ändert, wenn man zu einer unitalen C^*-Teilalgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ übergeht, die ebenfalls die Elemente $a_1, \dots, a_d$ enthält.

Satz 2.17. *Seien $a_1, \dots, a_d$ vertauschende Elemente einer unitalen C^*-Algebra $\mathcal{B}$. Dann gilt für jede unitale C^*-Teilalgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ mit $a_1, \dots, a_d \in \mathcal{A}$*

$$\sigma((L_{a_1}, \dots, L_{a_d}), \mathcal{A}) = \sigma((L_{a_1}, \dots, L_{a_d}), \mathcal{B}).$$

Beweis. Siehe [Curto]. □

Definition 2.18. *Sei H ein Hilbertraum. Dann bezeichnet man die C^*-Algebra*

$$\mathcal{C}(H) = L(H)/\mathcal{K}(H)$$

als die Calkin-Algebra von H.

Damit erhält man für ein vertauschendes Tupel $S = (S_a, \dots, S_d) \in L(H)^d$ auf einem Hilbertraum H, dass das wesentliche Taylorspektrum $\sigma_e(S)$ von S gleich dem Taylorspektrum von $L[S]$ auf der Calkin-Algebra $\mathcal{C}(H)$ ist.

Lemma 2.19. *Sei H ein Hilbertraum und $S = (S_1, \dots, S_d) \in L(H)^d$ ein vertauschendes Tupel von Operatoren. Dann gilt:*

$$\sigma_e(S) = \sigma(L_{[S]}, \mathcal{C}(H)).$$

Beweis. Siehe [EP, Korollar 2.6.11]. □

Bemerkung 2.20. *Ist H_d^f wesentlich normal, so ist $M_z \in L(H_d^f)^d$ wesentlich normal und nach dem Satz von Putnam-Fuglede ist die von $[M_{z_1}], \dots, [M_{z_d}]$ erzeugte C^*-Teilalgebra*

$$C^*(\{[M_{z_1}], \dots, [M_{z_d}]\}) \subset \mathcal{C}(H_d^f)$$

eine kommutative, unitale C^*-Algebra.

Der nächste Satz, der ebenfalls dazu dient, Spektrum und wesentliches Spektrum von M_z berechnen zu können, ist jedoch auch für sich genommen ein interessantes Ergebnis für wesentlich normale vertauschende Tupel stetiger Operatoren auf einem Hilbertraum.

Satz 2.21. *Sei H ein Hilbertraum und $T = (T_1, \dots, T_d) \in L(H)^d$ ein wesentlich normales vertauschendes Tupel stetiger Operatoren. Dann gilt*

$$\sigma_e(\sum_{i=1}^{d} T_i T_i^*) = \{|z|^2; z \in \sigma_e(T)\}.$$

Beweis. Da T wesentlich normal ist, ist $[T] = ([T_1], \ldots, [T_d]) \in \mathcal{C}(H)^d$ ein vertauschendes Tupel normaler Elemente. Mit

$$\mathcal{A} = C^*(\{[T_1], \ldots, [T_d]\}) \subset \mathcal{C}(H)$$

erhält man

$$\begin{array}{rcl}
\sigma_e(\sum_{i=1}^d T_i T_i^*) & = & \sigma_{\mathcal{C}(H)}([\sum_{i=1}^d T_i T_i^*]) \\
 & = & \sigma_{\mathcal{A}}([\sum_{i=1}^d T_i T_i^*]) \\
 & = & \{\lambda([\sum_{i=1}^d T_i T_i^*]); \lambda \in \triangle_{\mathcal{A}}\} \\
 & = & \{\sum_{i=1}^d \lambda([T_i])\overline{\lambda([T_i])}; \lambda \in \triangle_{\mathcal{A}}\} \\
\text{(Lemma 2.15)} & = & \{|z|^2; z \in \sigma_{\mathcal{A}}([T])\} \\
\text{(Lemma 2.16)} & = & \{|z|^2; z \in \sigma(L_{[T]}, \mathcal{A})\} \\
\text{(Satz 2.17)} & = & \{|z|^2; z \in \sigma(L_{[T]}, \mathcal{C}(H)\} \\
\text{(Lemma 2.19)} & = & \{|z|^2; z \in \sigma_e(T)\}.
\end{array}$$

□

2.3 Spektrum und wesentliches Spektrum

Sei H_d^f ein funktionaler Hilbertraum wie in Definition 1.13. In diesem Abschnitt setzen wir voraus, dass H_d^f wesentlich normal ist im Sinne von Definition 2.2. Weiter verwenden wir im Folgenden die Bezeichnungen

$$\begin{array}{rcl}
s^2 & = & \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}, \\
t^2 & = & \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}.
\end{array}$$

Dann gilt für den Konvergenzradius R von f: $s^2 \leq R \leq t^2$. Jetzt sind wir in der Lage, das eigentliche Resultat, nämlich eine Darstellung für das Spektrum und das wesentliche Spektrum von M_z, zu beweisen. Wie sich herausstellt hängen beide ausschließlich von s und t ab.

Theorem 2.22. *Sei H_d^f wesentlich normal. Dann gilt für das d-Tupel M_z auf H_d^f:*
(i) Das Taylorspektrum von M_z ist gegeben durch

$$\sigma(M_z) = \{z \in \mathbb{C}^d;\ |z| \leq t\}.$$

(ii) Das wesentliche Taylorspektrum von M_z ist gegeben durch

$$\sigma_e(M_z) = \{z \in \mathbb{C}^d; s \leq |z| \leq t\}.$$

Beweis. Wir beweisen zunächst die 2. Aussage des Theorems. Zu diesem Zweck beweisen wir jedoch zunächst die folgende Aussage:

$$\sigma_e(\sum_{i=1}^{d} M_{z_i} M_{z_i}^*) = [s^2, t^2].$$

" $\subseteq$ ": Sei $r \in \mathbb{R} \backslash [s^2, t^2]$.Dann gibt es ein $\epsilon_0 > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|r - \frac{a_{n-1}}{a_n}| \geq \epsilon_0$ für alle $n \geq N$.
Definiere $T = r \cdot I - \sum\limits_{i=1}^{d} M_{z_i} M_{z_i}^* = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (r - \frac{a_{n-1}}{a_n}) E_n$. Dann ist

$$\text{Ker } T = \{x \in H_d^f;\ \sum_{n=0}^{\infty} (r - \frac{a_{n-1}}{a_n}) E_n x = 0\} \subset \bigcap_{n \geq N} \text{Ker } E_n = \bigoplus_{n=0}^{N-1} \mathbb{H}_n$$

endlich dimensional.
Da für alle $x \in \bigoplus\limits_{n=N}^{\infty} \mathbb{H}_n$ gilt

$$\|Tx\|^2 = \sum_{n=N}^{\infty} |r - \frac{a_{n-1}}{a_n}|^2 \|E_n x\|^2 \geq \epsilon_0^2 \sum_{n=N}^{\infty} \|E_n x\|^2 = \epsilon_0^2 \|x\|^2,$$

ist Im $T \subset H_d^f$ abgeschlossen nach Satz 1.19. Da für $n \geq N$ und $|\alpha| = n$

$$z^\alpha = T(\frac{z^\alpha}{r - \frac{a_{n-1}}{a_n}}) \in \text{Im } T$$

gilt, folgt zusammen mit der Abgeschlossenheit von Im T die Inklusion

$$\bigoplus_{n=N}^{\infty} \mathbb{H}_n \subset \text{Im } T.$$

Also ist Im T endlich kodimensional und daher T Fredholm. Das zeigt die Inklusion

$$\sigma_e(\sum_{i=1}^{d} M_{z_i} M_{z_i}^*) \subseteq [s^2, t^2].$$

„ $\supseteq$ ": Sei $r \in [s^2, t^2]$. Dann folgt mit Lemma 1.22, dass

$$[s^2, t^2] \subset \overline{\{\frac{a_{n-1}}{a_n}; n \in \mathbb{N}\}}.$$

Also ist $[s^2, t^2] \subset \sigma(\sum_{i=1}^{d} M_{z_i} M_{z_i}^*)$. Mit der Normalität von $\sum_{i=1}^{d} M_{z_i} M_{z_i}^*$ folgt hieraus mit Satz 1.21 die noch zu zeigende Inklusion, falls $s^2 < t^2$ ist. Im Fall $s^2 = t^2$ ist zu zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \in \sigma_e(\sum_{i=1}^{d} M_{z_i} M_{z_i}^*).$$

Wegen Satz 1.21 dürfen wir annehmen, dass dieser Limes ein isolierter Punkt in $\sigma(\sum_{i=1}^{d} M_{z_i} M_{z_i}^*)$ ist. Dann ist

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = s^2 \text{ für fast alle } n$$

und damit

$$\dim \mathrm{Ker}\ (s^2 - \sum_{i=1}^{d} M_{z_i} M_{z_i}^*) = \infty.$$

Insgesamt gilt also

$$\sigma_e(\sum_{i=1}^{d} M_{z_i} M_{z_i}^*) = [s^2, t^2]. \qquad (\star)$$

Um daraus die 2. Aussage des Theorems zu folgern, definieren wir zunächst für jede unitäre $d \times d$-Matrix $u = (u_{ij}) \in M(n, \mathbb{C})$ den unitären Operator Γ_u auf H_d^f wie in Lemma 1.16 durch:

$$(\Gamma_u h)(z) = h(u^{-1} z) \ (h \in H_d^f).$$

Dann gilt für alle $f \in H_d^f, u \in M(n,\mathbb{C})$ unitär, $1 \leq i \leq d$ und $\lambda \in B_{\sqrt{R}}(0)$:

$$\begin{aligned}
\langle \Gamma_u M_{z_i} \Gamma_u^* f, K(\cdot,\lambda)\rangle &= \langle M_{z_i}\Gamma_{u^{-1}} f, K(u\cdot,\lambda)\rangle \\
&= (M_{z_i}\Gamma_{u^{-1}} f)(u^{-1}\lambda) \\
&= (z_i \cdot (f\circ u))(u^{-1}\lambda) \\
&= (u^{-1}\lambda)_i f(\lambda) = (\sum_{j=1}^d \overline{u}_{ji}\lambda_j) f(\lambda) \\
&= \sum_{j=1}^d \overline{u}_{ji}(\lambda_j f(\lambda)) = \sum_{j=1}^d \overline{u}_{ji}\langle M_{z_j} f, K_\lambda\rangle \\
&= \langle \sum_{j=1}^d \overline{u}_{ji} M_{z_j} f, K_\lambda\rangle.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\Gamma_u M_{z_i}\Gamma_u^* = \sum_{j=1}^d \overline{u}_{ji} M_{z_j}. \qquad (\dagger)$$

Mit Hilfe von $(\dagger)$ sieht man, dass das wesentliche Taylorspektrum von M_z $\mathcal{U}$-invariant ist, denn für alle $u \in M(n,\mathbb{C})$ unitär folgt mit Satz 2.12 und Satz 2.13

$$\sigma_e(M_z) = \sigma_e(u^{-1}\begin{pmatrix} M_{z_1} \\ \vdots \\ M_{z_d}\end{pmatrix}) = u^{-1}(\sigma_e(M_z)).$$

Also gilt $u\sigma_e(M_z) = \sigma_e(M_z)$.
Mit diesen Vorbereitungen können wir nun die zweite Aussage des Theorems beweisen. Da H_d^f wesentlich normal ist, ist das Multiplikationstupel $M_z = (M_{z_1},\ldots,M_{z_d}) \in L(H_d^f)^d$ definitionsgemäß wesentlich normal. Also ist

$$[M_z] = ([M_{z_1}],\ldots,[M_{z_d}]) \in \mathcal{C}(H_d^f)^d$$

ein vertauschendes Tupel normaler Elemente.
Mit Satz 2.21 und $(\star)$ erhält man:

$$[s^2,t^2] \;=\; \sigma_e(\sum_{i=1}^d M_{z_i}M_{z_i}^*) = \{|z|^2; z \in \sigma_e(M_z)\}.$$

Also gilt

$$[s,t] = \{|z|; z \in \sigma_e(M_z)\}.$$

Da es zu je zwei Elementen $z, w \in \mathbb{C}^d$ mit $|z| = |w|$ eine unitäre Matrix $u \in M(n, \mathbb{C})$ mit $uz = w$ gibt und da für jede solche Matrix

$$u\sigma_e(M_z) = \sigma_e(M_z)$$

gilt, erhält man die Behauptung

$$\sigma_e(M_z) = \{z \in \mathbb{C}^d; s \leq |z| \leq t\}.$$

Kommen wir nun zum 1.Teil des Theorems. Definitionsgemäß gilt:

$$\sigma_e(M_z) \subseteq \sigma(M_z).$$

Da für $|\lambda| < \sqrt{R}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{d} (\lambda_i - M_{z_i}) H_d^f \neq H_d^f,$$

ist auch $\overline{B_{\sqrt{R}}(0)} \subset \sigma(M_z)$. Wegen $s \leq \sqrt{R} \leq t$ gilt insgesamt

$$\{z \in \mathbb{C}^d; |z| \leq t\} \subset \sigma(M_z).$$

Zum Beweis der anderen Inklusion überlegt man sich genauso wie für das wesentliche Spektrum, dass das Spektrum von M_z $\mathcal{U}$-invariant ist, also dass für jede unitäre Matrix $u \in M(n, \mathbb{C})$ gilt:

$$u\sigma(M_z) = \sigma(M_z).$$

Sei nun $r > t$. Gäbe es ein $z \in \sigma(M_z)$ mit $|z| = r$, so würde aus der $\mathcal{U}$-Invarianz insbesondere

$$\partial D_r(0) \times \{0\} \subset \sigma(M_z)$$

folgen. Wendet man Satz 2.13 an auf $\pi_1 : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$, die Projektion auf die erste Komponente, so erhält man daraus, dass

$$\partial D_r(0) \subset \sigma(M_{z_1}).$$

Setze

$$r_1 = \sup\{c > 0; \partial D_c(0) \subset \sigma(M_{z_1})\} (\geq r).$$

Da $\sigma(M_{z_1})$ abgeschlossen ist, folgt

$$\partial D_{r_1}(0) \subset \sigma(M_{z_1}).$$

Wäre $\partial D_{r_1}(0) \cap \sigma_e(M_{z_1}) = \varnothing$, so würde aus Satz 1.20 folgen, dass

$$\partial D_{r_1}(0) \subset \sigma(M_{z_1}) \backslash \partial\sigma(M_{z_1}) = \text{Int}\ (\sigma(M_{z_1}))$$

und es gäbe ein $c > r_1$ so, dass $\partial D_c(0) \subset \sigma(M_{z_1})$. Dieser Widerspruch impliziert, dass ein $\lambda \in \partial D_{r_1}(0) \cap \sigma_e(M_{z_1})$ existiert. Wendet man erneut Satz 2.13 auf $\pi_1 : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ an, so erhält man die Existenz eines Punktes $\tilde{z} \in \sigma_e(M_z)$ mit

$$\lambda = \pi_1(\tilde{z}).$$

Dann wäre aber $|\tilde{z}| \geq |\lambda| = r_1 \geq r > t$ und $\tilde{z} \in \sigma_e(M_z)$. Das ist aber ein Widerspruch zu dem bereits bewiesenen 2. Teil des Theorems. Also folgt

$$\sigma(M_z) = \{z \in \mathbb{C}^d; |z| \leq t\}.$$

□

Kapitel 3

p-wesentliche Normalität

3.1 p-Schattenklassen

Wir definieren nun zunächst die p-Schattenklassen, um den Begriff der kompakten Operatoren zu verfeinern. Dies erlaubt uns die Definition der p-wesentlichen Normalität von Tupeln $T = (T_1, \ldots, T_d) \in L(H)^d$ vertauschender Operatoren auf einem Hilbertraum H. Dann können wir die p-wesentliche Normalität der funktionalen Hilberträume H_d^f und die von Unter- und Quotientenmoduln des Hilbertmoduls $H_d^f \otimes \mathbb{C}^r$ untersuchen.

Definition 3.1. *Seien H,K Hilberträume und $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Orthonormalbasis von H. Für $T \in L(H, K)$ sei $|T| = \sqrt{T^*T}$. Dann nennen wir*

$$\mathrm{tr}\ |T| = \sum_{\alpha \in A} \langle |T| x_\alpha, x_\alpha \rangle$$

die Spur von $|T|$. Diese ist unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis. Sei weiter $1 \leq p < \infty$. Dann definiert man die p-Schattenklasse $\mathcal{L}^p(H, K)$ als

$$\mathcal{L}^p(H, K) = \{T \in L(H, K); \mathrm{tr}\ |T|^p < \infty\}.$$

Weiter nennen wir

$$\|T\|_p = (\mathrm{tr}\ |T|^p)^{1/p}$$

die p-Norm von T. Abkürzend schreiben wir im Folgenden $\mathcal{L}^p(H)$ für $\mathcal{L}^p(H, H)$.

Einige grundlegende Eigenschaften der p-Schattenklassen sind in den folgenden Lemmata zusammengestellt.

Lemma 3.2. *Seien $1 \leq p < \infty$ und H,K Hilberträume. Dann gilt:*
(i) $\mathcal{L}^p(H,K) \subset \mathcal{K}(H,K)$ *ist ein linearer Teilraum.*
(ii) $\mathcal{L}^p(H,K)$ *ist ein Operatorideal in dem Sinne, dass für Hilberträume* H_0, K_0 *und* $A \in \mathcal{L}^p(H,K)$, $S \in L(H_0,H)$, $T \in L(K,K_0)$ *der Operator* TAS *zu* $\mathcal{L}^p(H_0,K_0)$ *gehört.*
(iii) $\mathcal{L}^p(H,K)$ *ist selbstadjungiert in dem Sinne, dass* $A \in \mathcal{L}^p(H,K)$ *genau dann, wenn* $A^* \in \mathcal{L}^p(K,H)$.

Beweis. Siehe [Meise-Vogt, Lemma 16.7]. □

Wegen Teil (i) von Lemma 3.2 bezeichnet man oft den Raum der kompakten Operatoren $\mathcal{K}(H)$ auf einem Hilbertraum H mit $\mathcal{L}^\infty(H)$.

Lemma 3.3. *Seien* $1 \leq p \leq \infty$, $H, K, H_1, \ldots, H_n, K_1, \ldots, K_m$ *Hilberträume.*
a) Für $A \in L(H,K)$ *sind äquivalent*

$$
\begin{aligned}
(i) &\quad A \in \mathcal{L}^{2p}(H,K),\\
(ii) &\quad A^*A \in \mathcal{L}^p(H).
\end{aligned}
$$

b) Für $A = (A_{ij}) \in L(\bigoplus_{i=1}^n H_i, \bigoplus_{j=1}^m K_j)$ *sind äquivalent:*

$$
\begin{aligned}
(i) &\quad A \in \mathcal{L}^p(\bigoplus_{i=1}^n H_i, \bigoplus_{j=1}^m K_j),\\
(ii) &\quad A_{ij} \in \mathcal{L}^p(H_j, K_i)\ (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n).
\end{aligned}
$$

Beweis. a) Für $p < \infty$ folgt die Behauptung direkt aus $|A|^{2p} = |A^*A|^p$. Für $p = \infty$ beachte man, dass ein Operator A genau dann kompakt ist, wenn A^*A kompakt ist. Die nichttriviale Richtung erhält man etwa mit der Polarzerlegung.

b) Seien $j_k : H_k \to \bigoplus_{i=1}^n H_i$ die Einbettung von H_k, $\pi_k : \bigoplus_{i=1}^n H_i \to H_k$ die kanonische Projektion auf H_k für $k = 1, \ldots, n$ und $J_l : K_l \to \bigoplus_{i=1}^m K_i$ die Einbettung von K_l, $\Pi_l : \bigoplus_{i=1}^m K_i \to K_l$ die kanonische Projektion auf K_l für $l = 1, \ldots, m$. Dann folgt wegen $j_k \in L(H_k, \bigoplus_{i=1}^n H_i), \pi_k \in L(\bigoplus_{i=1}^n H_i, H_k)$ für $k = 1, \ldots, n$, $J_l \in L(K_l, \bigoplus_{i=1}^m K_i), \Pi_l \in L(\bigoplus_{i=1}^m K_i, K_l)$ für $l = 1, \ldots, m$ und den Identitäten

$$
\begin{aligned}
A &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n J_i A_{ij} \pi_j\\
A_{ij} &= \Pi_i A j_j \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)
\end{aligned}
$$

die Behauptung aus Lemma 3.2 bzw. aus den Eigenschaften kompakter Operatoren. $\square$

Lemma 3.4. *Sei H ein Hilbertraum, $1 \leq p \leq \infty$, $A, B \in L(H)$ mit $0 \leq A \leq B$ und $B \in \mathcal{L}^p$. Dann ist auch $A \in \mathcal{L}^p$.*

Beweis. Da für alle $x \in H$ gilt $\|\sqrt{A}x\|^2 = \langle Ax, x\rangle \leq \langle Bx, x\rangle = \|\sqrt{B}x\|^2$, ist die Abbildung

$$\operatorname{Im} \sqrt{B} \to H, \ \sqrt{B}x \mapsto \sqrt{A}x$$

eine wohldefinierte Kontraktion. Setzt man diese zunächst stetig auf $\overline{\operatorname{Im} \sqrt{B}}$ und dann trivial zu einer Abbildung $C : H \to H$ mit $\|C\| \leq 1$ fort, so gilt

$$C\sqrt{B} = \sqrt{A}.$$

Nach Lemma 3.3 ist $\sqrt{B} \in \mathcal{L}^{2p}$. Also ist $\sqrt{A} \in \mathcal{L}^{2p}$ nach Lemma 3.2 (für $p = \infty$ ist $\sqrt{A}$ kompakt). Erneut mit Lemma 3.3 erhält man die Behauptung. $\square$

Mit Hilfe des nächsten Lemmas kann man für Operatoren der Form $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n P_n$, für paarweise orthogonale Orthogonalprojektionen (P_n) und beschränkte Folgen in (c_n) in $\mathbb{C}$, entscheiden, ob sie zu einer p-Schattenklasse gehören.

Lemma 3.5. *Sei H ein Hilbertraum und $(P_n)_{n\geq 0}$ eine Folge paarweise orthogonaler Orthogonalprojektionen mit $P_n \in L(H)\backslash\{0\}$. Dann sind für jede beschränkte Folge $(c_n)_{n\geq 0}$ in $\mathbb{C}$ und jede reelle Zahl $1 \leq p < \infty$ die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n P_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n|^p P_n$ τ_{SOT}-konvergent und es gilt*

$$|\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n|^p = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^p P_n.$$

Insbesondere gilt

$$\|\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n\|_p^p = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^p \dim(P_n H) \ \in [0, \infty].$$

Beweis. Da $(c_n)_{n\geq 0}$ beschränkt ist, ist auch $(|c_n|^p)_{n\geq 0}$ für $1 \leq p < \infty$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{C}$. Nach Lemma 1.17 (i) sind dann die genannten Reihen

τ_{SOT}-konvergent. Sei $c = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |c_n|$ und $A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n P_n$. Dann ist $\sigma(A) \subset \overline{D}_c(0)$ und die Abbildung

$$C(\overline{D}_c(0)) \to L(H),\ f \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f(c_n)P_n + f(0)1_{(\bigvee\limits_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} P_n)^{\perp}}$$

stimmt als C^*-Homomorphismus, der den polynomiellen Funktionalkalkül von A fortsetzt, mit dem C^0-Kalkül des normalen Operators A überein. Insbesondere gilt

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} f(c_n)P_n + f(0)1_{(\bigvee\limits_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} P_n)^{\perp}} \quad \text{für alle } f \in C(\overline{D}_c(0))$$

und

$$|\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n|^p = |A|^p = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^p P_n \quad \text{für alle } p \geq 1.$$

Wählt man die Orthonormalbasis $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ von H so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\overline{LH}\{x_\alpha; \alpha \in A \text{ mit } x_\alpha \in P_n H\} = P_n H,$$

so erhält man insbesondere:

$$\begin{aligned}
\|\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n\|_p^p &= \operatorname{tr} |\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n|^p \\
&= \sum_{\alpha\in A} \langle \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^p P_n x_\alpha, x_\alpha\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^p \dim(P_n H),
\end{aligned}$$

wobei die linke Seite genau dann endlich ist, wenn die Reihe auf der rechten Seite konvergiert. □

Definition 3.6. *Seien H ein Hilbertraum, $T = (T_1, \dots, T_d) \in L(H)^d$ ein vertauschendes Tupel und $1 \leq p \leq \infty$ eine reelle Zahl. Dann nennen wir T p-wesentlich normal, falls*

$$[T_i, T_j^*] \in \mathcal{L}^p(H)$$

für $i, j = 1, \dots, d$ gilt. Dabei ist $[T_i, T_j^*] = T_i T_j^* - T_j^* T_i$. Wir nennen einen funktionalen Hilbertraum H p-wesentlich normal, falls $M_z \in L(H)^d$ p-wesentlich normal ist.

Ein vertauschendes Tupel $T = (T_1, \ldots, T_d) \in L(H)^d$ ist nach dieser Definition ∞-wesentlich normal, wenn $[T_i, T_j^*] \in \mathcal{K}(H)$ ist für $i, j = 1, \ldots, d$. Nach dem Satz von Putnam-Fuglede ist das jedoch äquivalent dazu, dass T wesentlich normal ist. Die p-wesentliche Normalität stellt also eine Verfeinerung des Begriffs der wesentlichen Normalität dar. Bevor wir eine Charakterisierung funktionaler Hilberträume angeben, für die $M_z = (M_{z_1}, \ldots, M_{z_d})$ p-wesentlich normal ist, erinnern wir noch an den Raum der gewichteten, p-summierbaren Folgen.

Bemerkung 3.7. *Für $1 \leq p < \infty$ und eine Folge $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ positiver reeller Zahlen bezeichne*

$$l^p(\alpha_n) = \{(x_n)_{n\geq 0}; x_n \in \mathbb{C} \text{ für alle n und } \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \alpha_n < \infty\}$$

den $\mathbb{C}$-Vektorraum, der mit $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ gewichteten, p-summierbaren Folgen. Dieser wird bezüglich der Norm

$$\|(x_n)\| = (\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \alpha_n)^{\frac{1}{p}}$$

zu einem Banachraum.

3.2 p-wesentliche Normalität von H_d^f

Im Folgenden beschäftigen wir uns wieder mit dem funktionalen Hilbertraum H_d^f aus Kapitel 2. Für $\mathcal{L}^p(H_d^f)$ schreiben wir abkürzend $\mathcal{L}^p$. Das folgende Theorem liefert nun äquivalente Bedingungen zur p-wesentlichen Normalität von M_z. Abkürzend schreiben wir $M_i = M_{z_i}$ $(i = 1, \ldots, d)$ für die Multiplikationsoperatoren mit den Koordinatenfunktionen auf H_d^f im weiteren Verlauf dieser Arbeit.

Theorem 3.8. *Sei $0 < \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{a_{n+1}} < \infty$. Dann sind für $d < p < \infty$ äquivalent:*

$$
\begin{array}{ll}
(i) & M_i^* M_j - M_j M_i^* \in \mathcal{L}^p \ (i, j = 1, \ldots, d), \\
(ii) & M_i^* M_i - M_i M_i^* \in \mathcal{L}^p \ (i = 1, \ldots, d), \\
(iii) & \sum_{i=1}^{d} (M_i^* M_i - M_i M_i^*) \in \mathcal{L}^p, \\
(iv) & \sum_{n=1}^{\infty} n^{d-1} |\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{a_{n-1}}{a_n}|^p < \infty.
\end{array}
$$

Beweis. Sei $p > d$. Im Verlauf dieses Beweises steht "$\asymp$" für "hat dasselbe Konvergenzverhalten wie".
$(i) \Rightarrow (ii)$: ist klar.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: folgt direkt aus Lemma 3.2.
$(iii) \Rightarrow (iv)$: Nach Lemma 2.4 gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n(n+d)}{a_{n+1}(n+1)} - \frac{a_{n-1}}{a_n})E_n = \sum_{i=1}^{d}(M_i^* M_i - M_i M_i^*) \in \mathcal{L}^p.$$

Dann ist nach Lemma 3.5

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\frac{a_n(n+d)}{a_{n+1}(n+1)} - \frac{a_{n-1}}{a_n}|^p \dim \mathbb{H}_n < \infty.$$

Beachtet man, dass nach Lemma 1.14 und Lemma 1.23 gilt

$$\dim \mathbb{H}_n = \frac{(n+d-1)!}{(d-1)!n!} \sim \frac{(n+1)^{d-1}}{(d-1)!},$$

wobei $\sim$ bedeutet, dass der Quotient der beiden Folgen gegen 1 konvergiert, so erhält man

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty}|\frac{a_n(n+d)}{a_{n+1}(n+1)} - \frac{a_{n-1}}{a_n}|^p \dim \mathbb{H}_n \\ \asymp \quad & \sum_{n=1}^{\infty}|\frac{a_n}{a_{n+1}}\frac{n+d}{n+1} - \frac{a_{n-1}}{a_n}|^p (n+1)^{d-1}. \end{aligned}$$

Da $(\frac{a_n}{a_{n+1}}\frac{d-1}{n+1})_{n\geq 1} \in l^p((n+1)^{d-1})$, ist auch $(\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{a_{n-1}}{a_n})_{n\geq 1} \in l^p((n+1)^{d-1})$. Es folgt (iv).
$(iv) \Rightarrow (i)$: Seien

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}(\frac{a_n}{a_{n+1}}\frac{n}{n+1} - \frac{a_{n-1}}{a_n})E_n \\ \text{und} \qquad B &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}\frac{1}{n+1}E_n. \end{aligned}$$

Dann sind nach Lemma 1.17 (i) A und B wohldefinierte Operatoren. Nach Teil (ii) ist B sogar kompakt. Nach Lemma 2.4 gilt für alle $\alpha \in \mathbb{N}^d$ und

$i \neq j \in \{1, \ldots, d\}$:

$$\begin{aligned}
(AM_jM_i^*)z^\alpha &= (AM_j)\frac{\alpha_i}{|\alpha|}\frac{a_{|\alpha|-1}}{a_{|\alpha|}}z^{\alpha-e_i} \\
&= A\frac{\alpha_i}{|\alpha|}\frac{a_{|\alpha|-1}}{a_{|\alpha|}}z^{\alpha-e_i+e_j} \\
&= \frac{a_{|\alpha|}}{a_{|\alpha|-1}}\left(\frac{a_{|\alpha|}}{a_{|\alpha|+1}}\frac{|\alpha|}{|\alpha|+1} - \frac{a_{|\alpha|-1}}{a_{|\alpha|}}\right)\frac{\alpha_i}{|\alpha|}\frac{a_{|\alpha|-1}}{a_{|\alpha|}}z^{\alpha-e_i+e_j} \\
&= \left(\frac{\alpha_i a_{|\alpha|}}{(|\alpha|+1)a_{|\alpha|+1}} - \frac{\alpha_i a_{|\alpha|-1}}{|\alpha| a_{|\alpha|}}\right)z^{\alpha-e_i+e_j} \\
&= (M_i^*M_j - M_jM_i^*)z^\alpha
\end{aligned}$$

Also ist $M_i^*M_j - M_jM_i^* = AM_jM_i^*$ für $i \neq j$.
Weiter gilt für alle $\alpha \in \mathbb{N}^d$ und $i = 1, \ldots, d$:

$$\begin{aligned}
(B + AM_iM_i^*)z^\alpha &= \left(\frac{(\alpha_i+1)a_{|\alpha|}}{(|\alpha|+1)a_{|\alpha|+1}} - \frac{\alpha_i a_{|\alpha|-1}}{|\alpha| a_{|\alpha|}}\right)z^\alpha \\
&= (M_i^*M_i - M_iM_i^*)z^\alpha
\end{aligned}$$

Also ist $M_i^*M_i - M_iM_i^* = B + AM_iM_i^*$.
Benutzt man wieder Lemma 1.14 und Lemma 1.23, so gilt:

$$\begin{aligned}
\|B\|_p^p &= \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\frac{1}{n+1}\right|^p \dim \mathbb{H}_n \\
&\asymp \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\frac{1}{n+1}\right|^p (n+1)^{d-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|^p \frac{1}{(n+1)^{p-d+1}}.
\end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $(\frac{a_n}{a_{n+1}})_{n\geq 0}$ nach oben beschränkt ist, konvergiert die letzte Reihe für alle $p > d$. Also ist $B \in \mathcal{L}^p$. Weiter gilt, da $0 < \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{a_{n+1}} < \infty$ ist:

$$\begin{aligned}
\|A\|_p^p &= \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|^p \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\frac{n}{n+1} - \frac{a_{n-1}}{a_n}\right|^p \dim \mathbb{H}_n \\
&\asymp \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\frac{n}{n+1} - \frac{a_{n-1}}{a_n}\right|^p (n+1)^{d-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{a_{n-1}}{a_n} - \frac{a_n}{a_{n+1}}\frac{1}{n+1}\right|^p (n+1)^{d-1}.
\end{aligned}$$

Da $(\frac{a_n}{a_{n+1}}\frac{1}{n+1})_{n\geq 1} \in l^p((n+1)^{d-1})$, ist $A \in \mathcal{L}^p$ genau dann, wenn $(|\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{a_{n-1}}{a_n}|) \in l^p((n+1)^{d-1})$ ist. Dies folgt aber aus der Voraussetzung (iv). Mit A und B liegen nach Lemma 3.2 auch alle Operatoren $M_i^* M_j - M_j M_i^*$ $(1 \leq i, j \leq d)$ in $\mathcal{L}^p$. □

Der Beweis des vorangegangenen Theorems motiviert die folgende Definition.

Definition 3.9. *Sei* $0 < \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{a_{n+1}} < \infty$. *Wir nennen f stark regulär, wenn gilt:*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} n|\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{a_{n-1}}{a_n}| < \infty.$$

Insbesondere ist jedes stark reguläre f auch regulär. Mit dieser Definition erhalten wir als direkte Folgerung aus Theorem 3.8 dass die starke Regularität von f die p-wesentliche Normalität für $p > d$ sicherstellt.

Korollar 3.10. *Sei f stark regulär. Dann ist H_d^f p-wesentlich normal für $p > d$.*

Beweis. Sei $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ stark regulär, also $c = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} n|\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{a_{n-1}}{a_n}| < \infty$. Dann ist

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} n^{d-1}|\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{a_{n-1}}{a_n}|^p \\ = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p-d+1}}(n|\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{a_{n-1}}{a_n}|)^p \\ \leq & \; c^p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p-d+1}} < \infty \end{aligned}$$

für $p > d$. Damit ist H_d^f nach Theorem 3.8 p-wesentlich normal für $p > d$. □

3.3 Der Hilbertmodul $H_d^f \otimes \mathbb{C}^r$

Wir untersuchen nun die Eigenschaften des Tupels M_z in einem vektorwertigen Fall, indem wir das Hilbertraum-Tensorprodukt von H_d^f mit $\mathbb{C}^r$ bilden.

Definition 3.11. *Sei H ein Hilbertraum und sei $\mathcal{D} = \mathbb{C}^r$ versehen mit dem üblichen Skalarprodukt. Wir schreiben $H \otimes \mathcal{D}$ für das Hilbertraum-Tensorprodukt von H und $\mathcal{D}$.*

Im weiteren Verlauf der Arbeit verwenden wir häufig abkürzend $\mathcal{D}$ für $\mathbb{C}^r$. Sei $U : H \otimes \mathcal{D} \to H^r$ die eindeutig bestimmte unitäre Abbildung mit

$$U(x \otimes (\alpha_i)_{i=1}^r) = (\alpha_i x)_{i=1}^r$$

für $x \in H$ und $(\alpha_i)_{i=1}^r \in \mathcal{D}$. Für $A \in L(H)$ sind $A \otimes 1_\mathcal{D} \in L(H \otimes \mathcal{D})$ und die r-fache direkte Summe $\bigoplus_{i=1}^r A : H^r \to H^r,\ (x_i)_{i=1}^r \mapsto (Ax_i)_{i=1}^r$ unitär äquivalent vermöge U.

Sei $T = (T_1, \dots, T_d) \in L(H)^d$ ein p-wesentlich normales vertauschendes Tupel auf einem Hilbertraum H. Für $1 \leq i, j \leq d$ ist der Operator

$$\begin{aligned} &(T_i \otimes 1_\mathcal{D})(T_j \otimes 1_\mathcal{D})^* - (T_j \otimes 1_\mathcal{D})^*(T_i \otimes 1_\mathcal{D}) \\ &= (T_i T_j^* - T_j^* T_i) \otimes 1_\mathcal{D} \in L(H \otimes \mathcal{D}) \end{aligned}$$

unitär äquivalent zur r-fachen direkten Summe des Operators $T_i T_j^* - T_j^* T_i \in \mathcal{L}^p$. Daher folgt aus Teil b) von Lemma 3.3, dass das Tensorprodukt-Tupel $T \otimes 1_\mathcal{D} = (T_1 \otimes 1_\mathcal{D}, \dots, T_d \otimes 1_\mathcal{D}) \in L(H \otimes \mathcal{D})^d$ wieder p-wesentlich normal ist.
Sei H ein funktionaler Hilbertraum über einer Menge $\Omega \subset \mathbb{C}^d$. Ist $g : \Omega \to \mathbb{C}$ ein Multiplikator von H, so schreiben wir meistens M_g für den Operator $M_g \otimes 1_\mathcal{D} \in L(H \otimes \mathcal{D})$. Entsprechend schreiben wir $M_z = (M_{z_1}, \dots, M_{z_d})$ für das Tupel $M_z \otimes 1_\mathcal{D} = (M_{z_1} \otimes 1_\mathcal{D}, \dots, M_{z_d} \otimes 1_\mathcal{D}) \in L(H \otimes \mathcal{D})^d$, wenn die Koordinatenfunktionen Multiplikatoren von H sind.

Bemerkung 3.12. *Seien H ein Hilbertraum und $T \in L(H)^d$. Dann bezeichnet man die Menge der unter T invarianten Teilräume von H mit*

$$\text{Lat}\ (T, H) = \{M \text{ abgeschlossener Teilraum von } H; T_i M \subset M (1 \leq i \leq d)\}.$$

Meistens schreiben wir dafür nur Lat (T).

Seien H ein Hilbertraum und $T = (T_1, \dots, T_d) \in L(H)^d$ ein vertauschendes Tupel. Dann wird H vermöge

$$\mathbb{C}[z] \times H \to H,\ (p, h) \mapsto p \cdot h = p(T)h,$$

zu einem $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_d]$-Modul. Bezüglich dieser Struktur ist ein abgeschlossener Teilraum $M \subset H$ ein Untermodul von H genau dann, wenn $M \in \text{Lat}\ (T)$ ist. In diesem Abschnitt betrachten wir nun die Hilberträume $H_d^f \otimes \mathcal{D}$ mit $T = M_z \in L(H_d^f \otimes \mathcal{D})^d$, und fassen $H_d^f \otimes \mathcal{D}$ als einen $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_d]$- oder kurz als $\mathbb{C}[z]$-Modul auf. Aufgrund dieser strukturellen Eigenschaften bezeichnet man $H_d^f \otimes \mathcal{D}$ auch als Hilbertmodul.

Definition 3.13. *Man nennt ein Polynom $p_k \in \mathbb{C}[z]$ homogen vom Grad k, wenn es aus Monomen vom Grad k besteht. Ein $\mathbb{C}[z]$-Modul H heißt graduiert, wenn es abelsche Gruppen $(H_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ gibt mit $H = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} H_i$ und $p_k h_i \in H_{k+i}$ für alle $i \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}, h_i \in H_i$ und alle homogenen Polynome p_k vom Grad k.*

Damit wird $\mathbb{C}[z] \otimes \mathbb{C}^r = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{H}_n \otimes \mathbb{C}^r$ zu einem endlich erzeugten, graduierten $\mathbb{C}[z]$-Modul.

Bemerkung 3.14. *Sei H ein Hilbertraum, $T \in L(H)$ und $M \in \mathrm{Lat}\,(T)$. Dann sind T/M und $P_{M^\perp}T|_{M^\perp}$ unitär äquivalent. Wir schreiben dafür im Folgenden $T/M \cong P_{M^\perp}T|_{M^\perp}$ und unterscheiden nicht mehr zwischen den beiden Abbildungen.*

Beweis. Da $M \in \mathrm{Lat}\,(T)$ ist, ist die Abbildung

$$\tilde{T} : H/M \to H/M,\ x + M \mapsto Tx + M$$

wohldefiniert. Sei U die unitäre Abbildung

$$U : H/M \to M^\perp,\ x + M \mapsto P_{M^\perp}x.$$

Dann gilt für alle $x + M \in H/M$

$$\begin{aligned}(P_{M^\perp}T|_{M^\perp})U(x+M) &= P_{M^\perp}T|_{M^\perp}P_{M^\perp}x\\ &= P_{M^\perp}Tx\\ &= U(Tx+M)\\ &= (U\tilde{T})(x+M).\end{aligned}$$

Also sind $\tilde{T}$ und $P_{M^\perp}T|_{M^\perp}$ unitär äquivalent. □

3.4 Untermoduln von $H_d^f \otimes \mathbb{C}^r$

In diesem Abschnitt untersuchen wir, unter welchen Voraussetzungen Untermoduln von $H_d^f \otimes \mathbb{C}^r$ p-wesentlich normal sind. Dazu benötigen wir jedoch zunächst einige Vorbereitungen.

Definition 3.15. *Man nennt einen Untermodul $M \in \mathrm{Lat}\,(M_z, H_d^f \otimes \mathbb{C}^r)$ p-wesentlich normal, wenn $M_z|_M$ p-wesentlich normal ist.*

Das folgende Lemma charakterisiert gerade die p-wesentlich normalen Untermoduln, ist hier jedoch in allgemeinerer Form angegeben.

Lemma 3.16. *Sei* $1 \leq p \leq \infty$, $T = (T_1, \ldots, T_d)$ *ein p-wesentlich normales vertauschendes Tupel auf einem Hilbertraum* H *und sei* $M \in \mathrm{Lat}\,(T)$. *Äquivalent sind:*

$$\begin{array}{rl} (i) & T|_M \text{ ist p-wesentlich normal,} \\ (ii) & T/M (\cong P_{M^\perp} T|_{M^\perp}) \text{ ist p-wesentlich normal,} \\ (iii) & [P_M, T_i] \in \mathcal{L}^{2p}(H) \quad (1 \leq i \leq d), \\ (iv) & [P_M, T_i][P_M, T_j]^* \in \mathcal{L}^p(H) \quad (1 \leq i, j \leq d), \\ (v) & [P_M, T_i]^*[P_M, T_j] \in \mathcal{L}^p(H) \quad (1 \leq i, j \leq d), \\ (vi) & P_M T_j^* T_i P_M - T_i P_M T_j^* \in \mathcal{L}^p(H) \quad (1 \leq i, j \leq d). \end{array}$$

Beweis. Sei $p < \infty$. $(iv) \Leftrightarrow (vi)$: Aus $M \in \mathrm{Lat}\,(T)$ folgt $M^\perp \in \mathrm{Lat}\,(T^*)$. Damit erhält man für $1 \leq i, j \leq d$:

$$\begin{aligned} [P_M, T_i][P_M, T_j]^* &= (P_M T_i - T_i P_M)(P_M T_j - T_j P_M)^* \\ &= P_M T_i T_j^* P_M - P_M T_i P_M T_j^* - T_i P_M T_j^* P_M + T_i P_M T_j^* \\ &= P_M T_i T_j^* P_M - P_M T_j^* T_i P_M + P_M T_j^* T_i P_M \\ &\quad + T_i P_M T_j^* P_{M^\perp} - P_M T_i P_M T_j^* \\ &= P_M [T_i, T_j^*] P_M + P_M T_j^* T_i P_M - T_i P_M T_j^*. \end{aligned}$$

Mit der p-wesentlichen Normalität von T folgt die Behauptung aus Lemma 3.2.
$(iii) \Leftrightarrow (iv)$: Setze $C = ([P_M, T_1]^*, \ldots, [P_M, T_d]^*) \in L(H^d, H)$. Nach Lemma 3.3 bedeutet Bedingung (iii) genau, dass $C \in \mathcal{L}^{2p}$ oder äquivalent dazu, dass $C^* C = ([P_M, T_i][P_M, T_j]^*)_{i,j} \in \mathcal{L}^p(H^d)$. Wieder nach Lemma 3.3 ist die letzte Bedingung äquivalent zu (iv).
$(iii) \Leftrightarrow (v)$: Dies folgt genauso mit $C = ([P_M, T_1], \ldots, [P_M, T_d])$.
$(i) \Leftrightarrow (iv)$: Sei dazu $B_i = T_i|_M$. Dann ist (i) äquivalent dazu, dass der Operator $[B_i, B_j^*] \oplus 0_{M^\perp} \in \mathcal{L}^p(H)$ ist für $1 \leq i, j \leq d$. Beachtet man, dass gilt

$$\begin{aligned} [B_i, B_j^*] \oplus 0_{M^\perp} &= T_i P_M T_j^* P_M - P_M T_j^* T_i P_M \\ &= -P_M T_i T_j^* P_M + P_M T_i P_M T_j^* + T_i P_M T_j^* P_M \\ &\quad - T_i P_M T_j^* + P_M T_i T_j^* P_M - P_M T_j^* T_i P_M \\ &= -[P_M, T_i][P_M, T_j]^* + P_M [T_i, T_j^*] P_M, \end{aligned}$$

so folgt die Behauptung wegen der p-wesentlichen Normalität von T aus Lemma 3.2.
$(ii) \Leftrightarrow (v)$: Abkürzend schreibe $P = P_M$, $P^\perp = P_{M^\perp}$. Sei $C_i = P^\perp T_i|_{M^\perp}$.

Dann ist (ii) äquivalent dazu, dass $0_M \oplus [C_i, C_j^*] \in \mathcal{L}^p(H),\ 1 \leq i,j \leq d$. Beachtet man, dass gilt

$$\begin{aligned}
0_M \oplus [C_i, C_j^*] &= P^\perp T_i T_j^* P^\perp - T_j^* P^\perp T_i P^\perp \\
&= P^\perp T_i T_j^* P^\perp - P^\perp T_j^* P^\perp T_i P^\perp \\
&= P^\perp T_i T_j^* P^\perp - P^\perp T_j^* T_i P^\perp + P^\perp T_j^* P T_i P^\perp \\
&= P^\perp [T_i, T_j^*] P^\perp + T_j^* P T_i - T_j^* P T_i P \\
&\quad - P T_j^* P T_i + P T_j^* T_i P \\
&= P^\perp [T_i, T_j^*] P^\perp + [P, T_j]^* [P, T_i],
\end{aligned}$$

so folgt die Behauptung wegen der p-wesentlichen Normalität von T aus Lemma 3.2.
Im Fall $p = \infty$ verwende man statt Lemma 3.2 die entsprechenden Eigenschaften kompakter Operatoren. □

Bemerkung 3.17. (i) *Die Äquivalenz zu (iii) in Lemma 3.16 zeigt, dass es genügt, die Bedingungen (iv), (v) und (vi) für $i = j = 1, \ldots, d$ zu verlangen.*
(ii) *Die Äquivalenz zwischen (i) und (vi) bleibt sogar richtig, wenn T nicht p-wesentlich normal ist, denn*

$$[(T_i|_M)(T_j|_M)^* - (T_j|_M)^*(T_i|_M)] \oplus 0_{M^\perp} = T_i P_M T_j^* - P_M T_j^* T_i P_M.$$

(iii) *Wegen $(T_i/M)^* \cong (P_{M^\perp} T_i|_{M^\perp})^* = T_i^*|_{M^\perp}$ für $i = 1, \ldots, d$ ist T/M genau dann p-wesentlich normal, wenn $T^*|_{M^\perp}$ diese Eigenschaft hat.*

Das gerade bewiesene Lemma wollen wir jetzt auf einige Spezialfälle von Untermoduln von $H_d^f \otimes \mathbb{C}^r$ anwenden. Dazu fehlt jedoch noch der Begriff eines homogenen Untermoduls und einige in diesem Falle geltende, wichtige Eigenschaften.

Definition 3.18. *Man nennt einen Raum $M \in \mathrm{Lat}\ (M_z, H_d^f \otimes \mathbb{C}^r)$ homogen, wenn*

$$M = \bigvee_{n=0}^{\infty} M \cap (\mathbb{H}_n \otimes \mathbb{C}^r).$$

Für einen homogenen Raum $M \in \mathrm{Lat}\ (M_z, H_d^f \otimes \mathbb{C}^r)$ schreiben wir in Zukunft M_n für die homogenen Anteile $M \cap (\mathbb{H}_n \otimes \mathbb{C}^r)$ von M.

Lemma 3.19. *Für $M \in \mathrm{Lat}\,(M_z, H_d^f \otimes \mathbb{C}^r)$ sind äquivalent:*

(i) M ist homogen,

(ii) $P_M \mathbb{H}_n \otimes \mathbb{C}^r \subset \mathbb{H}_n \otimes \mathbb{C}^r$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(iii) $P_M = \text{SOT-}\sum_{n=0}^{\infty} P_{M \cap (\mathbb{H}_n \otimes \mathbb{C}^r)}$,

(iv) $P_{\mathbb{H}_n \otimes \mathbb{C}^r} M \subset M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. $(i) \Rightarrow (iii)$: Sei M homogen. Da die Räume M_n $(n \in \mathbb{N})$ paarweise orthogonal sind, gilt für alle $x \in H_d^f \otimes \mathbb{C}^r$ und $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{N} \|P_{M_n} x\|^2 = \|\sum_{n=0}^{N} P_{M_n} x\|^2 = \|(\sum_{n=0}^{N} P_{M_n})x\|^2 \leq \|x\|^2.$$

Also existiert $Q = \text{SOT-}\sum_{n=0}^{\infty} P_{M_n} \in L(H_d^f \otimes \mathbb{C}^r)$. Wegen $M = \bigvee_{n=0}^{\infty} M_n$ gilt offensichtlich die Inklusion $M^\perp \subset \mathrm{Ker}\, Q$. Jedes $x \in M$ hat die Form

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k$$

mit Vektoren $x_k \in M_k$. Mit Hilfe dieser Darstellung erhält man, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{M_n} x = \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{\infty} P_{M_n} x_k = \sum_{n=0}^{N} x_n \xrightarrow{N} x.$$

Also ist $Q = P_M$ wie behauptet.
$(iii) \Rightarrow (ii)$: Gilt (iii), so folgt für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{H}_k \otimes \mathbb{C}^r$

$$P_M x = \sum_{n=0}^{\infty} P_{M_n} x = P_{M_k} x \in \mathbb{H}_k \otimes \mathbb{C}^r.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$: Es gelte (ii). Sei $x \in M$. Schreibe $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ mit $x_n \in \mathbb{H}_n \otimes \mathbb{C}^r$ für alle n. Dann folgt

$$x = P_M x = \sum_{n=0}^{\infty} P_M x_n \in \bigvee_{n=0}^{\infty} M_n.$$

$(i) \Rightarrow (iv)$: Sei $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \in M$ mit $x_n \in M \cap (\mathbb{H}_n \otimes \mathbb{C}^r)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$P_{\mathbb{H}_n \otimes \mathbb{C}^r} x = x_n \in M.$$

$(iv) \Rightarrow (i)$: Sei $x \in M$ und $x_n = P_{\mathbb{H}_n \otimes \mathbb{C}^r} x$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann ist

$$x = \text{SOT-}\sum_{n=0}^{\infty} P_{\mathbb{H}_n \otimes \mathbb{C}^r} x \in \bigvee_{n=0}^{\infty} M \cap (\mathbb{H}_n \otimes \mathbb{C}^r).$$

Die andere Inklusion ist trivial. $\square$

Bemerkung 3.20. *Sei $M \in \text{Lat}\,(M_z, H_d^f \otimes \mathbb{C}^r)$ homogen. Dann gilt für alle $x_n \in M_n$ $(n \in \mathbb{N})$ und $i = 1, \ldots, d$, dass $M_{z_i} x_n \in M_{n+1}$ ist. Damit wird $\bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$ zu einem graduierten $\mathbb{C}[z]$-Untermodul von $\mathbb{C}[z] \otimes \mathbb{C}^r$.*

Bevor wir zu den eigentlichen Resultaten kommen, benötigen wir noch einen, auch unabhängig von der hier betrachteten Anwendungen, wichtigen Satz über die Dimensionen der homogenen Anteile eines homogenen Untermoduls $M \in \text{Lat}\,(M_z, H_d^f \otimes \mathbb{C}^r)$.

Satz 3.21. *Sei $M \in \text{Lat}\,(M_z, H_d^f \otimes \mathbb{C}^r)$ ein homogener Untermodul. Dann gibt es ein Polynom $q \in \mathbb{Q}[z]$ in einer Veränderlichen mit $\deg(q) \leq d-1$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass*

$$\dim_{\mathbb{C}}(M_n) = q(n) \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Ist $\deg(q) = r$, so gibt es $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{Z}$ und $c_0 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$q(n) = c_0 \binom{n}{r} + c_1 \binom{n}{r-1} + \cdots + c_r \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Insbesondere gibt es im Fall $d = 2$ nur die beiden Möglichkeiten

$$q(n) = c_0 n + c_1 \quad (c_0 \in \mathbb{N}^*, c_1 \in \mathbb{Z})$$

oder

$$q(n) \equiv c_0 \quad (c_0 \in \mathbb{N}).$$

Beweis. Nach der vorangegangenen Bemerkung ist $\bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$ ein graduierter $\mathbb{C}[z]$-Untermodul von $\mathbb{C}[z] \otimes \mathbb{C}^r$. Dieser ist nach [Lang, Proposition VI.1.4] endlich erzeugt, da auch $\mathbb{C}[z] \otimes \mathbb{C}^r$ endlich erzeugt ist. Nach einem klassischen Satz von Hilbert [Eisenbud, Theorem 1.11] existieren dann ein Polynom $q \in \mathbb{Q}[z]$ mit $\deg(q) \leq d-1$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\dim_{\mathbb{C}}(M_n) = q(n)$$

für alle $n \geq n_0$ gilt. Ist $r = \deg(q)$, so erhält man mit [Hartshorne, Proposition I.7.3] Konstanten $c_0, c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{Z}$ mit

$$q(n) = c_0 \binom{n}{r} + c_1 \binom{n}{r-1} + \cdots + c_r \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Da $q(n) = \dim_{\mathbb{C}}(M_n) \geq 0$ für $n \geq n_0$ ist, muss $c_0 \geq 0$ sein. Im Fall $d = 2$ gibt es nur die beiden Möglichkeiten $r = 1$ oder $r = 0$, womit der Zusatz folgt. □

Damit können wir Arvesons Vermutung im Fall $d = 2$ beweisen.

Theorem 3.22. *Sei f stark regulär und $d = 2$. Wenn M ein homogener Untermodul von $H_d^f \otimes \mathbb{C}^r$ ist, dann ist M p-wesentlich normal für $p > 2$.*

Beweis. Sei M ein homogener Untermodul von $H_d^f \otimes \mathbb{C}^r$, $d = 2$ und $p > 2$. Nach Bemerkung 3.17 und Korollar 3.10 genügt es zu zeigen, dass die Operatoren

$$A_i = [P_M, M_{z_i}][P_M, M_{z_i}]^*, \ i = 1, 2$$

zu $\mathcal{L}^p(H_d^f \otimes \mathbb{C}^r)$ gehören. Im Beweis von Lemma 3.16 wurde schon gezeigt, dass

$$A_i = P_M M_{z_i} M_{z_i}^* P_M - M_{z_i} P_M M_{z_i}^*$$

für $i = 1, 2$. Da M homogen ist, bildet A_i den Raum M_n nach Lemma 3.19 und Lemma 2.4 in sich ab. Benutzt man, dass für Operatoren $A, B \in L(H)$ auf einem endlich dimensionalen Hilbertraum H die Identität $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ gilt, so erhält man

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr} A_i|_{M_n} &= \operatorname{tr}(P_{M_n} M_{z_i} M_{z_i}^* P_{M_n}) - \operatorname{tr}(P_{M_n} M_{z_i} P_{M_{n-1}} M_{z_i}^* P_{M_n}) \\
&= \operatorname{tr}(P_{M_n} M_{z_i} M_{z_i}^* P_{M_n}) - \operatorname{tr}(P_{M_n} M_{z_i} P_{M_{n-1}} P_{M_{n-1}} M_{z_i}^* P_{M_n}) \\
&= \operatorname{tr}(P_{M_n} M_{z_i} M_{z_i}^* P_{M_n}) - \operatorname{tr}(P_{M_{n-1}} M_{z_i}^* P_{M_n} P_{M_n} M_{z_i} P_{M_{n-1}}) \\
&= \operatorname{tr}(P_{M_n} M_{z_i} M_{z_i}^* P_{M_n}) - \operatorname{tr}(P_{M_{n-1}} M_{z_i}^* M_{z_i} P_{M_{n-1}}).
\end{aligned}$$

Mit Lemma 2.4 folgt für $n \geq 1$

$$\operatorname{tr}(A_1 + A_2)|_{M_n} = \frac{a_{n-1}}{a_n} (\dim M_n - \frac{n+1}{n} \dim M_{n-1}).$$

Nach Satz 3.21 gibt es jedoch $a \in \mathbb{Z}$ und $N, b \in \mathbb{N}$ so dass gilt:

$$\dim M_n = a + bn \qquad \forall n \geq N$$

Damit folgt dann $\forall n \geq N+1$:

$$\text{tr }(A_1+A_2)|_{M_n} = \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{b-a}{n}$$

Da A_1, A_2 positiv sind, folgt hieraus, dass $a \leq b$.
Sei $n \geq N+1$ und $k_n = \dim(M_n)$. Wähle eine Orthonormalbasis $(v_{n,j})_{j=1}^{k_n}$ von M_n aus Eigenvektoren von A_1+A_2 zu Eigenwerten $\mu_{n,j}$. Dann gilt:

$$\sum_{j=1}^{k_n} \mu_{n,j} = \text{tr }(A_1+A_2)|_{M_n} = \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{b-a}{n}$$

und daher

$$\sum_{j=1}^{k_n} n\mu_{n,j} = (b-a)\frac{a_{n-1}}{a_n} \leq (b-a)\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{a_{n-1}}{a_n} = C < \infty.$$

Für $t \geq 1$ gilt dann:

$$\sum_{j=1}^{k_n} n^t \mu_{n,j}^t \leq C^t.$$

Insgesamt erhalten wir dir Abschätzung

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k_n} \mu_{n,j}^t \leq C^t \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-t}.$$

Die letzte Summe ist genau dann endlich, wenn $t > 1$ ist. Also ist $A_1+A_2 \in \mathcal{L}^t$ für $t > 1$ (siehe Lemma 3.5). Nach Lemma 3.4 sind dann auch $A_i \in \mathcal{L}^t$ für $t > 1, i = 1, 2$. $\square$

Im vorangegangenen Beweis haben wir sogar gezeigt, dass $A_i \in \mathcal{L}^t$ ist für $t > 1, i = 1, 2$. Da Korollar 3.10 die p-wesentliche Normalität von H_d^f nur für $p > d$ sicherstellt, können wir Lemma 3.16 nur für $p > 2$ anwenden und erhalten daher in diesem Fall kein besseres Ergebnis.

Definition 3.23. *(i) Sei M ein homogener Untermodul von $H_d^f \otimes \mathbb{C}^r$. Dann heißt*

$$\text{Ann }(H_d^f \otimes \mathbb{C}^r/M) = \{q \in \mathbb{C}[z_1,\ldots,z_d]; qH_d^f \otimes \mathbb{C}^r \subset M\}$$

das Annihilatorideal von $H_d^f \otimes \mathbb{C}^r/M$.
(ii) Sei $I \subset \mathbb{C}[z_1,\ldots,z_d]$ ein Ideal. Dann heißt

$$Z(I) = \{\lambda \in \mathbb{C}^d; p(\lambda) = 0 \text{ für alle } p \in I\}$$

die Nullstellenmenge von I.

Satz 3.24. *Sei $M \in \mathrm{Lat}\,(M_z, H_d^f \otimes \mathbb{C}^r)$ homogen und $N_n = \mathbb{H}_n \otimes \mathbb{C}^r \ominus M_n$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ und ein Polynom p_k vom Grad k, so dass*

$$\dim(N_n) = p_k(n)$$

für alle $n \geq N$ ist. Dabei ist

$$k = \dim_{\mathbb{C}} Z(\mathrm{Ann}\,(H_d^f \otimes \mathbb{C}^r/M)) - 1,$$

wobei p_k das Nullpolynom ist, falls $k < 0$.

Beweis. Siehe [Hartshorne, Satz I.7.5 und Übung I.2.6] und beachte, dass $N_n \cong (H_d^f \otimes \mathbb{C}^r/M)_n$. □

Wir können nun auch für $d > 2$ eine hinreichende Bedingung angeben, die die p-wesentliche Normalität homogener Untermoduln sicherstellt.

Theorem 3.25. *Sei f stark regulär und sei $M \in \mathrm{Lat}\,(M_z, H_d^f \otimes \mathbb{C}^r)$ homogen mit*

$$\dim_{\mathbb{C}} Z(\mathrm{Ann}\,(H_d^f \otimes \mathbb{C}^r/M)) \leq 1.$$

Dann ist M p-wesentlich normal für $p > d$.

Beweis. Sei wie oben definiert $M_n = M \cap (\mathbb{H}_n \otimes \mathbb{C}^r)$ und

$$N_n = (\mathbb{H}_n \otimes \mathbb{C}^r) \ominus M_n \ (n \geq 0).$$

Setze

$$A_i = [P_M, M_{z_i}][P_M, M_{z_i}]^* \ (1 \leq i \leq d).$$

Dann gilt wie im Beweis von Lemma 3.16 gesehen

$$A_i = P_M M_{z_i} M_{z_i}^* P_M - M_{z_i} P_M M_{z_i}^*,$$

und die Operatoren A_i bilden die Räume M_n in sich ab. Weiter ist wie im Beweis von Theorem 3.22

$$\begin{aligned}
& \mathrm{tr}\,(A_1 + \cdots + A_d)|_{M_n} \\
=\ & \mathrm{tr}\,(\sum_{i=1}^{d} P_{M_n} M_{z_i} M_{z_i}^* P_{M_n}) - \mathrm{tr}\,(\sum_{i=1}^{d} P_{M_{n-1}} M_{z_i}^* M_{z_i} P_{M_{n-1}}) \\
\text{(Lemma 2.4)} \quad =\ & \frac{a_{n-1}}{a_n}(\dim M_n - \frac{n+d-1}{n} \dim M_{n-1}) \\
=\ & \frac{a_{n-1}}{a_n}(\dim \mathbb{H}_n \otimes \mathbb{C}^r - \dim N_n \\
& - \frac{n+d-1}{n} \dim \mathbb{H}_{n-1} \otimes \mathbb{C}^r + \frac{n+d-1}{n} \dim N_{n-1}) \\
\text{(Lemma 1.14)} \quad =\ & \frac{a_{n-1}}{a_n}(\frac{n+d-1}{n} \dim N_{n-1} - \dim N_n).
\end{aligned}$$

Wenn $\dim_{\mathbb{C}} Z(Ann(H_d^f \otimes \mathbb{C}^r/M)) \leq 1$, dann gibt es nach Satz 3.24 ein $N \in \mathbb{N}$ und ein Polynom p_k vom Grad $k \leq 0$ mit $\dim N_n = p_k(n), \forall n \geq N$. Also ist $p_k \equiv K$ eine Konstante und damit

$$\dim N_n = K \quad \text{für } n \geq N.$$

Dann gilt für alle $n > N$:

$$\begin{aligned}\text{tr } (A_1 + \cdots + A_d)|_{M_n} &= \frac{a_{n-1}}{a_n}(\frac{n+d-1}{n}K - K) \\ &= \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{d-1}{n}K.\end{aligned}$$

Ersetzt man im Beweis von Theorem 3.22 an dieser Stelle $(b-a)$ durch $(d-1)K$, so erhält man mit derselben Rechnung

$$A_i \in \mathcal{L}^t, \ t > 1.$$

Aus Lemma 3.16 bzw. Bemerkung 3.17 zusammen mit Korollar 3.10 folgt, dass M p-wesentlich normal ist für $p > d$. □

Bislang haben wir uns mit allgemeinen homogenen Untermoduln beschäftigt. Jetzt wollen wir als speziellen Fall die homogenen Untermoduln untersuchen, die Abschluss eines homogenen Ideals sind. Dafür verwenden wir im Folgenden wieder meist die abkürzende Schreibweise $\mathbb{C}[z]$ für $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$.

Definition 3.26. *Sei $I \subset \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$ ein Ideal.*
(i) Man nennt I homogen, wenn

$$I = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I \cap \mathbb{H}_n.$$

(ii) $[I]$ bezeichnet den Abschluss von I in H_d^f.

Mit dieser Definition erhält man direkt einige sehr wichtige Eigenschaften von homogenen Idealen, die im Folgenden noch mehrfach benötigt werden.

Lemma 3.27. *Sei $I \subset \mathbb{C}[z]$ ein Ideal.*
a) I ist homogen genau dann, wenn endlich viele homogene Polynome $p_1, \ldots, p_r$ in $\mathbb{C}[z] \cap I$ existieren mit

$$I = \sum_{i=1}^{r} p_i \mathbb{C}[z].$$

b) Sei I homogen. Dann gilt:
(i) $M = [I] \in \text{Lat } (M_z, H_d^f)$ ist homogen.
(ii) $I = \text{Ann } (H_d^f/[I])$.

Beweis. (a) "$\Rightarrow$": Sei $I \subset \mathbb{C}[z]$ ein homogenes Ideal. Da $\mathbb{C}[z]$ noethersch ist, existieren endlich viele Polynome $q_1, \ldots, q_k \in \mathbb{C}[z] \cap I$ so, dass

$$I = \sum_{i=1}^{k} q_i \mathbb{C}[z].$$

Für $i = 1, \ldots, k$ sei $r_i = \deg(q_i)$. Da I homogen ist, lässt sich jedes q_i schreiben als

$$q_i = q_{i,1} + \cdots + q_{i,r_i}$$

mit $q_{i,j} \in I \cap \mathbb{H}_j$ $(j = 1, \ldots, r_i)$. Man hat nun also endlich viele homogene Polynome $q_{i,j} \in \mathbb{C}[z] \cap I$ so, dass

$$I = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{r_i} q_{i,j} \mathbb{C}[z].$$

"$\Leftarrow$": Seien $p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{C}[z] \cap I$ homogene Polynome mit

$$I = \sum_{i=1}^{r} p_i \mathbb{C}[z].$$

Dann existieren für $x \in I$ Polynome $q_1, \ldots, q_r$ in $\mathbb{C}[z]$ mit

$$x = \sum_{i=1}^{r} p_i q_i.$$

Für $i = 1, \ldots, r$ sei $k_i = \deg(q_i)$ und $m_i = \deg(p_i)$. Dann lässt sich jedes q_i schreiben als

$$q_i = q_{i,1} + \cdots + q_{i,k_i}$$

mit $q_{i,j} \in \mathbb{H}_j$ $(j = 1, \ldots, k_i)$. Damit erhält man für x die Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_i} p_i q_{i,j}$$

mit $p_i q_{i,j} \in I \cap \mathbb{H}_{m_i+j}$ für $i = 1, \ldots, r$ und $j = 1, \ldots, k_i$. Also ist I homogen.
b) (i) Sei I homogen. Dann ist $I = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I \cap \mathbb{H}_n$. Daher gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$P_{\mathbb{H}_n} I \subset I.$$

Weil $P_{\mathbb{H}_n}$ stetig ist, gilt dann auch

$$P_{\mathbb{H}_n}M = P_{\mathbb{H}_n}[I] \subset [I] = M.$$

Also ist $M = [I]$ nach Lemma 3.19 homogen.
(ii) " $\subset$ " : Sei $q \in I$ und $x \in H_d^f$. Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ in $\mathbb{C}[z]$ mit $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ und es gilt

$$qx = q \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} qx_n \in [I],$$

da I ein Ideal ist. Also ist $q \in \mathrm{Ann}(H_d^f/[I])$.
" $\supset$ " : Sei $q \in \mathrm{Ann}(H_d^f/[I])$. Also $q \in \mathbb{C}[z_1,\ldots,z_d]$ so, dass $qH_d^f \subset [I]$. Insbesondere ist $q \in [I] \cap \mathbb{C}[z_1,\ldots,z_d]$. Sei $N = \deg(q)$ und sei $(q_k)_{k\geq 0}$ eine Folge in I mit $q = \lim\limits_{k\to\infty} q_k$ in H_d^f. Da I homogen ist, hat jedes q_k eine endliche Summenzerlegung

$$q_k = \sum_{j\geq 0} q_{k,j} \text{ mit } q_{k,j} \in I \cap \mathbb{H}_j \text{ für alle k und j.}$$

Dann gilt

$$q = P_{(\bigvee\limits_{n\leq N} \mathbb{H}_n)}q = \lim_{k\to\infty}(P_{(\bigvee\limits_{n\leq N} \mathbb{H}_n)}q_k) = \lim_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{N} q_{k,j} \in I \cap \bigvee_{n\leq N} \mathbb{H}_n.$$

Also ist $q \in I$. □

Mit diesen Eigenschaften homogener Ideale ergibt sich direkt das folgende Korollar.

Korollar 3.28. *Sei f stark regulär und I ein homogenes Ideal in* $\mathbb{C}[z_1,\cdots,z_d]$*. Ist* $\dim_{\mathbb{C}} Z(I) \leq 1$*, dann ist der Untermodul* $[I]$ *p-wesentlich normal für* $p > d$*.*

Beweis. Da nach dem vorangegangenen Lemma $I = \mathrm{Ann}\,(H_d^f/[I])$ ist, folgt $\dim_{\mathbb{C}} Z(\mathrm{Ann}\,(H_d^f/[I])) = \dim_{\mathbb{C}} Z(I) \leq 1$. Dann folgt die Behauptung aus Theorem 3.25 für $r = 1$. □

3.5 Das Quotiententupel M_z/M

Die bisherigen Resultate für homogene Untermoduln lassen sich noch verbessern, wenn man statt den Einschränkungen $M_z|_M$ die Quotiententupel M_z/M betrachtet.

Theorem 3.29. *Sei f stark regulär und sei $M \in \mathrm{Lat}\,(M_z, H_d^f \otimes \mathbb{C}^r)$ homogen und*

$$\dim_{\mathbb{C}} Z(\mathrm{Ann}\,(H_d^f \otimes \mathbb{C}^r/M)) \leq 1.$$

Dann ist $M_z/M \in L(H_d^f \otimes \mathbb{C}^r/M)^d$ p-wesentlich normal für $p > 1$.

Beweis. Setze $T_i = M_{z_i}$ für $1 \leq i \leq d$ und sei $1 \leq p < \infty$. Im Beweis von Lemma 3.16 wurde gezeigt, dass

$$[P_{M^\perp}, T_i^*][P_{M^\perp}, T_j^*]^* = P_{M^\perp}[T_i^*, T_j]P_{M^\perp} + P_{M^\perp}T_jT_i^*P_{M^\perp} - T_i^*P_{M^\perp}T_j$$

für $i, j = 1, \ldots, d$ gilt und nach Bemerkung 3.17 (iii) ist T/M genau dann p-wesentlich normal, wenn $T^*|_{M^\perp}$ diese Eigenschaft hat. Dies ist aber nach Teil (ii) derselben Bemerkung äquivalent dazu, dass

$$T_i^*P_{M^\perp}T_j - P_{M^\perp}T_jT_i^*P_{M^\perp} \in \mathcal{L}^p \quad (1 \leq i, j \leq d).$$

Im Beweis von Theorem 3.25 wurde gezeigt, dass für $i = 1, \ldots, d$

$$[P_M, T_i][P_M, T_i]^* \in \mathcal{L}^t \quad (t > 1).$$

Nach Lemma 3.2 und Lemma 3.3 ist $[P_M, T_i] \in \mathcal{L}^{2t}$. Bemerkung 3.17 (ii) zeigt auch, dass

$$\begin{aligned} & [P_{M^\perp}, T_i^*][P_{M^\perp}, T_j^*]^* = [1 - P_M, T_i^*][1 - P_M, T_j^*]^* \\ = \;& [P_M, T_i]^*[P_M, T_j] \in \mathcal{L}^t \quad (t > 1, 1 \leq i, j \leq d). \end{aligned}$$

Also genügt es zu zeigen, dass

$$P_{M^\perp}[T_i^*, T_j]P_{M^\perp} \in \mathcal{L}^t \quad (t > 1, 1 \leq i, j \leq d).$$

Wie im Beweis von Theorem 3.8 zeigt man, dass

$$[T_i^*, T_j] = \begin{cases} AT_jT_i^*; i \neq j \\ B + AT_iT_i^*; i = j \end{cases}$$

mit

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\frac{n}{n+1} - \frac{a_{n-1}}{a_n}\right)E_n \otimes 1_{\mathbb{C}^r}, \\ B &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}\frac{1}{n+1}E_n \otimes 1_{\mathbb{C}^r}. \end{aligned}$$

Weil M homogen ist, vertauschen $P_{M^\perp}$ und $(E_n \otimes 1_{\mathbb{C}^r})$ (siehe Lemma 3.19). Daher ist

$$P_{M^\perp}(E_n \otimes 1_{\mathbb{C}^r}) = P_{(M^\perp)\cap(\mathbb{H}_n\otimes\mathbb{C}^r)} \quad (n \geq 0).$$

Setze $N_n = M^\perp \cap (\mathbb{H}_n \otimes \mathbb{C}^r)$ für $n \geq 0$. Dann ist

$$P_{M^\perp}A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\frac{n}{n+1} - \frac{a_{n-1}}{a_n}\right)P_{N_n}$$

und wie im Beweis von Theorem 3.8 folgt, dass

$$\begin{aligned}
\|P_{M^\perp}A\|_p^p &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^p\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\frac{n}{n+1} - \frac{a_{n-1}}{a_n}\right|^p \dim N_n \\
(\text{da } \dim N_n = const. \forall n \geq N) \quad &\asymp \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\frac{n}{n+1} - \frac{a_{n-1}}{a_n}\right|^p \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{a_{n-1}}{a_n}\right)\frac{n}{n+1} - \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{n+1}\right|^p.
\end{aligned}$$

Sei $p > 1$ fest. Da $(\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{n+1})_{n\geq 1} \in l^p$ ist, ist $P_{M^\perp}A \in \mathcal{L}^p$ genau dann, wenn

$$\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{a_{n-1}}{a_n}\right)_{n\geq 1} \in l^p.$$

Entsprechend folgt, dass

$$\|P_{M^\perp}B\|_p^p = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^p \frac{1}{(n+1)^p}\dim N_n \asymp \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^p}.$$

Ist f stark regulär, so sind $P_{M^\perp}A, P_{M^\perp}B \in \mathcal{L}^p$ für alle $p > 1$ und es folgt aus Lemma 3.2

$$P_{M^\perp}[T_i^*, T_j]P_{M^\perp} = \left\{ \begin{array}{r} P_{M^\perp}AT_jT_i^*P_{M^\perp}; i \neq j \\ P_{M^\perp}BP_{M^\perp} + P_{M^\perp}AT_iT_i^*P_{M^\perp}; i = j \end{array} \right\} \in \mathcal{L}^p.$$

für alle $p > 1$. □

Betrachtet man den Fall $d = 2$, so ist die Bedingung für die Dimension von $Z(\text{Ann }(H_d^f \otimes \mathbb{C}^r/M))$ sogar überflüssig und man erhält das folgende Korollar.

Korollar 3.30. *Sei f stark regulär und $\{0\} \neq I$ ein homogenes Ideal in $\mathbb{C}[z_1, z_2]$. Dann ist der Quotientenmodul $H_d^f/[I]$ p-wesentlich normal für jedes $p > 1$.*

Beweis. Da $\{0\} \neq I \subseteq \mathbb{C}[z_1, z_2]$ ist, gibt es mindestens ein homogenes Polynom $p_0 \neq 0$ mit $p_0 \in I$. Da p_0 nicht das Nullpolynom ist, gilt $\dim_{\mathbb{C}} Z(p_0) \leq 1$. Also ist

$$\dim_{\mathbb{C}} Z(I) \leq \dim_{\mathbb{C}} Z(p_0) \leq 1.$$

Daher liefert Theorem 3.29 zusammen mit Lemma 3.27 die Behauptung. □

3.6 Kodimensionalität homogener Untermoduln

In diesem Abschnitt wollen wir eine hinreichende Bedingung angeben unter der ein homogener Untermodul $M \in \mathrm{Lat}\,(M_z, H_d^f)$ endlich kodimensional ist. Um jedoch unser Resultat beweisen zu können, benötigen wir noch zwei, auch für sich genommen, interessante Resultate.

Lemma 3.31. *Sei $M \in \mathrm{Lat}\,(M_z, H_d^f)$ homogen und seien*

$$M_n = M \cap \mathbb{H}_n \ (n \in \mathbb{N}).$$

Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$M_{n+1} = \sum_{\nu=1}^{d} z_\nu M_n$$

für alle $n \geq N$.

Beweis. Die algebraische direkte Summe

$$I = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n \subset \mathbb{C}[z]$$

ist ein homogenes Ideal und wird daher nach Lemma 3.27 von endlich vielen homogenen Polynomen $p_i \in M_{n_i}$ $(1 \leq i \leq r)$ erzeugt. Sei $N = \max_{1 \leq i \leq r} n_i$. Wir zeigen nun, dass dann

$$M_{n+1} = \sum_{\nu=1}^{d} z_\nu M_n$$

für alle $n \geq N$ gilt. Dabei ist die Inklusion " $\supset$ " klar.
Sei umgekehrt $p \in M_{n+1}$. Dann gibt es $q_1, \ldots, q_r \in \mathbb{C}[z]$ mit

$$p = \sum_{i=1}^{r} p_i q_i.$$

Zerlegt man nun die q_i in ihre homogenen Bestandteile

$$q_i = \sum_{k \geq 0} q_{i,k} \in \mathbb{H}_k,$$

dann lässt sich p als Summe von homogenen Polynomen schreiben. Daher reicht es aus, diejenigen $q_{i,k}$ zu betrachten mit $\deg(p_i) + k = n + 1$. Da diese $q_{i,k}$ keine konstanten Anteile haben, lässt sich jedes solche schreiben als

$$q_{i,k} = \sum_{\nu=1}^{d} z_\nu t_{i,k,\nu}$$

mit geeigneten $t_{i,k,\nu} \in \mathbb{H}_{k-1}$. Insgesamt erhält man

$$p = \sum_{i,k;\deg(p_i)+k=n+1} p_i q_{i,k} \in \sum_{\nu=1}^{d} z_\nu \sum_{i=1}^{r} p_i \mathbb{H}_{n-n_i} \subset \sum_{\nu=1}^{d} z_\nu M_n.$$

$\square$

Theorem 3.32. *Sei $\{0\} \neq M_n \subset \mathbb{H}_n$ ein linearer Teilraum und*

$$M_{n+1} = z_1 M_n + \cdots + z_d M_n.$$

Dann gilt

$$\dim M_{n+1} \geq \frac{d+n}{1+n} \dim M_n$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn $M_n = \mathbb{H}_n$.

Beweis. Sei H der zu $f = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ gebildete funktionale Hilbertraum über $B_1(0) \subset \mathbb{C}^d$. Dann ist $M_z = (M_{z_1}, \ldots, M_{z_d}) \in L(H)^d$. Seien $P_{M_n}, P_{M_{n+1}} \in L(H)$ die Orthogonalprojektionen von H auf M_n bzw. M_{n+1} und

$$T = P_{M_{n+1}} - \sum_{i=1}^{d} M_{z_i} P_{M_n} M_{z_i}^*.$$

Dann gilt für $x \in \mathbb{H}_{n+1}$ mit $x = \sum_{|\alpha|=n+1} b_\alpha z^\alpha$ mit Lemma 2.4 und Theorem

1.15:

$$\begin{aligned}
\langle Tx, x\rangle &= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{d} \|P_{M_n} M_{z_i}^* x\|^2 \\
&\geq \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{d} \|M_{z_i}^* x\|^2 \\
&= \sum_{|\alpha|=n+1} |b_\alpha|^2 \frac{\alpha!}{|\alpha|!} - \sum_{i=1}^{d} \| \sum_{|\alpha|=n+1} b_\alpha \frac{\alpha_i}{|\alpha|} z^{\alpha-e_i} \|^2 \\
&= \sum_{|\alpha|=n+1} |b_\alpha|^2 \frac{\alpha!}{|\alpha|!} - \sum_{i=1}^{d} \sum_{|\alpha|=n+1} |b_\alpha|^2 \frac{\alpha_i^2}{|\alpha|^2} \frac{(\alpha-e_i)!}{(|\alpha|-1)!} \\
&= \sum_{|\alpha|=n+1} |b_\alpha|^2 \frac{\alpha!}{(n+1)!} (1 - \sum_{i=1}^{d} \frac{\alpha_i}{n+1}) = 0.
\end{aligned}$$

Damit ist $T \geq 0$. Wählt man eine Basis $(p_j^{(n)})_{j=1}^{\dim M_n}$ von $M_n \subset H$, dann erhält man unter erneuter Verwendung von Lemma 2.4:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\ [\sum_{i=1}^{d} M_{z_i} P_{M_n} M_{z_i}^*] &= \sum_{j=1}^{\dim M_n} \sum_{i=1}^{d} \mathrm{tr}\ [M_{z_i} p_j^{(n)} \otimes p_j^{(n)} M_{z_i}^*] \\
&= \sum_{j=1}^{\dim M_n} \sum_{i=1}^{d} \mathrm{tr}\ [(M_{z_i} p_j^{(n)}) \otimes (M_{z_i} p_j^{(n)})] \\
&= \sum_{j=1}^{\dim M_n} \sum_{i=1}^{d} \|M_{z_i} p_j^{(n)}\|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\dim M_n} \langle \sum_{i=1}^{d} M_{z_i}^* M_{z_i} p_j^{(n)}, p_j^{(n)} \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{\dim M_n} \frac{n+d}{n+1} \\
&= \frac{n+d}{n+1} \dim M_n.
\end{aligned}$$

Da $T \geq 0$ war, folgt daraus, dass $(\dim M_{n+1} - \frac{n+d}{n+1} \dim M_n) = \mathrm{tr}\ (T) \geq 0$ und damit die erste Behauptung.
Ist $M_n = \mathbb{H}_n$, dann ist auch $M_{n+1} = \mathbb{H}_{n+1}$ und die behauptete Gleichheit folgt aus Lemma 1.14. Sei also nun umgekehrt $\dim M_{n+1} = \frac{n+d}{n+1} \dim M_n$. Dann ist

tr $(T) = 0$ und damit auch $T = 0$. Für $\xi \in M_{n+1}$ folgt dann einerseits

$$\|\xi\|^2 = \sum_{i=1}^{d} \|P_{M_n} M_{z_i}^* \xi\|^2,$$

andererseits erhält man aus Lemma 2.4

$$\|\xi\|^2 = \sum_{i=1}^{d} \|M_{z_i}^* \xi\|^2.$$

Also folgt, dass $M_{z_i}^* \xi \in M_n$ für $i = 1, \ldots, d$ und damit

$$M_{z_j} M_{z_i}^* M_{n+1} \subset M_{n+1} \quad (1 \leq i, j \leq d).$$

Wegen $M_n \neq \{0\}$ ist $M_{n+1} = \sum_{i=1}^{d} z_i M_n \neq \{0\}$. Wähle ein

$$p = \sum_{|\beta|=n+1} a_\beta z^\beta \in M_{n+1} \backslash \{0\}$$

und setze $J = \{\beta \in \mathbb{N}^d; |\beta| = n+1 \text{ und } a_\beta \neq 0\}$. Wähle

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \max\{\beta_1; \beta \in J\}, \\
\alpha_2 &= \max\{\beta_2; \beta \in J \text{ und } \beta_1 = \alpha_1\}, \\
\alpha_3 &= \max\{\beta_3; \beta \in J \text{ und } (\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1, \alpha_2)\}, \\
&\vdots \\
\alpha_{d-1} &= \max\{\beta_{d-1}; \beta \in J \text{ und } (\beta_1, \ldots, \beta_{d-2}) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{d-2})\}, \\
\alpha_d &= \beta_d \text{ mit } \beta \in J \text{ und } (\beta_1, \ldots, \beta_{d-1}) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{d-1}).
\end{aligned}$$

Dann erhält man mit Lemma 2.4

$$(M_{z_d} M_{z_{d-1}}^*)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{d-1}} \cdots (M_{z_3} M_{z_2}^*)^{\alpha_1 + \alpha_2} (M_{z_2} M_{z_1}^*)^{\alpha_1} p = \delta z_d^{n+1},$$

wobei δ eine positive Konstante ist. Also ist $z_d^{n+1} \in M_{n+1}$. Eine ähnliche Rechnung ergibt für ein beliebiges $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ mit $|\alpha| = n+1$ und $K_\alpha = (M_{z_1} M_{z_2}^*)^{n+1-\alpha_d \cdots - \alpha_2} \cdots (M_{z_{d-2}} M_{z_{d-1}}^*)^{n+1-\alpha_d - \alpha_{d-1}} (M_{z_{d-1}} M_{z_d}^*)^{n+1-\alpha_d}$, dass auch $z^\alpha \in M_{n+1}$ ist, denn

$$K_\alpha z_d^{n+1} = \gamma z_1^{\alpha_1} \cdots z_d^{\alpha_d} = \gamma z^\alpha,$$

wobei γ eine positive Konstante ist. Also ist $M_{n+1} = \mathbb{H}_{n+1}$. Aus Lemma 1.14 und $\dim M_{n+1} = \frac{n+d}{n+1} \dim M_n$ erhält man $\dim M_n = \dim \mathbb{H}_n$. Also ist $M_n = \mathbb{H}_n$, wie behauptet. $\square$

Damit haben wir alle Vorbereitungen für das nächste Theorem getroffen.

Theorem 3.33. *Sei* $0 < \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{a_{n+1}} < \infty$ *und M ein homogener Untermodul von H_d^f. Sind alle $[P_M, M_{z_i}]$ in $\mathcal{L}^2$, dann ist* $\dim H_d^f/M < \infty$.

Beweis. Benutzt man dieselbe Notation wie im Beweis von Theorem 3.25, so gilt:

$$\begin{aligned}\text{tr }(A_1+\cdots+A_d)|_{M_n} &= \frac{a_{n-1}}{a_n}(\dim M_n - \frac{n+d-1}{n}\dim M_{n-1})\\ &= \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{n\dim M_n-(n+d-1)\dim M_{n-1}}{n}.\end{aligned}$$

Da $[P_M, M_{z_i}] \in \mathcal{L}^2$ für alle $i = 1, \cdots, d$, ist $A_1 + \cdots + A_d \in \mathcal{L}^1$ und es folgt, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \text{tr }(A_1+\cdots+A_d)|_{M_n} < \infty$. Nach Lemma 3.31 gibt es ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$M_n = z_1 M_{n-1} + \cdots + z_d M_{n-1}$$

für alle $n > N_0$ gilt.
Weil $0 < \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_{n-1}}{a_n}$ ist, gilt

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{n\dim M_n-(n+d-1)\dim M_{n-1}}{n} < \infty.$$

Da $A_1 + \cdots + A_d$ positiv ist, sind alle Summanden nicht-negativ. Da aber $\sum\limits_{n=N_0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, muss es ein $N_1 \in \mathbb{N}$ geben mit $N_1 \geq N_0$ und

$$N_1 \dim M_{N_1} = (N_1+d-1)\dim M_{N_1-1}$$

Nach Theorem 3.32 gilt dann aber $M_{N_1} = \mathbb{H}_{N_1}$ und damit sogar $M_n = \mathbb{H}_n$ für alle $n \geq N_1$. Daher ist $\dim M^\perp = \dim H_d^f/M \leq \sum\limits_{n=0}^{N_1-1} \dim \mathbb{H}_n < \infty$. □

Kapitel 4

Spektrum und wesentliches Spektrum von $M_z|_M$ und M_z/M

4.1 Allgemeine Vorbemerkungen

Im Verlauf dieses Kapitels betrachten wir wieder wesentlich normale Räume H_d^f und untersuchen das Spektrum und das wesentliche Spektrum von $M_z|_M$ bzw. M_z/M für Untermoduln M von H_d^f. Dafür verwenden wir die folgenden abkürzenden Schreibweisen: Sei $M \in \mathrm{Lat}\,(M_z, H_d^f)$ und $p \in \mathbb{C}[z]$, dann definieren wir:

$$R_p = M_p|_M;\ R_i = R_{z_i},\ R = (R_1, \ldots, R_d),$$
$$S_p = P_{M^\perp} M_p|_{M^\perp} (\cong M_p/M);\ S_i = S_{z_i},\ S = (S_1, \ldots, S_d),$$

wobei M_p den Multiplikationsoperator mit $p \in \mathbb{C}[z]$ aus Definition 2.1 bezeichnet. Weiter seien s und t wie in Kapitel 2 gewählt.

Lemma 4.1. *Ist $\mu \in \mathbb{C}$ mit $s \leq |\mu| \leq t$, dann ist der Unterraum $(z-\mu)H_1^f$ nicht abgeschlossen.*

Beweis. Offensichtlich ist $M_z - \mu$ injektiv. Da der Raum

$$\overline{(z-\mu)\mathbb{C}[z]} + \mathbb{C}1 \subset H_1^f$$

abgeschlossen ist und $\mathbb{C}[z]$ enthält, ist $\overline{(z-\mu)\mathbb{C}[z]} + \mathbb{C}1 = H_1^f$. Wäre $(z-\mu)H_1^f \subset H_1^f$ abgeschlossen, so wäre $\dim H_1^f/\mathrm{Im}\,(M_z - \mu) \leq 1$ und $\mu \in \sigma_e(M_z)$. Dies ist ein Widerspruch zu Theorem 2.22. $\square$

Um das eigentliche Resultat vorzubereiten, beweisen wir einige auch allgemeiner geltende Hilfssätze. Für ein Kompaktum $K \subset \mathbb{C}^d$ nennt man die Menge

$$K^{\sim} = \{z \in \mathbb{C}^d; |p(z)| \leq \|p\|_{\infty,K} \text{ für alle } p \in \mathbb{C}[z]\}$$

die polynom-konvexe Hülle von K. Die Menge K heißt polynom-konvex, falls $K = K^\sim$ ist.

Bemerkung 4.2. *Da für ein beliebiges Kompaktum $K \subset \mathbb{C}^d$ die Menge $K^\sim$ ein polynom-konvexes Kompaktum ist, gibt es zu jedem $\lambda \in \mathbb{C}^d \backslash K^\sim$ ein $p \in \mathbb{C}[z]$ mit $|p(\lambda)| > \|p\|_{\infty,\tilde{K}}$. Indem man Polynome $p_1, \ldots, p_d \in \mathbb{C}[z]$ wählt mit*

$$p(z) - p(\lambda) = \sum_{i=1}^{d} (z_i - \lambda_i) p_i(z) \ (z \in \mathbb{C}^d),$$

sieht man, dass eine offene Umgebung U von $K^\sim$ und analytische Funktionen $f_i \in \mathcal{O}(U)$ $(i = 1, \ldots, d)$ existieren mit

$$1 = \sum_{i=1}^{d} (z_i - \lambda_i) f_i(z) \ (z \in U).$$

Da $K^\sim$ polynom-konvex ist, gibt es eine kleinere Umgebung $V \subset U$ von $K^\sim$ so, dass jedes f_i $(i = 1, \ldots, d)$ auf V kompakt gleichmäßiger Limes einer Folge $(p_{i,k})_{k \geq 0}$ von Polynomen $p_{i,k} \in \mathbb{C}[z]$ ist (Wähle dazu V wie in [Vasilescu, Lemma II.9.2]. Dann existiert nach [Vasilescu, Lemma II.9.1] eine polynom-konvexe, kompakte Ausschöpfung von V. Auf diese wende man das Oka-Weil-Theorem [Range, Theorem VI.1.5] an).

Mit dieser Bemerkung erhält man ein Resultat für die Einschränkung von $T \in L(H)^d$ auf ein $M \in \mathrm{Lat}\,(T, H)$.

Satz 4.3. *Sei H ein Hilbertraum, $T = (T_1, \ldots, T_d) \in L(H)^d$ ein vertauschendes Tupel und $M \in \mathrm{Lat}\,(T, H)$. Dann ist*

$$\sigma(T|_M) \subset \sigma(T)^\sim.$$

Beweis. Ist in der Situation der vorangegangenen Bemerkung $K = \sigma(T)$, so ist M wegen

$$f_i(T) = \lim_{k \to \infty} p_{i,k}(T) \quad (i = 1, \ldots, d)$$

auch invariant unter den Operatoren $f_i(T)$. Also ist

$$1_M = \sum_{i=1}^{d} (T_i - \lambda_i) f_i(T)|_M = \sum_{i=1}^{d} (T_i|_M - \lambda_i)(f_i(T)|_M).$$

Da die Operatoren $f_i(T)|_M$ im Kommutanten von $T|_M$ liegen, folgt aus [EP, Lemma 2.2.4]

$$\lambda \notin \sigma(T|_M).$$

Damit ist gezeigt, dass $\sigma(T|_M) \subset \sigma(T)^\sim$ gilt. □

Der nächste Satz dient zur Beschreibung des wesentlichen Spektrums von wesentlich normalen Operatoren $T \in L(H)^d$ auf einem Hilbertraum H.

Satz 4.4. *Sei H ein Hilbertraum, $T = (T_1, \ldots, T_d) \in L(H)^d$ wesentlich normal und $\lambda \in \mathbb{C}^d$ so, dass*

$$\dim H^d(\lambda - T, H) < \infty$$

ist bzw.

$$H \to H^d,\ x \mapsto ((\lambda_i - T_i)x)_{i=1}^d$$

endlich dimensionalen Kern und abgeschlossenes Bild besitzt, so ist

$$\lambda \notin \sigma_e(T).$$

Beweis. Seien

$$H^\infty = \{(x_n)_{n\geq 0}; (x_n)_{n\geq 0} \text{ ist beschränkte Folge in } H\}$$

und

$$pc(H) = \{(x_n) \in H^\infty; \text{jede Teilfolge von } (x_n) \text{ hat eine konvergente Teilfolge}\}.$$

Dann ist H^∞ ein Banachraum und $pc(H) \subset H^\infty$ ein abgeschlossener Teilraum. Weiter bezeichne $H^q = H^\infty / pc(H)$ den Quotientenraum.
Für $A \in L(H)$ ist

$$A^\infty : H^\infty \to H^\infty,\ (x_n) \mapsto (Ax_n)$$

stetig linear mit $\|A^\infty\| \leq \|A\|$ und $A^\infty pc(H) \subset pc(H)$. Sei A^q der Quotientenoperator

$$A^q : H^q \to H^q,\ A^q((x_n) + pc(H)) = A^\infty((x_n)) + pc(H).$$

Nach Konstruktion ist $\|A^q\| \leq \|A\|$ und $A^q = 0$ genau dann, wenn $A \in L(H)$ kompakt ist.
Für das wesentlich normale Tupel $T = (T_1, \ldots, T_d) \in L(H)^d$ bezeichne

$$T^q = (T_1^q, \ldots, T_d^q) \in L(H^q)^d$$

das induzierte vertauschende Tupel auf dem Banachraum H^q und

$$[T] = ([T_1], \ldots, [T_d]) \in \mathcal{C}(H)^d$$

das induzierte vertauschende Tupel normaler Elemente in der Calkin-Algebra $\mathcal{C}(H) = L(H)/\mathcal{K}(H)$. Nach Putnam-Fugledes Theorem ist die erzeugte unitale C^*-Algebra

$$C^*([T]) = C^*(\{[T_1], \dots, [T_d]\}) \subset \mathcal{C}(H)$$

kommutativ. Weiter wissen wir bereits (siehe Kapitel 2), dass

$$\begin{aligned} \sigma_e(T) &= \sigma(L_{[T]}, \mathcal{C}(H)) = \sigma(L_{[T]}, C^*([T])) \\ &= \sigma_{C^*([T])}([T]) = \{\lambda([T_1]), \dots, \lambda([T_d]); \lambda \in \triangle_{C^*([T])}\}. \end{aligned}$$

Also ist die Abbildung

$$\chi : \triangle_{C^*([T])} \to \sigma_e(T);\ \lambda \mapsto (\lambda([T_1]), \dots, \lambda([T_d]))$$

wohldefiniert und surjektiv. Offensichtlich ist χ auch injektiv und stetig. Also ist χ ein Homöomorphismus zwischen kompakten Hausdorffräumen. Die Komposition

$$\begin{aligned} \Phi : C(\sigma_e(T)) &\to C(\triangle_{C^*([T])}) \overset{\Gamma^{-1}}{\to} C^*([T]), \\ f &\mapsto f \circ \chi \end{aligned}$$

wobei $\Gamma : C^*([T]) \to C(\triangle_{C^*([T])}),\ a \mapsto \hat{a}$ der Geldfand-Isomorphismus ist, ist ein Isomorphismus zwischen unitalen C^*-Algebren mit

$$\Phi(z_i) = [T_i] \quad (i = 1, \dots, d).$$

Die Abbildung

$$\Psi : C(\sigma_e(T)) \to L(H^q),\ f \mapsto T_f^q,\ \text{falls } [T_f] = \Phi(f)$$

ist ein stetiger unitaler Algebrenhomomorphismus mit

$$\Psi(z_i) = T_i^q \quad (i = 1, \dots, d).$$

Also ist das Tupel $T \in L(H)^d$ nach [EP, Theorem 6.1.13] wesentlich zerlegbar im Sinne von [EP, Definition 6.3.1]. Dann folgt aus den Voraussetzungen an $\lambda \in \mathbb{C}^d$ die Behauptung aus [EP, Korollar 6.3.5] für die Spezialfälle $p = d$ bzw. $p = 0$. $\square$

4.2 Spektrum und wesentliches Spektrum von $M_z|_M$ und M_z/M

Um den Beweis des Hauptresultats so übersichtlich wie möglich zu halten, machen wir noch eine letzte vorbereitende Bemerkung.

Bemerkung 4.5. *Sei* $\mathcal{K} = \bigvee_{k=0}^{\infty} z_1^k$. *Dann ist*

$$H_d^f = \mathcal{K} \oplus \overline{(z_2 H_d^f + \cdots + z_d H_d^f)}$$

eine orthogonale Zerlegung von H_d^f *in reduzierende Teilräume für* M_{z_1} *so, dass* $M_{z_1}|_{\mathcal{K}}$ *unitär äquivalent ist zu* $M_z \in L(H_1^f)$.

Beweis. Dass dies eine orthogonale Zerlegung von H_d^f ist, folgt direkt aus Theorem 1.15. Aus der Invarianz der beiden Räume unter M_{z_1} folgt, dass sie reduzierend sind für M_{z_1}. Die Abbildung

$$U : H_1^f \hookrightarrow H_d^f,\ (Uh)(z) = h(z_1)$$

ist isometrisch nach Satz 1.15. Vermöge $U : H_1^f \to \operatorname{Im} U = \mathcal{K}$ sind $M_z \in L(H_1^f)$ und $M_{z_1}|_{\mathcal{K}}$ unitär äquivalent. □

Jetzt ist es uns möglich, die (wesentlichen) Spektren von R und S für wesentlich normale Untermoduln $M = [I] \in \operatorname{Lat}\,(M_z, H_d^f)$ durch Eigenschaften der H_d^f zugrunde liegenden Potenzreihe f zu beschreiben.

Theorem 4.6. *Sei* H_d^f *wesentlich normal und* $\{0\} \neq I$ *ein homogenes Ideal von* $\mathbb{C}[z_1, \cdots, z_d]$. *Der homogene Untermodul* $M = [I]$ *von* H_d^f *sei wesentlich normal. Dann gilt:*

$$\begin{array}{rl} (i) & \sigma(R) = \{z \in \mathbb{C}^d; |z| \leq t\}, \\ (ii) & \sigma_e(R) = \{z \in \mathbb{C}^d; s \leq |z| \leq t\}, \\ (iii) & \sigma(S) = Z(I) \cap \{z \in \mathbb{C}^d; |z| \leq t\}, \\ (iv) & \sigma_e(S) = Z(I) \cap \{z \in \mathbb{C}^d; s \leq |z| \leq t\}. \end{array}$$

Beweis. Abkürzend schreiben wir $\overline{B}_t(0) = \{z \in \mathbb{C}^d; |z| \leq t\}$ und $\mathbb{B}_d[s,t] = \{z \in \mathbb{C}^d; s \leq |z| \leq t\}$. Nach Bemerkung 3.14 ist klar, dass für alle $p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$ auch $p(S) = p(P_{M^\perp} M_z|_{M^\perp}) \cong p(M_z/M) = p(M_z)/M$ ist. Beachtet man weiter, dass nach Lemma 3.27 gilt

$$\begin{aligned} I &= \operatorname{Ann}\,(H_d^f/M) = \{p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]; pH_d^f \subset M\} \\ &= \{p \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]; p(M_z)/M = 0\}, \end{aligned}$$

so erhält man mit Satz 2.13

$$p(\sigma(S)) = p(\sigma(M_z/M)) = \sigma(p(M_z/M)) = 0 \quad \forall p \in I.$$

Also gilt $\sigma(S) \subset Z(I)$.
Da die Menge $\overline{B}_t(0)$ als konvexe Menge auch polynom-konvex ist, folgt aus Satz 4.3 und Theorem 2.22, dass $\sigma(R) = \sigma(M_z|_M) \subset \sigma(M_z)^\sim \subset \overline{B}_t(0)$ gilt.
Sei $\lambda \in \mathbb{C}^d \backslash \sigma_e(M_z)$. Dann hat

$$(H_d^f/M)^d \overset{\lambda - M_z/M}{\longrightarrow} H_d^f/M$$

endlich kodimensionales Bild, da $(H_d^f)^d \overset{\lambda - M_z}{\longrightarrow} H_d^f$ endlich kodimensionales Bild hat, und die Abbildung

$$M \overset{\lambda - M_z|_M}{\longrightarrow} M^d$$

ist injektiv mit abgeschlossenem Bild, da dasselbe für die entsprechende Abbildung $H_d^f \overset{\lambda - M_z}{\longrightarrow} (H_d^f)^d$ gilt. Da die Tupel $S \cong M_z/M$ und $R = M_z|_M$ nach Lemma 3.16 wesentlich normal sind, folgt aus Satz 4.4, dass $\lambda \notin \sigma_e(S) \cup \sigma_e(R)$.
Also gilt $\sigma_e(S) \cup \sigma_e(R) \subset \sigma_e(M_z) = \mathbb{B}_d[s,t]$.
Wendet man Theorem 2.11 an auf $Y = M,\ X = H_d^f,\ Z = H_d^f/M$, so erhält man mit Theorem 2.22:

$$\sigma(S) \subset \underbrace{\sigma(R)}_{\subset \overline{B}_t(0)} \cup \underbrace{\sigma(M_z)}_{= \overline{B}_t(0)} = \overline{B}_t(0),$$

$$\overline{B}_t(0) = \sigma(M_z) \subset \sigma(S) \cup \sigma(R) \subset \overline{B}_t(0), \quad (\star_1)$$

sowie

$$\sigma_e(M_z) \subset \sigma_e(R) \cup \sigma_e(S) \subset \sigma_e(M_z). \quad (\star_2)$$

Aus $\sigma(S) \subset \overline{B}_t(0) \cap Z(I)$ und $(\star_1)$ erhält man, dass

$$\overline{B}_t(0) \cap Z(I)^c \subset \sigma(R) \subset \overline{B}_t(0).$$

Da $\sigma(R)$ abgeschlossen und $\overline{B}_t(0) \cap Z(I)^c \subset \overline{B}_t(0)$ dicht ist, folgt die Behauptung von (i).
Im Fall $s < t$ erhält man ebenso wegen $\sigma_e(S) \subset \mathbb{B}_d[s,t] \cap Z(I)$ und $(\star_2)$, dass

$$\mathbb{B}_d[s,t] \cap Z(I)^c \subset \sigma_e(R) \subset \mathbb{B}_d[s,t].$$

Wegen der Dichtheit folgt auch hier aus der Abgeschlossenheit von $\sigma_e(R)$ schon die Behauptung von (ii).
Um die Inklusion

$$\mathbb{B}_d[s,t] \subset \sigma_e(R)$$

im Fall $s = t$ zu beweisen, beachte, dass bereits gezeigt wurde

$$\sigma(R) = \overline{B}_t(0).$$

Sei $\lambda \in \partial B_t(0)$. Wähle $u : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$ unitär mit $u(\lambda) = te_1$ und setze

$$\tilde{R} = u(R) = u \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_d \end{pmatrix} \in L(M)^d.$$

Nach dem spektralen Abbildungssatz (Satz 2.13) ist

$$te_1 = u(\lambda) \in \sigma(\tilde{R}) = u(\sigma(R)) = \overline{B}_t(0).$$

Sei $\pi_1 : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ die Projektion auf die erste Komponente. Dann ist

$$t = \pi_1(te_1) \in \sigma(\tilde{R}_1) = \pi_1(\sigma(\tilde{R})) = \overline{D}_t(0)$$

ein Punkt in $\partial\sigma(\tilde{R}_1)$, der nicht isoliert ist in $\sigma(\tilde{R}_1)$.
Also ist nach Satz 1.20 $t \in \sigma_e(\tilde{R}_1) = \pi_1(\sigma_e(\tilde{R}))$. Wähle $\mu \in \sigma_e(\tilde{R})$ mit $t = \pi_1(\mu)$. Dann ist

$$u(\lambda) = te_1 = \mu \in \sigma_e(\tilde{R}) = u\sigma_e(R)$$

und daher $\lambda \in \sigma_e(R)$.
Sei $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_d) \in Z(I) \cap \overline{B}_s(0)$. Da

$$\sum_{i=1}^{d} (\mu_i - M_{z_i}/M)(H_d^f/M) \subset \{f + M; f \in H_d^f \text{ mit } f(\mu) = 0\}$$

und da $f(\mu) = 0 \ \forall f \in M$, liegt $1 + M \notin \sum_{i=1}^{d} (\mu_i - M_{z_i}/M)(H_d^f/M)$. Folglich ist $\mu \in \sigma(M_z/M) = \sigma(S)$.
Nach dem bisher Bewiesenen reicht es aus, $Z(I) \cap \mathbb{B}_d[s,t] \subseteq \sigma_e(S)$ zu zeigen. Dann gilt

$$Z(I) \cap \overline{B}_t(0) = (Z(I) \cap \overline{B}_s(0)) \cup (Z(I) \cap \mathbb{B}_d[s,t]) \subset \sigma(S) \subset Z(I) \cap \overline{B}_t(0)$$

und

$$Z(I) \cap \mathbb{B}_d[s,t] \subset \sigma_e(S) \subset Z(I) \cap \mathbb{B}_d[s,t].$$

Man erhält also die Behauptungen (iii) und (iv).
Betrachte dafür zunächst den Fall $Z(I) \ni (1, 0, \dots, 0)$.
Dann gilt für alle homogenen Polynome $F(z) = \sum\limits_{|\alpha|=n} a_\alpha z^\alpha \in M$:

$$0 = F((1, 0, \dots, 0)) = a_{(n,0,\dots,0)}$$

und damit

$$F \in \overline{z_2 H_d^f + \cdots + z_d H_d^f}.$$

Also ist

$$M \subseteq \overline{z_2 H_d^f + \cdots + z_d H_d^f}.$$

Sei $\mu \in \mathbb{C}$ mit $s \leq |\mu| \leq t$. Dann ist auch $(\mu, 0 \dots, 0) \in Z(I)$. Seien weiter $q : H_d^f \to H_d^f/M$ die Quotientenabbildung und $\mathcal{K} = \bigvee\limits_{k=0}^{\infty} z_1^k$.
Wäre $(z_1 - \mu)(H_d^f/M) + \sum\limits_{i=2}^{d} z_i(H_d^f/M) \subset H_d^f/M$ abgeschlossen, so wäre

$$(z_1 - \mu)\mathcal{K} + \overline{z_2 H_d^f + \cdots + z_d H_d^f} = q^{-1}((z_1 - \mu)(H_d^f/M) + \sum_{i=2}^{d} z_i(H_d^f/M))$$

als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Funktion abgeschlossen.
Da nach Bemerkung 4.5 $(z_1 - \mu)\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ und $\overline{z_2 H_d^f + \cdots + z_d H_d^f} = \mathcal{K}^\perp$ gilt, würde folgen, dass $(z_1 - \mu)\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ abgeschlossen wäre. Da nach derselben Bemerkung aber auch $(M_{z_1} - \mu)|_{\mathcal{K}} \cong M_z - \mu \in L(H_1^f)$ gilt, wäre $(z - \mu)H_1^f \subset H_1^f$ abgeschlossen. Das ist jedoch ein Widerspruch zu Lemma 4.1. Also ist $(\mu, 0, \dots, 0) \in \sigma_e(S)$.
Betrachte nun den allgemeinen Fall $w = (w_1, \dots, w_d) \in Z(I) \cap \mathbb{B}_d[s, t]$: Wähle

$$U = (a_{i,j}) : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d \text{ unitär mit } U^{-1}w = (\mu, 0, \dots, 0) \ (\mu \in \mathbb{C} \text{ geeignet}).$$

Dann definiert U, wie im Beweis von Lemma 1.16, einen unitären Operator

$$\tilde{U} : H_d^f \to H_d^f, \ \tilde{U}f = f \circ U.$$

Weiter bezeichne $\tilde{I} = \tilde{U}(I)$ und $N = [\tilde{I}]$. Dann ist $\tilde{I}$ ebenfalls homogen mit $(\mu, 0, \dots, 0) \in U^{-1}Z(I) = Z(\tilde{I})$. Im Beweis von Theorem 2.22 wurde bereits gezeigt, dass gilt:

$$\tilde{U}^{-1} M_z \tilde{U} = U^{-1} M_z.$$

Da $N = [\tilde{U}(I)] = \tilde{U}([I]) = \tilde{U}(M)$ ist, induziert $\tilde{U}$ einen unitären Operator

$$\hat{U} : H_d^f/M \to H_d^f/N,\ [f] \mapsto [\tilde{U}f]$$

mit der Eigenschaft

$$\hat{U}^{-1}(M_z/N)\hat{U} = U^{-1}(M_z/M).$$

Dann folgt aus dem oben bewiesenen Spezialfall zusammen mit Satz 2.13 und Lemma 2.12

$$U^{-1}w = (\mu, 0, \ldots, 0) \in \sigma_e(M_z/N) = \sigma_e(U^{-1}(M_z/M)) = U^{-1}\sigma_e(M_z/M)$$

und damit $w \in \sigma_e(M_z/M) = \sigma_e(S)$. Diese Beobachtung beendet den Beweis. □

Definiert man für ein vertauschendes Tupel $T = (T_1, \ldots, T_d) \in L(X)^d$ auf einem Banachraum X das Defektspektrum von T als

$$\sigma_\delta(T) = \{z \in \mathbb{C}^d; X^d \to X,\ (x_i) \mapsto \sum_{i=1}^{d}(z_i - T_i)x_i \text{ nicht surjektiv}\}$$

und das wesentliche Defektspektrum von T als

$$\sigma_{\delta,e}(T) = \{z \in \mathbb{C}^d; \dim H^d(z - T, X) = \infty\},$$

so stellt man fest, dass der Beweis von Theorem 4.6 auch für nicht wesentlich normale Untermoduln $M = [I]$ noch einige interessante Ergebnisse liefert.

Bemerkung 4.7. *(i) Teil (i) von Theorem 4.6 bleibt auch richtig, wenn M nicht wesentlich normal ist.*
(ii) Ist M nicht wesentlich normal, so zeigt der Beweis von 4.6, dass man anstelle der Teile (iii) und (iv) noch die folgenden Gleichheiten erhält:

$$\sigma_\delta(S) = Z(I) \cap \overline{B}_t(0),$$
$$\sigma_{\delta,e}(S) = Z(I) \cap \mathbb{B}_d[s, t].$$

Literaturverzeichnis

[Avr98] W.Arveson, *Subalgebras of C^*-algebras III: Multivariable operator theory*, Acta Math. 181 , 159-228, 1998.

[Avr02] W.Arveson, *The dirac operator of a commuting d-tuple*, J. Funct. Anal. 189, 53-79 (2002).

[Arv05] W. Arveson, *p-Summable commutators in dimension d*, J. Oper. Theory 54, 101-117, arXiv: math.OA/0308104 (2005).

[Arv07] W. Arveson, *Quotients of standard hilbert modules*, Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007), 6027-6055, arXiv: math/0502388v2 [math.OA].

[Barbian] C. Barbian, *Positivitätsbedingungen funktionaler Hilberträume und Anwendungen in der mehrdimensionalen Operatorentheorie*, Diplomarbeit, Universität des Saarlandes, 2001.

[Conway] J. Conway, *A course in functional analysis*, Graduate Texts in Mathematics Vol.96, Springer-Verlag, New York, 1985.

[Curto] R. Curto, *Spectral permanence for joint spectra*, Trans. Amer. Math. Soc. 270 (1982), 659-665.

[Dou06a] R. Douglas, *Essential reductive Hilbert modules*, J. Oper. Theory 55, 117-133, arXiv: math.OA/0404167 (2006).

[Dou06b] R. Douglas, *A new kind of index theorem*, In: Analysis, Geometry and Topology of elliptic operators, (Roskilde, Denmark, 2005), 2006, World Scientific Publishing, Singapore, arXiv: math.FA/0507542, 2005.

[Eisenbud] D. Eisenbud, *Commutative algebra*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[EP] J. Eschmeier, M. Putinar, *Spectral decompositions and analytic sheaves*, London Mathematical Society Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1996.

[GRS] S. Gleason, J. Richter, C. Sundberg, *On the index of invariant subspaces in spaces of analytic functions in several complex variables*, J. Reine. Angew. Math. 587, 49-76 (2005).

[GW06] K. Guo, K. Wang, *Essentially normal hilbert modules and K-homology*, preprint, 2006.

[GW08] K.Guo, K.Wang, *Essentially normal hilbert modules and K-homology*, Math. Ann. 340, 907-934, 2008.

[Hartshorne] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[Lang] S. Lang, *Algebra*, Reading, Massachusetts, Addison-Wesley, 1965, 1984. Second Edition.

[Meise-Vogt] R. Meise, D. Vogt, *Einführung in die Funktionalanalysis*, Vieweg-Studium, Braunschweig, 1992.

[Range] R. Range, *Holomorphic functions and integral representations in several complex variables*, Graduate Texts in Mathematics Vol.108, Springer-Verlag, New York, 1986.

[Vasilescu] F.-H. Vasilescu, *Analytic functional calculus and spectral decompositions*, Editura Academiei, Bucharest, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1979, 1982. Second Edition.

Hiermit erkläre ich an Eides Statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die ausdrücklich angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Saarbrücken, den