Die von Neumannsche Ungleichung

Bachelorarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science
im Studiengang Mathematik
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät I
- Mathematik und Informatik -
der Universität des Saarlandes

von

Dominik Schillo

betreut durch

Prof. Dr. Jörg Eschmeier

Saarbrücken, 2012

Eidesstattliche Versicherung

Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Saarbrücken, den 6. November 2012

Dominik Schillo

Danksagung

Zuallererst möchte ich mich bei meiner Familie und Freunden bedanken, die in den letzten drei Jahren mir immer zur Seite standen, auch in den schwierigen Zeiten.

Ebenfalls möchte ich mich bei den Teilnehmern des Bachelorseminars für den interessanten mathematischen Austausch während des vergangenen Semesters bedanken.

Einen besonderen Dank an Johannes Alt, Philipp Loew und Jonas Wahl für ihre Hilfe beim TEXen und Korrekturlesen.

Schließlich bedanke ich mich herzlich bei Herrn Prof. Jörg Eschmeier für die sehr intensive Betreuung und das interessante Thema, welches mein Interesse an der Operatorentheorie weckte, wofür ich sehr dankbar bin.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Im Jahre 1950 bewies John von Neumann erstmals in [16] die nach ihm benannte Ungleichung für eine Kontraktion $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ auf einem komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$

$$\|p(T)\| \leq \|p\|_{\mathbb{D}},$$

wobei $p \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom in einer Variablen mit komplexen Koeffizienten ist und $\|\cdot\|_{\mathbb{D}}$ die Supremumsnorm auf der Einheitskreisscheibe bezeichnet.
B. Szőkefalvi-Nagy zeigte 1953 in [13], dass jede Kontraktion auf einem Hilbertraum eine unitäre Dilatation besitzt. Einen sehr einfachen Beweis dieser Aussage stammt von J. J. Schäffer aus [12]. Mit diesem Resultat erhält man die von Neumannsche Ungleichung als Korollar.
Es stellte sich nun die Frage, ob die Ungleichung

$$\|p(T_1, \dots, T_n)\| \leq \|p\|_{\mathbb{D}^n}$$

auf dem Polyzylinder für kommutierende Kontraktionen $T_1, \dots, T_n \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ und Polynome $p \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ in n Variablen für jede natürliche Zahl n richtig bleibt. Eine positive Antwort für den Fall $n = 2$ lieferte T. Andô in seiner Arbeit [1] aus dem Jahre 1962, indem er das Dilatationsresultat von B. Szőkefalvi-Nagy auf zwei kommutierende Kontraktionen verallgemeinerte. Mit Hilfe des Satzes von Gelfand-Neumark erhält man die von Neumannsche Ungleichung für zwei kommutierende Kontraktionen.
Es blieb zehn Jahre lang unklar, ob die Ungleichung auch in höheren Dimensionen gilt. Dies konnte N. Th. Varopoulos 1974 in [15] erstmalig mit einem Gegenbeispiel verneinen. Ein weiteres Gegenbeispiel auf einem 8-dimensionalen Hilbertraum stammt von M. J. Crabb und A. M. Davie, welches sie in ihrer Arbeit [4] 1975 veröffentlichten.
Eine weitere mögliche Verallgemeinerung in n Dimensionen besteht darin, die Einheitskugel und n-Kontraktionen zu betrachten, also die Frage zu stellen, ob die Ungleichung

$$\|p(T)\| \leq \|p\|_{\mathbb{B}^n},$$

für alle Polynome p in n Variablen und alle vertauschenden Tupel $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})^n$ mit der Eigenschaft $\sum_{i=1}^n T_i T_i^* \leq I_{\mathcal{H}}$ gilt. Dass dies bereits für $n = 2$ falsch ist, zeigte S. W. Drury 1978 in [5]. In der gleichen Arbeit gab S. W. Drury eine andere Verallgemeinerung auf der Kugel. Hierbei machte er sich zu nutze, dass die Multiplikatoren auf dem Hardyraum H^2 über der Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$ gerade die Funktionen in H^∞ sind. Somit konnte er die von Neumannsche Ungleichung zu

$$\|p(T)\| \leq \|p\|_{\mathcal{M}(H^2)}$$

umformulieren. Mit $M_p = p(M_z)$ und $\|p\|_{\mathcal{M}(H^2)} = \|M_p\|$ folgt

$$\|p(T)\| \leq \|p(M_z)\|,$$

wobei $M_z \in \mathfrak{L}(H^2)$ den Multiplikationsoperator mit Symbol z bezeichnet. Diese Ungleichung bewies er nun, indem er n-Kontraktionen statt einer einzelnen Kontraktion verwendete und den Multiplikationsoperator M_z durch den n-Shift auf dem Drury-Arveson Raum ersetzte.

Um diese Resultate zu erhalten, werden wir im ersten Kapitel zunächst einige Ergebnisse über funktionale Hilberträume und den Drury-Arveson Raum festhalten, die wir im späteren Verlauf verwenden werden. Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit der klassischen eindimensionalen von Neumannschen Ungleichung. Kapitel 3 beinhaltet den Satz von Andô über unitäre Dilatationen zweier kommutierender Kontraktionen und das Gegenbeispiel von Crabb-Davie für den Fall $n = 3$. Das letzte Kapitel widmet sich der Arbeit [5] von S. W. Drury, wobei wir das Gegenbeispiel ausführen, sowie die Verallgemeinerung von Drury der von Neumannschen Ungleichung beweisen werden. Zum Schluss werden wir sehen, dass die Abbildung

$$\{p(M_z) : p \in \mathbb{C}[z]\} \to \mathfrak{L}(\mathcal{H}),\ p(M_z) \mapsto p(T)$$

für eine n-Kontraktion $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})^n$ nicht nur kontraktiv ist, was unmittelbar aus der von Neumannschen Ungleichung folgt, sondern sogar vollständig kontraktiv ist. Diese Erkenntnis geht auf die Arbeit [2] von W. Arveson aus dem Jahr 1998 zurück.

Kapitel 1

Grundlagen

Dieses Kapitel soll die Grundlagen für die folgenden Kapitel schaffen. Wir werden zunächst allgemeine funktionale Hilberträume betrachten, um im nächsten Abschnitt den Drury-Arveson Raum als funktionalen Hilbertraum zu identifizieren. Zudem werden wir genauer auf den n-Shift auf dem Drury-Arveson Raum eingehen, der in Kapitel 4 eine wichtige Rolle spielen wird.

1.1 Funktionale Hilberträume und Multiplikatoren

Sei $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum, X eine beliebige Menge und

$$\mathcal{H}^X = \{f : f\colon X \to \mathcal{H} \text{ Abbildung}\}.$$

Definition 1.1. (i) Ein Hilbertraum $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}^X$ heißt *funktional*, falls alle Punktauswertungen

$$\delta_\lambda\colon \mathcal{K} \to \mathcal{H},\ f \mapsto f(\lambda)\ (\lambda \in X)$$

stetig sind.

(ii) Eine Abbildung $K\colon X \times X \to \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ heißt *positiv definit*, falls

$$\sum_{i,j=1}^{n} \langle K(\lambda_i, \lambda_j)x_j, x_i\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0$$

für alle endlichen Folgen $(\lambda_i)_{i=1}^n$ in X und $(x_i)_{i=1}^n$ in $\mathcal{H}$ gilt.

Bemerkung 1.2. Identifiziert man $\mathbb{C} \cong \mathfrak{L}(\mathbb{C})$ (vermöge $\mathbb{C} \to \mathfrak{L}(\mathbb{C}), \alpha \mapsto M_\alpha, M_\alpha z = \alpha z$), so ist eine komplexwertige Funktion im obigen Sinne positiv definit genau dann, wenn

$$\sum_{i,j=1}^{n} K(\lambda_i, \lambda_j)\alpha_j\overline{\alpha_i} \geq 0$$

für alle endlichen Folgen $(\lambda_i)_{i=1}^n$ in X und $(\alpha_i)_{i=1}^n$ in $\mathbb{C}$ gilt.

Die Beweise zu den folgenden grundlegenden Sätze für funktionale Hilberträume finden sich z.B. in [3, Kapitel 1].

Satz 1.3. *Für einen Hilbertraum $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}^X$ sind äquivalent:*

(i) $\mathcal{K}$ ist funktional.

(ii) Es existiert eine eindeutige Abbildung $K \colon X \times X \to \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ mit

(a) $K(\cdot, \mu)x \in \mathcal{K}$ für $\mu \in X$ und $x \in \mathcal{H}$,

(b) $\langle f, K(\cdot, \mu)x\rangle_{\mathcal{K}} = \langle f(\mu), x\rangle_{\mathcal{H}}$ für $f \in \mathcal{K}, \mu \in X, x \in \mathcal{H}$.

Man nennt K den reproduzierenden Kern *von $\mathcal{K}$.*

Lemma 1.4. *Sei $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}^X$ ein funktionaler Hilbertraum. Dann gilt:*

(i) K ist positiv definit,

(ii) $\bigvee\{K(\cdot, \mu)x : \mu \in X, x \in \mathcal{H}\} = \mathcal{K}$.

Satz 1.5. *Sei $K \colon X \times X \to \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ positiv definit. Dann gibt es genau einen funktionalen Hilbertraum $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}^X$ mit reproduzierendem Kern K.*

Satz 1.6. *Ist $K \colon X \times X \to \mathbb{C}$ positiv definit und $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, so ist die Abbildung $K_{\mathcal{H}} \colon X \times X \to \mathfrak{L}(\mathcal{H}), K_{\mathcal{H}}(x, y) = K(x, y)I_{\mathcal{H}}$ positiv definit, und es gibt einen eindeutigen unitären Operator $U \colon \mathcal{K}(K) \otimes \mathcal{H} \to \mathcal{K}(K_{\mathcal{H}})$ mit*

$$U(f \otimes x) = f \cdot x$$

für alle $f \in \mathcal{K}(K)$ und $x \in \mathcal{H}$, wobei $\mathcal{K}(K) \subset \mathbb{C}^X$ und $\mathcal{K}(K_{\mathcal{H}}) \subset \mathcal{H}^X$ die funktionalen Hilberträume mit reproduzierenden Kernen K und $K_{\mathcal{H}}$ bezeichnen.

Seien nun $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ Hilberträume und $\mathcal{K}_i \subset \mathcal{H}_i^X$ $(i = 1, 2)$ funktionale Hilberträume mit reproduzierenden Kernen $K_i \colon X \times X \to \mathfrak{L}(\mathcal{H}_i)$ $(i = 1, 2)$.

Definition 1.7. Die Elemente von

$$\mathcal{M}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) = \{\varphi \colon X \to \mathfrak{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) : \varphi \mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2\},$$

heißen *Multiplikatoren* von $\mathcal{K}_1$ nach $\mathcal{K}_2$. Hierbei sei für $f \colon X \to \mathcal{H}_1$ die Abbildung $\varphi f \colon X \to \mathcal{H}_2$ definiert durch

$$(\varphi f)(\lambda) = \varphi(\lambda) f(\lambda) \ (\lambda \in X).$$

Für $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ nennen wir

$$M_\varphi \colon \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_2, \ f \mapsto \varphi f$$

den *Multiplikationsoperator* mit Symbol φ.
Für $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}$ schreiben wir $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ statt $\mathcal{M}(\mathcal{K}, \mathcal{K})$.

Bemerkung 1.8. Wir schreiben

$$\|\varphi\|_{\mathcal{M}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)} = \|M_\varphi\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)}$$

für $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$. Dies definiert eine Norm auf $\mathcal{M}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$, wenn die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) &\to \mathfrak{L}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2), \\ \varphi &\mapsto M_\varphi \end{aligned}$$

injektiv ist. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn $\mathcal{K}_1$ alle konstanten Funktionen $h \in \mathcal{H}_1$ enthält.

Lemma 1.9. *Für $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$, $\lambda \in X$ und $y \in \mathcal{H}_2$ gilt:*

(i) $M_\varphi \colon \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_2$ *ist stetig linear,*

(ii) $M_\varphi^* K_2(\cdot, \lambda) y = K_1(\cdot, \lambda) \varphi(\lambda)^* y$.

Beweis. (i) Die Linearität von M_φ ist klar. Die Stetigkeit rechnet man mit dem Satz vom abgeschlossenen Graphen nach. Seien hierzu $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(M_\varphi f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in $\mathcal{K}_1$ bzw. $\mathcal{K}_2$ mit Grenzwerten f und g. Für $\lambda \in X$ erhalten wir

$$\begin{aligned} (M_\varphi f)(\lambda) &= \varphi(\lambda) f(\lambda) \\ &= \varphi(\lambda) \delta_\lambda(f) \\ &= \lim_{n \to \infty} \varphi(\lambda) \delta_\lambda(f_n) \\ &= \lim_{n \to \infty} (M_\varphi f_n)(\lambda) \\ &= g(\lambda), \end{aligned}$$

wobei wir die Stetigkeit der Punktauswertungen auf $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ ausgenutzt haben.

(ii) Sei $f \in \mathcal{K}_1$, $\lambda \in X$ und $y \in \mathcal{H}_2$. Die Behauptung folgt dann mit

$$\begin{aligned}\langle f, M_\varphi^* K_2(\cdot,\lambda)y\rangle_{\mathcal{K}_1} &= \langle M_\varphi f, K_2(\cdot,\lambda)y\rangle_{\mathcal{K}_2}\\ &= \langle (M_\varphi f)(\lambda), y\rangle_{\mathcal{H}_2}\\ &= \langle \varphi(\lambda) f(\lambda), y\rangle_{\mathcal{H}_2}\\ &= \langle f(\lambda), \varphi(\lambda)^* y\rangle_{\mathcal{H}_1}\\ &= \langle f, K_1(\cdot,\lambda)\varphi(\lambda)^* y\rangle_{\mathcal{K}_1}.\end{aligned}$$

□

Die folgende Bemerkung ist im Hinblick auf Satz 4.2 von Bedeutung.

Bemerkung 1.10. Im Falle $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathbb{C}$ lautet (ii) aus dem vorherigen Lemma

$$M_\varphi^* K_2(\cdot,\lambda) = \overline{\varphi(\lambda)} K_1(\cdot,\lambda)$$

für $\lambda \in X$.

1.2 Der Drury-Arveson Raum

Zunächst eine Definition zur Erinnerung.

Definition 1.11. Der Raum

$$H^2 = H^2(\mathbb{D}) = \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) : \|f\|_{H^2}^2 = \sup_{0\le r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})\right|^2 \mathrm{d}t < \infty\}$$

heißt *Hardyraum* über der Einheitskreisscheibe.
Wir bezeichnen mit H^∞ den Raum aller beschränkten holomorphen Funktionen auf der Einheitskreisscheibe.

Bemerkung 1.12. In der Theorie über Hardyräume kann man zeigen, dass

$$\sup_{0\le r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})\right|^2 \mathrm{d}t = \lim_{r\uparrow 1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})\right|^2 \mathrm{d}t$$

gilt.

Nun wollen wir den Hardyraum auf die Einheitskugel im $\mathbb{C}^n$ verallgemeinern. Dazu ist folgender Satz sehr hilfreich.

Satz 1.13. *Der Raum H^2 ist vermöge*

$$\Phi\colon H^2 \to \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}), \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \mapsto (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

isometrisch isomorph zu $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

Beweis. Für $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ gilt mit der Cauchyschen Integralformel

$$\begin{aligned}
\|f_r\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{T}} f(rz)(\sum_{n=0}^{\infty} \overline{a}_n r^n \overline{z}^n) \mathrm{d}\lambda(z) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a}_n r^n \int_{\mathbb{T}} f(rz)\overline{z}^n \mathrm{d}\lambda(z) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a}_n r^n \frac{r^n}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(re^{it})}{(re^{it})^{n+1}} ire^{it} \mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a}_n r^n \frac{r^n}{2\pi i} \int_{\partial D_r(0)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} \mathrm{d}w \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a}_n r^n \frac{r^n}{2\pi i} 2\pi i a_n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n},
\end{aligned}$$

wobei λ das normierte Lebesgue-Maß auf der Einheitskreislinie bezeichnet. Im Übergang zum Grenzwert $r \to 1$ (man beachte die kompakt gleichmäßige Konvergenz) sieht man, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann in $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ liegt, wenn $f \in H^2$ mit Gleichheit der Normen. Damit folgt, dass Φ eine wohldefinierte Isometrie ist. Sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Dann besitzt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ einen Konvergenzradius R mit $R \geq 1$, sodass $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$. Nach den obigen Überlegungen ist $f \in H^2$. Offensichtlich gilt $\Phi(f) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Sei $\mathbb{B} = \mathbb{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = (\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2)^{\frac{1}{2}} < 1\} \subset \mathbb{C}^n$ die offene Einheitskugel und sei $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum. Für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ setze $\gamma_\alpha = |\alpha|!/\alpha!$, wobei $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ und $\alpha! = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i!$, und $z^\alpha = \prod_{i=1}^{n} z_i^{\alpha_i}$ für $z \in \mathbb{C}^n$.

Proposition 1.14. *Für $z, w \in \mathbb{B}$ gilt*

$$(1 - \langle z, w\rangle)^{-1} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \gamma_\alpha z^\alpha \overline{w}^\alpha.$$

Insbesondere folgt

$$(1-|z|^2)^{-1} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \gamma_\alpha \, |z^\alpha|^2$$

für $z \in \mathbb{B}$.

Beweis. Nach Cauchy-Schwarz gilt für $z, w \in \mathbb{B}$

$$|\langle z, w\rangle| \leq |z|\,|w| < 1,$$

sodass $(1-\langle z, w\rangle)^{-1}$ wohldefiniert ist. Mit der disjunkten Zerlegung

$$\{1,\ldots,n\}^k = \dot{\bigcup_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\ |\alpha|=k}}} J_\alpha,$$

wobei $J_\alpha = \{(i_1,\ldots,i_k) \in \{1,\ldots,n\}^k : \#(\{\nu\colon i_\nu = j\}) = \alpha_j$ für $j = 1,\ldots,n\}$ und $\#(J_\alpha) = \frac{|\alpha|!}{\alpha!}$, folgt

$$\begin{aligned}
(1-\langle z, w\rangle)^{-1} &= \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{n} z_i\overline{w}_i\Big)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n}\prod_{j=1}^{k} z_{i_j}\overline{w}_{i_j} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\ |\alpha|=k}} \gamma_\alpha z^\alpha \overline{w}^\alpha \\
&= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \gamma_\alpha z^\alpha \overline{w}^\alpha.
\end{aligned}$$

□

Wir betrachten nun den Hilbertraum

$$\ell^2(\gamma,\mathcal{H}) = \{a = (a_\alpha) : a_\alpha \in \mathcal{H} \text{ für alle } \alpha\in\mathbb{N}^n \text{ und } \|a\|^2 = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\frac{\|a_\alpha\|^2}{\gamma_\alpha} < \infty\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle (a_\alpha), (b_\alpha)\rangle_{\ell^2(\gamma,\mathcal{H})} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\frac{\langle a_\alpha, b_\alpha\rangle_{\mathcal{H}}}{\gamma_\alpha}.$$

Dieser entspricht für $n = 1$ dem bekannten Raum der quadratsummierbaren Folgen $\ell^2(\mathbb{N},\mathcal{H})$.

Proposition 1.15. *Die Abbildung*

$$\rho\colon \ell^2(\gamma, \mathcal{H}) \to \mathcal{O}(\mathbb{B}, \mathcal{H}),\ (a_\alpha) \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$$

ist wohldefiniert, injektiv und linear.

Beweis. Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung liefert mit Proposition 1.14

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \|a_\alpha z^\alpha\| = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} (\frac{\|a_\alpha\|}{\sqrt{\gamma_\alpha}})(\sqrt{\gamma_\alpha}\,|z^\alpha|) \leq \|a\|(1-|z|^2)^{-\frac{1}{2}}$$

für $z \in \mathbb{B}$ und $(a_\alpha) \in \ell^2(\gamma, \mathcal{H})$. Da punktweise konvergente Potenzreihen auf $\mathbb{B}$ kompakt gleichmäßig konvergieren auf $\mathbb{B}$, wird für $a = (a_\alpha) \in \ell^2(\gamma, \mathcal{H})$ durch

$$\rho(a)\colon \mathbb{B} \to \mathcal{H}, z \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$$

eine holomorphe $\mathcal{H}$-wertige Funktion definiert. Wie im skalarwertigen Fall gilt

$$a_\alpha = \frac{\partial^\alpha \rho(a)(0)}{\alpha!} \quad (\alpha \in \mathbb{N}^n).$$

Also ist ρ wohldefiniert und injektiv. Die Linearität ist offensichtlich. $\square$

Definition 1.16. Der Hilbertraum

$$H(\mathbb{B}, \mathcal{H}) = \mathrm{Bild}(\rho)$$

mit dem durch ρ und $\ell^2(\gamma, \mathcal{H})$ induzierten Skalarprodukt

$$\langle \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha, \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} b_\alpha z^\alpha \rangle_{H(\mathbb{B},\mathcal{H})} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\langle a_\alpha, b_\alpha \rangle_{\mathcal{H}}}{\gamma_\alpha}$$

heißt *Drury-Arveson Raum*.
Im Fall $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ schreiben wir auch $H(\mathbb{B})$ für $H(\mathbb{B}, \mathbb{C})$.

Satz 1.17. *Der Raum $H(\mathbb{B}, \mathcal{H})$ ist ein funktionaler Hilbertraum mit reproduzierendem Kern*

$$K_{\mathcal{H}}\colon \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathfrak{L}(\mathcal{H}),\ (z, w) \mapsto \frac{1_{\mathcal{H}}}{1 - \langle z, w \rangle}.$$

Beweis. Wir rechnen Satz 1.3 nach. Sei $w \in \mathbb{B}$ und $x \in \mathcal{H}$. Wegen Proposition 1.14 gilt für $z \in \mathbb{B}$

$$K_{\mathcal{H}}(z,w)x = (1 - \langle z, w\rangle)^{-1}x = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \gamma_\alpha \overline{w}^\alpha x z^\alpha$$

und

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\|\gamma_\alpha \overline{w}^\alpha x\|^2}{\gamma_\alpha} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \gamma_\alpha \left|w^\alpha\right|^2 \|x\|^2 = \frac{\|x\|^2}{1 - |w|^2}.$$

Damit liegt $K_{\mathcal{H}}(\cdot, w)x$ in $H(\mathbb{B}, \mathcal{H})$. Für $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \in H(\mathbb{B}, \mathcal{H})$ erhalten wir

$$\langle f, K_{\mathcal{H}}(\cdot, w)x\rangle_{H(\mathbb{B},\mathcal{H})} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\langle a_\alpha, \gamma_\alpha \overline{w}^\alpha x\rangle_{\mathcal{H}}}{\gamma_\alpha} = \langle \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha w^\alpha, x\rangle_{\mathcal{H}} = \langle f(w), x\rangle_{\mathcal{H}}.$$

□

Proposition 1.18. *Es gilt*

$$\frac{\gamma_{\alpha - e_i}}{\gamma_\alpha} = \frac{\alpha_i}{|\alpha|}$$

für $i = 1, \ldots, n$ und $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $\alpha \geq e_i$.

Beweis. Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $\alpha \geq e_i$. Die Rechnung

$$\frac{\gamma_{\alpha - e_i}}{\gamma_\alpha} = \frac{\frac{|\alpha - e_i|!}{(\alpha - e_i)!}}{\frac{|\alpha|!}{\alpha!}} = \frac{\frac{(|\alpha|-1)!}{|\alpha|!}}{\frac{(\alpha - e_i)!}{\alpha!}} = \frac{\frac{1}{|\alpha|}}{\frac{1}{\alpha_i}} = \frac{\alpha_i}{|\alpha|}$$

zeigt die Behauptung. □

Wir wenden uns nun dem bereits angesprochenen n-Shift auf dem Drury-Arveson Raum zu. Um diesen sinnvoll zu definieren, benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 1.19. *Die Multiplikatoren M_{z_i} $(i = 1, \ldots, n)$ von $H(\mathbb{B}, \mathcal{H})$ nach $H(\mathbb{B}, \mathcal{H})$ sind wohldefinierte, lineare Kontraktionen.*

Beweis. Sei $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \in H(\mathbb{B}, \mathcal{H})$. Dann gilt

$$(z_i f)(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^{\alpha + e_i} = \sum_{\alpha \geq e_i} a_{\alpha - e_i} z^\alpha$$

für $z \in \mathbb{B}$ und $i = 1, \ldots, n$. Mit Proposition 1.18 folgt

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha \geq e_i} \frac{\|a_{\alpha-e_i}\|^2}{\gamma_\alpha} &= \sum_{\alpha \geq e_i} \frac{\|a_{\alpha-e_i}\|^2}{\gamma_{\alpha-e_i}} \frac{\gamma_{\alpha-e_i}}{\gamma_\alpha} \\ &= \sum_{\alpha \geq e_i} \frac{\|a_{\alpha-e_i}\|^2}{\gamma_{\alpha-e_i}} \frac{\alpha_i}{|\alpha|} \\ &\leq \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\|a_\alpha\|^2}{\gamma_\alpha} = \|f\|^2_{H(\mathbb{B},\mathcal{H})}.\end{aligned}$$

Also ist $z_i f \in H(\mathbb{B}, \mathcal{H})$ mit $\|z_i f\|_{H(\mathbb{B},\mathcal{H})} \leq \|f\|_{H(\mathbb{B},\mathcal{H})}$. Die Linearität ist klar. □

Definition 1.20. Das Tupel

$$M_z = (M_{z_1}, \ldots, M_{z_n}) \in \mathfrak{L}(H(\mathbb{B}, \mathcal{H}))^n$$

heißt *n-Shift*.

Im Folgenden wollen wir eine wichtige Eigenschaften des n-Shifts studieren.

Lemma 1.21. *Für $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \in H(\mathbb{B}, \mathcal{H})$ gilt*

$$(M_{z_i}^* f)(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha+e_i}} a_{\alpha+e_i} z^\alpha \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Beweis. Seien $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha, g = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} b_\alpha z^\alpha \in H(\mathbb{B}, \mathcal{H})$. Mit Proposition 1.18 sieht man, dass für $i = 1, \ldots, n$ die Funktion $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha+e_i}} b_{\alpha+e_i} z^\alpha$ in $H(\mathbb{B}, \mathcal{H})$ liegt, denn

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\|\frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha+e_i}} b_{\alpha+e_i}\|^2}{\gamma_\alpha} &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha+e_i}} \frac{\|b_{\alpha+e_i}\|^2}{\gamma_{\alpha+e_i}} \\ &= \sum_{\alpha \geq e_i} \frac{\alpha_i}{|\alpha|} \frac{\|b_\alpha\|^2}{\gamma_\alpha} \leq \|g\|^2,\end{aligned}$$

sodass

$$\begin{aligned}
\langle f, M_{z_i}^* g\rangle_{H(\mathbb{B},\mathcal{H})} &= \langle M_{z_i} f, g\rangle_{H(\mathbb{B},\mathcal{H})} \\
&= \langle \sum_{\alpha\geq e_i} a_{\alpha-e_i} z^\alpha, \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} b_\alpha z^\alpha\rangle_{H(\mathbb{B},\mathcal{H})} \\
&= \sum_{\alpha\geq e_i} \frac{\langle a_{\alpha-e_i}, b_\alpha\rangle_{\mathcal{H}}}{\gamma_\alpha} \\
&= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{\langle a_\alpha, b_{\alpha+e_i}\rangle_{\mathcal{H}}}{\gamma_\alpha} \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha+e_i}} \\
&= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{\langle a_\alpha, \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha+e_i}} b_{\alpha+e_i}\rangle_{\mathcal{H}}}{\gamma_\alpha} \\
&= \langle \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha, \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha+e_i}} b_{\alpha+e_i} z^\alpha\rangle_{H(\mathbb{B},\mathcal{H})}.
\end{aligned}$$

□

Definition 1.22. Ein Tupel $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})^n$ heißt *vertauschend*, falls

$$T_i T_j = T_j T_i$$

für alle $i, j = 1, \ldots, n$ gilt.

Definition 1.23. Ein Tupel $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})^n$ vertauschender, stetig linearer Operatoren heißt *n-Kontraktion*, falls

$$\sum_{i=1}^n T_i T_i^* \leq I_{\mathcal{H}}$$

gilt.

Wir kommen nun zum Hauptresultat dieses Abschnitts, welches uns später in Kapitel 4 behilflich sein wird.

Satz 1.24. *Der n-Shift auf $H(\mathbb{B}, \mathcal{H})$ ist eine n-Kontraktion.*

Beweis. Sei hierzu $f = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \in H(\mathbb{B}, \mathcal{H})$, sodass mit Propositon 1.18

und Lemma 1.21

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} M_{z_i} M_{z_i}^* f &= \sum_{i=1}^{n} M_{z_i} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha+e_i}} a_{\alpha+e_i} z^\alpha \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha \geq e_i} \frac{\gamma_{\alpha-e_i}}{\gamma_\alpha} a_\alpha z^\alpha \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha \geq e_i} \frac{\alpha_i}{|\alpha|} a_\alpha z^\alpha \\ &= f - a_0\end{aligned}$$

folgt. Somit gilt

$$\begin{aligned}\langle \sum_{i=1}^{n} M_{z_i} M_{z_i}^* f, f \rangle_{H(\mathbb{B},\mathcal{H})} &= \langle f - a_0, f \rangle_{H(\mathbb{B},\mathcal{H})} \\ &= \langle f, f \rangle_{H(\mathbb{B},\mathcal{H})} - \|a_0\|^2 \leq \langle f, f \rangle_{H(\mathbb{B},\mathcal{H})}.\end{aligned}$$

□

Kapitel 2

Der eindimensionale Fall

In diesem Kapitel werden wir uns mit der klassischen von Neumannschen Ungleichung beschäftigen. Die Dilatationstheorie nach [14] wird uns einen einfachen Beweis liefern.
Sei dazu im Folgenden $\mathcal{H}$ stets ein komplexer Hilbertraum und T eine Kontraktion auf $\mathcal{H}$.
Zunächst formulieren wir ein einfaches Lemma, um den Beweis des Hauptsatzes übersichtlicher führen zu können.

Lemma 2.1. *Es gilt:*

(i) $I - T^*T$ *und* $I - TT^*$ *sind positiv,*

(ii) Für die Operatoren $D_T = (I - T^*T)^{\frac{1}{2}}$ *und* $D_{T^*} = (I - TT^*)^{\frac{1}{2}}$ *gilt* $T^*D_{T^*} = D_T T^*$ *und* $TD_T = D_{T^*}T$,

(iii) $\|D_T h\|^2 = \|h\|^2 - \|Th\|^2$ *und* $\|D_{T^*}h\|^2 = \|h\|^2 - \|T^*h\|^2$ *für alle* $h \in \mathcal{H}$.

Beweis. (i) Die Rechnung

$$\langle h, h\rangle \geq \langle Th, Th\rangle = \langle T^*Th, h\rangle$$

für $h \in \mathcal{H}$ zeigt die erste Behauptung und die zweite folgt analog, da $\|T\| = \|T^*\|$ gilt, sodass $T^* \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ ebenfalls eine Kontraktion ist.

(ii) Betrachte die Funktion

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto (1-x)^{\frac{1}{2}}.$$

Dann ist f stetig, sodass es nach dem Satz von Stone-Weierstraß eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Polynomen aus $\mathbb{R}[x]$ gibt mit

$$\|p_n - f\|_{[0,1]} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Da T^*T und TT^* normal sind mit $\sigma(T^*T)\cup\sigma(TT^*) \subset [0,1]$ erhält man mit dem stetigen Funktionalkalkül

$$D_T = f(T^*T) = \lim_{n\to\infty} p_n(T^*T) \text{ und } D_{T^*} = f(TT^*) = \lim_{n\to\infty} p_n(TT^*).$$

Eine einfache Induktion über $k \in \mathbb{N}$ zeigt, dass

$$T^*(TT^*)^k = (T^*T)^k T^* \text{ und } T(T^*T)^k = (TT^*)^k T$$

gilt und damit auch

$$T^*p(TT^*) = p(T^*T)T^* \text{ und } Tp(T^*T) = p(TT^*)T$$

für alle Polynome $p \in \mathbb{R}[x]$. Der Übergang zum Grenzwert liefert die Behauptung.

(iii) Für $h \in \mathcal{H}$ gilt

$$\begin{aligned}\|D_T h\|^2 &= \langle D_T h, D_T h\rangle = \langle D_T^2 h, h\rangle \\ &= \langle (I - T^*T)h, h\rangle = \langle h, h\rangle - \langle T^*Th, h\rangle \\ &= \langle h, h\rangle - \langle Th, Th\rangle = \|h\|^2 - \|Th\|^2.\end{aligned}$$

Analog folgt die Behauptung für T^*.

□

Wir widmen uns nun der Dilatationstheorie von Kontraktionen auf einem komplexen Hilbertraum. Die anschließenden Definitionen charakterisieren die im weiteren Verlauf wichtigen Operatoren, mit denen wir uns beschäftigen wollen.

Definition 2.2. Sei $R \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$. Dann heißt ein Operator $S \in \mathfrak{L}(\tilde{\mathcal{H}})$ *Dilatation von R*, falls gilt

(i) $\tilde{\mathcal{H}}$ ist ein Hilbertraum mit $\mathcal{H} \subset \tilde{\mathcal{H}}$,

(ii) $Rh = P_{\mathcal{H}} Sh$ für alle $h \in \mathcal{H}$.

Man nennt S *Potenz-Dilatation von* R, falls zusätzlich

$$R^n h = P_{\mathcal{H}} S^n h$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $h \in \mathcal{H}$ gilt.
Zwei Dilatationen S_1 auf $\mathcal{H}_1$ und S_2 auf $\mathcal{H}_2$ von $R \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ heißen *(unitär) äquivalent*, falls eine unitäre Abbildung $\varphi\colon \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ existiert mit

(i) $\varphi h = h \quad (h \in \mathcal{H})$,

(ii) $S_2 = \varphi^{-1} S_1 \varphi$.

Satz 2.3. *Es existiert eine unitäre Potenz-Dilatation U von T. Man kann U minimal wählen in dem Sinne, dass*

$$\tilde{\mathcal{H}} = \bigvee \{U^n \mathcal{H} : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Außerdem sind zwei minimale unitäre Potenz-Dilatationen einer Kontraktion äquivalent.

Beweis. Wir definieren $\tilde{\mathcal{H}}$ als

$$\tilde{\mathcal{H}} = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_n \quad (\mathcal{H}_n = \mathcal{H}),$$

sodass ein Element h von $\tilde{\mathcal{H}}$ folgende Gestalt hat:

$$h = (h_n)_{n \in \mathbb{Z}} \text{ mit } h_n \in \mathcal{H},\ \|h\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|h_n\|^2 < \infty.$$

Mit dieser Definition kann man $\mathcal{H}$ mit dem abgeschlossenen Unterraum $\mathcal{H}_0 \subset \tilde{\mathcal{H}}$ identifizieren und erhält damit eine isometrische Einbettung von $\mathcal{H}$ in $\tilde{\mathcal{H}}$. Der Operator

$$U\colon \tilde{\mathcal{H}} \to \tilde{\mathcal{H}},\ U((h_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = (h'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$$

mit

$$h'_n = \begin{cases} D_T h_0 - T^* h_1 & \text{für } n = -1, \\ T h_0 + D_{T^*} h_1 & \text{für } n = 0, \\ h_{n+1} & \text{sonst} \end{cases}$$

ist unitär, denn mit Lemma 2.1 (ii) und (iii) folgt

$$\begin{aligned}\|h'_{-1}\|^2 + \|h'_0\|^2 &= \|D_T h_0 - T^* h_1\|^2 + \|T h_0 + D_{T^*} h_1\|^2 \\ &= \|D_T h_0\|^2 - \langle D_T h_0, T^* h_1\rangle - \langle T^* h_1, D_T h_0\rangle + \|T^* h_1\|^2 \\ &\quad + \|T h_0\|^2 + \langle T h_0 . D_{T^*} h_1\rangle + \langle D_{T^*} h_1, T h_0\rangle + \|D_{T^*} h_1\|^2 \\ &= \|D_T h_0\|^2 - \langle T D_T h_0, h_1\rangle - \langle T^* D_{T^*} h_1, h_0\rangle + \|T^* h_1\|^2 \\ &\quad + \|T h_0\|^2 + \langle T D_T h_0, h_1\rangle + \langle T^* D_{T^*} h_1, h_0\rangle + \|D_{T^*} h_1\|^2 \\ &= \|D_T h_0\|^2 + \|T^* h_1\|^2 + \|T h_0\|^2 + \|D_{T^*} h_1\|^2 \\ &= \|h_0\|^2 - \|T h_0\|^2 + \|T^* h_1\|^2 + \|T h_0\|^2 + \|h_1\|^2 - \|T^* h_1\|^2 \\ &= \|h_0\|^2 + \|h_1\|^2\end{aligned}$$

und damit die Isometrie. Die Abbildung

$$\tilde{\mathcal{H}} \to \tilde{\mathcal{H}}, \; (h'_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$$

mit

$$h_n = \begin{cases} D_T h'_{-1} + T^* h'_0 & \text{für } n = 0, \\ -T h'_{-1} + D_{T^*} h'_0 & \text{für } n = 1, \\ h'_{n-1} & \text{sonst} \end{cases}$$

ist offensichtlich stetig linear und wirkt als Umkehrabbildung von U, denn Lemma 2.1 (ii) liefert

$$\begin{pmatrix} D_T & -T^* \\ T & D_{T^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_T & T^* \\ -T & D_{T^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit der Definition von U folgt direkt die Identität

$$T^n h = P_{\mathcal{H}} U^n h \quad (n \in \mathbb{N}, h \in \mathcal{H}).$$

Betrachtet man nun statt $\tilde{\mathcal{H}}$ den Raum

$$\mathcal{K} = \bigvee \{U^n \mathcal{H} : n \in \mathbb{Z}\},$$

so sieht man, dass U eingeschränkt auf $\mathcal{K}$ ebenfalls eine unitäre Potenz-Dilatation von T ist.
Es bleibt noch die Äquivalenz minimaler unitärer Potenz-Dilatationen zu zeigen.
Sei nun U eine unitäre Potenz-Dilatation. Aufgrund der Isometrieeigenschaft

von U erhält man

$$\langle U^n h, U^m h' \rangle = \begin{cases} \langle U^{n-m} h, h' \rangle, & \text{falls } n \geq m, \\ \langle h, U^{m-n} h' \rangle, & \text{falls } m \geq n \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \langle T^{n-m} h, h' \rangle, & \text{falls } n \geq m, \\ \langle h, T^{m-n} h' \rangle, & \text{falls } m \geq n \end{cases}$$

für $n, m \in \mathbb{Z}$ und $h, h' \in \mathcal{H}$. Also hängt $\langle U^n h, U^m h' \rangle$ für $n, m \in \mathbb{Z}$ und $h, h' \in \mathcal{H}$ nicht von der Wahl der Potenz-Dilatation U ab, sodass

$$\varphi \colon LH(U_2^n \mathcal{H} : n \in \mathbb{Z}) \to LH(U_1^n \mathcal{H} : n \in \mathbb{Z}),$$
$$\varphi(\sum_{n=-N}^{N} U_2^n h_n) \mapsto \sum_{n=-N}^{N} U_1^n h_n \quad (h_n \in \mathcal{H}, N \in \mathbb{N})$$

eine wohldefinierte, isometrische und lineare Abbildung definiert, wobei U_1 und U_2 minimale unitäre Potenz-Dilatationen von T auf dem Raum $\mathcal{K}_1$ bzw. $\mathcal{K}_2$ sind. Somit können wir φ stetig auf $\bigvee_{-\infty}^{\infty} U_2^n \mathcal{H} = \mathcal{K}_2$ zu einer Isometrie $\varphi \colon \mathcal{K}_2 \to \mathcal{K}_1$ fortsetzen mit

$$\varphi h = h \quad (h \in \mathcal{H}),$$

und

$$\varphi(U_2 k) = U_1(\varphi k) \quad (k \in \mathcal{K}_2),$$

wobei es genügt, die letzte Identität auf der linearen Hülle der Vektoren $U^n h$ $(n \in \mathbb{Z}, h \in \mathcal{H})$ nachzuprüfen. Als Isometrie mit dichtem Bild ist φ unitär. □

Damit sind wir nun in der Lage die von Neumannsche Ungleichung zu beweisen.

Korollar 2.4 (Die von Neumannsche Ungleichung). *Seien $p \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom in einer Variablen und $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ eine Kontraktion. Dann gilt:*

$$\|p(T)\| \leq \|p\|_{\mathbb{D}} = \|p\|_{\mathbb{T}}.$$

Beweis. Das zweite Gleichheitszeichen folgt aus dem Maximumprinzip.
Mit Satz 2.3 erhält man

$$p(T)h = P_{\mathcal{H}} p(U) h$$

für $h \in \mathcal{H}$. Da U unitär ist gilt

$$\sigma(U) \subset \mathbb{T},$$

sodass für $h \in \mathcal{H}$ mit $\|h\| \leq 1$

$$\begin{aligned}
\|p(T)h\| &= \|P_{\mathcal{H}} p(U)h\| \\
&\leq \|P_{\mathcal{H}}\| \|p(U)\| \|h\| \\
&\leq \|p(U)\| \\
&= \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(p(U))\} \\
&= \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(U)\} \text{ (Spektraler Abbildungssatz)} \\
&\leq \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \mathbb{T}\} = \|p\|_{\mathbb{T}}
\end{aligned}$$

folgt. $\square$

Kapitel 3

Die Ungleichung auf dem Polyzylinder

3.1 Der zweidimensionale Fall

Im vorherigen Kapitel haben wir gesehen, dass mit Hilfe der Dilatationstheorie die von Neumannsche Ungleichung nur ein simples Korollar ist. Um den zweidimensionalen Fall zu beweisen, werden wir auf die Arbeit [1] zurückgreifen, die eine Verallgemeinerung der Resultate aus dem vorherigen Kapitel liefert. Wir orientieren uns hierbei wieder an [14] und [10].
Seien nun im weiteren $T_1, T_2 \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ zwei kommutierende Kontraktionen auf einem komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$.

Satz 3.1. *Es existieren kommutierende Isometrien $V_1, V_2 \in \mathfrak{L}(\tilde{\mathcal{H}})$ auf einem Hilbertraum $\tilde{\mathcal{H}} \supset \mathcal{H}$, sodass*

$$T_1^n T_2^m h = P_{\mathcal{H}} V_1^n V_2^m h$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$ und $h \in \mathcal{H}$ gilt.

Beweis. Wir definieren

$$\tilde{\mathcal{H}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n \ (\mathcal{H}_n = \mathcal{H})$$

und identifizieren $\mathcal{H}$ mit dem abgeschlossenen Unterraum $\mathcal{H}_0 \subset \tilde{\mathcal{H}}$. Weiterhin seien die Operatoren W_1 und W_2 durch

$$W_i((h_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (T_i h_0, D_{T_i} h_0, 0, h_1, h_2, \dots) \quad (i = 1, 2)$$

gegeben, die aufgrund von Lemma 2.1 (iii) isometrisch sind. Mit

$$\mathcal{H}_4 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$$

können wir

$$\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \oplus \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_4$$

schreiben, wobei wir die kanonische Identifikation

$$(h_0, h_1, h_2, \dots) = (h_0, (h_1, h_2, h_3, h_4), (\dots), \dots)$$

benutzen. Außerdem seien

$$\mathcal{L}_1 = \{(D_{T_1}T_2h, 0, D_{T_2}h, 0) \colon h \in \mathcal{H}\},\ \mathcal{L}_2 = \{(D_{T_2}T_1h, 0, D_{T_1}h, 0) \colon h \in \mathcal{H}\}.$$

Da für $h \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}\|D_{T_1}T_2h\|^2 + \|D_{T_2}h\|^2 &= \langle D_{T_1}^2 T_2h, T_2h\rangle + \|h\|^2 - \|T_2h\|^2 = \|h\|^2 - \|T_1T_2h\|^2 \\ &= \|h\|^2 - \|T_2T_1h\|^2 = \|D_{T_2}T_1h\|^2 + \|D_{T_1}h\|^2,\end{aligned}$$

gilt, wobei wir Lemma 2.1 (iii) und die Kommutativität von T_1 und T_2 ausgenutzt haben, wird durch

$$\begin{gathered}\varphi \colon \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2, \\ (D_{T_1}T_2h, 0, D_{T_2}h, 0) \mapsto (D_{T_2}T_1h, 0, D_{T_1}h, 0)\end{gathered}$$

eine wohldefinierte Isometrie definiert. Wir können also φ stetig zu einer Isometrie von $\mathcal{M}_1 = \overline{\mathcal{L}_1}$ nach $\mathcal{M}_2 = \overline{\mathcal{L}_2}$ fortsetzen. Die Abbildung φ kann sogar zu einem unitären Operator auf ganz $\mathcal{H}_4$ fortgesetzt werden. Um dies einzusehen, betrachten wir die Dimensionen von $\mathcal{M}_1^\perp = \mathcal{H}_4 \ominus \mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2^\perp = \mathcal{H}_4 \ominus \mathcal{M}_2$. Falls $\mathcal{H}$ endlichdimensional ist, ist auch $\mathcal{H}_4$ endlichdimensional und die Gleichheit der Dimensionen von $\mathcal{M}_1^\perp$ und $\mathcal{M}_2^\perp$ sind klar. Sei also $\mathcal{H}$ unendlichdimensional. Da der Raum $\{(0, h, 0, 0) \colon h \in \mathcal{H}\}$ dieselbe Dimension wie $\mathcal{H}$ hat und in $\mathcal{M}_i^\perp$ $(i = 1, 2)$ liegt, sieht man

$$\dim(\mathcal{H}) = \dim(\mathcal{H}_4) \geq \dim(\mathcal{M}_i^\perp) \geq \dim(\mathcal{H}) \quad (i = 1, 2)$$

ein. Damit haben $\mathcal{M}_1^\perp$ und $\mathcal{M}_2^\perp$ in jedem Fall dieselbe Dimension, sodass ein unitärer Operator zwischen beiden existiert. Also kann φ zu einem unitären Operator auf $\mathcal{H}_4$ fortgesetzt werden.
Damit können wir nun einen unitären Operator G auf $\tilde{\mathcal{H}}$ durch

$$G(h_0, h_1, \dots) = (h_0, \varphi(h_1, \dots, h_4), \varphi(h_5, \dots, h_8), \dots)$$

definieren mit der Umkehrabbildung

$$G^{-1}(h_0, h_1, \dots) = (h_0, \varphi^{-1}(h_1, \dots, h_4), \varphi^{-1}(h_5, \dots, h_8), \dots).$$

Wir zeigen nun, dass

$$V_1 = GW_1 \text{ und } V_2 = W_2G^{-1}$$

die gewünschten Isometrien sind. Für $h = (h_0, h_1, \dots) \in \tilde{\mathcal{H}}$ gilt

$$\begin{aligned}
V_1V_2(h_0, h_1, \dots) &= GW_1W_2G^{-1}(h_0, h_1, \dots) \\
&= GW_1W_2(h_0, \varphi^{-1}(h_1, \dots, h_4), \dots) \\
&= GW_1(T_2h_0, D_{T_2}h_0, 0, \varphi^{-1}(h_1, \dots, h_4), \dots) \\
&= G(T_1T_2h_0, D_{T_1}T_2h_0, 0, D_{T_2}h_0, 0, \varphi^{-1}(h_1, \dots, h_4), \dots) \\
&= (T_1T_2h_0, \varphi(D_{T_1}T_2h_0, 0, D_{T_2}h_0, 0), (h_1, \dots, h_4), \dots) \\
&= (T_2T_1h_0, (D_{T_2}T_1h_0, 0, D_{T_1}h_0, 0), (h_1, \dots, h_4), \dots) \\
&= W_2(T_1h_0, D_{T_1}h_0, 0, h_1, h_2, \dots) \\
&= W_2W_1(h_0, h_1, \dots) \\
&= W_2G^{-1}GW_1(h_0, h_1, \dots) \\
&= V_2V_1(h_0, h_1, \dots),
\end{aligned}$$

wobei wir die Definition von φ und die Kommutativität von T_1 und T_2 benutzt haben. Die Rechnung zusammen mit den Definitionen von V_1 und V_2 zeigt auch die gewünschte Identität

$$T_1^n T_2^m h = P_{\mathcal{H}} V_1^n V_2^m h$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$ und $h \in \mathcal{H}$. □

Lemma 3.2. *Sei $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine Isometrie und $U \in \tilde{\mathcal{H}}$ eine Dilatation von V auf einem Hilbertraum $\tilde{\mathcal{H}} \supset \mathcal{H}$. Dann ist U eine unitäre Fortsetzung von V, d.h.*

$$Vh = P_{\mathcal{H}}Uh = Uh$$

für alle $h \in \mathcal{H}$.

Beweis. Sei $h \in \mathcal{H}$. Dann gilt:

$$\|h\| = \|Vh\| = \|P_{\mathcal{H}}Uh\| \leq \|Uh\| = \|h\|,$$

also auch $\|P_{\mathcal{H}}Uh\| = \|Uh\|$. Aus

$$\|Uh\|^2 = \|P_{\mathcal{H}}Uh\|^2 + \|(1 - P_{\mathcal{H}})Uh\|^2$$

erhält man $(1 - P_{\mathcal{H}})Uh = 0$ und damit

$$Uh = P_{\mathcal{H}}Uh \in \mathcal{H}.$$

$\square$

Um eine Verallgemeinerung von Satz 2.3 zu beweisen, benötigen wir noch folgendes Lemma.

Lemma 3.3. *Zu zwei kommutierenden Isometrien $V_1, V_2 \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ existieren kommutierende unitäre Operatoren U_1, U_2 auf einem Hilbertraum $\tilde{\mathcal{H}} \supset \mathcal{H}$, sodass*

$$U_i|_{\mathcal{H}} = V_i \quad (i = 1, 2).$$

Beweis. Da jede Isometrie eine Kontraktion ist, existiert nach Satz 2.3 eine minimale unitäre Dilatation $U_1 : \tilde{\mathcal{H}} \to \tilde{\mathcal{H}}$ von V_1 auf dem Hilbertraum $\tilde{\mathcal{H}} \supset \mathcal{H}$ mit

$$\tilde{\mathcal{H}} = \bigvee \{U_1^n \mathcal{H} : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Nach Lemma 3.2 ist U_1 eine Fortsetzung von V_1. Da

$$\begin{aligned}
\| \sum_{n=-N}^{N} U_1^n V_2 h_n \|^2 &= \sum_{n,m=-N}^{N} \langle U_1^n V_2 h_n, U_1^m V_2 h_m \rangle \\
&= \sum_{n \geq m} \langle U_1^{n-m} V_2 h_n, V_2 h_m \rangle + \sum_{n<m} \langle V_2 h_n, U_1^{m-n} V_2 h_m \rangle \\
&= \sum_{n \geq m} \langle V_1^{n-m} V_2 h_n, V_2 h_m \rangle + \sum_{n<m} \langle V_2 h_n, V_1^{m-n} V_2 h_m \rangle \\
&= \sum_{n \geq m} \langle V_2 V_1^{n-m} h_n, V_2 h_m \rangle + \sum_{n<m} \langle V_2 h_n, V_2 V_1^{m-n} h_m \rangle \\
&= \sum_{n \geq m} \langle V_1^{n-m} h_n, h_m \rangle + \sum_{n<m} \langle h_n, V_1^{m-n} h_m \rangle \\
&= \| \sum_{n=-N}^{N} U_1^n h_n \|^2
\end{aligned}$$

für $h_n \in \mathcal{H}$ ($n \in \{-N, \dots, N\}, N \in \mathbb{N}$) gilt, können wir einen wohldefinierten isometrischen Operator

$$\tilde{V}_2 : \tilde{\mathcal{K}} \to \tilde{\mathcal{K}},$$

wobei $\tilde{\mathcal{K}} = LH(U_1^n\mathcal{H} : n \in \mathbb{Z}) \subset \tilde{\mathcal{H}}$, durch

$$\tilde{V}_2(\sum_{n=-N}^{N} U_1^n h_n) = \sum_{n=-N}^{N} U_1^n V_2 h_n \quad (h_n \in \mathcal{H}, N \in \mathbb{N})$$

definieren. Durch stetige Fortsetzung erhalten wir einen Operator auf ganz $\tilde{\mathcal{H}}$, wobei wir die Fortsetzung ebenfalls mit $\tilde{V}_2$ bezeichnen. Weiterhin gilt

$$\tilde{V}_2 h_0 = V_2 h_0$$

für $h_0 \in \mathcal{H}$, sodass $\tilde{V}_2$ eine isometrische Fortsetzung auf $\tilde{\mathcal{H}}$ für V_2 ist, die wegen

$$\begin{aligned}\tilde{V}_2 U_1(\sum_{n=-N}^{N} U_1^n h_n) &= \tilde{V}_2(\sum_{n=-N}^{N} U_1^{n+1} h_n)\\ &= U_1(\sum_{n=-N}^{N} U_1^n V_2 h_n)\\ &= U_1\tilde{V}_2(\sum_{n=-N}^{N} U_1^n h_n) \quad (h_n \in \mathcal{H}, N \in \mathbb{N})\end{aligned}$$

auf $\tilde{\mathcal{K}}$ und damit auch auf $\tilde{\mathcal{H}}$ mit U_1 kommutiert.
Wir wiederholen nun das Verfahren. Sei also $U_2 : \tilde{\tilde{\mathcal{H}}} \to \tilde{\tilde{\mathcal{H}}}$ eine minimale unitäre Dilatation von $\tilde{V}_2$ auf einem Hilbertraum $\tilde{\tilde{\mathcal{H}}} \supset \tilde{\mathcal{H}}$. Wir definieren

$$\tilde{U}_1 : \tilde{\tilde{\mathcal{K}}} \to \tilde{\tilde{\mathcal{K}}}$$

auf $\tilde{\tilde{\mathcal{K}}} = LH(U_2^n\tilde{\mathcal{H}} : n \in \mathbb{Z})$ durch

$$\tilde{U}_1(\sum_{n=-N}^{N} U_2^n \tilde{h}_n) = \sum_{n=-N}^{N} U_2^n U_1 \tilde{h}_n \quad (\tilde{h}_n \in \tilde{\mathcal{H}}, N \in \mathbb{N}).$$

Somit können wir durch stetiges Fortsetzen einen Operator auf $\tilde{\tilde{\mathcal{H}}}$ definieren, wobei wir diesen wieder mit $\tilde{U}_1$ bezeichnen. Als Isometrie mit dichtem Bild $\tilde{\tilde{\mathcal{K}}}$ ist $\tilde{U}_1$ ein unitärer Operator auf $\tilde{\tilde{\mathcal{H}}}$. Außerdem gilt

$$\tilde{U}_1|_{\tilde{\mathcal{H}}} = U_1,$$

sodass $\tilde{U}_1$ eine unitäre Fortsetzung von U_1 auf $\tilde{\tilde{\mathcal{H}}}$ ist. Insgesamt erhalten wir

$$\tilde{U}_1|_{\mathcal{H}} = V_1 \quad \text{und} \quad U_2|_{\mathcal{H}} = V_2.$$

Die Kommutativität von $\tilde{U}_1$ und U_2 auf $\tilde{\tilde{\mathcal{H}}}$ folgt wie oben. $\square$

Korollar 3.4 (Satz von Andô)**.** *Es existieren unitäre kommutierende Operatoren $U_1, U_2 \in \mathfrak{L}(\tilde{\mathcal{H}})$ auf einem Hilbertraum $\tilde{\mathcal{H}} \supset \mathcal{H}$, sodass*

$$T_1^n T_2^m h = P_{\mathcal{H}} U_1^n U_2^m h$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$ und $h \in \mathcal{H}$ gilt.

Beweis. Mit Satz 3.1 erhalten wir kommutierende Isometrien $V_1, V_2 \in \mathfrak{L}(\tilde{\mathcal{H}})$ auf einem größeren Hilbertraum $\tilde{\mathcal{H}}$ mit

$$T_1^n T_2^m h = P_{\mathcal{H}} V_1^n V_2^m h$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$ und $h \in \mathcal{H}$. Diese können wir mit Lemma 3.3 zu unitären kommutierenden Operatoren $U_1, U_2 \in \mathfrak{L}(\tilde{\tilde{\mathcal{H}}})$ auf einem größeren Hilbertraum $\tilde{\tilde{\mathcal{H}}}$ fortsetzen. Offensichtlich haben U_1, U_2 die gewünschte Eigenschaft. □

Korollar 3.5. *Seien $p \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ ein Polynom in zwei Variablen und $T_1, T_2 \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ zwei kommutierende Kontraktionen. Dann gilt:*

$$\|p(T_1, T_2)\| \leq \|p\|_{\mathbb{D}\times\mathbb{D}} = \|p\|_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}}.$$

Beweis. Das zweite Gleichheitszeichen folgt wieder aus dem Maximumprinzip (vgl. [11, Theorem 1.8]).
Seien U_1, U_2 die zwei unitären kommutierenden Operatoren aus Korollar 3.4, sodass die von U_1, U_2 erzeugte unitale C^*-Algebra $\mathcal{A}$ kommutativ ist. Damit existiert nach dem Satz von Gelfand-Neumark ein isometrischer $*$-Isomorphismus

$$\Gamma\colon \mathcal{A} \to \mathfrak{C}(\Delta(\mathcal{A})),\ x \mapsto \delta_x,$$

wobei $\Delta(\mathcal{A})$ die Menge der nichtverschwindenden multiplikativen linearen Funktionale auf $\mathcal{A}$ bezeichnet und

$$\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$$

für alle $x \in \mathcal{A}$ und $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$. Ferner gilt

$$|\varphi(U_1)| = |\varphi(U_2)| = 1 \quad (\varphi \in \Delta(\mathcal{A})),$$

da U_1, U_2 unitär sind, sodass wegen Korollar 3.4 für $p \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ und $h \in \mathcal{H}$ mit $\|h\| \leq 1$

$$\begin{aligned}\|p(T_1, T_2)h\| &= \|P_{\mathcal{H}} p(U_1, U_2)h\| \\ &\leq \|p(U_1, U_2)\| \\ &= \sup_{\varphi \in \Delta(\mathcal{A})} |p(\varphi(U_1), \varphi(U_2))| \\ &\leq \sup_{\substack{|z_1|=1 \\ |z_2|=1}} |p(z_1, z_2)| = \|p\|_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}}\end{aligned}$$

folgt. □

3.2 Das Gegenbeispiel von Crabb-Davie

Es stellt sich nun die Frage, ob die Resultate aus dem vorherigen Abschnitt in höhere Dimensionen verallgemeinert werden können. Dies konnte N. Th. Varopoulos 1974 in [15] erstmalig verneinen. Hier wollen wir allerdings ein Gegenbeispiel von M. J. Crabb und A. M. Davie [4] präsentieren, welches ein Jahr nach dem ersten Gegenbeispiel publiziert wurde.

Gegenbeispiel 3.6. Seien $\mathcal{H}$ ein 8-dimensionaler Hilbertraum mit Orthonormalbasis $e, f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3, h$ und $T_1, T_2, T_3 \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ mit

$$\begin{aligned}
T_i e &= f_i, \\
T_i f_j &= \begin{cases} -g_i, & \text{falls } i = j, \\ g_k, & \text{falls } i \neq j \text{ mit } k \neq i, j, \end{cases} \\
T_i g_j &= \delta_{i,j} h, \\
T_i h &= 0
\end{aligned}$$

für $i, j, k = 1, 2, 3$. Weiterhin sei $p \in \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3]$ das Polynom in drei Variablen mit

$$p(z_1, z_2, z_3) = z_1 z_2 z_3 - z_1^3 - z_2^3 - z_3^3.$$

Dann sind T_1, T_2, T_3 kommutierende Kontraktionen mit

$$\|p(T_1, T_2, T_3)\| \geq 4 > \|p\|_{\mathbb{T}^3}.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die T_i's Kontraktionen sind. Sei dazu $l \in \mathcal{H}$ mit

$$l = \alpha_1 e + \sum_{j=1}^{3} \alpha_{j+1} f_j + \sum_{k=1}^{3} \alpha_{k+4} g_k + \alpha_8 h,$$

wobei $\alpha_j \in \mathbb{C}$ für alle j.
Mit den Definitionen der T_i's erhält man

$$\begin{aligned}
T_1 l &= \alpha_1 f_1 - \alpha_2 g_1 + \alpha_3 g_3 + \alpha_4 g_2 + \alpha_5 h, \\
T_2 l &= \alpha_1 f_2 + \alpha_2 g_3 - \alpha_3 g_2 + \alpha_4 g_1 + \alpha_6 h, \\
T_3 l &= \alpha_1 f_3 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_1 - \alpha_4 g_3 + \alpha_7 h.
\end{aligned}$$

Da $e, f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3, h$ eine Orthonormalbasis bilden, folgt

$$\begin{aligned}
\langle T_1 l, T_1 l\rangle &= |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 + |\alpha_4|^2 + |\alpha_5|^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{8} |\alpha_j|^2 = \langle l, l\rangle, \\
\langle T_2 l, T_2 l\rangle &= |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 + |\alpha_4|^2 + |\alpha_6|^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{8} |\alpha_j|^2 = \langle l, l\rangle, \\
\langle T_3 l, T_3 l\rangle &= |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 + |\alpha_4|^2 + |\alpha_7|^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{8} |\alpha_j|^2 = \langle l, l\rangle
\end{aligned}$$

und damit die Kontraktionseigenschaft der T_i's. Für die Kommutativität rechnet man direkt mit den Definitionen

$$\begin{aligned}
T_1 T_1 l &= -\alpha_1 g_1 - \alpha_2 h, \\
T_1 T_2 l &= \alpha_1 g_3 + \alpha_4 h = T_2 T_1 l, \\
T_1 T_3 l &= \alpha_1 g_2 + \alpha_3 h = T_3 T_1 l, \\
T_2 T_2 l &= -\alpha_1 g_2 - \alpha_3 h, \\
T_2 T_3 l &= \alpha_1 g_1 + \alpha_2 h = T_3 T_2 l, \\
T_3 T_3 l &= -\alpha_1 g_3 - \alpha_4 h
\end{aligned}$$

nach.
Die Normabschätzung folgt aus

$$p(T_1, T_2, T_3)e = (T_1 T_2 T_3 - T_1^3 - T_2^3 - T_3^3)e = h + h + h + h = 4h,$$

sodass

$$\|p(T_1, T_2, T_3)\| \geq \|p(T_1, T_2, T_3)e\|_{\mathcal{H}} = 4.$$

Mit der Dreiecksungleichung sieht man sofort, dass $\|p\|_{\mathbb{T}^3} \leq 4$. Angenommen es würde $\|p\|_{\mathbb{T}^3} = 4$ gelten. Dann würde es einen Punkt $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{T}^3$ geben mit

$$\begin{aligned}
4 = \left|z_1 z_2 z_3 - z_1^3 - z_2^3 - z_3^3\right| &= |z_1 z_2 z_3| + \left|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3\right| \\
&= |z_1 z_2 z_3| + \left|z_1^3\right| + \left|z_2^3 + z_3^3\right| \\
&= |z_1 z_2 z_3| + \left|z_1^3\right| + \left|z_2^3\right| + \left|z_3^3\right| = 4.
\end{aligned}$$

Das vorletzte Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn es eine positive reelle Zahl λ_{23} gibt mit $z_2^3 = \lambda_{23} z_3^3$. Da

$$1 = \left|z_2^3\right| = |\lambda_{23}| \left|z_3^3\right| = |\lambda_{23}|$$

gilt, folgt $\lambda_{23} = 1$. Die gleiche Argumentation liefert $z_1^3 = z_2^3$, also $z_1^3 = z_2^3 = z_3^3$. Damit das zweite Gleichheitszeichen stimmt, muss es wieder eine positive reelle Zahl λ_{123} geben, sodass

$$z_1 z_2 z_3 = \lambda_{123}(-z_1^3 - z_2^3 - z_3^3) = -3\lambda_{123} z_1^3$$

und

$$1 = |z_1 z_2 z_3| = 3\,|\lambda_{123}| \left|z_1^3\right| = 3\,|\lambda_{123}|$$

gilt. Somit ist $\lambda_{123} = \frac{1}{3}$, also $z_1 z_2 z_3 = -z_1^3$. Der Widerspruch ergibt sich dann mit

$$(z_1 z_2 z_3)^3 = z_1^3 z_2^3 z_3^3 = z_1^9 = (-z_1 z_2 z_3)^3 = -(z_1 z_2 z_3)^3,$$

sodass wegen $z_i \neq 0$ $(i = 1, 2, 3)$ $1 = -1$ folgt. $\square$

Dieses Gegenbeispiel zeigt auch, dass eine Verallgemeinerung von Satz 2.3, Korollar 3.4 und Korollar 3.5 für den mehrdimensionalen Polyzylinder für $n \geq 3$ nicht existieren kann.

Kapitel 4

Die Ungleichung auf der Kugel

4.1 Der mehrdimensionale Fall

In Kapitel 3 haben wir gesehen, dass wir die von Neumannsche Ungleichung auf den zweidimensionalen Polyzylinder verallgemeinern können. Es stellt sich nun die Frage, ob und in wie weit eine Verallgemeinerung auf die Einheitskugel möglich ist. Drury konnte 1978 in [5] zeigen, dass die kanonische Verallgemeinerung, d.h. man ersetzt Kontraktionen durch n-Kontraktionen, schon für den Fall $n = 2$ falsch ist. Das folgende Gegenbeispiel stammt aus dieser Arbeit.

Gegenbeispiel 4.1. Sei $\mathbb{B}^2$ die Einheitskugel in $\mathbb{C}^2$ und $M_z \in \mathfrak{L}(H(\mathbb{B}^2))^2$ der 2-Shift auf dem Drury-Arveson Raum. Für $n \in \mathbb{N}$ definiert

$$p_n(z) = (2z_1z_2)^n$$

ein Polynom $p_n \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ mit

$$\|p_n\|_{\mathbb{B}^2} = 1.$$

Zudem ist die Folge $(\|p_n(M_z)\|)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt.

Beweis. Da für $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ nach Cauchy-Schwarz

$$\|z\|_1 = |z_1| + |z_2| = \langle(|z_1|, |z_2|), (1, 1)\rangle \leq \sqrt{2}\,|z|$$

gilt, erhalten wir mit dem Maximumprinzip und der binomischen Formel

$$\begin{aligned}\|p_n\|_{\mathbb{B}^2} &= \sup_{|z|=1} (2\,|z_1|\,|z_2|)^n \\ &= (\sup_{|z|=1} (|z_1| + |z_2|)^2 - (|z_1|^2 + |z_2|^2))^n \\ &= (\sup_{|z|=1} \|z\|_1^2 - |z|^2)^n \\ &\leq (\sup_{|z|=1} 2\,|z|^2 - |z|^2)^n = 1\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Also gilt

$$1 = p_n(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \leq \|p_n\|_{\mathbb{B}^2} \leq 1.$$

Sei nun $1 > \varepsilon > 0$. Nach der Stirlingschen Formel existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$1 - \varepsilon < \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n} < 1 + \varepsilon$$

für alle $n \geq N$ gilt. Damit folgt für $n \geq N$

$$\frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} > \frac{(1-\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)} \frac{4^n 2\pi n (\frac{n}{e})^{2n}}{\sqrt{4\pi n}(\frac{2n}{e})^{2n}} = \frac{(1-\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)} \sqrt{\pi} n^{\frac{1}{2}},$$

sodass

$$\|p_n(M_z)\|^2 \geq \|p_n(M_z)1\|_{H(\mathbb{B}^2)}^2 = \|p_n\|_{H(\mathbb{B}^2)}^2 = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} > \frac{(1-\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)} \sqrt{\pi} n^{\frac{1}{2}} \to \infty$$

für $n \to \infty$. Also ist die Folge $(\|p_n(M_z)\|)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt. □

Da nach Satz 1.24 der 2-Shift M_z eine 2-Kontraktion ist, folgt, dass

$$\|p(T)\| \leq \|p\|_{\mathbb{B}^2}$$

für alle 2-Kontraktionen $T \in \mathfrak{L}(H(\mathbb{B}^2))^2$ und Polynome $p \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ nicht gelten kann.
Dieses Gegenbeispiel zeigt sogar, dass es keine Konstante $C > 0$ geben kann mit

$$\|p(T)\| \leq C\|p\|_{\mathbb{B}^2}.$$

4.2 Die Verallgemeinerung nach Drury

Das Ziel dieses Abschnitt wird es sein, die eindimensionale von Neumannsche Ungleichung umzuformulieren, sodass wir doch eine Verallgemeinerung auf die Kugel erreichen können. Diese geht auf [5] zurück, indem wir die Supremumsnorm auf der rechten Seite durch die Norm des Polynoms angewandt auf den n-Shift ersetzen. Der folgende Satz ist der Ausgangspunkt dieser Verallgemeinerung.

Satz 4.2. *Es gilt*

$$\mathcal{M}(H^2) = H^\infty$$

mit Gleichheit der Normen.

Beweis. Die Inklusion $\supset$ ist klar.
Sei umgekehrt $\varphi \in \mathcal{M}(H^2)$. Da

$$\varphi = M_\varphi(1) \in H^2$$

gilt, liegt φ in $\mathcal{O}(\mathbb{D})$. Der Raum H^2 ist nach Abschnitt 1.2 ein funktionaler Hilbertraum, sodass wir mit Bemerkung 1.10 für $\lambda \in \mathbb{D}$ und dem reproduzierendem Kern K_{H^2}

$$M_\varphi^* K_{H^2}(\cdot, \lambda) = \overline{\varphi(\lambda)} K_{H^2}(\cdot, \lambda)$$

erhalten und damit

$$|\varphi(\lambda)| = \frac{\|M_\varphi^* K_{H^2}(\cdot, \lambda)\|_{H^2}}{\|K_{H^2}(\cdot, \lambda)\|_{H^2}} \leq \|M_\varphi\|.$$

Also ist $\varphi \in H^\infty$. Die Abschätzung

$$\|M_\varphi f\|_{H^2} = \|\varphi f\|_{H^2} \leq \|\varphi\|_{\mathbb{D}} \|f\|_{H^2}$$

liefert schließlich die Gleichheit der Normen. □

Mit diesem Satz können wir die eindimensionale Ungleichung für eine Kontraktion $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ und ein Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ zu

$$\|p(T)\| \leq \|p\|_{\mathcal{M}(H^2)}$$

umschreiben. Beachten wir noch, dass $M_p = p(M_z)$ und $\|p\|_{\mathcal{M}(H^2)} = \|M_p\|$ gilt, folgt schließlich

$$\|p(T)\| \leq \|p(M_z)\|.$$

Diese Ungleichung wollen wir im Folgenden auf n-Kontraktionen $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})^n$ und den n-Shift $M_z \in \mathfrak{L}(H(\mathbb{B}))^n$ auf dem Drury-Arveson Raum verallgemeinern und beweisen. Dabei orientieren wir uns in der Beweisführung an [8].

Lemma 4.3. *Seien $A, B \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$. Dann gilt:*

(i) Der Operator

$$Q_A \colon \mathfrak{L}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{L}(\mathcal{H}),\ X \mapsto AXA^*$$

ist positiv.

(ii) $Q_A Q_B = Q_{AB}$.

Beweis. (i) Sei $X \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ positiv. Dann gilt für $h \in \mathcal{H}$

$$\langle Q_A(X)h, h\rangle = \langle AXA^*h, h\rangle = \langle XA^*h, A^*h\rangle = \langle Xk, k\rangle \geq 0$$

für $k = A^*h \in \mathcal{H}$. Also bildet Q_A positive Elemente auf positive ab.

(ii) Dies folgt unmittelbar aus der Definition.

□

Proposition 4.4. *Sei für ein Tupel $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})^n$ der positive Operator*

$$\Sigma_T = \sum_{i=1}^{n} Q_{T_i} \colon \mathfrak{L}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{L}(\mathcal{H})$$

definiert. Dann gilt

$$\Sigma_T^k = \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in\{1,\ldots,n\}^k} Q_{T_{i_1}\cdots T_{i_k}}$$

für $k \in \mathbb{N}$. Falls $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})^n$ vertauschend ist, so gilt

$$\Sigma_T^k = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n \\ |\alpha|=k}} \gamma_\alpha Q_{T_\alpha}$$

für $k \in \mathbb{N}$, wobei $\gamma_\alpha = \frac{|\alpha|!}{\alpha!}$.

Beweis. Die erste Aussage ist klar und die zweite erhält man analog zu der Beobachtung im Beweis von Proposition 1.14. □

Sei nun im Folgenden $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})^n$ stets eine n-Kontraktion.

Lemma 4.5. *Es gilt*

$$\Sigma_T^k(I_\mathcal{H}) \geq \Sigma_T^{k+1}(I_\mathcal{H}) \geq 0$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beweis. Da $T = (T_1, \dots, T_n) \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})^n$ eine n-Kontraktion und Σ_T^k nach Lemma 4.3 positiv ist, gilt

$$\begin{aligned}\Sigma_T^k(I_{\mathcal{H}}) - \Sigma_T^{k+1}(I_{\mathcal{H}}) &= \Sigma_T^k(I_{\mathcal{H}}) - \Sigma_T^k\Sigma_T(I_{\mathcal{H}}) \\ &= \Sigma_T^k(I_{\mathcal{H}} - \Sigma_T(I_{\mathcal{H}})) \\ &= \Sigma_T^k(I_{\mathcal{H}} - \sum_{i=1}^n T_iT_i^*) \\ &\geq 0\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. □

Bemerkung 4.6. Da $(\Sigma_T^k(I_{\mathcal{H}}))_{k\in\mathbb{N}}$ nach dem letzten Lemma eine monoton fallende Folge positiver Operatoren ist, konvergiert diese Folge punktweise gegen einen positiven Operator (vgl. [7, Korollar 1.9])

$$A_{\infty,T} = SOT - \lim_{k\to\infty} \Sigma_T^k(I_{\mathcal{H}}) \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}).$$

Lemma 4.7. *Sei* $D_{T^*} = (I_{\mathcal{H}} - \sum_{i=1}^n T_iT_i^*)^{\frac{1}{2}}$. *Durch*

$$\begin{aligned}K_T \colon \mathcal{H} &\to H(\mathbb{B}, \mathcal{H}), \\ x &\mapsto \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \gamma_\alpha (D_{T^*}T^{*\alpha}x)z^\alpha\end{aligned}$$

wird eine wohldefinierte, lineare Kontraktion definiert mit

$$\|K_Tx\|^2 = \|x\|^2 - \|\sqrt{A_{\infty,T}}x\|^2$$

für $x \in \mathcal{H}$.

Beweis. Mit Proposition 4.4 erhalten wir

$$\begin{aligned}I_{\mathcal{H}} - \Sigma_T^{N+1}(I_{\mathcal{H}}) &= \sum_{j=0}^N (\Sigma_T^j(I_{\mathcal{H}}) - \Sigma_T^{j+1}(I_{\mathcal{H}})) \\ &= \sum_{j=0}^N \Sigma_T^j(D_{T^*}^2) \\ &= \sum_{j=0}^N \sum_{|\alpha|=j} \gamma_\alpha Q_{T^\alpha}(D_{T^*}^2),\end{aligned}$$

sodass für $x \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha|\leq N} \frac{\|\gamma_\alpha D_{T^*} T^{*\alpha} x\|^2}{\gamma_\alpha} &= \sum_{|\alpha|\leq N} \langle \gamma_\alpha T^\alpha D_{T^*}^2 T^{*\alpha} x, x\rangle \\
&= \langle \sum_{|\alpha|\leq N} \gamma_\alpha Q_{T^\alpha}(D_{T^*}^2) x, x\rangle \\
&= \langle \sum_{j=0}^{N} \sum_{|\alpha|=j} \gamma_\alpha Q_{T^\alpha}(D_{T^*}^2) x, x\rangle \\
&= \langle I_{\mathcal{H}} - \Sigma_T^{N+1}(I_{\mathcal{H}}) x, x\rangle \\
&= \langle x, x\rangle - \langle \Sigma_T^{N+1}(I_{\mathcal{H}}) x, x\rangle
\end{aligned}$$

gilt. Damit ist K_T wohldefiniert mit

$$\|K_T x\|^2 \leftarrow \sum_{|\alpha|\leq N} \frac{\|\gamma_\alpha D_{T^*} T^{*\alpha} x\|^2}{\gamma_\alpha} \rightarrow \|x\|^2 - \|\sqrt{A_{\infty,T}}x\|^2$$

für $N \to \infty$, also

$$\|K_T x\|^2 = \|x\|^2 - \|\sqrt{A_{\infty,T}}x\|^2.$$

Da die Linearität von K_T klar ist, ist K_T eine wohldefinierte, lineare Kontraktion. $\square$

Bemerkung 4.8. Die Abbildung K_T ist genau dann eine Isometrie, wenn $A_{\infty,T} = 0$. In diesem Fall definiert man:

Definition 4.9. Eine n-Kontraktion $S = (S_1, \dots, S_n) \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})^n$ heißt *rein*, falls $A_{\infty,S} = 0$.

Bemerkung 4.10. Für $n = 1$ ist eine Kontraktion $S \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ genau dann rein, wenn $SOT - \lim_{k\to\infty} S^{*k} = 0$ gilt. Kontraktionen dieser Art nennt man auch $C_{\cdot 0}$-Kontraktionen.

Sei im weiteren $M_z^{\mathcal{H}}$ der n-Shift auf dem Drury-Arveson Raum $H(\mathbb{B}, \mathcal{H})$ und M_z der n-Shift auf $H(\mathbb{B})$. Die Grundlage für den Beweis der verallgemeinerten von Neumannschen Ungleichung stellt das folgende Lemma dar.

Lemma 4.11. *Es gilt die Identität*

$$K_T T_i^* = M_{z_i}^{\mathcal{H}^*} K_T$$

für alle $1 \leq i \leq n$.

Beweis. Sei $x \in \mathcal{H}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} M_{z_i}^{\mathcal{H}^*} K_T x &= M_{z_i}^{\mathcal{H}^*} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \gamma_\alpha D_{T^*} T^{*\alpha} x z^\alpha \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_{\alpha+e_i}} \gamma_{\alpha+e_i} D_{T^*} T^{*\alpha+e_i} x z^\alpha \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \gamma_\alpha D_{T^*} T^{*\alpha} (T_i^* x) z^\alpha \\ &= K_T T_i^* x \end{aligned}$$

für alle $i = 1, \dots, n$. □

Korollar 4.12. *Für ein Polynom $p \in \mathbb{C}[z] = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ gilt*

$$K_T p(T)^* = p(M_z^{\mathcal{H}})^* K_T.$$

Beweis. Eine Induktion über $k \in \mathbb{N}$ liefert mit Lemma 4.11

$$K_T T_i^{*k} = M_{z_i}^{\mathcal{H}*k} K_T$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq i \leq n$. Da alle Operatoren linear sind, folgt die Behauptung. □

Das nächste Lemma wird uns im Beweis der von Neumannschen Ungleichung die Möglichkeit geben, den Beweis für n-Kontraktionen auf den Fall von reinen n-Kontraktionen zurückzuführen.

Lemma 4.13. *Für $0 < r < 1$ ist $rT = (rT_1, \dots, rT_n) \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})^n$ eine reine n-Kontraktion.*

Beweis. Da die Abbildung Σ_T^k positiv ist, wird nach dem Satz von Russo-Dye (vgl. [9, Korollar 2.9]) die Norm auf der Identität angenommen, sodass

$$\|\Sigma_T\| = \|\Sigma_T(I_{\mathcal{H}})\| = \|\sum_{i=1}^n T_i T_i^*\| \leq 1$$

und damit für rT

$$\|\Sigma_{rT}\| = r^2 \|\Sigma_T\| < 1.$$

Eine Induktion über $k \in \mathbb{N}$ liefert

$$\|\Sigma_{rT}^k\| \leq r^{2k} \to 0$$

für $k \to \infty$, sodass

$$A_{\infty, rT} = 0.$$

Also ist rT eine reine n-Kontraktion. □

Satz 4.14 (Die von Neumannsche Ungleichung für n-Kontraktionen)**.** *Für ein Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ in n Variablen und eine beliebige n-Kontraktion $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})^n$ gilt*

$$\|p(T)\| \leq \|p(M_z)\|,$$

wobei M_z den n-Shift auf dem Drury-Arveson Raum $H(\mathbb{B})$ bezeichnet.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Behauptung für eine reine n-Kontraktion $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})^n$.
Nach Korollar 4.12 und Bemerkung 4.8 erhalten wir

$$p(T)^* = K_T^* p(M_z^{\mathcal{H}})^* K_T$$

für alle Polynome $p \in \mathbb{C}[z]$, sodass

$$\|p(T)\| = \|p(T)^*\| = \|K_T^* p(M_z^{\mathcal{H}})^* K_T\| \leq \|p(M_z^{\mathcal{H}})^*\| = \|p(M_z^{\mathcal{H}})\|.$$

Nach Satz 1.6 kann man $M_z^{\mathcal{H}}$ mit $M_z \otimes I_{\mathcal{H}}$ identifizieren. Somit folgt

$$\|p(T)\| \leq \|p(M_z^{\mathcal{H}})\| = \|p(M_z) \otimes I_{\mathcal{H}}\| = \|p(M_z)\|.$$

Sei nun $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})^n$ eine n-Kontraktion. Mit der gerade bewiesenen Behauptung und Lemma 4.13 sieht man

$$\|p(T)\| = \lim_{r \uparrow 1} \|p(rT)\| \leq \lim_{r \uparrow 1} \|p(M_z)\| = \|p(M_z)\|$$

ein. □

Sei $\mathcal{T} = \{p(M_z) : p \in \mathbb{C}[z]\} = LH(M_z^\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^n) \subset \mathfrak{L}(H(\mathbb{B}))$ die von $M_z \in \mathfrak{L}(H(\mathbb{B}))^n$ erzeugte Teilalgebra. Nach Satz 4.14 ist die Abbildung

$$\mathcal{T} \to \mathfrak{L}(\mathcal{H}),\ p(M_z) \mapsto p(T)$$

ein kontraktiver Algebrenhomomorphismus. Im Folgenden wollen wir zeigen, dass diese Abbildung sogar vollständig kontraktiv ist. Dieses Ergebnis geht auf Arveson zurück, der dies in [2] bewies.
Diesbezüglich wollen wir uns an die folgenden Definitionen erinnern.

Definition 4.15. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ unitale C^*-Algebren, $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ ein *Operatorraum*, das heißt ein Unterraum mit $1 \in \mathcal{C}$, und $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ ein *Operatorsystem*, das heißt ein $*$-abgeschlossener Unterraum mit $1 \in \mathcal{D}$. Wir fassen nun $M_n(\mathcal{C})$ und $M_n(\mathcal{D})$ als Unterräume der C^*-Algebra $M_n(\mathcal{A})$ auf und versehen diese mit der induzierten Norm- und Ordnungsstruktur. Für eine lineare Abbildung $\Phi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ definieren wir

$$\Phi_n\colon M_n(\mathcal{C}) \to M_n(\mathcal{B}),\ \Phi_n((a_{i,j})) = (\Phi(a_{i,j}))$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und analog Ψ_n für eine lineare Abbildung $\Psi\colon \mathcal{D} \to \mathcal{B}$.

Die Abbildung Ψ heißt

(i) n-positiv, falls Ψ_n positiv ist,

(ii) vollständig positiv, falls Ψ n-positiv ist für alle $n \in \mathbb{N}$

und Φ heißt

(iii) vollständig beschränkt, falls

$$\|\Phi\|_{cb} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\Phi_n\|$$

endlich ist,

(iv) vollständig kontraktiv, falls $\|\Phi\|_{cb} \leq 1$.

Lemma 4.16. *Sei $S \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})^n$ eine reine n-Kontraktion. Nach Satz 1.6 können wir $H(\mathbb{B}, \mathcal{H})$ mit $H(\mathbb{B}) \otimes \mathcal{H}$ identifizieren. Die lineare Abbildung*

$$\rho\colon \mathfrak{L}(H(\mathbb{B})) \to \mathfrak{L}(\mathcal{H}),\ X \mapsto K_S^*(X \otimes I_{\mathcal{H}})K_S$$

ist vollständig kontraktiv und vollständig positiv mit $\rho(I_{H(\mathbb{B})}) = I_{\mathcal{H}}$. Weiterhin gilt

$$\rho(M_z^\alpha M_z^{*\beta}) = S^\alpha S^{*\beta}$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

Beweis. Da K_S eine Isometrie ist, ist $\rho(I_{H(\mathbb{B})}) = I_{\mathcal{H}}$ klar. Die Identität

$$\rho(M_z^\alpha M_z^{*\beta}) = S^\alpha S^{*\beta} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n)$$

folgt direkt aus Lemma 4.11. Nach [9, S. 30f] ist ρ vollständig kontraktiv und vollständig positiv. $\square$

Der folgende Satz dient als Vorbereitung für das versprochene Resultat von Arveson.

Satz 4.17. *Seien $\mathcal{S} = LH(M_z^\alpha M_z^{*\beta} : \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n)$ und $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})^n$ eine n-Kontraktion. Dann ist die Abbildung*

$$\rho\colon \mathcal{S} \to \mathfrak{L}(\mathcal{H}),$$
$$\sum_{|\alpha|,|\beta| \leq k} a_{\alpha\beta} M_z^\alpha M_z^{*\beta} \mapsto \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq k} a_{\alpha\beta} T^\alpha T^{*\beta}.$$

vollständig kontraktiv und vollständig positiv.

Beweis. Für $0 < r < 1$ ist rT nach Lemma 4.13 eine reine n-Kontraktion. Wegen Lemma 4.16 sind die linearen Abbildungen

$$\rho_r \colon \mathcal{S} \to \mathfrak{L}(\mathcal{H}),$$
$$\sum_{|\alpha|,|\beta| \leq k} a_{\alpha\beta} M_z^\alpha M_z^{*\beta} \mapsto \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq k} a_{\alpha\beta} (rT)^\alpha (rT)^{*\beta}$$

vollständig kontraktiv und vollständig positiv und konvergieren punktweise für $r \uparrow 1$ gegen

$$\rho \colon \mathcal{S} \to \mathfrak{L}(\mathcal{H}),$$
$$\sum_{|\alpha|,|\beta| \leq k} a_{\alpha\beta} M_z^\alpha M_z^{*\beta} \mapsto \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq k} a_{\alpha\beta} T^\alpha T^{*\beta}.$$

Mit ρ_r ist auch der punktweise Limes ρ wieder vollständig kontraktiv und vollständig positiv. □

Mit diesem Satz erhalten wir nun als Korollar das Ergebnis [2, Theorem 8.1] aus der Arbeit von Arveson.

Korollar 4.18. *Für eine n-Kontraktion $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})^n$ ist die Abbildung*

$$\mathcal{T} \to \mathfrak{L}(\mathcal{H}), \; p(M_z) \mapsto p(T)$$

ein unitaler vollständig kontraktiver Algebrenhomomorphismus.

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 4.17, da $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$. □

Literaturverzeichnis

[1] T. Andô, *On a pair of commutative contractions*, Acta Sci. Math. (Szeged) **24** (1963), no. 1-2, 88–90.

[2] W. Arveson, *Subalgebras of C^*-algebras III: Multivariable operator theory*, Acta Math. **181** (1998), no. 2, 159–228.

[3] C. Barbian, *Positivitätsbedingungen funktionaler Hilberträume und Anwendungen in der mehrdimensionalen Operatorentheorie*, Diplomarbeit, Universität des Saarlandes, 2001.

[4] M. J. Crabb and A. M. Davie, *Von Neumann's inequality for Hilbert space operators*, Bull. London Math. Soc. (1975), no. 7, 49–50.

[5] S. W. Drury, *A generalization of von Neumann's inequality to the complex ball*, Proc. Amer. Math. Soc. **68** (1978), no. 3, 300–304.

[6] P. R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 19, Springer, New York, 1982.

[7] M. Hartz, *Extremale Fortsetzungen in Familien von Operatoren auf Hilberträumen*, Bachelorarbeit, Universität des Saarlandes, 2010.

[8] J. Haupenthal, *Modellsätze für sphärische Kontraktionen*, Staatsexamensarbeit, Universität des Saarlandes, 2003.

[9] V. Paulsen, *Completely Bounded Maps and Operator Algebras*, Cambridge studies in advanced mathematics, vol. 78, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[10] G. Pisier, *Similarity problems and completely bounded maps*, Lecture Notes in Math., vol. 1618, Springer, Berlin, 2004.

[11] R. M. Range, *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 108, Springer, New York, 1986.

[12] J. J. Schäffer, *On unitary dilations of contractions*, Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 322.

[13] B. Sz.-Nagy, *Sur les contractions de l'espace de hilbert*, Acta Sci. Math. (Szeged) **15** (1953-54), no. 1-1, 87–92.

[14] B. Sz.-Nagy, C. Foias, H. Bercovici, and L. Kérchy, *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space*, Universitext, Springer, New York, 2010.

[15] N. Th. Varopoulos, *On an Inequality of von Neumann and an Application of the Metric Theory of Tensor Products to Operators Theory*, J. Funct. Anal. **16** (1974), 83–100.

[16] J. von Neumann, *Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes*, Math. Nachr. **4** (1950), 258–281.

[17] D. Werner, *Funktionalanalysis*, Springer, Berlin, 2007.

Symbolverzeichnis

$\#(X)$	Anzahl der Elemente der Menge X
α	Element aus $\mathbb{N}^n$
$\mathbb{B}$	Offene Einheitskugel in $\mathbb{C}^n$
$\bigoplus_{i\in I} X_i$	Direkte Summe der X_i über eine Indexmenge I
$\bigvee X$	Normabschluss der linearen Hülle von X
$\mathrm{Bild}(f)$	Bild der Abbildung f
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$\mathbb{C}[z]$	Raum der formalen Polynome in der Unbekannten z mit komplexen Koeffizienten
$\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$	Raum der formalen Polynome in den Unbekannten $z_1, \ldots, z_n$ mit komplexen Koeffizienten
$\mathbb{D}$	Offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$
$\Delta(\mathcal{A})$	Menge der nichtverschwindenden multiplikativen Funktionale auf der C^*-Algebra $\mathcal{A}$
$\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$	Raum der quadratsummierbaren komplexen Folgen
$\mathfrak{C}(X)$	Raum der stetigen, komplexwertigen Funktionen auf dem topologischen Raum X
$\mathfrak{L}(\mathcal{H})$	Raum der stetig linearen Operatoren auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$
$\mathcal{H} \ominus \mathcal{L}$	Orthogonales Komplement des Hilbertraumes $\mathcal{L}$ im Hilbertraum $\mathcal{H}$

$\mathcal{H}$	Komplexer Hilbertraum
$\mathcal{K} \otimes \mathcal{H}$	Hilbertraum-Tensorprodukt der Hilberträume $\mathcal{K}$ und $\mathcal{H}$
$\mathcal{M}(\mathcal{H})$	Raum der Multiplikatoren auf dem funktionalen Hilbertraum $\mathcal{H}$
$\mathcal{M}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$	Raum der Multiplikatoren zwischen funktionalen Hilberträumen $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$
$\mathcal{O}(U)$	Raum der holomorphen Funktionen von einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$
$\mathcal{O}(U, \mathcal{H})$	Raum der holomorphen Funktionen von einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ nach $\mathcal{H}$
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen, beginnend bei 0
$\lVert \cdot \rVert_X$	Supremumsnorm über X
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}[x]$	Raum der formalen Polynome in der Unbekannten x mit reellen Koeffizienten
$\sigma(T)$	Spektrum des Operators $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$
Σ_T	Operator $\sum_{i=1}^n Q_{T_i}$ für ein Tupel $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})^n$
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$	Skalarprodukt auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$
$\mathbb{T}$	Einheitskreislinie in $\mathbb{C}$
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$A_{\infty,T}$	Grenzwert der Folge $(\Sigma_T^n(I_{\mathcal{H}}))_n$ in der starken Operatortopologie
$D_r(a)$	Offene Kreisscheibe mit Radius r um den Punkt $a \in \mathbb{C}$
D_T	Defektoperator $(1 - \sum_{i=1}^n T_i^* T_i)^{\frac{1}{2}}$ für ein Tupel $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})^n$
$H(\mathbb{B})$	Drury-Arveson Raum über $\mathbb{C}$
$H(\mathbb{B}, \mathcal{H})$	Drury-Arveson Raum über dem Hilbertraum $\mathcal{H}$

H^2	Hardyraum auf $\mathbb{D}$
H^∞	Raum der beschränkten holomorphen Funktionen auf $\mathbb{D}$
$I_{\mathcal{H}}$	Identität auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$
$LH(X)$	Lineare Hülle der Menge X
$M_n(\mathcal{A})$	Menge der $n \times n$ Matrizen mit Einträgen aus der C^*-Algebra $\mathcal{A}$
M_z	n-Shift auf dem Drury-Arveson Raum
M_φ	Multiplikationsoperator mit Symbol φ
$P_{\mathcal{H}}$	Orthogonalprojektion auf den Hilbertraum $\mathcal{H}$
Q_A	Operator $\mathfrak{L}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{L}(\mathcal{H}), X \mapsto AXA^*$
$SOT - \lim_{n\to\infty} T_n$	Grenzwert der Folge $(T_n)_n$ aus $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ in der starken Operatortopologie