UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Das Corona-Problem über dem Einheitskreis in $\mathbb{C}$

Bachelorarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science
im Studiengang Mathematik
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät I
- Mathematik und Informatik -
der Universität des Saarlandes

von

Sven Schreiber

betreut durch

Prof. Dr. Jörg Eschmeier

Saarbrücken, 2016

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich die Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Saarbrücken, den 8.12.2016

Sven Schreiber

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Im Jahre 1941 stellte S.Kakutani die Frage, ob die offene Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ dicht liegt im Raum der maximalen Ideale der Banachalgebra $H^\infty(\mathbb{D})$. Wir wollen zunächst darlegen, wie diese Aussage überhaupt zu verstehen ist.
Dazu sei zu einer kommutativen unitalen Banachalgebra B die Menge aller maximalen Ideale durch

$$\mathcal{M}(B) = \{m \subseteq B; m \text{ ist maximales Ideal}\}$$

definiert. Weiter sei durch

$$\Delta_B = \{\delta; \delta\colon B \to \mathbb{C} \text{ multiplikative Linearform}\} \setminus \{0\}$$

der Strukturraum von B definiert. In der Funktionalanalysis zeigt man, dass die Abbildung

$$\Delta_B \to \mathcal{M}(B), \delta \mapsto \ker \delta$$

eine Bijektion ist. Für die kommutative unitale Banachalgebra

$$H^\infty = H^\infty(\mathbb{D}) = \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}); f \text{ ist beschränkt}\}$$

können wir somit jede multiplikative Linearform $f \in \Delta_{H^\infty}$ als maximales Ideal von H^∞ auffassen.
Für $z \in \mathbb{D}$ betrachten wir nun die Punktauswertung

$$\delta_z\colon H^\infty \to \mathbb{C}, f \mapsto f(z).$$

Man kann leicht nachrechnen, dass $\delta_z \in \Delta_{H^\infty}$ für alle $z \in \mathbb{D}$ gilt. Damit entspricht jeder Punkt $z \in \mathbb{D}$ einem maximalen Ideal $m_z = \ker \delta_z \in \mathcal{M}(H^\infty)$.
Man kann die offene Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ somit als Teilmenge von $\mathcal{M}(H^\infty)$ auffassen. Dabei ist $\mathbb{D}$ eine echte Teilmenge von $\mathcal{M}(H^\infty)$ bzw. Δ_{H^∞}, wie wir in Kapitel 3 sehen werden.

S. Kakutani fragte sich nun also, ob die offene Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ dicht in $\mathcal{M}(H^\infty)$ bzw. Δ_{H^∞} liegt, wobei wir Δ_{H^∞} mit der Relativtopologie der schwach-$*$-Topologie ausstatten. Dieses Problem wurde später als das **Corona-Problem** bekannt.

Erst etwa 20 Jahre später, im Jahre 1962, wurde das Corona-Problem durch L.Carleson im positiven Sinne gelöst (vgl. [1]). Schließlich wurden 1979 von T.Wolff und 1980 von

T.W.Gamelin vereinfachte Beweise des Corona-Problems vorgestellt (vgl. [5]). Dabei wurde im Beweis erstmals auf die Verwendung der von L.Carleson eingeführten Carleson-Maße verzichtet.

In dieser Arbeit werden wir eine komplette Lösung des Corona Problems nach T. Wolff und T.W.Gamelin vorstellen.
Dafür stellen wir in Kapitel 1 zunächst einige Grundlagen über Hardy-Räume und $\overline{\partial}$-Sequenzen bereit, die wir im Laufe dieser Arbeit noch benutzen werden.
In Kapitel 2 betrachten wir dann allgemeiner eine beliebige kommutative unitale Banachalgebra B und zeigen, dass eine stetige Abbildung

$$\Lambda \to \Delta_B, \lambda \mapsto \delta_\lambda$$

auf einem topologischen Raum Λ genau dann dichtes Bild hat, wenn für je endlich viele Elemente $x_1, ..., x_n \in B$ mit

$$\inf_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i=1}^{n} |\delta_\lambda(x_i)| > 0$$

schon gilt, dass $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i B = B$ ist.
Dieses Resultat wenden wir in Kapitel 3 auf die kommutative unitale Banachalgebra H^∞ und den topologischen Raum $\mathbb{D}$ an und zeigen in Satz 3.0.3, dass es zur Lösung des Corona-Problems genügt, für $n \in \mathbb{N}^*$ und $\delta > 0$ eine Konstante $C = C(n, \delta) > 0$ zu finden so, dass für alle $U \supset \overline{\mathbb{D}}$ offen und für alle $f_1, ...f_n \in \mathcal{O}(U)$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2 \geq \delta \text{ auf } U \text{ und } \|f_i\|_U \leq 1 \quad (i = 1, ..., n)$$

Funktionen $g_1, ..., g_n \in H^\infty$ existieren mit und $\|g_i\|_{\mathbb{D}} \leq C$ für alle $i = 1, ..., n$ und

$$\sum_{i=1}^{n} f_i g_i = 1 \text{ auf } \mathbb{D}.$$

Diese Variante des Corona-Problems reduzieren wir mit Hilfe eines geeigneten Koszuelkomplexes auf ein $\overline{\partial}$-Problem mit Schranken.
Das $\overline{\partial}$-Problem mit Schranken lösen wir schließlich in Kapitel 4 mit geeigneten Integralabschätzungen und Dualitätstheorie für Hardy-Räume.
Am Ende dieser Arbeit haben wir damit eine vollständige Lösung des Corona-Problems über dem Einheitskreis in $\mathbb{C}$ gegeben.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Jörg Eschmeier für die Vergabe des interessanten und lehrreichen Themas und die ausgezeichnete Betreuung während der Entstehung dieser Arbeit bedanken.
Ebenfalls bedanken möchte ich mich bei M.Sc. Sebastian Langendörfer, dessen Hilfestellungen und Anregungen diese Arbeit erst möglich gemacht haben.
Zuletzt gilt ein besonderer Dank meinen Eltern, die mich während meiner bisherigen Studienzeit immer unterstützt und auf vielfältige Art entlastet haben.

1 Grundlagen

1.1 Hardy-Räume

In diesem Kapitel geben wir eine Einführung in die Theorie der Hardy-Räume. Dabei stellen wir einige wichtige Resultate vor, die ganz wesentlich zur Lösung des Corona-Problems beitragen. Im Folgenden sei λ das normalisierte eindimensionale Lebesguemaß auf der Einheitskreislinie $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$.

Definition 1.1.1. Für $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ und $r \in [0, 1)$ definieren wir

$$f_r\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}, z \mapsto f(rz).$$

Für $1 \leq p < \infty$ nennt man die Räume

$$H^p = H^p(\mathbb{D}) = \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}); \|f\|_p < \infty\}$$

mit

$$\|f\|_p = \sup_{0 \leq r < 1} \|f_r\|_p = \sup_{0 \leq r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}))$$

die **Hardy-Räume** über dem Einheitskreis $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$. Für $p = \infty$ definieren wir

$$H^\infty = H^\infty(\mathbb{D}) = \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}); \|f\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| < \infty\}.$$

Bemerkung 1.1.2. Für $1 \leq p \leq \infty$ ist H^p ein Vektorraum und versehen mit $\|\cdot\|_p$ sogar ein normierter Raum. Für $1 \leq p < q < \infty$ gilt außerdem

$$H^\infty \subseteq H^q \subseteq H^p \text{ und } \|\cdot\|_\infty \geq \|\cdot\|_q \geq \|\cdot\|_p.$$

Beweis. Offensichtlich ist $\|\cdot\|_p$ für $1 \leq p \leq \infty$ eine Norm auf H^p. Für $1 \leq p < q < \infty$, $f \in H^p$ und $r \in [0, 1)$ liefert die Höldersche-Ungleichung angewandt auf $|f_r|^p \in L^{\frac{q}{p}}(\mathbb{T})$ weiter

$$\begin{aligned} \|f_r\|_p &= \left(\int_{\mathbb{T}} |f_r|^p 1 \mathrm{d}\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{T}} |f_r|^q \mathrm{d}\lambda \right)^{\frac{1}{q}} = \|f_r\|_q. \end{aligned}$$

□

Wir führen nun die Poisson-Integrale ein. Dabei wird durch

$$P\colon \mathbb{D} \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}, P(z, \xi) = \frac{1 - |z|^2}{|1 - z\bar{\xi}|^2} = \frac{1 - |z|^2}{|\xi - z|^2}$$

eine stetige positive Funktion, der sogenannte **Poisson-Kern**, definiert. Für $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ heißt die Abbildung

$$P[f]\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}, z \mapsto \int_{\mathbb{T}} P(z, \xi) f(\xi) \mathrm{d}\lambda(\xi)$$

das **Poisson-Integral** von f. In der Funktionentheorie zeigt man, dass für $f \in C(\mathbb{T})$ durch

$$Hf\colon \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}, z \mapsto \begin{cases} f(z) & ; |z| = 1 \\ P[f](z) & ; |z| < 1 \end{cases}$$

eine Funktion $Hf \in C(\overline{\mathbb{D}})$ definiert wird, so dass $Hf|_{\mathbb{D}}$ harmonisch ist mit $Hf|_{\mathbb{T}} = f$. Aus diesem Resultat erhält man zusammen mit dem Maximumprinzip für harmonische Funktionen, dass für eine Funktion $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$ mit $f|_{\mathbb{D}}$ harmonisch schon

$$f|_{\mathbb{D}} = P[f|_{\mathbb{T}}] \tag{1.1}$$

gilt. Damit zeigen wir im folgenden Satz, dass Konvergenz in H^p $(1 \leq p \leq \infty)$ kompakt gleichmäßige Konvergenz impliziert.

Satz 1.1.3. *Seien $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in H^p $(1 \leq p \leq \infty)$,$f \in H^p$ mit*

$$f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$$

in $(H^p, \|\cdot\|_p)$. Dann konvergiert

$$f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$$

auch kompakt gleichmäßig auf $\mathbb{D}$.

Beweis. Sei also $(f_n)_n$ eine Folge in H^p mit $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ in H^p. Seien weiter $0 \leq \delta < 1$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Abbildung

$$\overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}, z \mapsto (f_n - f)(\delta z)$$

stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$ und harmonisch auf $\mathbb{D}$. Also gilt mit Gleichung (1.1) für $r \in (0, 1)$ und $z \in D_r(0)$

$$|(f_n - f)(\delta z)| = \left| \int_{\mathbb{T}} P(z, \xi)(f_n - f)(\delta \xi) \mathrm{d}\lambda(\xi) \right|.$$

Wegen

$$0 \leq P(z,\xi) = \frac{1-|z|^2}{|1-z\bar{\xi}|^2} \leq \frac{1-|z|^2}{(1-|z|)^2} = \frac{1+|z|}{1-|z|} \leq \frac{1+r}{1-r}$$

für alle $(z,\xi) \in D_r(0) \times \mathbb{T}$ $(0 < r < 1)$ folgt mit Bemerkung 1.1.2 weiter

$$\begin{aligned} |(f_n - f)(\delta z)| &= \left| \int\limits_{\mathbb{T}} P(z,\xi)(f_n - f)(\delta\xi)\mathrm{d}\lambda(\xi) \right| \\ &\leq \frac{1+r}{1-r} \|(f_n - f)(\delta \cdot)\|_{\mathbb{T}} \\ &\leq \frac{1+r}{1-r} \|(f_n - f)\|_p \end{aligned}$$

für alle $z \in D_r(0)$ $(0 < r < 1)$. Daraus folgt $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ gleichmäßig auf $D_s(0)$ für alle $s \in (0,1)$ und mit einem Kompaktheitsargument auch $(f_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ kompakt gleichmäßig.

□

Satz 1.1.4. *Für $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ ist $f \in H^1$ genau dann, wenn Funktionen $g, h \in H^2$ existieren mit $f = gh$. In diesem Fall kann man $g = h$ mit $\|g\|_2 = \|f\|_1^{\frac{1}{2}}$ wählen.*

Beweis. Seien $g, h \in H^2$ mit $f = gh$. Wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt

$$\|f_r\|_1 = \|g_r h_r\|_1 \leq \|g_r\|_2 \|h_r\|_2$$

für alle $r \in [0,1)$. Durch Übergang zum Supremum folgt

$$\|f\|_1 \leq \|g\|_2 \|h\|_2,$$

also $f \in H^1$.
Sei nun $f \in H^1$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass f nullstellenfrei ist. Sonst schreiben wir $f = Bg$ wobei $g \in H^1$ nullstellenfrei und

$$B \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}, z \mapsto z^k \prod_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \cdot \frac{\alpha_n - z}{1 - \bar{\alpha}_n z} \quad \in H^\infty(\mathbb{D})$$

das zur Nullstellenfolge von f gebildete Blaschke-Produkt ist (vgl. Theorem 2.3 auf Seite 53 in [6]) und ersetzen f durch g. Dann gibt es ein $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ mit $g^2 = f$ und somit

$$\|g_r\|_2^2 = \int\limits_{\mathbb{T}} |g_r|^2 \mathrm{d}\lambda = \|f_r\|_1 \leq \|f\|_1$$

für alle $r \in [0,1)$. Es folgt

$$\|g\|_2^2 \leq \|f\|_1,$$

also wegen $f = g^2$ und mit der Abschätzung aus dem ersten Teil des Beweises die Behauptung.

□

Im nächsten Satz zeigen wir, dass ein Hardy-Raum $H^p(\mathbb{D})$ auch als abgeschlossener Teilraum von $L^p(\mathbb{T})$ aufgefasst werden kann.

Satz 1.1.5. *Für $1 \leq p \leq \infty$ definieren wir*

$$H^p(\mathbb{T}) = \{f \in L^p(\mathbb{T}); \hat{f}(n) = 0 \text{ für alle } n < 0\}$$

wobei

$$\hat{f}(n) = \int\limits_{\mathbb{T}} z^{-n} f(z) \mathrm{d}\lambda(z)$$

für $n \in \mathbb{Z}$ den n-ten Fourierkoeffizienten von f bezeichnet. Dann gibt es einen isometrischen Isomorphismus

$$\psi \colon H^p(\mathbb{D}) \to H^p(\mathbb{T})$$

auf den abgeschlossenen Teilraum $H^p(\mathbb{T}) \subseteq L^p(\mathbb{T})$ mit Umkehrabbildung

$$H^p(\mathbb{T}) \to H^p(\mathbb{D}), g \mapsto P[g].$$

Für $1 \leq p < \infty$ und $f \in H^p(\mathbb{D})$ gilt außerdem

$$\|f_r - \psi(f)\|_p \xrightarrow{r \nearrow 1} 0.$$

Beweis. Siehe Kapitel 3 (ab Seite 55) in [6]. □

Für $f \in A(\mathbb{D}) = \{f \in C(\overline{\mathbb{D}}); f|_{\mathbb{D}} \in \mathcal{O}(\mathbb{D})\}$ gilt nach Satz 1.1.5 insbesondere

$$\psi(f) = f|_{\mathbb{T}}.$$

Für $p = \infty$ ist die zweite Aussage in Satz 1.1.5 falsch, das heißt

$$\|f_r - \psi(f)\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{D}} |f_r(z) - \psi(f)(z)| \not\to 0.$$

Insbesondere gilt folgendes Korollar nur für den Fall $1 \leq p < \infty$.

Korollar 1.1.6. *Die Räume $H^p (1 \leq p \leq \infty)$ sind Banachräume und für $1 \leq p < \infty$ liegt $\mathbb{C}[z]|_{\mathbb{D}} \subseteq H^p$ dicht.*

Beweis. Sei $1 \leq p < \infty$ und $f \in H^p$. Für $0 < r < 1$ liegt

$$f(r) \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}, z \mapsto f(rz)$$

in $H^\infty \subseteq H^p$ und nach Satz 1.1.5 gilt

$$\|f(r)|_{\mathbb{T}} - f\|_p = \|f_r - \psi(f)\|_p \xrightarrow{r \nearrow 1} 0.$$

Sei nun $0 \leq r < 1$ fest, dann konvergiert die Taylorreihe

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

von $f(r)$ gleichmäßig auf $\mathbb{D}$. Also folgt

$$\begin{aligned} f(r) &= H^\infty - \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n z^n \\ &= H^p - \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n z^n. \end{aligned}$$

$\square$

Seien X ein Banachraum, X' sein topologischer Dualraum und $Y \subseteq X$ ein abgeschlossener Teilraum. Wir definieren

$$Y^\perp = \{u \in X'; \langle y, u\rangle = 0 \text{ für alle } y \in Y\}.$$

In der Funktionalanalysis zeigt man, dass

$$Y^\perp \to (X/Y)', u \mapsto \hat{u} \quad \text{mit } \hat{u}(x+Y) = u(x)$$

und

$$X'/Y^\perp \to Y', u + Y^\perp \mapsto u|_Y$$

isometrische Isomorphismen zwischen Banachräumen sind. Für $1 \leq p \leq \infty$ fassen wir H^p auf als abgeschlossenen Teilraum von $L^\infty(\mathbb{T})$ vermöge des isometrischen Isomorphismus

$$\psi \colon H^p \to H^p(\mathbb{T})$$

aus Satz 1.1.5 und berechnen für $1 \leq p < \infty$ im folgenden Satz die Räume $(H^p)^\perp \subseteq L^q(\mathbb{T})$ bezüglich der $L^p - L^q$ Dualität auf der Einheitskreislinie. Der abgeschlossene Teilraum

$$H_0^p = \{f \in H^p; f(0) = 0\} \subseteq H^p$$

entspricht dem Teilraum

$$\psi(H_0^p) = \{g \in L^p(\mathbb{T}); \hat{g}(n) = 0 \text{ für alle } n \leq 0\} \subseteq L^p(\mathbb{T}).$$

Satz 1.1.7. *Sei $1 \leq p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Es gilt*

$$(H^p)^\perp = H_0^q \quad \textit{und} \quad (H_0^p)^\perp = H^q$$

bezüglich $\langle L^p(\mathbb{T}), L^q(\mathbb{T})\rangle$. Dann gilt insbesondere

$$H_0^q = (L^p/H^p)' \quad \textit{und} \quad (H^p)' = L^q/H_0^q$$

vermöge der isometrischen Isomorphismen

$$\phi_1 \colon H_0^q \to (L^p/H^p)', \phi_1(g)(f + H^p) = \int\limits_{\mathbb{T}} fg\mathrm{d}\lambda$$

und

$$\phi_2 \colon L^q/H_0^q \to (H^p)', \phi_2(f + H_0^q)(g) = \int\limits_{\mathbb{T}} fg\mathrm{d}\lambda.$$

Die Abbildungen bleiben isometrische Isomorphismen, wenn wir H_0^q durch H^q und H^p durch H_0^p ersetzen.

Beweis. Wir zeigen $(H^p)^\perp = H_0^q$. Dazu sei $g \in L^q$ mit $g \perp H^p$, das heißt

$$\int\limits_{\mathbb{T}} fg\mathrm{d}\lambda = 0$$

für alle $f \in H^p$. Es folgt

$$\hat{g}(n) = \int\limits_{\mathbb{T}} z^{-n} g(z)\mathrm{d}\lambda(z) = 0$$

für alle $n \leq 0$ und somit liegt g in H_0^q.
Sei nun $g \in H_0^q$ und $p = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n z^n \in \mathbb{C}[z]$. Dann gilt

$$\int\limits_{\mathbb{T}} pg\mathrm{d}\lambda = \sum_{n=0}^{N} a_n \int\limits_{\mathbb{T}} z^n g\mathrm{d}\lambda = \sum_{n=0}^{N} a_n \hat{g}(-n) = 0.$$

Da $\mathbb{C}[z]$ dicht in H^p liegt, liegt g in $(H^p)^\perp$.
Der Rest folgt aus den Bemerkungen vor Satz 1.1.7.

□

Für $A = A(\mathbb{D})$ und $A_0 = \{f \in A; f(0) = 0\}$ ist A eine Banachalgebra bezüglich $\|f\|_{\mathbb{D}}$. Außerdem ist die Abbildung

$$j \colon A \to C(\mathbb{T}), f \mapsto f|_{\mathbb{T}}$$

ein isometrischer Algebrenhomomorphismus zwischen Banachalgebren mit

$$j(A) = \{f \in C(\mathbb{T}); \hat{f}(n) = 0 \text{ für alle } n < 0\}$$

und

$$j(A_0) = \{f \in C(\mathbb{T}); \hat{f}(n) = 0 \text{ für alle } n \leq 0\}.$$

Wir fassen nun A als abgeschlossenen Teilraum von $C = C(\mathbb{T})$ auf. Man kann zeigen, dass dann

$$A^\perp = H_0^1 \quad \text{und} \quad A_0^\perp = H^1$$

gilt bezüglich der Dualität $\langle C(\mathbb{T}), M(\mathbb{T})\rangle$ zwischen $C(\mathbb{T})$ und dem Banachraum $M(\mathbb{T})$ der regulären komplexen Borelmaße auf $\mathbb{T}$, wenn man die Funktionen $g \in H^1 \subseteq L^1(\mathbb{T})$ mit den Maßen $g\mathrm{d}\lambda \in M(\mathbb{T})$ identifiziert. Es folgt

$$(C/A)' \cong H_0^1 \qquad \text{und} \qquad (C/A_0)' \cong H^1$$

vermöge der isometrischen Isomorphismen

$$\phi\colon H_0^1 \to (C/A)', \phi(g)(f + A) = \int_{\mathbb{T}} fg\mathrm{d}\lambda$$

und

$$\phi_0\colon H^1 \to (C/A_0)', \phi_0(g)(f + A_0) = \int_{\mathbb{T}} fg\mathrm{d}\lambda.$$

Lemma 1.1.8. *Identifiziert man $(C/A)'' = (H_0^1)'$, so erhält die kanonische Isometrie*

$$j\colon C/A \to (C/A)''$$

die Gestalt

$$j(f + A) = I_{f+A} \quad (f \in C),$$

wobei I_{f+A} die stetige Linearform

$$I_{f+A}\colon H_0^1 \to \mathbb{C}, g \mapsto \int_{\mathbb{T}} fg\mathrm{d}\lambda$$

bezeichne. Insbesondere gilt

$$\|f + A\|_{C/A} = \|I_{f+A}\|$$

für alle $f \in C$.

Beweis. Sei für $f \in C$

$$I_{f+A}\colon H_0^1 \to \mathbb{C}, g \mapsto \int_{\mathbb{T}} fg\mathrm{d}\lambda.$$

Dann ist I_{f+A} linear und wegen

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{\mathbb{T}} fg\mathrm{d}\lambda\right| &\leq \int\limits_{\mathbb{T}} |f||g|\mathrm{d}\lambda \\ &\leq \|f\|_{\mathbb{T}}\|g\|_1\end{aligned}$$

auch stetig. Für alle $g \in H_0^1 \cong (C/A)'$ gilt dann

$$\begin{aligned}j(f+A)(\phi(g)) &= \phi(g)(f+A) \\ &= \int\limits_{\mathbb{T}} fg\mathrm{d}\lambda \\ &= I_{f+A}(g).\end{aligned}$$

wobei ϕ der isometrische Isomorphismus aus der Bemerkung vor Lemma 1.1.8 ist.

□

Satz 1.1.9. *Für $f \in C(\mathbb{T})$ gibt es ein $G \in H_0^1$ mit $\|G\|_1 = 1$ und*

$$\begin{aligned}\|f+A\|_{C/A} &= \inf\left\{\|f-p\|_{\mathbb{T}}; p \in \mathbb{C}[z]\right\} \\ &= \sup\left\{\left|\int\limits_{\mathbb{T}} fg\mathrm{d}\lambda\right|; g \in H_0^1 \textit{ mit } \|g\| \leq 1\right\} \\ &= \int\limits_{\mathbb{T}} fG\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

Beweis. Sei $f \in C(\mathbb{T})$. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es ein $\psi \in (C/A)'$ mit $\|\psi\| = 1$ und $\psi(f+A) = \|f+A\|_{C/A}$. Wegen $(C/A)' \cong H_0^1$ vermöge des isometrischen Isomorphismus ϕ aus den Bemerkungen vor Lemma 1.1.8 gibt es ein $G \in H_0^1$ mit $\|G\|_1 = 1$ und

$$\psi = \phi(G).$$

Somit folgt

$$\int\limits_{\mathbb{T}} fG\mathrm{d}\lambda = \psi(f+A) = \|f+A\|_{C/A}.$$

Nach Lemma 1.1.8 gilt

$$\|f+A\|_{C/A} = \sup\left\{\left|\int\limits_{\mathbb{T}} fg\mathrm{d}\lambda\right|; g \in B_{H_0^1}\right\}.$$

Schließlich folgt aus der Dichtheit von $\mathbb{C}[z]|_{\overline{\mathbb{D}}} \subseteq A(\mathbb{D})$, dass

$$\begin{aligned}\|f + A\|_{C/A} &= \inf\left\{ \|f - h\|_{\mathbb{T}}; h \in A \right\} \\ &= \inf\left\{ \|f - p\|_{\mathbb{T}}; p \in \mathbb{C}[z] \right\}\end{aligned}$$

gilt.

□

1.2 $\overline{\partial}$-Sequenzen

Nachdem wir im ersten Teil einige wichtige Resultate aus der Theorie der Hardy-Räume bereit gestellt haben, wenden wir uns im Folgenden den $\overline{\partial}$-Sequenzen zu. Dabei sei für eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ der Operator $\overline{\partial}$ definiert durch

$$\overline{\partial}\colon C^1(U) \to C(U), g \mapsto \overline{\partial}g = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial g}{\partial y}\right).$$

Lemma 1.2.1. *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $R = [a,b] \times [c,d] \subseteq U$ und $f \in C^1(U)$. Dann gilt*

$$2\mathrm{i}\int\limits_R (\overline{\partial} f)\mathrm{d}z = \int\limits_{\partial R} f\mathrm{d}z$$

wobei ∂R der positiv orientierte Rand von R ist.

Beweis. Für $f \in C^1(U)$ gilt mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}2\mathrm{i}\int\limits_R (\overline{\partial} f)\mathrm{d}z &= -\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d \partial_y f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b \partial_x f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &= \int\limits_a^b f(x,c)\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int\limits_c^d f(b,y)\mathrm{d}y - \int\limits_a^b f(x,d)\mathrm{d}x - \mathrm{i}\int\limits_c^d f(a,y)\mathrm{d}y \\ &= \int\limits_{\partial R} f\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

□

Lemma 1.2.2. *Sei $w \in \mathbb{C}$. Dann ist die Abbildung*

$$\frac{1}{z-w}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \begin{cases} \frac{1}{z-w} & ; z \neq w \\ 0 & ; z = w \end{cases}$$

integrabel über jeder kompakten Menge $K \subseteq \mathbb{C}$.

Beweis. Wir können ohne Einschränkung voraussetzen, dass $w = 0$ und $K = \overline{D}_R(0)$ gelten. Sei dann

$$f = \left|\chi_K \cdot \frac{1}{z}\right| : \mathbb{C} \to \mathbb{C}.$$

Dann folgt aus der Integrabilität der Abbildung

$$\begin{aligned}[0,\infty) \times [0,2\pi] \to \mathbb{C}, (r,\varphi) \mapsto & f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))r \\ &= \frac{\chi_{(0,R]\times[0,2\pi]}(r,\varphi)}{r} r \\ &= \chi_{(0,R]\times[0,2\pi]}(r,\varphi)\end{aligned}$$

mit Polarkoordinaten und dem Satz von Tonelli schon die Integrabilität von f und damit von $\chi_K \cdot \frac{1}{z}$.

□

Lemma 1.2.3. *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $R = [a,b] \times [c,d] \subseteq U$ und $f \in C^1(U)$. Dann gilt*

$$f(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \left(\int\limits_{\partial R} \frac{f}{z-w} \mathrm{d}z - 2\mathrm{i} \int\limits_{R} \frac{\overline{\partial} f}{z-w} \mathrm{d}z \right)$$

für alle $w \in \mathrm{Int}(R)$.

Beweis. Sei $w \in \mathrm{Int}(R)$ und $\epsilon > 0$ so, dass

$$Q_\epsilon = \{z \in \mathbb{C}; \|z-w\|_{\max} < \epsilon\} \subseteq \overline{Q}_\epsilon \subseteq Int(R)$$

gilt und sei ∂Q_ϵ der positiv orientierte Rand von Q_ϵ. Dann gilt

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\partial Q_\epsilon} \frac{f}{z-w} \mathrm{d}z - f(w) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\partial Q_\epsilon} \frac{f - f(w)}{z-w} \mathrm{d}z \right| \\ &\leq \frac{4}{\pi} \sup_{z \in \partial Q_\epsilon} \left\{ |f(z) - f(w)| \right\}\end{aligned}$$

und somit

$$\left| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\partial Q_\epsilon} \frac{f}{z-w} \mathrm{d}z - f(w) \right| \overset{\epsilon \searrow 0}{\to} 0.$$

Sei nun $R_\epsilon = R \setminus \overline{Q}_\epsilon$ und $V \subseteq Q_\epsilon$ eine Umgebung von w. Nach Theorem 2.6.1 in [2] gibt es eine Abbildung $\varphi \in C^\infty(U)$ mit $\mathrm{supp}(1-\varphi) \subseteq Q_\epsilon$ und $\varphi|_V \equiv 0$. Wegen

$$\overline{\partial}(f\varphi)|_{R_\epsilon} = ((\overline{\partial f})\varphi + f\overline{\partial}\varphi)|_{R_\epsilon} = (\overline{\partial} f)|_{R_\epsilon}$$

gilt dann

$$\begin{aligned}\int\limits_{R_\epsilon} \frac{\overline{\partial} f}{z-w} \mathrm{d}z &= \int\limits_{R_\epsilon} \frac{\overline{\partial}(f\varphi)}{z-w} \mathrm{d}z \\ &= \int\limits_{R} \frac{\overline{\partial}(f\varphi)}{z-w} \mathrm{d}z - \int\limits_{Q_\epsilon} \frac{\overline{\partial}(f\varphi)}{z-w} \mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Wegen $\overline{\partial}\left(\frac{1}{z-w}\right)|_{V^c} \equiv 0$ und $f\varphi|_V \equiv 0$ ist außerdem auf R_ϵ

$$\overline{\partial}\left(\frac{f\varphi}{z-w}\right) = \frac{\overline{\partial}(f\varphi)}{z-w}$$

und es folgt mit Lemma 1.2.1 weiter

$$\begin{aligned}\int\limits_{R_\epsilon} \frac{\overline{\partial} f}{z-w} \mathrm{d}z &= 2\mathrm{i}\left(\int\limits_{R} \overline{\partial}\left(\frac{f\varphi}{z-w}\right) \mathrm{d}z - \int\limits_{\overline{Q}_\epsilon} \overline{\partial}\left(\frac{f\varphi}{z-w}\right) \mathrm{d}z\right) \\ &= \int\limits_{\partial R} \frac{f\varphi}{z-w} \mathrm{d}z - \int\limits_{\partial Q_\epsilon} \frac{f\varphi}{z-w} \mathrm{d}z \\ &= \int\limits_{\partial R} \frac{f}{z-w} \mathrm{d}z - \int\limits_{\partial Q_\epsilon} \frac{f}{z-w} \mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}2\mathrm{i}\int\limits_{R} \frac{\overline{\partial} f}{z-w} \mathrm{d}z &= \lim_{\epsilon\searrow 0} 2\mathrm{i}\int\limits_{R_\epsilon} \frac{\overline{\partial} f}{z-w} \mathrm{d}z \\ &= \int\limits_{\partial R} \frac{f}{z-w} \mathrm{d}z - \lim_{\epsilon\searrow 0} \int\limits_{\partial Q_\epsilon} \frac{f}{z-w} \mathrm{d}z \\ &= \int\limits_{\partial R} \frac{f}{z-w} \mathrm{d}z - 2\pi\mathrm{i} f(w).\end{aligned}$$

□

Korollar 1.2.4. *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f \in C^1_c(U)$. Dann gilt*

$$f(w) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{U} \frac{(\overline{\partial} f)(z)}{z-w} \mathrm{d}z$$

für alle $w \in U$.

Beweis. Wir können ohne Einschränkung $U = \mathbb{C}$ annehmen. Für $w \in \mathbb{C}$ wählen wir $R = [a,b] \times [c,d]$ so, dass

$$\{w\} \cup \operatorname{supp}(f) \subseteq \operatorname{Int}(R)$$

gilt. Mit Lemma 1.2.3 folgt dann

$$f(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \left(\int\limits_{\partial R} \frac{f(z)}{z-w} \mathrm{d}z - 2\mathrm{i} \int\limits_{R} \frac{(\overline{\partial} f)(z)}{z-w} \mathrm{d}z \right) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{(\overline{\partial} f)(z)}{z-w} \mathrm{d}z.$$

□

Satz 1.2.5. *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und beschränkt und $g \in C_c^\infty(U)$. Dann wird durch*

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{U} \frac{g(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi$$

eine Funktion $f \in C^\infty(U)$ definiert, für die

$$\overline{\partial} f = g$$

auf U gilt.

Beweis. Wähle $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ mit $\theta = 1$ auf $U - U$. Dann definiert $\chi = \frac{1}{\pi} \frac{\theta}{z}$ eine Abbildung in $L^1(\mathbb{C})$ (vgl. Lemma 1.2.2). Folglich ist $g * \chi \in C^\infty(\mathbb{C})$ mit

$$g * \chi(z) = \int\limits_{\mathbb{C}} g(\xi) \chi(z - \xi) \mathrm{d}\xi = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{U} \frac{g(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi = f(z)$$

für alle $z \in U$. Mit Korollar 1.2.4 folgt dann

$$\overline{\partial} f(z) = \overline{\partial}(g * \chi)(z) = ((\overline{\partial} g) * \chi)(z) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{U} \frac{(\overline{\partial} g)(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi = g(z)$$

für alle $z \in U$.

□

Satz 1.2.6. *Seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offen und beschränkt mit $\mathbb{D} \subseteq V \subseteq \overline{V} \subsetneq U$. Dann gilt*

$$C^\infty(U)|_V = \overline{\partial} C^\infty(V).$$

Beweis. Sei $f \in C^\infty(U)$. Wir können eine offene Menge $W \subseteq \mathbb{C}$ so wählen, dass $\mathbb{D} \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq U$ gilt. Nach Theorem 2.6.1 in [2] gibt es ein $\theta \in C^\infty(U)$ mit $\theta|_{\overline{V}} \equiv 1$ und $\theta|_{U \setminus W} \equiv 0$. Es folgt $\theta f \in C^\infty(U)$ mit $\operatorname{supp}(\theta f) \subseteq \operatorname{supp} \theta \subseteq \overline{W}$. Nach Satz 1.2.5 gibt es dann ein $h \in C^\infty(U)$ mit $\overline{\partial} h = \theta f$. Damit folgt

$$\overline{\partial}(h|_V) = (\overline{\partial} h)|_V = (\theta f)|_V = f|_V.$$

□

2 Kommutative Banachalgebren

In diesem Kapitel betrachten wir zunächst allgemeine kommutative Banachalgebren. In Satz 2.2 geben wir eine Bedingung an, die zur Dichtheit bestimmter Teilmengen des Strukturraums kommutativer Banachalgebren äquivalent ist. Diese führt uns später zu einer Reduktion des Corona-Problems.
Sei B im Folgenden eine kommutative komplexe Banachalgebra mit Eins e und sei $B^{'}$ der topologische Dualraum von B.

Definition 2.1. Wir nennen die Menge

$$\Delta_B = \{\delta; \delta\colon B \to \mathbb{C} \text{ multiplikative Linearform }\}\backslash\{0\} \subseteq B^{'}$$

den Strukturraum von B und die Relativtopologie der schwach-$*$-Topologie τ_{ω^*} von $B^{'}$ auf Δ_B die Gelfandtopologie auf Δ_B.

Man zeigt mit dem Satz von Alaoglu-Bourbaki, dass der Strukturraum Δ_B von B versehen mit der Gelfandtopologie ein kompakter Hausdorffraum ist.

Satz 2.2. *Seien Λ ein topologischer Raum und*

$$\Lambda \to \Delta_B, \lambda \mapsto \delta_\lambda$$

eine stetige Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) *$\{\delta_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ liegt dicht in Δ_B,*

(ii) *für je endlich viele $x_1, ..., x_n \in B$ mit*

$$\inf_{\lambda\in\Lambda} \sum_{i=1}^{n} |\delta_\lambda(x_i)| > 0$$

existieren Elemente $y_1, ..., y_n \in B$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = e.$$

Beweis. Sei zunächst $\{\delta_\lambda; \lambda \in \Lambda\} \subseteq \Delta_B$ dicht und seien $x_1, ..., x_n \in B$ gegeben so, dass

$$\sum_{i=1}^{n} x_i B \subsetneq B$$

ein echtes Ideal ist. Dann gibt es nach dem Zornschen Lemma ein maximales Ideal m mit

$$\sum_{i=1}^{n} x_i B \subseteq m.$$

Somit gibt es ein $\delta \in \Delta_B$ mit $m = \ker(\delta)$. Da $\{\delta_\lambda; \lambda \in \Lambda\} \subseteq \Delta_B$ dicht ist, gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein $\lambda \in \Lambda$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} |\delta_\lambda(x_i) - \delta(x_i)| < \epsilon.$$

Wegen $x_i \in m = \ker(\delta)$ für alle $i = 1, ..., n$ folgt

$$\sum_{i=1}^{n} |\delta_\lambda(x_i)| = \sum_{i=1}^{n} |\delta_\lambda(x_i) - \delta(x_i)| < \epsilon$$

und somit

$$\inf_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i=1}^{n} |\delta_\lambda(x_i)| = 0.$$

Es gelte nun (ii), das heißt zu je endlich vielen $x_1, ..., x_n \in B$ mit

$$\inf_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i=1}^{n} |\delta_\lambda(x_i)| > 0$$

existieren $y_1, ..., y_n \in B$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = e.$$

Auf der Menge

$$I = \{(M, \epsilon); M \subseteq B \text{ endlich und } \epsilon > 0\}$$

wird durch

$$(M_1, \epsilon_1) \leq (M_2, \epsilon_2) \Leftrightarrow M_1 \subseteq M_2 \text{ und } \epsilon_2 \leq \epsilon_1$$

eine gerichtete partielle Ordnung definiert. Seien nun $\delta \in \Delta_B$ und $(M, \epsilon) \in I$ mit $M = \{x_1, ..., x_n\}$. Für alle $y_1, ..., y_n \in B$ gilt dann

$$\delta\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \delta(x_i)e)\, y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\delta(x_i) - \delta(x_i)\delta(e))\delta(y_i) = 0.$$

Somit kann es keine Elemente $y_1, ..., y_n \in B$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \delta(x_i)e) y_i = e$$

geben. Nach Voraussetzung gilt dann

$$\inf_{\lambda\in\Lambda}\sum_{i=1}^{n}|\delta_\lambda(x_i)-\delta(x_i)| = \inf_{\lambda\in\Lambda}\sum_{i=1}^{n}|\delta_\lambda(x_i-\delta(x_i)e)| = 0.$$

Damit gibt es ein $\lambda=\lambda(M,\epsilon)\in\Lambda$ mit

$$\sum_{y\in M}|\delta_\lambda(y)-\delta(y)|<\epsilon.$$

Für $x\in B, \epsilon_0>0$ und für alle $(M,\epsilon)\in I$ mit $(M,\epsilon)\geq(\{x\},\epsilon_0)$ gilt

$$|\delta_{\lambda(M,\epsilon)}(x)-\delta(x)|\leq\sum_{y\in M}|\delta_{\lambda(M,\epsilon)}(y)-\delta(y)|<\epsilon\leq\epsilon_0.$$

Es folgt

$$\delta_{\lambda(M,\epsilon)}\xrightarrow{(\lambda,\epsilon)}\delta \text{ in } (\Delta_B,\tau_{w^*})$$

und damit liegt $\{\delta_\lambda;\lambda\in\Lambda\}$ dicht in Δ_B.

$\square$

Bemerkung 2.3. Ist Λ ein kompakter topologischer Raum, so kann man (i) in Satz 2.2 durch die Bedingung $\{\delta_\lambda;\lambda\in\Lambda\}=\Delta_B$ ersetzen.

Beispiele 2.4. (a) Sei K ein kompakter Hausdorffraum und sei B die Banachalgebra $B=C(K)$ versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_K$. Für $\lambda\in K$ schreiben wir

$$\delta_\lambda\colon C(K)\to\mathbb{C}, f\mapsto f(\lambda)$$

für die Punktauswertung in λ. Ist $(\lambda_\alpha)_{\alpha\in A}$ ein Netz in K mit $\lambda_\alpha\xrightarrow{\alpha}\lambda$, so gilt

$$\delta_{\lambda_\alpha}(f)=f(\lambda_\alpha)\xrightarrow{\alpha}f(\lambda)$$

für alle $f\in C(K)$. Also ist die Abbildung

$$K\to\Delta_{C(K)}, \lambda\mapsto\delta_\lambda$$

stetig. Für $f_1,...,f_n\in C(K)$ mit

$$\inf_{\lambda\in K}\sum_{i=1}^{n}|f_i(\lambda)|>0$$

sind

$$g_i=\frac{\bar{f}_i}{\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2}\in C(K)\quad(i=1,...,n)$$

Funktionen mit

$$\sum_{i=1}^{n}f_ig_i=1.$$

Nach Satz 2.2 und Bemerkung 2.3 gilt also

$$\Delta_{C(K)}=\{\delta_\lambda;\lambda\in K\}.$$

(b) Seien $\delta \in \Delta_{A(\mathbb{D})}$ und $\lambda = \delta(z)$. Wegen $\|\delta\| \leq 1$ für alle $\delta \in \Delta_{A(\mathbb{D})}$ gilt

$$|\lambda| \leq \|\delta\| \|z\|_{\overline{\mathbb{D}}} \leq 1.$$

Bezeichnet

$$\delta_\lambda \colon A(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}, \delta_\lambda(f) = f(\lambda)$$

die Punktauswertung in λ, so folgt weiter

$$\delta\left(\sum_{i=1}^n a_i z^i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \delta\left(z^i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \lambda^i = \delta_\lambda\left(\sum_{i=1}^n a_i z^i\right)$$

für alle Polynome $p = \sum\limits_{i=1}^n a_i z^i \in \mathbb{C}[z]$. Da $\mathbb{C}[z]|_{\overline{\mathbb{D}}} \subseteq A(\mathbb{D})$ dicht liegt, folgt $\delta = \delta_\lambda$. Also gilt

$$\Delta_{A(\mathbb{D})} = \{\delta_\lambda; \lambda \in \overline{\mathbb{D}}\}.$$

Bezeichnet

$$Z(f) = \{x \in \mathbb{D}; f(x) = 0\ \}$$

die Nullstellenmenge einer Funktion $f \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, so erhält man nach Satz 2.2 für Funktionen $f_1, ..., f_n \in A(\mathbb{D})$ mit

$$Z(f_1) \cap ... \cap Z(f_n) = \emptyset$$

Funktionen $g_1, ..., g_n \in A(\mathbb{D})$ mit

$$\sum_{i=1}^n f_i g_i = 1.$$

3 Das Corona-Problem und eine erste Reduktion

Sei im Folgenden $H^\infty = H^\infty(\mathbb{D}) = \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}); f \text{ ist beschränkt}\}$. Versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_{\mathbb{D}}$ ist H^∞ eine kommutative komplexe Banachalgebra mit Eins und für $\lambda \in \mathbb{D}$ definiert
$$\delta_\lambda \colon H^\infty \to \mathbb{C}, f \mapsto f(\lambda)$$
eine multiplikative Linearform.
Da für ein Netz $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in A}$ in $\mathbb{D}$ und $\lambda \in \mathbb{D}$ genau dann $(\lambda_\alpha) \xrightarrow{\alpha} \lambda$ in $\mathbb{D}$ gilt, wenn $(f(\lambda_\alpha)) \xrightarrow{\alpha} f(\lambda)$ für alle $f \in H^\infty$ konvergiert, ist die Abbildung

$$\mathbb{D} \to \Delta_{H^\infty}, \lambda \mapsto \delta_\lambda$$

ein Homöomorphismus auf ihr Bild (versehen mit der Relativtopologie von Δ_{H^∞}).
Im Folgenden werden wir sehen, dass die beiden Mengen Δ_{H^∞} und $\{\delta_\lambda; \lambda \in \mathbb{D}\}$ nicht gleich sind.

Bemerkung 3.0.1. Es gibt ein $\delta \in \Delta_{H^\infty} \setminus \{\delta_\lambda; \lambda \in \mathbb{D}\}$.

Beweis. Sei
$$I = \{f \in H^\infty; \lim_{z \to 1} f(z) = 0\} \subsetneq H^\infty.$$
Dann ist I ein echtes Ideal und somit in einem maximalen Ideal von H^∞ enthalten. Damit erhält man ein $\delta \in \Delta_{H^\infty}$ mit $\delta(I) = \{0\}$. Da $z - 1 \in I$ keine Nullstelle in $\mathbb{D}$ hat, ist $\delta \neq \delta_\lambda$ für alle $\lambda \in \mathbb{D}$.

$\square$

Da die beiden Mengen nicht gleich sind, stellte sich S.Kakutani 1941 die Frage, ob die Menge Δ_{H^∞} dicht in der Menge $\{\delta_\lambda; \lambda \in \mathbb{D}\}$ liegt. Dieses Problem wurde später als das "Corona-Problem" bekannt:

Corona Problem: Liegt $\{\delta_\lambda; \lambda \in \mathbb{D}\}$ dicht in Δ_{H^∞}?

Im Folgenden wenden wir die Resultate aus Kapitel 2 auf das Corona Problem an. Dabei verwenden wir insbesondere die Äquivalenz aus Satz 2.2. Im ersten Teil dieses Abschnittes werden wir uns zunächst stetig differenzierbare Funktionen konstruieren, die genau die Bedingungen aus Satz 2.2 erfüllen und versuchen dann diese Funktionen durch analytische Funktionen zu ersetzen. Jedoch führt das Anwenden von Satz 2.2

nicht direkt zur Lösung des Corona-Problems, sondern reduziert es lediglich auf ein $\bar{\partial}$-Problem. Im zweiten Teil reduzieren wir das Corona-Problem dann auf ein $\bar{\partial}$-Problem mit Schranken. Dabei spielt die Theorie der Hardy-Räume eine entscheidende Rolle.

Bemerkung 3.0.2. Man kann leicht prüfen, dass aus Satz 2.2 folgt, dass $\{\delta_\lambda; \lambda \in \mathbb{D}\}$ dicht in Δ_{H^∞} liegt, falls zu $n \in \mathbb{N}^*$ und $\delta > 0$ eine Konstante $C = C(n, \delta) > 0$ existiert so, dass für alle $f_1, ..., f_n \in H^\infty$ mit $\|f_i\|_{\mathbb{D}} \leq 1$ für $i = 1, ..., n$ und

$$\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2 \geq \delta \text{ auf } \mathbb{D}$$

Funktionen $g_1, ..., g_n \in H^\infty$ existieren mit

$$\sum_{i=1}^{n} f_i g_i = 1 \text{ auf } \mathbb{D}$$

und $\|g_i\|_{\mathbb{D}} \leq C$ für alle $i = 1, ..., n$.

Satz 3.0.3. *Die Menge $\{\delta_\lambda; \lambda \in \mathbb{D}\}$ liegt dicht in Δ_{H^∞}, falls für alle $n \in \mathbb{N}^*$ und $\delta > 0$ eine Konstante $C = C(n, \delta) > 0$ existiert so, dass für alle $U \supset \overline{\mathbb{D}}$ offen und für alle $f_1, ..., f_n \in \mathcal{O}(U)$ mit*

$$\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2 \geq \delta \textit{ auf } U \textit{ und } \|f_i\|_U \leq 1 \quad (i = 1, ..., n)$$

Funktionen $g_1, ..., g_n \in H^\infty$ existieren mit

$$\sum_{i=1}^{n} f_i g_i = 1 \textit{ auf } \mathbb{D}$$

und $\|g_i\|_{\mathbb{D}} \leq C$ für alle $i = 1, ..., n$.

Beweis. Zu $n \in \mathbb{N}^*$ und $\delta > 0$ sei $C = C(n, \delta) > 0$ wie in der Voraussetzung. Weiter seien $f_1, ..., f_n \in H^\infty$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2 \geq \delta \text{ auf } \mathbb{D}$$

und $\|f_i\|_{\mathbb{D}} \leq 1$ für alle $i = 1, ..., n$. Für $r \in (0, 1)$ und $i = 1, ..., n$ definieren wir

$$f_i^r : D_{\frac{1}{r}}(0) \to \mathbb{C}, z \mapsto f_i(rz).$$

Die Funktionen f_i^r $(r \in (0, 1), i = 1, ..., n)$ erfüllen dann

$$\sum_{i=1}^{n} |f_i^r(z)|^2 = \sum_{i=1}^{n} |f_i(rz)|^2 \geq \delta \quad (z \in D_{\frac{1}{r}}(0))$$

und

$$\|f_i^r\|_{D_{\frac{1}{r}}(0)} = \|f_i\|_{\mathbb{D}} \leq 1 \quad (i = 1, ..., n).$$

Nach Voraussetzung gibt es dann für alle $r \in (0,1)$ Funktionen $g_1^r, ..., g_n^r \in H^\infty$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^r g_i^r = 1 \text{ auf } \mathbb{D}$$

und $\|g_i^r\|_{\mathbb{D}} \leq C$ für alle $i = 1, ..., n$. Nach dem Satz von Montel gibt es eine Folge $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $(0,1)$ mit $r_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 1$ und $g_1, ..., g_n \in H^\infty$ so, dass für $i = 1, ..., n$

$$(g_i^{r_k}) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} g_i \in H^\infty \text{ kompakt gleichmäßig auf } \mathbb{D}$$

konvergiert. Es folgt

$$|g_i(z)| = \lim_{k\to\infty} |g_i^{r_k}(z)| \leq C(n,\delta)$$

für $i = 1, ..., n$ und $z \in \mathbb{D}$ und somit

$$\|g_i\|_{\mathbb{D}} \leq C(n,\delta)$$

für alle $i = 1, ..., n$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f_i(z) g_i(z) &= \sum_{i=1}^{n} \lim_{k\to\infty} f_i^{r_k}(z) g_i^{r_k}(z) \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i^{r_k}(z) g_i^{r_k}(z) \\
&= 1
\end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{D}$. Nach Bemerkung 3.0.2 liegt $\{\delta_\lambda; \lambda \in \mathbb{D}\}$ also dicht in Δ_{H^∞}.

□

3.1 Reduktion auf ein $\bar{\partial}$-Problem

Im Folgenden reduzieren wir das Corona-Problem auf ein $\bar{\partial}$-Problem. Dazu seien $U \supset \overline{\mathbb{D}}$ offen und $f_1, ..., f_n \in \mathcal{O}(U)$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2 \geq \delta > 0 \text{ auf } U$$

und $\|f_i\|_U \leq 1$ für alle $i = 1, ..., n$ gegeben. Für $i = 1, ..., n$ definieren wir nun Funktionen

$$h_i = \frac{\bar{f_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} |f_j|^2} \in C^\infty(U).$$

Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} f_i h_i = 1 \text{ auf } U$$

und

$$\|h_i\|_U \leq \frac{1}{\delta}$$

für alle $i = 1, ..., n$. Wir werden nun versuchen die Funktionen $h_1, ..., h_n \in C^\infty(U)$ durch analytische Funktionen zu ersetzen.
Wir beginnen mit einigen algebraischen Überlegungen.
Seien dazu B eine kommutative Algebra mit Eins e und $x = (x_1, ..., x_n) \in B^n$.

Lemma 3.1.1. *Es gibt genau dann Elemente $y_1, ..., y_n \in B$ mit*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = e,$$

wenn die Abbildung

$$\beta_x : B^n \to B, (b_i)_{i=1}^n \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$$

surjektiv ist.

Beweis. Seien $y_1, ..., y_n \in B$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = e.$$

Für alle $b \in B$ gilt dann

$$b = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) b = \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i b) = \beta_x \left((y_i b)_{i=1}^n\right).$$

Also ist β_x surjektiv. Die umgekehrte Implikation ist klar.

$\square$

Satz 3.1.2. *Sei $y = (y_1, ..., y_n) \in B^n$ mit*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = e.$$

Dann definiert

$$B^{\binom{n}{2}} \xrightarrow{\alpha_x} B^n \xrightarrow{\beta_x} B \longrightarrow 0$$

mit

$$\alpha_x \colon B^{\binom{n}{2}} \to B^n, (b_{jk})_{1 \leq j < k \leq n} \mapsto \left(\sum_{k<j} x_k b_{kj} - \sum_{k>j} x_k b_{jk}\right)_{j=1}^n$$

und

$$\beta_x : B^n \to B, (b_i)_{i=1}^n \mapsto \sum_{i=1}^n x_i b_i$$

eine exakte Sequenz $\mathbb{C}$-linearer Abbildungen, das heißt

(i) β_x *ist surjektiv,*

(ii) $\ker(\beta_x) = \mathrm{Im}(\alpha_x)$.

Beweis. (i) Die Surjektivität von β_x folgt aus Lemma 3.1.1.

(ii) Für $(a_{jk})_{1\leq j<k\leq n} \in B^{\binom{n}{2}}$ gilt

$$\begin{aligned}(\beta_x \circ \alpha_x)(a_{jk})_{1\leq j<k\leq n} &= \beta_x\left(\left(\sum_{k=1,k<j}^n x_k a_{kj} - \sum_{k=1,k>j}^n x_k a_{jk}\right)_{j=1}^n\right)\\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1,k<j}^n x_j x_k a_{kj} - \sum_{k=1,k>j}^n x_j x_k a_{jk}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

und es folgt $\mathrm{Im}(\alpha_x) \subseteq \ker(\beta_x)$.

Sei nun

$$r_y : B^n \longrightarrow B^{\binom{n}{2}}, (b_j)_{j=1}^n \mapsto (y_j b_k - y_k b_j)_{1\leq j<k\leq n}$$

und

$$s_y\colon B \to B^n, b \mapsto (y_j b)_{j=1}^n.$$

Für $a = (a_j)_{j=1}^n \in B^n$ folgt dann

$$\begin{aligned}&(\alpha_x \circ r_y + s_y \circ \beta_x)(a)\\ &= \alpha_x\Big((y_j a_k - y_k a_j)_{1\leq j<k\leq n}\Big) + s_y\left(\sum_{k=1}^n x_k a_k\right)\\ &= \left(\sum_{k=1,k<j}^n x_k(y_k a_j - y_j a_k) - \sum_{k=1,k>j}^n x_k(y_j a_k - y_k a_j)\right)_{j=1}^n + \left(y_j \sum_{k=1}^n x_k a_k\right)_{j=1}^n\\ &= \left(\sum_{k=1,k\neq j}^n x_k y_k a_j - \sum_{k=1,k\neq j}^n x_k y_j a_k\right)_{j=1}^n + \left(\sum_{k=1}^n y_j x_k a_k\right)_{j=1}^n\\ &= \left(\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right) a_j - x_j y_j a_j - \sum_{k=1,k\neq j}^n x_k y_j a_k\right)_{j=1}^n + \left(\sum_{k=1}^n y_j x_k a_k\right)_{j=1}^n\\ &= (a_j)_{j=1}^n - \left(\left(\sum_{k=1}^n x_k a_k\right) y_j\right)_{j=1}^n + \left(\sum_{k=1}^n y_j x_k a_k\right)_{j=1}^n\\ &= a.\end{aligned}$$

Dies liefert $\alpha_x \circ r_y + s_y \circ \beta_x = \mathrm{id}_{B^n}$ und damit insbesondere $\mathrm{Im}(\alpha_x) \supseteq \ker(\beta_x)$. $\square$

Sei nun $U \supseteq \overline{\mathbb{D}}$ offen und

$$f = (f_i)_{i=1}^n \in \mathcal{O}(U)^n$$

mit $\|f_i\|_U \leq 1$ für $i = 1, ..., n$ und

$$\sum_{i=1}^n |f_i|^2 \geq \delta \text{ auf } U.$$

Wir wenden die obigen Überlegungen an auf die Algebra $B = C^\infty(U)$ und die Tupel $f = (f_i)_{i=1}^n$ statt x und

$$h = (h_i)_{i=1}^n = \left(\frac{\bar{f}_i}{\sum_{j=1}^n |f_j|^2} \right)_{i=1}^n \in C^\infty(U)^n \text{ statt } y.$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}(\beta_f(g_1, ..., g_n)) &= \bar{\partial} \left(\sum_{i=1}^n f_i g_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left((\bar{\partial} f_i) g_i + f_i \bar{\partial} g_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^n f_i \bar{\partial} g_i \\
&= \beta_f(\oplus \bar{\partial}(g_1, ..., g_n))
\end{aligned}$$

für alle $(g_1, ..., g_n) \in C^\infty(U)^n$ und

$$\begin{aligned}
\oplus\bar{\partial} \left(\alpha_f (g_{jk})_{1 \leq j < k \leq n} \right) &= \oplus\bar{\partial} \left(\left(\sum_{k<j} f_k g_{kj} - \sum_{k>j} f_k g_{jk} \right)_{j=1}^n \right) \\
&= \left(\sum_{k<j} f_k \bar{\partial} g_{kj} - \sum_{k>j} f_k \bar{\partial} g_{jk} \right)_{j=1}^n \\
&= \alpha_f \left(\bar{\partial} g_{jk} \right)_{1 \leq j < k \leq n}
\end{aligned}$$

für alle $(g_{jk})_{1 \leq j < k \leq n} \in C^\infty(U)^{\binom{n}{2}}$ kommutiert das folgende Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\mathcal{O}(U)^{\binom{n}{2}} \arrow[r, "\alpha_f"] \arrow[d] & \mathcal{O}(U)^n \arrow[r, "\beta_f"] \arrow[d] & \mathcal{O}(U) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
C^\infty(U)^{\binom{n}{2}} \arrow[r, "\alpha_f"] \arrow[d] & C^\infty(U)^n \arrow[r, "\beta_f"] \arrow[d] & C^\infty(U) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
C^\infty(U)^{\binom{n}{2}} \arrow[r, "\alpha_f"] \arrow[d] & C^\infty(U)^n \arrow[r, "\beta_f"] \arrow[d] & C^\infty(U) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

mit

$$i : \mathcal{O}(U) \longrightarrow C^\infty(U), f \mapsto f$$

und

$$\bar{\partial} : C^\infty(U) \longrightarrow C^\infty(U), g \mapsto \bar{\partial} g = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial g}{\partial y}\right).$$

Insbesondere folgt für $h = (h_j)_{j=1}^n \in C^\infty(U)^n$ wegen

$$\beta_f((\oplus\bar{\partial})h) = \bar{\partial}(\beta_f h) = \bar{\partial}(1) = 0$$

schon

$$(\oplus\bar{\partial})h \in \ker(\beta_f).$$

Somit gilt nach Satz 3.1.2 und seinem Beweis

$$\begin{aligned}
(\bar{\partial}h_j)_{j=1}^n &= (\oplus\bar{\partial})h \\
&= \alpha_f \circ r_h((\oplus\bar{\partial})h) \\
&= \alpha_f\Big(h_j\bar{\partial}h_k - h_k\bar{\partial}h_j\Big)_{1\le j<k\le n}.
\end{aligned}$$

Sei nun $V \subseteq \mathbb{C}$ offen und beschränkt mit $\overline{\mathbb{D}} \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Dann gilt nach Satz 1.2.6

$$C^\infty(U)|_V = \overline{\partial} C^\infty(V).$$

Für $1 \leq j < k \leq n$ gibt es damit Funktionen $w_{jk} \in C^\infty(V)$ so, dass

$$\bar{\partial} w_{jk} = h_j \bar{\partial} h_k - h_k \bar{\partial} h_j$$

auf V gilt.
Für das Tupel $w = (w_{jk})_{1 \leq j < k \leq n} \in C^\infty(V)^{\binom{n}{2}}$ gilt dann

$$\begin{aligned}(\oplus\bar{\partial})(\alpha_f w) &= \alpha_f((\oplus\bar{\partial})w)\\ &= \alpha_f(h_j \bar{\partial} h_k - h_k \bar{\partial} h_j)_{1 \leq j < k \leq n}\\ &= \left(\oplus\bar{\partial}\right)(h_j)_{j=1}^n.\end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$w_{kj} = -w_{jk}$$

für $k > j$ und

$$w_{jj} = 0$$

für $j = 1, ..., n$. Dann gilt

$$\alpha_f w = \left(\sum_{k<j} f_k w_{kj} - \sum_{k>j} f_k w_{jk}\right)_{j=1}^n = \left(\sum_{k=1}^n f_k w_{kj}\right)_{j=1}^n.$$

Damit erhält man für $j = 1, ..., n$ analytische Funktionen

$$g_j = h_j - (\alpha_f w)_j = h_j - \sum_{k=1}^n f_k w_{kj} \in \mathcal{O}(V)$$

so, dass

$$\sum_{j=1}^n f_j g_j = \beta_f (g_j)_{j=1}^n = \beta_f\left(h - \alpha_f w\right) = \beta_f(h) = 1$$

auf V gilt. Wir haben nun also analytische Funktionen $g_1|_{\mathbb{D}}, ..., g_n|_{\mathbb{D}} \in H^\infty$ gefunden, so dass

$$\sum_{j=1}^n f_j g_j = 1$$

auf $\mathbb{D}$ gilt. Um Satz 3.0.3 anwenden zu können, müssen wir zeigen, dass es eine von $U \supseteq \overline{\mathbb{D}}$ und der speziellen Wahl von $f_1, ..., f_n$ unabhängige Konstante $C = C(n, \delta)$ gibt, so dass für $j = 1, ..., n$ zusätzlich

$$\|g_j\|_{\mathbb{D}} \leq C$$

gilt. Aus dem Maximumprinzip folgt

$$\begin{aligned}\|g_j\|_{\mathbb{D}} &= \|g_j\|_{\mathbb{T}} \\ &= \left\| h_j - \sum_{k=1}^{n} f_k w_{kj} \right\|_{\mathbb{T}} \\ &\leq \|h_j\|_{\mathbb{T}} + \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_{\mathbb{T}} \|w_{jk}\|_{\mathbb{T}} \\ &\leq \frac{1}{\delta} + n \cdot \max_{k=1,\dots,n} \|w_{jk}\|_{\mathbb{T}}\end{aligned}$$

für alle $j = 1, ..., n$.
Also genügt es eine nur von n und δ abhängige Konstante $K = K(n, \delta)$ zu finden so, dass es $w_{jk} \in C^\infty(V)$ $(1 \leq j < k \leq n)$ mit

$$\bar{\partial} w_{jk} = h_j \bar{\partial} h_k - h_k \bar{\partial} h_j$$

und

$$\|w_{jk}\|_{\mathbb{T}} \leq K$$

für alle $1 \leq j < k \leq n$ gibt.

3.2 Reduktion auf ein $\bar{\partial}$-Problem mit Schranken

Seien $U \supseteq \overline{\mathbb{D}}$ offen, $\delta > 0$ und $f_1, ..., f_n \in \mathcal{O}(U)$ analytische Funktionen mit

$$\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2 \geq \delta \text{ auf } U \quad \text{und} \quad \|f_i\|_U \leq 1 \quad (i = 1, ..., n).$$

Im vorherigen Kapitel haben wir gezeigt, dass zu den Funktionen

$$h_i = \frac{\bar{f}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} |f_j|^2} \in C^\infty(U)$$

und zu jeder offenen Menge V mit $\overline{\mathbb{D}} \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ ein Tupel $(w_{jk})_{1 \leq j < k \leq n} \in C^\infty(V)^{\binom{n}{2}}$ existiert so, dass die Funktionen

$$g_j = h_j|_V - \sum_{k=1}^{n} f_k w_{kj} \quad (j = 1, ..., n)$$

analytisch auf V sind und auf $\mathbb{D}$ die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} f_i g_i = 1$$

erfüllen. Um Satz 3.0.3 anwenden und damit das Corona-Problem lösen zu können, müssen wir eine Konstante $C = C(n, \delta) > 0$ finden so, dass wir diese Funktionen $g_1, ..., g_n$ mit

$$\|g_i\|_{\mathbb{D}} \leq C$$

für $i = 1, ..., n$ wählen können.
Am Ende des letzten Abschnittes haben wir gezeigt, dass es genügt eine Konstante $K = K(n, \delta) > 0$ zu finden so, dass wir Funktionen $w_{jk} \in C^\infty(V)$ $(1 \leq j < k \leq n)$ mit $\bar{\partial} w_{jk} = h_j \bar{\partial} h_k - h_k \bar{\partial} h_j$ und $\|w_{jk}\|_{\mathbb{T}} \leq K$ für alle $1 \leq j < k \leq n$ wählen können.
Sei V eine offene Menge mit $\overline{\mathbb{D}} \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Wir betrachten im Folgenden das Infinimum

$$\inf\{\|w_{jk}\|_{\mathbb{T}}; w_{jk} \in C^\infty(V) \text{ und } \bar{\partial} w_{jk} = h_j \bar{\partial} h_k - h_k \bar{\partial} h_j\}$$

für $1 \leq j < k \leq n$. In Satz 3.2.3 werden wir dieses Infinimum geeignet umschreiben, so dass wir seinen Wert im nächsten Abschnitt nach oben gegen eine Konstante $K = K(n, \delta)$ abschätzen können. Wir stellen dazu zunächst einige technische Lemmata zur Verfügung.

Lemma 3.2.1. *Seien $R > 0$ und $f \in C^2(D_R(0))$. Für*

$$\varphi\colon (-R, R) \times \mathbb{R} \to D_R(0), (r, t) \mapsto (r\cos(t), r\sin(t))$$

gilt auf $((-R, R) \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$

$$\left(\partial_x^2 + \partial_y^2\right) f \circ \varphi = \partial_r^2 (f \circ \varphi) + \frac{1}{r^2} \partial_t^2 (f \circ \varphi) + \frac{1}{r} \partial_r (f \circ \varphi).$$

Beweis. Mit der Kettenregel folgt für $f \in C^1(D_R(0))$

$$\partial_r (f \circ \varphi) = ((\partial_x f) \circ \varphi) \cos(t) + ((\partial_y f) \circ \varphi) \sin(t)$$

und

$$\partial_t (f \circ \varphi) = ((\partial_x f) \circ \varphi)(-r\sin(t)) + ((\partial_y f) \circ \varphi)(r\cos(t)).$$

Auf $V = ((-R, R) \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\})$ folgt

$$(\partial_x f) \circ \varphi = \frac{\partial_r (f \circ \varphi) - ((\partial_y f) \circ \varphi) \sin(t)}{\cos(t)}$$

und

$$(\partial_x f) \circ \varphi = \frac{\partial_t (f \circ \varphi) - ((\partial_y f) \circ \varphi) r\cos(t)}{-r\sin(t)}.$$

Analog gilt auf V auch

$$(\partial_y f) \circ \varphi = \frac{\partial_r (f \circ \varphi) - ((\partial_x f) \circ \varphi) \cos(t)}{\sin(t)}$$

und

$$(\partial_y f) \circ \varphi = \frac{\partial_t (f \circ \varphi) - ((\partial_x f) \circ \varphi)(-r \sin(t))}{r \cos(t)}.$$

Durch Gleichsetzen der ersten beiden Gleichungen erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\cos(t)\partial_t(f \circ \varphi) - r\cos^2(t)((\partial_y f) \circ \varphi) \\
&= -r\sin(t)\partial_r(f \circ \varphi) + r\sin^2(t)((\partial_y f) \circ \varphi)
\end{aligned}$$

auf V. Aus Stetigkeitsgründen gilt dies auf ganz $(-R, R) \times \mathbb{R}$. Auf $((-R, R) \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ folgt

$$(\partial_y f) \circ \varphi = \frac{\cos(t)}{r}\partial_t(f \circ \varphi) + \sin(t)\partial_r(f \circ \varphi). \tag{3.1}$$

Analog liefern die letzten beiden Gleichungen, dass

$$(\partial_x f) \circ \varphi = \cos(t)\partial_r(f \circ \varphi) - \frac{\sin(t)}{r}\partial_t(f \circ \varphi). \tag{3.2}$$

auf $((-R, R) \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ gilt. Daraus folgt nun für $f \in C^2(D_R(0))$

$$\begin{aligned}
\left(\partial_y^2 f\right) \circ \varphi &\overset{3.1}{=} \frac{\cos(t)}{r}\partial_t\left((\partial_y f) \circ \varphi\right) + \sin(t)\partial_r((\partial_y f) \circ \varphi) \\
&\overset{3.1}{=} \frac{\cos(t)}{r}\partial_t\left(\frac{\cos(t)}{r}\partial_t(f \circ \varphi) + \sin(t)\partial_r(f \circ \varphi)\right) \\
&\quad + \sin(t)\partial_r\left(\frac{\cos(t)}{r}\partial_t(f \circ \varphi) + \sin(t)\partial_r(f \circ \varphi)\right) \\
&= -\frac{\cos(t)\sin(t)}{r^2}\partial_t(f \circ \varphi) + \frac{\cos^2(t)}{r^2}\partial_t^2(f \circ \varphi) + \frac{\cos(t)}{r}\partial_t(\sin(t)\partial_r(f \circ \varphi)) \\
&\quad + \sin^2(t)\partial_r^2(f \circ \varphi) + \sin(t)\partial_r\left(\frac{\cos(t)}{r}\partial_t(f \circ \varphi)\right) \\
&= -\frac{\cos(t)\sin(t)}{r^2}\partial_t(f \circ \varphi) + \frac{\cos^2(t)}{r^2}\partial_t^2(f \circ \varphi) + \frac{\cos(t)}{r}\left(\cos(t)\partial_r(f \circ \varphi) + \sin(t)\partial_t\partial_r(f \circ \varphi)\right) \\
&\quad + \sin^2(t)\partial_r^2(f \circ \varphi) + \sin(t)\left(-\frac{\cos(t)}{r^2}\partial_t(f \circ \varphi) + \frac{\cos(t)}{r}\partial_r\partial_t(f \circ \varphi)\right)
\end{aligned}$$

und analog

$$\left(\partial_x^2 f\right) \circ \varphi \overset{3.2}{=} \cos(t)\partial_r((\partial_x f) \circ \varphi) - \frac{\sin(t)}{r}\partial_t((\partial_x f) \circ \varphi)$$

$$\begin{aligned}
&\overset{3.2}{=} \cos(t)\partial_r\left(\cos(t)\partial_r(f\circ\varphi) - \frac{\sin(t)}{r}\partial_t(f\circ\varphi)\right)\\
&\quad - \frac{\sin(t)}{r}\partial_t\left(\cos(t)\partial_r(f\circ\varphi) - \frac{\sin(t)}{r}\partial_t(f\circ\varphi)\right)\\
&= \cos^2(t)\partial_r^2(f\circ\varphi) + \cos(t)\partial_r\left(-\frac{\sin(t)}{r}\partial_t(f\circ\varphi)\right)\\
&\quad - \frac{\sin(t)}{r}\partial_t(\cos(t)\partial_r(f\circ\varphi)) + \frac{\sin(t)\cos(t)}{r^2}\partial_t(f\circ\varphi) + \frac{\sin^2(t)}{r^2}\partial_t^2(f\circ\varphi)\\
&= \cos^2(t)\partial_r^2(f\circ\varphi) + \cos(t)\left(\frac{\sin(t)}{r^2}\partial_t(f\circ\varphi)) - \frac{\sin(t)}{r}\partial_r\partial_t(f\circ\varphi)\right)\\
&\quad - \frac{\sin(t)}{r}\left(-\sin(t)\partial_r(f\circ\varphi) + \cos(t)\partial_t\partial_r(f\circ\varphi)\right)\\
&\quad + \frac{\cos(t)\sin(t)}{r^2}\partial_t(f\circ\varphi) + \frac{\sin^2(t)}{r^2}\partial_t^2(f\circ\varphi).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\left(\partial_x^2 f + \partial_y^2 f\right)\circ\varphi &= (\cos^2(t)+\sin^2(t))\partial_r^2(f\circ\varphi) + \frac{\sin^2(t)+\cos^2(t)}{r^2}\partial_t^2(f\circ\varphi)\\
&\quad + \frac{\cos^2(t)+\sin^2(t)}{r}\partial_r(f\circ\varphi)\\
&= \partial_r^2(f\circ\varphi) + \frac{1}{r^2}\partial_t^2(f\circ\varphi) + \frac{1}{r}\partial_r(f\circ\varphi)
\end{aligned}$$

auf $((-R,R)\setminus\{0\})\times\mathbb{R}$.

□

Satz 3.2.2. *Für $U \supseteq \overline{\mathbb{D}}$ offen und $f \in C^2(U)$ gilt*

$$f(0) = \int_{\mathbb{T}} f(z)\mathrm{d}\lambda(z) - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}(\Delta f)(z)\log\left(\frac{1}{|z|}\right)\mathrm{d}z.$$

Beweis. Wegen $0 \le \log\left(\frac{1}{|z|}\right) \le \frac{1}{|z|} - 1$ für alle $z \in \overline{\mathbb{D}}\setminus\{0\}$ ist $\log\left(\frac{1}{|z|}\right)$ integrierbar auf $\overline{\mathbb{D}}$. Eine Parametrisierung in Polarkoordinaten $\varphi\colon [0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{D}, (r,t)\mapsto(r\cos(t), r\sin(t))$ und der Satz von der majorisierten Konvergenz sowie Satz 3.2.1 liefern

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}}(\Delta f)(z)\log\left(\frac{1}{|z|}\right)\mathrm{d}z &= \int_{[0,1]\times[0,2\pi]}(\Delta f)(re^{it})\log\left(\frac{1}{r}\right)r\mathrm{d}(r,t)\\
&= \lim_{R\searrow 0}\int_{[R,1]\times[0,2\pi]}(\Delta f)(re^{it})log\left(\frac{1}{r}\right)r\mathrm{d}(r,t)\\
&= \lim_{R\searrow 0}\int_{[R,1]\times[0,2\pi]}\left(\partial_r^2(f\circ\varphi) + \frac{1}{r^2}\partial_t^2(f\circ\varphi) + \frac{1}{r}\partial_r(f\circ\varphi)\right)\log\left(\frac{1}{r}\right)r\mathrm{d}(r,t)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{R\searrow 0}\Bigg[\int\limits_{[R,1]\times[0,2\pi]} \partial_r^2(f\circ\varphi)\log\left(\frac{1}{r}\right) r\mathrm{d}(r,t)\\
&\quad + \int\limits_{[R,1]\times[0,2\pi]} \frac{1}{r}\partial_t^2(f\circ\varphi)\log\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}(r,t)\\
&\quad + \int\limits_{[R,1]\times[0,2\pi]} \partial_r(f\circ\varphi)\log\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}(r,t)\Bigg].
\end{aligned}
$$

Für das erste Integral erhalten wir mit dem Satz von Fubini und partieller Integration

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{[R,1]\times[0,2\pi]} \partial_r^2(f\circ\varphi)\log\left(\frac{1}{r}\right) r\mathrm{d}(r,t)\\
&= \int\limits_{[0,2\pi]}\int\limits_{[R,1]} \partial_r^2(f\circ\varphi)\log\left(\frac{1}{r}\right) r\mathrm{d}r\mathrm{d}t\\
&= \int\limits_{[0,2\pi]}\left[\partial_r(f\circ\varphi)\log\left(\frac{1}{r}\right) r\right]_R^1\mathrm{d}t - \int\limits_{[0,2\pi]}\int\limits_{[R,1]} \partial_r(f\circ\varphi)\left(-1+\log\left(\frac{1}{r}\right)\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}t\\
&= \int\limits_{[0,2\pi]} -\partial_r(f\circ\varphi)(R,t)\log\left(\frac{1}{R}\right)R\mathrm{d}t + \int\limits_{[0,2\pi]}\int\limits_{[R,1]} \partial_r(f\circ\varphi)(1+\log(r))\mathrm{d}r\mathrm{d}t\\
&= \int\limits_{[0,2\pi]} \partial_r(f\circ\varphi)(R,t)\log(R)R\mathrm{d}t + \int\limits_{[0,2\pi]}[f\circ\varphi]_R^1\mathrm{d}t - \int\limits_{[0,2\pi]}\int\limits_{[R,1]} \partial_r(f\circ\varphi)\log\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}t\\
&= \int\limits_{[0,2\pi]} \partial_r(f\circ\varphi)(R,t)\log(R)R\mathrm{d}t + \int\limits_{[0,2\pi]}(f(e^{it})-f(Re^{it}))\mathrm{d}t - \int\limits_{[0,2\pi]}\int\limits_{[R,1]} \partial_r(f\circ\varphi)\log\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Da $\partial_r(f\circ\varphi)(R,t)\log(R)R$ für $t\in[0,2\pi]$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert für $R\searrow 0$ gilt

$$
\lim_{R\searrow 0}\int\limits_{[0,2\pi]} \partial_r(f\circ\varphi)(R,t)\log(R)R\mathrm{d}t = 0.
$$

Wegen $f(Re^{it}) \xrightarrow{R\searrow 0} f(0)$ gleichmäßig für alle $t\in[0,2\pi]$ gilt

$$
\lim_{R\searrow 0}\int_0^{2\pi} f(Re^{it})\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\lim_{R\searrow 0} f(Re^{it})\mathrm{d}t = 2\pi f(0).
$$

Damit erhalten wir für das erste Integral

$$
\begin{aligned}
&\lim_{R\searrow 0}\int\limits_{[R,1]\times[0,2\pi]} \partial_r^2(f\circ\varphi)\log\left(\frac{1}{r}\right) r\mathrm{d}(r,t)\\
&= \int_0^{2\pi} f(e^{it}) - 2\pi f(0) - \lim_{R\searrow 0}\int\limits_{[0,2\pi]}\int\limits_{[R,1]} \partial_r(f\circ\varphi)\log\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Für das zweite Integral erhalten wir mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{[R,1]\times[0,2\pi]} \frac{1}{r}\partial_t^2(f\circ\varphi)\log\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}(r,t)\\
&=\int\limits_{[R,1]}\int\limits_{[0,2\pi]} \frac{1}{r}\log\left(\frac{1}{r}\right)\partial_t^2(f\circ\varphi)\mathrm{d}t\mathrm{d}r\\
&=\int\limits_{[R,1]} \frac{1}{r}\log\left(\frac{1}{r}\right)\Big[\partial_t(f\circ\varphi)\Big]_0^{2\pi}\mathrm{d}r\\
&=\int\limits_{[R,1]} \frac{1}{r}\log\left(\frac{1}{r}\right)(\partial_t(f\circ\varphi)(2\pi)-\partial_t(f\circ\varphi)(0))\mathrm{d}r\\
&=0.
\end{aligned}$$

Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{D}}(\Delta f)(z)\log\left(\frac{1}{|z|}\right)\mathrm{d}z\\
&=\lim_{R\searrow 0}\int\limits_{[R,1]\times[0,2\pi]}\left[\partial_r^2(f\circ\varphi)+\frac{1}{r}\partial_r(f\circ\varphi)\right]\log\left(\frac{1}{r}\right)r\mathrm{d}(r,t)\\
&=\lim_{R\searrow 0}\int\limits_0^{2\pi}(f(e^{it})-f(Re^{it}))\mathrm{d}t\\
&=\int\limits_0^{2\pi} f(e^{it})\mathrm{d}t-2\pi f(0)\\
&=2\pi\int\limits_{\mathbb{T}} f(z)\mathrm{d}\lambda(z)-2\pi f(0).
\end{aligned}$$

□

Satz 3.2.3. *Seien $V\supseteq\overline{\mathbb{D}}$ offen und $u,w_0\in C^\infty(V)$ mit*

$$\bar{\partial}w_0=u.$$

Mit $P=\{p\in\mathbb{C}[z];p(0)=0$ und $\|p\|_{H^1}=1\}$ gilt

$$\begin{aligned}
I&=\inf\{\|w\|_{\mathbb{T}};w\in C^\infty(V)\ \mathit{mit}\ \bar{\partial}w=u\ \mathit{auf}\ V\}\\
&=\frac{2}{\pi}\sup_{p\in P}\left|\int\limits_{\mathbb{D}}(\partial p)u\log\left(\frac{1}{|z|}\right)dz+\int\limits_{\mathbb{D}}p(\partial u)\log\left(\frac{1}{|z|}\right)\mathrm{d}z\right|
\end{aligned}$$

Beweis. Offensichtlich gilt

$$I=\inf\{\|w_0+f\|_{\mathbb{T}};f\in\mathcal{O}(V)\}.$$

Sei nun $f \in \mathcal{O}(V)$ und $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}[z]$ mit $p_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ kompakt gleichmäßig auf einer Umgebung von $\overline{\mathbb{D}}$. Insbesondere gilt also $p_n|_{\mathbb{T}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f|_{\mathbb{T}}$ gleichmäßig und somit

$$\begin{aligned}\|w_0 + f\|_{\mathbb{T}} &= \lim_{n\to\infty} \|w_0 + p_n\|_{\mathbb{T}} \\ &\geq \inf\{\|w_0 + p\|_{\mathbb{T}}; p \in \mathbb{C}[z]\}.\end{aligned}$$

Wegen $\mathbb{C}[z] \subseteq \mathcal{O}(V)$ folgt also

$$I = \inf\{\|w_0 + p\|_{\mathbb{T}}; p \in \mathbb{C}[z]\}.$$

Mit Satz 1.1.9 gilt weiter

$$\begin{aligned}\inf\{\|w_0 + p\|_{\mathbb{T}}; p \in \mathbb{C}[z]\} &= \sup\left\{\left|\int_{\mathbb{T}} w_0 g \,\mathrm{d}\lambda\right|; g \in B_{H_0^1}\right\} \\ &= \sup\left\{\left|\int_{\mathbb{T}} w_0 g \,\mathrm{d}\lambda\right|; g \in H_0^1 \text{ mit } \|g\|_1 = 1\right\}.\end{aligned}$$

Sei nun $g \in H_0^1$ mit $\|g\|_1 = 1$. Nach Korollar 1.1.6 gibt es eine Folge $\tilde{p}_n$ aus $\mathbb{C}[z]$ mit $\tilde{p}_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$ in H^1. Nach Satz 1.1.3 gilt dann auch

$$\tilde{p}_n(0) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(0) = 0.$$

Also gilt für die durch

$$p_n = \frac{\tilde{p}_n - \tilde{p}_n(0)}{\|\tilde{p}_n - \tilde{p}_n(0)\|} \quad (n \in \mathbb{N})$$

definierte Folge in P schon $p_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$ in H^1. Mit der Isometrie $\psi\colon H^1(\mathbb{D}) \to H^1(\mathbb{T})$ aus Satz 1.1.5 und insbesondere wegen $\psi(p|_{\mathbb{D}}) = p|_{\mathbb{T}}$ für alle $p \in \mathbb{C}[z]$ folgt dann

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{T}} w_0 g \,\mathrm{d}\lambda\right| &= \left|\int_{\mathbb{T}} w_0 \left(\lim_{n\to\infty} p_n\right) \mathrm{d}\lambda\right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left|\int_{\mathbb{T}} w_0 p_n \,\mathrm{d}\lambda\right| \\ &\leq \sup\left\{\left|\int_{\mathbb{T}} w_0 p \,\mathrm{d}\lambda\right|; p \in P\right\}.\end{aligned}$$

Wegen $P \subseteq \{g \in H_0^1; \|g\|_1 = 1\}$ gilt auch

$$\sup\left\{\left|\int_{\mathbb{T}} w_0 p \,\mathrm{d}\lambda\right|; p \in P\right\} \leq \sup\left\{\left|\int_{\mathbb{T}} w_0 g \,\mathrm{d}\lambda\right|; g \in H_0^1 \text{ mit } \|g\|_1 = 1\right\}$$

und damit insgesamt

$$I = \sup\left\{\left|\int\limits_{\mathbb{T}} w_0 p \mathrm{d}\lambda\right| ; p \in P\right\}.$$

Wegen $(w_0 p)(0) = 0$ folgt mit Satz 3.2.2

$$I = \frac{1}{2\pi} \sup\left\{\left|\int\limits_{\mathbb{D}} \Delta(w_0 p) \log\left(\frac{1}{|z|}\right) \mathrm{d}z\right| ; p \in P\right\}.$$

Mit $\partial = \frac{1}{2}\left(\partial_x + \frac{1}{i}\partial_y\right)$ gilt wegen

$$\begin{aligned} 4\partial\bar{\partial}(w_0 p) &= 2\partial\left(\partial_x(w_0 p) - \frac{1}{i}\partial_y(w_0 p)\right) \\ &= \partial_x\left(\partial_x(w_0 p) - \frac{1}{i}\partial_y(w_0 p)\right) + \frac{1}{i}\partial_y\left(\partial_x(w_0 p) - \frac{1}{i}\partial_y(w_0 p)\right) \\ &= \partial_x^2(w_0 p) + \partial_y^2(w_0 p) \end{aligned}$$

schon

$$\begin{aligned} \Delta(w_0 p) &= 4\partial\bar{\partial}(w_0 p) \\ &= 4\partial\left(\left(\bar{\partial} w_0\right) p + w_0 \bar{\partial} p\right) \\ &= 4\partial(pu) \\ &= 4\left((\partial p)u + p(\partial u)\right). \end{aligned}$$

Somit folgt

$$I = \frac{2}{\pi} \sup_{p\in P}\left\{\left|\int\limits_{\mathbb{D}} (\partial p) u \log\left(\frac{1}{|z|}\right) dz + \int\limits_{\mathbb{D}} p(\partial u) \log\left(\frac{1}{|z|}\right) \mathrm{d}z\right|\right\}.$$

$\square$

Im Setting der Bemerkungen zu Beginn dieses Kapitels gilt für $u = h_j \bar{\partial} h_k - h_k \bar{\partial} h_j \in C^\infty(U)$ dann insbesondere

$$\begin{aligned} &\inf\{\|w_{jk}\|_{\mathbb{T}} ; w_{jk} \in C^\infty(V) \text{ und } \bar{\partial} w_{jk} = h_j \bar{\partial} h_k - h_k \bar{\partial} h_j \text{ auf } V\} \\ &= \frac{2}{\pi} \sup_{p\in P}\left\{\left|\int\limits_{\mathbb{D}} \partial p (h_j \bar{\partial} h_k - h_k \bar{\partial} h_j) \log\left(\frac{1}{|z|}\right) dz + \int\limits_{\mathbb{D}} p \partial (h_j \bar{\partial} h_k - h_k \bar{\partial} h_j) \log\left(\frac{1}{|z|}\right)\right|\right\} \end{aligned}$$

für $1 \leq j < k \leq n$. Zur Lösung des Corona-Problems bleibt also zu zeigen, dass es zu $n \in \mathbb{N}^*$ und $\delta > 0$ ein $K = K(n, \delta) > 0$ gibt, so dass für alle $U \supseteq \overline{\mathbb{D}}$ offen und alle $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(U)$ mit

$$\sum_{i=1}^n |f_i|^2 \geq \delta \quad \text{auf } U$$

und $\|f_i\|_U \leq 1$ für alle $i = 1, ..., n$ mit

$$h_i = \frac{\bar{f}_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} |f_j|^2}$$

für $i = 1, ..., n$ die Abschätzungen

$$\int\limits_{\mathbb{D}} \left| \partial p (h_j \bar{\partial} h_k - h_k \bar{\partial} h_j) \log\left(\frac{1}{|z|}\right) \right| \mathrm{d}z \leq K$$

und

$$\int\limits_{\mathbb{D}} \left| p \partial (h_j \bar{\partial} h_k - h_k \bar{\partial} h_j) \log\left(\frac{1}{|z|}\right) \right| \mathrm{d}z \leq K$$

für alle $p \in P$ gelten.

4 Lösung des Corona Problems

Nach Abschnitt 4.1 genügt es zur Lösung des Corona-Problems eine Konstante $K = K(n,\delta) > 0$ zu finden so, dass gilt:
Seien $U \supseteq \overline{\mathbb{D}}$ offen und $f_1, ..., f_n \in \mathcal{O}(U)$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} |f_j|^2 \geq \delta > 0 \text{ auf } U$$

und $\|f_i\|_U \leq 1$ für alle $i = 1, ..., n$ und weiter $h_1, ..., h_n \in C^\infty(U)$ definiert durch

$$h_i = \frac{\bar{f}_i}{\sum_{i=1}^{n} |f_j|^2}.$$

Dann gibt es eine offene Menge V mit $\overline{\mathbb{D}} \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ und Funktionen $w_{jk} \in C^\infty(V)$ mit

$$\bar{\partial} w_{jk} = h_j \bar{\partial} h_k - h_k \bar{\partial} h_j$$

und

$$\|w_{jk}\|_{\mathbb{T}} \leq K(n,\delta)$$

für alle $1 \leq j < k \leq n$. Nach Satz 3.2.3 wiederum genügt es dazu eine Konstante $K = K(n,\delta) > 0$ zu finden so, dass in obiger Situation mit

$$u_{jk} = h_j \bar{\partial} h_k - h_k \bar{\partial} h_j$$

für $i = 1, ..., n$ schon

$$\left| \int_{\mathbb{D}} (\partial p) u_{jk} \log\left(\frac{1}{|z|}\right) dz \right| \leq K(n,\delta)$$

und

$$\left| \int_{\mathbb{D}} p (\partial u_{jk}) \log\left(\frac{1}{|z|}\right) dz \right| \leq K(n,\delta)$$

für alle $p \in P$ und $1 \leq j < k \leq n$ gilt.
Wir berechnen nun u_{jk} und ∂u_{jk}. Mit

$$\varphi = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} |f_j|^2}$$

folgt mit der Notation $f' = \partial f$, dass

$$\begin{aligned}
u_{jk} &= h_j \bar\partial h_k - h_k \bar\partial h_j \\
&= (\varphi \bar f_j)\bar\partial(\varphi \bar f_k) - (\varphi \bar f_k)\bar\partial(\varphi \bar f_j) \\
&= \varphi \bar f_j((\bar\partial\varphi)\bar f_k + \varphi\bar\partial \bar f_k) - \varphi \bar f_k((\bar\partial\varphi)\bar f_j + \varphi\bar\partial \bar f_j) \\
&= \varphi\left(\bar f_j(\bar\partial\varphi)\bar f_k + \bar f_j\varphi\bar\partial\bar f_k - \bar f_k(\bar\partial\varphi)\bar f_j - \bar f_k\varphi\bar\partial\bar f_j\right) \\
&= \varphi^2\left(\bar f_j\bar\partial\bar f_k - \bar f_k\bar\partial\bar f_j\right) \\
&= \varphi^2\left(\bar f_j\bar f_k' - \bar f_k\bar f_j'\right)
\end{aligned}$$

gilt. Wegen

$$\begin{aligned}
\partial(\varphi) &= -\frac{1}{\left(\sum\limits_{i=1}^n f_i\overline{f_i}\right)^2}\partial\left(\sum_{i=1}^n f_i\overline{f_i}\right) \\
&= -\varphi^2\sum_{i=1}^n f_i'\overline{f_i}
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
\partial u_{jk} &= \partial(\varphi^2)(\bar f_j\bar f_k' - \bar f_k\bar f_j') \\
&= 2\varphi^3\left(\sum_{\nu=1}^n f_\nu'\bar f_\nu\right)\left(\overline{f_k f_j'} - \overline{f_j f_k'}\right).
\end{aligned}$$

Wir setzen nun $\mathrm{d}\mu = \log\left(\frac{1}{|z|}\right)\mathrm{d}z$. Wegen

$$\begin{aligned}
|u_{jk}| &= \varphi^2|\overline{f_j f_k'} - \overline{f_k f_j'}| \\
&\leq \frac{1}{\delta^2}\left(|f_k'| + |f_j'|\right)
\end{aligned}$$

gilt

$$\left|\int_{\mathbb{D}} p' u_{jk}\mathrm{d}\mu\right| \leq \frac{1}{\delta^2}\int_{\mathbb{D}}|p'|\left(|f_k'| + |f_j'|\right)\mathrm{d}\mu$$

für alle $p \in P$.
Wegen

$$\begin{aligned}
|\partial u_{jk}| &= 2\varphi^3\left|\left(\sum_{\nu=1}^n f_\nu'\bar f_\nu\right)(\bar f_j\bar f_k' - \bar f_k\bar f_j')\right| \\
&\leq \frac{2}{\delta^3}\sum_{i=1}^n|f_i'|\left(|f_k'| + |f_j'|\right)
\end{aligned}$$

gilt weiter

$$\left|\int\limits_{\mathbb{D}} p\partial u_{jk}\mathrm{d}\mu\right| \leq \frac{2}{\delta^3}\int\limits_{\mathbb{D}} |p|\sum_{i=1}^{n}|f_i'|\left(|f_k'|+|f_j'|\right)\mathrm{d}\mu.$$

Zur Lösung des Corona-Problems genügt es somit eine Konstante $C > 0$ zu finden so, dass

$$\int\limits_{\mathbb{D}} |p'f'|\mathrm{d}\mu \leq C\|p\|_1\|f\|_{\mathbb{D}} \tag{4.1}$$

und

$$\int\limits_{\mathbb{D}} |pf_1'f_2'|\mathrm{d}\mu \leq C\|p\|_1\|f_1\|_{\mathbb{D}}\|f_2\|_{\mathbb{D}} \tag{4.2}$$

für alle $p, f, f_1, f_2 \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}}) = \bigcup\limits_{U\supseteq\overline{\mathbb{D}} \text{ offen}} \mathcal{O}(U)$ gilt.
Im Folgenden werden wir zeigen, dass (4.1) und (4.2) erfüllt sind.

Lemma 4.1. *Für $g \in H^2$ gilt*

$$\int\limits_{\mathbb{D}} |g'|^2\mathrm{d}\mu \leq \frac{\pi}{2}\|g\|_2^2.$$

Beweis. Für Funktionen $p \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ gilt nach Lemma 3.2.2 und wegen $\Delta(p\bar{p}) = 4\partial\bar{\partial}(p\bar{p}) = 4|p'|^2$ schon

$$|p(0)|^2 = \int\limits_{\mathbb{T}} |p(z)|^2\mathrm{d}\lambda(z) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{D}}(\Delta p\bar{p})(z)\mathrm{d}\mu = \|p\|_2^2 - \frac{2}{\pi}\int\limits_{\mathbb{D}}|p'|^2\mathrm{d}\mu. \tag{4.3}$$

Nach Korollar 1.1.6 gibt es eine Folge $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}[z]$ mit

$$p_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} g \text{ in } H^2.$$

Dann gilt nach Satz 1.1.3 und (4.3) für alle $r \in (0,1)$

$$\int\limits_{D_r(0)} |g'|^2\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty}\int\limits_{D_r(0)} |p_k'|^2\mathrm{d}\mu \leq \frac{\pi}{2}\|g\|_2^2.$$

Der Satz von der monotonen Konvergenz liefert die Behauptung.

□

Lemma 4.2. *Für $g \in H^2$ und $f \in H^\infty$ gilt*

$$\int\limits_{\mathbb{D}} |gf'|^2\mathrm{d}\mu \leq 2\pi\|g\|_2^2\|f\|_\infty^2.$$

Beweis. Aus der Abschätzung

$$\begin{aligned}|gf'|^2 &= |(gf)' - g'f|^2 \\ &\leq 2\left(|(gf)'|^2 + |g'f|^2\right) \\ &\leq 2\left(|(gf)'|^2 + \|f\|_\infty^2 |g'|^2\right)\end{aligned}$$

folgt mit Lemma 4.1, dass

$$\int_{\mathbb{D}} |gf'|^2 \mathrm{d}\mu \leq \pi\left(\|gf\|_2^2 + \|f\|_\infty^2 \|g\|_2^2\right) \leq 2\pi \|f\|_\infty^2 \|g\|_2^2$$

gilt.

□

Lemma 4.3. *Für $g_1, g_2 \in H^2$ und $f_1, f_2 \in H^\infty$ gilt*

$$\int_{\mathbb{D}} |g_1 g_2 f_1' f_2'| \mathrm{d}\mu \leq 2\pi \|g_1\|_2 \|f_1\|_\infty \|g_2\|_2 \|f_2\|_\infty.$$

Beweis. Nach Lemma 4.2 und Cauchy-Schwarz gilt $g_i f_i' \in \mathcal{L}^2(\mu)$ für $i = 1, 2$ und

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} |g_1 g_2 f_1' f_2'| \mathrm{d}\mu &\leq \|g_1 f_1'\|_{L^2(\mu)} \|g_2 f_2'\|_{L^2(\mu)} \\ &\leq 2\pi \|g_1\|_2 \|f_1\|_\infty \|g_2\|_2 \|f_2\|_\infty.\end{aligned}$$

□

Lemma 4.4. *Für $p \in H^1$ und $f_1, f_2 \in H^\infty$ gilt*

$$\int_{\mathbb{D}} |p f_1' f_2'| \mathrm{d}\mu \leq 2\pi \|p\|_1 \|f_1\|_\infty \|f_2\|_\infty.$$

Beweis. Nach Satz 1.1.4 gibt es $g_1, g_2 \in H^2$ mit $p = g_1 g_2$ und $\|g_i\|_2 = \|p\|_1^{\frac{1}{2}}$ für $i = 1, 2$. Mit Lemma 4.3 folgt die Behauptung.

□

Lemma 4.5. *Für $g_1, g_2 \in H^2$ und $f \in H^\infty$ gilt*

$$\int_{\mathbb{D}} |g_1 g_2' f'| \mathrm{d}\mu \leq \pi \|g_1\|_2 \|g_2\|_2 \|f\|_\infty.$$

Beweis. Aus den Lemmata 4.1 und 4.2 und Cauchy-Schwarz folgt $g_2' \in \mathcal{L}^2(\mu)$, $g_1 f' \in \mathcal{L}^2(\mu)$ und

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} |g_1 g_2' f'| \mathrm{d}\mu &\leq \|g_2'\|_{L^2(\mu)} \|g_1 f'\|_{L^2(\mu)} \\ &\leq \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \|g_2\|_2\right) \left(\sqrt{2\pi} \|g_1\|_2 \|f\|_\infty\right).\end{aligned}$$

□

Lemma 4.6. *Für $p \in H^1$ und $f \in H^\infty$ gilt*

$$\int\limits_{\mathbb{D}} |p'f'| \mathrm{d}\mu \leq 2\pi \|p\|_1 \|f\|_\infty.$$

Beweis. Nach Satz 1.1.4 gibt es $g_1, g_2 \in H^2$ mit $\|g_i\|_2 = \|p\|_1^{\frac{1}{2}}$ für $i = 1, 2$ und $p = g_1 g_2$. Dann gilt nach Lemma 4.5

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{D}} |p'f'| \mathrm{d}\mu &\leq \int\limits_{\mathbb{D}} |g_1 g_2' f'| \mathrm{d}\mu + \int\limits_{\mathbb{D}} |g_1' g_2 f'| \mathrm{d}\mu \\ &\leq 2\pi \|g_1\|_2 \|g_2\|_2 \|f\|_\infty \\ &= 2\pi \|p\|_1 \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

□

Nach Lemma 4.4 und Lemma 4.6 gilt insbesondere

$$\int\limits_{\mathbb{D}} |p'f'| \mathrm{d}\mu \leq C \|p\|_1 \|f\|_{\mathbb{D}}$$

und

$$\int\limits_{\mathbb{D}} |p f_1' f_2'| \mathrm{d}\mu \leq C \|p\|_1 \|f_1\|_{\mathbb{D}} \|f_2\|_{\mathbb{D}}$$

mit $C = 2\pi$ für alle $p, f, f_1, f_2 \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}})$.
Somit haben wir das Corona Problem vollständig gelöst.

Literaturverzeichnis

[1] Carleson, L.: *Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem.* Ann. of Math. 76 (1962), 547-550.

[2] Conlon, L.: *Differentiable Manifolds.* Birkhäuser, Boston, 2008.

[3] Eschmeier, J.: *Funktionentheorie II: Hardy-Räume.* Vorlesungsskript, Universität des Saarlandes, 2011.

[4] Eschmeier, J.: *Banachräume analytischer Funktionen.* Vorlesungsskript, Universität des Saarlandes, 2012.

[5] Gamelin, T.W.: *Wolff's proof of the corona theorem.* Israel J. Math. 37 (1980),113-119.

[6] Garnett, J.: *Bounded Analytic Functions.* Springer, New York, 2007.

[7] Koosis, P.: *Introduction to H_p Spaces.* Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[8] Rudin, W.: *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill Science, Singapur, 1987.