Die Andosche Ungleichung und Interpolationsprobleme über dem Bizylinder

Diplomarbeit

angefertigt von

Simone Engstler

im Fachbereich Mathematik der Universität des Saarlandes
unter Betreuung von Prof. Dr. Jörg Eschmeier

Saarbrücken, Dezember 2002

Hiermit erkläre ich an Eides statt, daß ich die vorliegende Arbeit selbst angefertigt und nur die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Saarbrücken, den 12.Dezember 2002

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Ein wichtiger Satz der Funktionalanalysis des letzten Jahrhunderts ist der Dilatationssatz von Sz.-Nagy [**SN53**], wonach zu jeder Kontraktion auf einem Hilbertraum eine minimale unitäre bzw. isometrische Dilatation existiert. Aus diesem Satz folgt unmittelbar die Gültigkeit der von Neumannschen Ungleichung:

Sei T eine Kontraktion auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann gilt für jedes Polynom p in einer komplexen Variablen die Ungleichung

$$\|p(T)\| \leq \|p\|_{\infty,\bar{\mathbb{D}}}.$$

Nach Sz.-Nagy hat die Kontraktion T eine unitäre Dilatation U auf einem Hilbertraum $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$. Es gilt also

$$T^\alpha = P_{\mathcal{H}}\, U^\alpha{}_{|\mathcal{H}}$$

für $\alpha \in \mathbb{N}$. Damit sieht man nun leicht, daß

$$\begin{aligned} \|p(T)\| &= \|P_{\mathcal{H}}\, p(U)_{|\mathcal{H}}\| \\ &\leq \|p(U)\| \\ &= \|p\|_{\infty,\sigma(U)} \\ &\leq \|p\|_{\infty,\bar{\mathbb{D}}}. \end{aligned}$$

Nun stellt sich die Frage nach der Verallgemeinerung dieser Ergebnisse auf den mehrdimensionalen Fall. Dazu benötigt man zunächst eine Verallgemeinerung des Begriffes der Kontraktion und der zugehörigen unitären bzw. isometrischen Dilatation. In der vorliegenden Arbeit gehen wir dabei von einem Tupel von vertauschenden Kontraktionen $T \in L(\mathcal{H})^n$ aus. Die zugehörige unitäre bzw. isometrische Dilatation ist dann ein Tupel $U \in L(\mathcal{K})^n$ vertauschender unitärer bzw. isometrischer Abbildungen auf einem größeren Hilbertraum $\mathcal{K}$, so daß

$$T^\alpha = P_{\mathcal{H}}\, U^\alpha{}_{|\mathcal{H}}$$

für $\alpha \in \mathbb{N}^n$ gilt. Im Jahr 1963 zeigte Ando [**And63**] die Existenz einer minimalen unitären bzw. isometrischen Dilatation für ein Paar von vertauschenden Kontraktionen. Genauso wie auf $\mathbb{D}$ aus dem Dilatationssatz von Sz.-Nagy die von Neumannsche Ungleichung folgt, erhält man eine analoge Ungleichung für Paare von vertauschenden Kontraktionen, die als die Andosche Ungleichung bekannt ist:

Sei $T = (T_1, T_2)$ ein Paar von vertauschenden Kontraktionen in $L(\mathcal{H})^2$. Dann gilt für jedes Polynom p in zwei komplexen Variablen die Ungleichung

$$\|p(T)\| \leq \|p\|_{\infty, \bar{\mathbb{D}}^2}.$$

Jedoch zeigt ein Gegenbeispiel von Parrott [**Par70**] aus dem Jahr 1970, daß drei oder mehr vertauschende Kontraktionen im Allgemeinen keine vertauschenden unitären bzw. isometrischen Dilatationen haben. Außerdem wurde von Varopoulos [**Var74**] und Crabb-Davie [**CD75**] gezeigt, daß für $n \geq 3$ die von Neumannsche Ungleichung für ein vertauschendes Tupel von n Kontraktionen im Allgemeinen falsch ist.

Der Satz von Fejér-Riesz, wonach jedes auf dem Rand des Einheiskreises nichtnegative trigonometrische Polynom von der Form $|p(e^{i\theta})|^2$ mit einem geeigneten Polynom p ist, liefert eine zweite Möglichkeit, die von Neumannsche Ungleichung zu beweisen. Cole und Wermer haben in ihrer Arbeit aus dem Jahr 1999 [**CW99**] gezeigt, daß eine ähnliche Eigenschaft von Polynomen in zwei komplexen Variablen äquivalent zur Andoschen Ungleichung ist. Eine interessante offene Frage ist, ob es wie im eindimensionalen Fall möglich ist, diese Eigenschaft von komplexwertigen Polynomen in zwei Variablen direkt zu zeigen und somit einen alternativen Beweis der Andoschen Ungleichung zu erhalten. In [**CW99**] benutzen Cole und Wermer einen Interpolationssatz von Agler (Proposition 5.2 in [**CW99**]), um die angesprochene Eigenschaft von Polynomen in zwei komplexen Variablen herzuleiten, führen aber keinen Beweis dafür an. Das erste Ziel dieser Arbeit wird sein, einen Beweis einer geeigneten Version des Interpolationssatzes von Agler zu geben. Eine wichtige Rolle spielen in diesem Zusammenhang positiv definite Abbildungen.

Das erste Kapitel gibt dementsprechend eine Zusammenfassung der wichtigsten Sätze über operatorwertige positiv definite Abbildungen. Danach führen wir den Spezialfall der skalarwertigen positiv definiten Abbildungen noch weiter aus, der in der vorliegenden Arbeit eine zentrale Rolle spielen wird.

Im zweiten Kapitel folgt dann der oben erwähnte Interpolationssatz (Satz 2.5). Sei $f : S \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion auf einer beliebigen Teilmenge S des Bizylinders. In Satz 2.5 charakterisieren wir die Fortsetzbarkeit von f zu einer holomorphen Funktion $F : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{C}$ mit $\|F\|_{\infty,\mathbb{D}^2} \leq 1$ durch die Existenz geeigneter positiv definiter Abbildungen. Wir zeigen auch, daß das Fortsetzungsproblem genau dann lösbar ist, wenn f sich als Transferfunktion eines geeigneten unitären Matrixoperators schreiben läßt . Zum Beweis der obigen Äquivalenzen benutzen wir die Andosche Ungleichung für vertauschende Paare von Kontraktionen und modifizieren ein von Agler in einer ähnlichen Situation [**Agl90**] gegebenes lokalkonvexes Trennungsargument. Mit Hilfe einer operatorwertigen von Neumannschen Ungleichung, die wir im zweiten Teil dieses Kapitels herleiten, zeigen wir, daß eine analoge Aussage auch für operatorwertige Funktionen $f : S \to L(\mathcal{E})$, wobei $\mathcal{E}$ ein Hilbertraum ist, Gültigkeit hat (Satz 2.11). Wir zeigen an dieser Stelle ebenfalls, wie man die operatorwertige von Neumannsche Ungleichung direkt aus Satz 2.11 zurückerhält.

Schließlich benutzen wir im dritten Kapitel den oben beschriebenen Interpolationssatz (Satz 2.5), um eine geeignete Quadratsummendarstellung für Polynome in zwei komplexen Variablen (Satz 3.3) herzuleiten. Dieses Ergebnis wenden wir dann mit Hilfe eines Funktionalkalküls für holomorphe $\mathbb{C}$-wertige Funktionen auf Paare vertauschender Kontraktionen an und erhalten so die Andosche Ungleichung. Es bleibt weiterhin offen, ob es möglich ist, die in Satz 3.3 beschriebene Eigenschaft auch direkt, d.h. ohne die Andosche Ungleichung, zu zeigen, um so einen alternativen Beweis der Andoschen Ungleichung zu erhalten. Wir beenden die Arbeit mit einer Bemerkung, die zeigt, daß es genügt, die von Cole und Wermer gestellte offene Frage in einer etwas spezielleren Situation zu beantworten.

Mein herzlichster Dank gilt Herrn Prof. Dr. Jörg Eschmeier für die Themenstellung und die geduldige Betreuung, Christoph Barbian für die vielen hilfreichen Hinweise und Daniel Sonntag – nicht nur für seine Mühe beim Korrekturlesen. Ich möchte mich auch bei meinen Eltern bedanken, die mir das Studium der Mathematik erst ermöglicht und mich auch während des Studiums unterstützt haben.

Notationen

An dieser Stelle erklären wir einige Notationen und Symbole, die durchgehend in der vorliegenden Arbeit verwendet werden.

- Für zwei normierte Räume X und Y bezeichnet $L(X,Y)$ den Raum aller stetig linearen Abbildungen von X nach Y. Abkürzend wird auch $L(X)$ anstatt $L(X,X)$ verwendet. Für einen normierten Raum X sei 1_X immer die identische Abbildung von X nach X. Kern und Bild einer linearen Abbildung T werden mit $ker\ T$ und $Im\ T$ bezeichnet.

- Wir bezeichnen mit
  - $\otimes_\epsilon$ das ϵ-Tensorprodukt
  - $\otimes_2$ das Hilbertraumtensorprodukt
  - $\hat{\otimes}_\epsilon$, $\hat{\otimes}_2$ die vervollständigten Tensorprodukte.

  Abkürzend schreiben wir $H \otimes G$ für das vervollständigte Hilbertraumtensorprodukt von zwei Hilberträumen H und G, also $H \otimes G = H \hat{\otimes}_2 G$.

- In einem Hilbertraum H steht P_M immer für die Orthogonalprojektion auf einen abgeschlossenen Teilraum M von H.

- Es bezeichnet $\mathbb{D}$ die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{D}^n = \mathbb{D} \times \ldots \times \mathbb{D}$ den offenen Einheitspolyzylinder in $\mathbb{C}^n$.

- Für eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}^n$ ist $\mathcal{O}(U)$ die Menge der holomorphen Funktionen auf U. Ist X ein Banachraum, so bezeichnet $\mathcal{O}(U,X)$ die Menge der X-wertigen holomorphen Funktionen auf U.

- Wir bezeichnen mit $A(\mathbb{D}^n)$ die Diskalgebra der auf $\bar{\mathbb{D}}^n$ stetigen und auf $\mathbb{D}^n$ holomorphen Funktionen $f : \bar{\mathbb{D}}^n \to \mathbb{C}$.

- Für $U \subset \mathbb{C}^n$ ist die Menge $\tilde{U}$ definiert als
$$\tilde{U} = \{\bar{z}, z \in U\}.$$
Für eine Abbildung $f : U \to \mathbb{C}$ ist die Abbildung $\tilde{f}$ definiert als
$$\tilde{f} : \tilde{U} \to \mathbb{C},\ \ \tilde{f}(z) = \overline{f(\bar{z})}.$$
Für eine Abbildung $f : U \to L(\mathcal{E})$ ($\mathcal{E}$ ein Hilbertraum) ist die Abbildung $\tilde{f}$ definiert durch
$$\tilde{f} : U \to L(\mathcal{E}),\ \ \tilde{f}(z) = f(\bar{z})^*.$$
Somit ist f genau dann analytisch, wenn $\tilde{f}$ es ist.

- Für einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^n$ sei
$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i,$$
sowie für $z \in \mathbb{C}^n$
$$z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{\alpha_n}.$$

- Für Elemente x, y eines Hilbertraumes $\mathcal{H}$ bezeichnen wir mit $x \otimes y$ die Abbildung
$$\begin{array}{rccc} x \otimes y : & \mathcal{H} & \to & \mathcal{H} \\ & h & \mapsto & \langle h, y \rangle x. \end{array}$$

- Wir bezeichnen einen Operator $T \in L(\mathcal{H})$ als strikte Kontraktion, falls $\|T\| < 1$.

KAPITEL 1

Positiv definite Abbildungen

Im folgenden Kapitel werden zunächst der Begriff der positiven Definitheit von operatorwertigen Abbildungen auf $X \times X$ (X eine Menge) eingeführt und einige grundlegende Eigenschaften solcher Abbildungen untersucht. Danach betrachten wir den Spezialfall der skalarwertigen positiv definiten Abbildungen, da dieser in der vorliegenden Arbeit eine wichtige Rolle spielt.

1. Operatorwertige positiv definite Abbildungen

Wir führen aber zunächst noch die Begriffe des funktionalen Hilbertraumes und des zugehörigen reproduzierenden Kerns ein, da diese zum Beweis der Sätze über skalarwertige positiv definite Abbildungen benötigt werden.

Sei im Folgenden X eine Menge und $\mathcal{E}$ ein Hilbertraum.

Definition 1.1. *Ein Hilbertraum $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}^X$ heißt* funktional, *falls für jedes $z \in X$ die Punktauswertung*

$$\delta_z : \mathcal{H} \to \mathcal{E}, \ f \mapsto f(z)$$

stetig ist.

Der nächste Satz gibt eine weitere Charakterisierung funktionaler Hilberträume.

Satz 1.2. *Sei $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}^X$ ein Hilbertraum. Dann sind äquivalent:*

(a) $\mathcal{H}$ ist funktional.
(b) Es existiert eine Abbildung $K : X \times X \to L(\mathcal{E})$ mit folgenden Eigenschaften:
- *Für $x \in \mathcal{E}$ und $w \in X$ liegt die Abbildung $z \mapsto K(z,w)x$ in $\mathcal{H}$.*
- *Es ist $\langle f, K(\cdot,w)x\rangle = \langle f(w), x\rangle$ für alle $x \in \mathcal{E}$, $w \in X$ und $f \in \mathcal{H}$.*

In diesem Fall ist K eindeutig bestimmt und heißt reproduzierender Kern *von $\mathcal{H}$.*

Beweis. Es gelte (a). Für $w \in X$ sei δ_w die stetige lineare Abbildung

$$\delta_w : \mathcal{H} \to \mathcal{E}, \ f \mapsto f(w).$$

Dann definiert

$$K : X \times X \to L(\mathcal{E}),\ (z,w) \mapsto \delta_z \delta_w^*$$

eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

- Für $x \in \mathcal{E}$ und $w \in X$ ist $K(\cdot,w)x = \delta_w^* x \in \mathcal{H}$.
- Für $x \in \mathcal{E}$ und $w \in X$ ist $\langle f, K(\cdot,w)x\rangle = \langle \delta_w f, x\rangle = \langle f(w), x\rangle$.

Also ist K wie gewünscht.

Es gelte nun (b). Sei $w \in X$. Mit

$$\begin{aligned} \|K(\cdot,w)x\|^2 &= \langle K(w,w)x, x\rangle \\ &\leq \|K(w,w)\|\ \|x\|^2 \qquad (x \in \mathcal{E}) \end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned} \|\delta_w(f)\| &= \sup_{x\in\mathcal{E},\|x\|\leq 1} |\langle f(w), x\rangle| \\ &= \sup_{x\in\mathcal{E},\|x\|\leq 1} |\langle f, K(\cdot,w)x\rangle| \\ &\leq \|f\|\ \|K(w,w)\|^{\frac{1}{2}} \qquad (f \in \mathcal{H}). \end{aligned}$$

Also ist δ_w stetig mit $\|\delta_w\| \leq \|K(w,w)\|^{\frac{1}{2}}$ und $\mathcal{H}$ ist funktional.

Es bleibt die Eindeutigkeitsaussage zu zeigen: Seien also K und $\tilde{K}$ wie oben. Dann gilt für $f \in \mathcal{H}$, $w \in X$ und $x \in \mathcal{E}$

$$\langle f, K(\cdot,w)x\rangle = \langle f(w), x\rangle = \langle f, \tilde{K}(\cdot,w)x\rangle$$

und somit $K(\cdot,w)x = \tilde{K}(\cdot,w)x$ für $w \in X$ und $x \in \mathcal{E}$, also $K = \tilde{K}$. □

Wir führen nun den Begriff der positiven Definitheit operatorwertiger Abbildungen auf $X \times X$ ein. Wir werden sehen, daß die reproduzierenden Kerne funktionaler Hilberträume $\mathcal{E}$-wertiger Funktionen auf X positiv definit sind.

Definition 1.3. *Eine Abbildung $K : X \times X \to L(\mathcal{E})$ heißt positiv definit, falls*

$$\sum_{i,j=1}^{r} \langle K(z_i, z_j)x_j, x_i\rangle \geq 0$$

für alle $r \in \mathbb{N}$, $z_1, \ldots, z_r \in X$ und $x_1, \ldots, x_r \in \mathcal{E}$ gilt.

Bemerkung 1.4. *(a) Ein Operator $A = (A_{ij})_{ij} \in L(\mathcal{E}^r)$ ist genau dann positiv, wenn die Abbildung*

$$K_A : \{1, \ldots, r\} \times \{1, \ldots, r\} \to L(\mathcal{E}), \quad (i,j) \mapsto A_{ij}$$

positiv definit ist.

(b) *Offensichtlich ist dann eine Abbildung $K : X \times X \to L(\mathcal{E})$ genau dann positiv definit, wenn für alle $z_1, \dots, z_r \in X$ der Operator*

$$\begin{pmatrix} K(z_1,z_1) & \dots & K(z_1,z_r) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K(z_r,z_1) & \dots & K(z_r,z_r) \end{pmatrix} \in M(r, L(\mathcal{E})) \cong L(\mathcal{E}^r)$$

positiv ist.

(c) *Identifiziert man im Falle $\mathcal{E} = \mathbb{C}$ wie üblich $L(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$, so ist die Positivität des obigen Matrixoperators äquivalent zur positiven Semi-Definitheit der zugehörigen skalaren Matrix.*

Beweis. Von (a).

Sei $K_A : \{1, \dots, r\} \times \{1, \dots, r\} \to L(\mathcal{E}),\ (i,j) \mapsto A_{ij}$ positiv definit. Dann gilt insbesondere für $x = (x_1, \dots, x_r) \in \mathcal{E}^r$

$$\begin{aligned} 0 \le \sum_{i,j=1}^{r} \langle K_A(i,j)x_j, x_i \rangle &= \sum_{i,j=1}^{r} \langle A_{ij}x_j, x_i \rangle \\ &= \langle Ax, x \rangle \end{aligned}$$

und somit ist der Operator $A = (A_{ij})_{ij} \in L(\mathcal{E}^r)$ positiv.

Ist umgekehrt der Operator $A = (A_{ij})_{ij} \in L(\mathcal{E}^r)$ positiv, so genügt es zum Beweis der positiven Definitheit von K_A, die definierende Bedingung aus Definition 1.3 für $(z_1, \dots, z_r) = (1, \dots, r)$ nachzuprüfen. Denn sind $k_1, \dots, k_s$ aus $\{1, \dots, r\}$ beliebig, dann kann man die $k_1, \dots, k_s$ zunächst paarweise verschieden wählen. Seien dazu $k_{\alpha_1}, \dots, k_{\alpha_p}$ die paarweise verschiedenen Elemente aus $k_1, \dots, k_s$ und $x_1, \dots, x_s$ aus $\mathcal{E}$. Dann gilt

$$\sum_{i,j=1}^{s} \langle K_A(k_i,k_j)x_j, x_i \rangle = \sum_{i,j=1}^{p} \langle K_A(k_{\alpha_i},k_{\alpha_j})y_j, y_i \rangle,$$

wobei

$$y_i = \sum_{\{j;\ x_j = x_{\alpha_i}\}} x_j \quad \text{für } 1 \le i \le p.$$

Seien nun also $k_1, \dots, k_s \in \{1, \dots, r\}$ paarweise verschieden, dann gilt

$$\sum_{i,j=1}^{s} \langle K_A(k_i,k_j)x_j, x_i \rangle = \sum_{i,j=1}^{r} \langle K_A(i,j)u_j, u_i \rangle = \langle Au, u \rangle \ge 0,$$

wobei $u = (u_1, \dots, u_r) \in \mathcal{E}^r$ mit

$$u_{k_i} = x_i \quad \text{für } i \in \{1, \dots, s\} \quad \text{und} \quad u_k = 0 \quad \text{für } k \in \{1, \dots, r\} \setminus \{k_1, \dots, k_s\}.$$

$\square$

Wir zeigen nun, daß reproduzierende Kerne von funktionalen Hilberträumen positiv definit sind.

Satz 1.5. *Sei $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}^X$ ein funktionaler Hilbertraum mit reproduzierendem Kern K. Dann ist K positiv definit.*

Beweis. Seien $z_1, \ldots, z_r \in X$ und $x_1, \ldots, x_r \in \mathcal{E}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{r} \langle K(z_i, z_j)x_j, x_i\rangle &= \langle \sum_{j=1}^{r} K(\cdot, z_j)x_j, \sum_{i=1}^{r} K(\cdot, z_i)x_i\rangle \\ &= \| \sum_{i=1}^{r} K(\cdot, z_i)x_i\|^2 \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

□

Umgekehrt gehört auch zu jeder positiv definiten Abbildung $K : X \times X \to L(\mathcal{E})$ ein eindeutig bestimmter funktionaler Hilbertraum $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}^X$ mit reproduzierendem Kern K, was im skalarwertigen Fall von Aronzajn [**Aro50**] gezeigt wurde. Einen Beweis des operatorwertigen Falles findet man in [**Bar02**, Satz 1.6]

Eine weitere Charakterisierung von positiv definiten Abbildungen erhält man mit dem Satz von Kolmogorov:

Satz 1.6 (Kolmogorov). *Eine Abbildung $K : X \times X \to L(\mathcal{E})$ ist genau dann positiv definit, wenn ein Hilbertraum $\mathcal{F}$ und eine Funktion $\tau : X \to L(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ existieren, so daß*

$$K(z, w) = \tau(z)\tau(w)^*$$

für $z, w \in X$ gilt. Man kann immer erreichen, daß zusätzlich gilt

$$\mathcal{F} = \overline{LH}\big(Im(\tau(z)^*), z \in X\big).$$

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ ein Hilbertraum und $\tau : X \to L(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ eine Abbildung. Dann definiert

$$\begin{aligned} K : X \times X &\to L(\mathcal{E}) \\ (z, w) &\mapsto \tau(z)\tau(w)^* \end{aligned}$$

offensichtlich eine positiv definite Abbildung.
Sei nun $K : X \times X \to L(\mathcal{E})$ positiv definit. Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}^X$ der funktionale Hilbertraum mit reproduzierendem Kern K und $\delta_z : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ die Punktauswertung in $z \in X$. Sei dann $\tau : X \to L(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ definiert durch $\tau(z) = \delta_z$. Dann folgt die Behauptung aus dem Beweis von Satz 1.2. □

Das folgende Lemma faßt nun einige wichtige Eigenschaften von operatorwertigen positiv definiten Abbildungen zusammen, die sehr einfach aus dem Satz von Kolmogorov folgen:

Lemma 1.7. *Sei $K : X \times X \to L(\mathcal{E})$ positiv definit. Dann gilt für alle $z, w \in X$ und $x, y \in \mathcal{E}$*

(a) $K(z,w)^* = K(w,z)$
(b) $|\langle K(z,w)x, y\rangle|^2 \leq \langle K(z,z)y,y\rangle\langle K(w,w)x,x\rangle$
(c) $\|K(z,w)\|^2 \leq \|K(z,z)\| \; \|K(w,w)\|$.

Beweis. Wir wählen zu $K : X \times X \to L(\mathcal{E})$ gemäß des Satzes von Kolmogorov einen Hilbertraum $\mathcal{F}$ und eine Abbildung $\tau : X \to L(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ mit $K(z,w) = \tau(z)\tau(w)^*$. Dann gilt

(a) $K(z,w)^* = (\tau(z)\tau(w)^*)^* = \tau(w)\tau(z)^* = K(w,z)$.

(b) Es gilt für $z, w \in X$ und $x, y \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} |\langle K(z,w)x,y\rangle|^2 &= |\langle \tau(w)^*x, \tau(z)^*y\rangle|^2 \\ &\leq \|\tau(w)^*x\|^2 \; \|\tau(z)^*y\|^2 \\ &= \langle K(z,z)y,y\rangle\langle K(w,w)x,x\rangle. \end{aligned}$$

(c) Die Behauptung folgt aus Teil (b) und der Definition der Operatornorm:

$$\begin{aligned} \|K(z,w)\|^2 &= \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} |\langle K(z,w)x,y\rangle|^2 \\ &\leq \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} \langle K(z,z)y,y\rangle\langle K(w,w)x,x\rangle \\ &= \sup_{\|y\|\leq 1} \langle K(z,z)y,y\rangle \sup_{\|x\|\leq 1} \langle K(w,w)x,x\rangle \\ &= \|K(z,z)\| \; \|K(w,w)\|. \end{aligned}$$

$\square$

2. Skalarwertige positiv definite Abbildungen

Wie eingangs erwähnt, enthält das bisher Gesagte den Fall skalarwertiger positiv definiter Abbildungen als Spezialfall. Da die skalarwertigen positiv definiten Abbildungen in dieser Arbeit eine zentrale Rolle spielen, führen wir diesen Fall ein wenig weiter aus. Hier lassen sich dann die Eigenschaften aus Lemma 1.7 wie folgt formulieren:

Lemma 1.8. *Sei $K : X \times X \to \mathbb{C}$ positiv definit. Dann gilt für alle $z, w \in X$:*

(a) $K(z, z) \geq 0$
(b) $K(w, z) = \overline{K(z, w)}$
(c) $|K(z, w)|^2 \leq K(z, z)K(w, w)$

Im skalarwertigen Fall läßt sich der Satz von Kolmogorov (Satz 1.6) auch in der folgenden Form formulieren. Wir geben an dieser Stelle einen alternativen Beweis, da wir später von dieser Konstruktion noch Gebrauch machen werden.

Satz 1.9 (Kolmogorov). *(a) Eine Abbildung $K : X \times X \to \mathbb{C}$ ist genau dann positiv definit, wenn ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ und eine Abbildung $\tau : X \to \mathcal{H}$ existieren, so daß*

$$K(z, w) = \langle \tau(z), \tau(w) \rangle$$

für alle $z, w \in X$ gilt. In diesem Fall nennen wir $(\tau, \mathcal{H})$ eine Darstellung der positiv definiten Abbildung K. Man kann immer erreichen, daß zusätzlich gilt

$$\mathcal{H} = \overline{LH}(Im(\tau)).$$

(b) Seien $(\tau_1, \mathcal{H}_1)$ und $(\tau_2, \mathcal{H}_2)$ zwei beliebige Darstellungen einer positiv definiten Abbildung $K : X \times X \to \mathbb{C}$. Dann existiert eine eindeutige unitäre Abbildung

$$U : \overline{LH}(Im(\tau_1)) \to \overline{LH}(Im(\tau_2))$$

so, daß gilt:

$$\tau_2 = U \circ \tau_1.$$

Beweis. (a) Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\tau : X \to \mathcal{H}$ eine Abbildung. Dann definiert

$$\begin{aligned} K : X \times X &\to \mathbb{C} \\ (z, w) &\mapsto \langle \tau(z), \tau(w) \rangle \end{aligned}$$

offensichtlich eine positiv definite Abbildung.
Sei nun also $K : X \times X \to \mathbb{C}$ positiv definit. Auf

$$\mathcal{H}_0 = LH\{K(z,\cdot); z \in X\} \subset \{f, f : X \to \mathbb{C} \text{ Abbildung}\}$$

wird durch

$$\langle \sum_{i=1}^{n} c_i K(z_i,\cdot), \sum_{j=1}^{m} d_j K(w_j,\cdot)\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_i \bar{d}_j K(z_i, w_j)$$

ein Skalarprodukt definiert. Das ist wohldefiniert, denn gilt

$$\sum_{i=1}^{n} c_i K(z_i,\cdot) = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{c}_i K(\tilde{z}_i,\cdot) \text{ und } \sum_{j=1}^{m} d_j K(w_j,\cdot) = \sum_{j=1}^{\tilde{m}} \tilde{d}_j K(\tilde{w}_j,\cdot),$$

so erhält man mit Lemma 1.8(b) die Unabhängigkeit von der Wahl der Darstellung:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_i \bar{d}_j K(z_i, w_j) &= \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{m} \bar{d}_j K(z_i, w_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{\tilde{m}} \overline{\tilde{d}_j} K(z_i, \tilde{w}_j) \\
&= \sum_{j=1}^{\tilde{m}} \overline{\tilde{d}_j} \sum_{i=1}^{n} c_i K(z_i, \tilde{w}_j) \\
&= \sum_{j=1}^{\tilde{m}} \overline{\tilde{d}_j} \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{c}_i K(\tilde{z}_i, \tilde{w}_j) \\
&= \sum_{i=1}^{\tilde{n}}\sum_{j=1}^{\tilde{m}} \tilde{c}_i \overline{\tilde{d}_j} K(\tilde{z}_i, \tilde{w}_j).
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sesquilinear und wegen der positiven Definitheit von K positiv semidefinit. Ferner gilt für $f \in \mathcal{H}_0$ und $z \in X$

$$\langle f, K(z,\cdot)\rangle = f(z).$$

Daraus folgt insbesondere

$$\langle K(w,\cdot), K(z,\cdot)\rangle = K(w,z)$$

und mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$|f(z)|^2 \leq \langle f, f\rangle K(z,z).$$

Somit gilt $\langle f, f\rangle = 0$ genau dann, wenn f die Nullabbildung ist.
Definiert man außerdem

$$\tau : X \to \mathcal{H}_0$$

durch

$$\tau(z) = K(z, \cdot),$$

so gilt offensichtlich

$$\langle \tau(z), \tau(w) \rangle_{\mathcal{H}_0} = K(z, w).$$

Also liefert τ zusammen mit der Hilbertraum-Vervollständigung $\mathcal{H} = \tilde{\mathcal{H}}_0$ eine Darstellung von K. Außerdem gilt nach Konstruktion $\mathcal{H} = \overline{LH}(Im(\tau))$.

(b) Da $(\tau_1, \mathcal{H}_1)$ und $(\tau_2, \mathcal{H}_2)$ Darstellungen von K sind, gilt für $z_1, \ldots, z_r \in X$ und $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{C}$:

$$\| \sum_{j=1}^{r} x_j \tau_1(z_j) \|^2 = \sum_{j,k=1}^{r} x_j \bar{x}_k K(z_j, z_k) = \| \sum_{j=1}^{r} x_j \tau_2(z_j) \|^2.$$

Also definiert

$$U(\sum_{j=1}^{r} x_j \tau_1(z_j)) := \sum_{j=1}^{r} x_j \tau_2(z_j)$$

einen linearen isometrischen Operator

$$U : LH(Im(\tau_1)) \to LH(Im(\tau_2)).$$

Dieser läßt sich zu einer unitären Abbildung

$$U : \overline{LH}(Im(\tau_1)) \to \overline{LH}(Im(\tau_2))$$

mit

$$U\tau_1(z) = \tau_2(z) \quad (z \in X)$$

fortsetzen.

□

Wir definieren nun noch zwei Spezialfälle von positiv definiten Abbildungen:

Definition 1.10. *Sei $X \subseteq \mathbb{C}^n$ offen und sei $K : X \times X \to \mathbb{C}$ eine Abbildung.*

(a) Man nennt K einen positiven holomorphen Kern *auf X, falls K positiv definit ist und für alle $w \in X$ die Abbildung $K(\cdot, w) : X \to \mathbb{C}$ holomorph ist.*

(b) Man nennt K einen positiven Polynomkern*, falls K positiv definit ist und für alle $w \in X$ die Abbildung $K(\cdot, w) : X \to \mathbb{C}$ ein Polynom ist. In diesem Fall sagt man, K hat* Grad M*, falls $deg(K(\cdot, w)) \leq M$ für alle $w \in X$ und M die kleinste natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft ist.*

Bemerkung. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $X \subseteq \mathbb{C}^n$ offen und $\tau : X \to \mathcal{H}$ eine Abbildung.

(a) Ist τ holomorph, dann ist durch $\langle \tau(z), \tau(w) \rangle$ ein positiver holomorpher Kern auf X definiert.

(b) Ist τ zusätzlich noch ein Polynom vom Grad M, dann ist durch $\langle \tau(z), \tau(w) \rangle$ ein positiver Polynomkern vom Grad M definiert. Denn ist $\tau = \sum_{|\nu| \leq M} h_\nu z^\nu$ ein Polynom vom Grad M mit Koeffizienten in $\mathcal{H}$, dann existiert ein ν_0 mit $|\nu_0| = M$ so, daß $h_{\nu_0} \neq 0$ ist. Offensichtlich ist

$$\begin{aligned} \langle \tau(z), \tau(w) \rangle &= \sum_{|\nu| \leq M, |\mu| \leq M} z^\nu \bar{w}^\mu \langle h_\nu, h_\mu \rangle \\ &= \sum_{|\nu| \leq M} (\sum_{|\mu| \leq M} \bar{w}^\mu \langle h_\nu, h_\mu \rangle) z^\nu \end{aligned}$$

für jedes $w \in X$ ein Polynom vom Grad $\leq M$ in z mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$. Für $\nu = \nu_0$ ist dann $\sum_{|\mu| \leq M} \bar{w}^\mu \langle h_{\nu_0}, h_\mu \rangle \not\equiv 0$, da nach dem Identitätssatz die Nullstellenmenge dieses von Null verschiedenen Polynoms keinen inneren Punkt besitzen kann, was zeigt, daß die Nullstellenmenge nicht ganz X enthalten kann. Somit ist dann auch $\langle \tau(z), \tau(w) \rangle$ ein Polynom vom Grad M.

Der nächste Satz zeigt, daß die darstellende Abbildung τ eines holomorphen Kerns K auch holomorph ist.

Satz 1.11. *Sei $X \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, K ein positiver holomorpher Kern auf X und $(\tau, \mathcal{H})$ eine Darstellung von K. Dann ist $\tau : X \to \mathcal{H}$ holomorph.*

Beweis. Wir nehmen ohne Einschränkung der Allgemeinheit an, daß

$$\mathcal{H} = \overline{LH}(Im(\tau))$$

ist. Da K ein holomorpher Kern ist, ist nach Lemma 1.8(b) die Funktion

$$F : X \times \tilde{X} \subseteq \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}, \quad F(z, w) = K(z, \bar{w})$$

in jeder Variablen holomorph. Dann ist F nach dem Theorem von Hartogs (siehe z.B.[**Kra82**, Theorem 1.2.6]) auch auf $X \times \tilde{X}$ holomorph.
Nachdem man X, falls notwendig, verkleinert hat, kann man erreichen, daß F auf $X \times \tilde{X}$ beschränkt ist. Somit ist also K auf $X \times X$ beschränkt und es existiert eine Konstante $c > 0$, so daß gilt:

$$\|\tau(z)\|^2 = K(z, z) \leq c \qquad (z \in X).$$

Für $x \in \mathcal{H}$ sei

$$g_x : X \to \mathbb{C}, \quad g_x(z) = \langle \tau(z), x \rangle.$$

Wir betrachten nun den Unterraum

$$V = \{x \in \mathcal{H};\ g_x \text{ ist holomorph auf } X\}$$

von $\mathcal{H}$. Konvergiert $x_n \to x$ in $\mathcal{H}$, dann konvergiert $g_{x_n} \to g_x$ gleichmäßig auf X. Damit folgt dann, daß V in $\mathcal{H}$ abgeschlossen ist.
Für $x = \tau(w)$ ist $g_x(z) = \langle \tau(z), \tau(w) \rangle = K(z,w)$ holomorph auf X und somit $\tau(w) \in V$ für alle $w \in X$. Da $\mathcal{H} = \overline{LH}(Im(\tau))$, folgt $V = \mathcal{H}$ und somit ist τ schwach holomorph, also holomorph. □

Wir führen nun den Begriff des Ranges einer positiv definiten Abbildung ein.

Definition 1.12. *Sei $K : X \times X \to \mathbb{C}$ positiv definit. Für jedes $y \in X$ sei h_y definiert durch $h_y(x) = K(x,y)$ für alle $x \in X$. Sei*

$$\mathcal{L}_K = LH\{h_y; y \in X\} \subseteq \{f; f : X \to \mathbb{C} \textit{ Abbildung }\}.$$

Man definiert

$$rank(K) = dim \mathcal{L}_K.$$

Es gilt also: $0 \leq rank(K) \leq \infty$.

Der nächste Satz zeigt den Zusammenhang zwischen dem Rang einer positiv definiten Abbildung K und ihrer darstellenden Abbildung τ.

Satz 1.13. *Sei K auf X positiv definit und sei $(\tau, \mathcal{H})$ eine Darstellung von K. Dann gilt für den Rang von K*

$$rank(K) = dim(LH(Im(\tau))).$$

Beweis. Sei $\mathcal{H}_0 = LH\{K(z,\cdot); z \in X\}$ wie im Beweis von Satz 1.9(a) definiert. Da die Abbildung

$$\mathcal{L}_K \to \mathcal{H}_0, \quad f \mapsto \bar{f}$$

einen antilinearen Vektorraum-Isomorphismus definiert, gilt

$$dim \mathcal{L}_K = dim \mathcal{H}_0.$$

Damit folgt dann die Behauptung aus dem Beweis von Satz 1.9(a) und aus Satz 1.9(b). □

Satz 1.14. *Sei X eine Menge.*

(a) *Sei K auf X positiv definit mit $rank(K) = N < \infty$. Dann hat K eine Darstellung $(\tau, \mathcal{H})$ mit $dim(\mathcal{H}) = N$. Sei $\{\varphi_m\}_{m=1}^N$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ und*

$$f_m(z) = \langle \tau(z), \varphi_m \rangle \quad \text{für } z \in X,\ 1 \le m \le N.$$

Dann gilt:

(i) $\tau(z) = \sum_{m=1}^N f_m(z)\varphi_m \quad (z \in X)$

(ii) $\{f_m\}_{m=1}^N$ *ist eine Basis von* $\mathcal{L}_K$

(iii) $K(z,w) = \sum_{m=1}^N f_m(z)\overline{f_m(w)} \quad (z, w \in X)$

(b) *Sei $(f_m)_{m=1}^N$ eine Folge von Funktionen $f_m : X \to \mathbb{C}$. Definiert man K durch*

$$K(z,w) = \sum_{m=1}^N f_m(z)\overline{f_m(w)} \quad (z, w \in X),$$

dann ist K auf X positiv definit, $\mathcal{L}_K = LH\{f_m; m = 1, \dots, N\}$ und $rank(K) \le N$.

Beweis. (a) Sei $\tau : X \to \mathcal{H}$ eine Darstellung von K mit $\mathcal{H} = \overline{LH}(Im(\tau))$. Nach Satz 1.13 gilt $dim(LH(Im(\tau))) = rank(K) = N < \infty$. Also ist $\mathcal{H} = LH(Im(\tau))$ ein N-dimensionaler Vektorraum. Da $\{\varphi_m\}_{m=1}^N$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ ist, ist (i) klar.
Da $(\tau, \mathcal{H})$ eine Darstellung von K und $\{\varphi_m\}_{m=1}^N$ eine Orthonormalbasis ist, folgt aus (i):

$$\begin{aligned} K(z,w) &= \langle \tau(z), \tau(w) \rangle \\ &= \langle \sum_{m=1}^N f_m(z)\varphi_m, \sum_{n=1}^N f_n(w)\varphi_n \rangle \\ &= \sum_{m,n=1}^N f_m(z)\overline{f_n(w)}\langle \varphi_m, \varphi_n \rangle \\ &= \sum_{m=1}^N f_m(z)\overline{f_m(w)} \end{aligned}$$

für alle $z, w \in X$. Also gilt (iii).
Sei $V = LH\{f_m; m = 1, \dots, N\}$. Für $y \in X$ gilt

$$\begin{aligned} h_y(x) = K(x,y) &= \langle \tau(x), \tau(y) \rangle \\ &= \sum_{m=1}^{N} f_m(x) \langle \varphi_m, \tau(y) \rangle \end{aligned}$$

für alle $x \in X$. Also ist $h_y \in V$ für alle $y \in X$ und somit $\mathcal{L}_K \subseteq V$. Da nach Voraussetzung $dim(\mathcal{L}_K) = N$ ist, gilt $\mathcal{L}_K = V$ und $\{f_m\}_{m=1}^N$ ist eine Basis von $\mathcal{L}_K$.

(b) Sei $(f_m)_{m=1}^N$ eine Folge von Funktionen auf X und sei K definiert durch

$$K(z,w) = \sum_{m=1}^{N} f_m(z)\overline{f_m(w)} \quad (z, w \in X).$$

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum mit $dim(\mathcal{H}) = N$ und sei $\{\varphi_m\}_{m=1}^N$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$. Man definiert $\tau : X \to \mathcal{H}$ durch

$$\tau(z) = \sum_{m=1}^{N} f_m(z) \varphi_m \quad (z \in X).$$

Dann gilt für $z, w \in X$

$$\langle \tau(z), \tau(w) \rangle = \sum_{m=1}^{N} f_m(z)\overline{f_m(w)} = K(z,w).$$

Also ist K auf X positiv definit mit Darstellung $(\tau, \mathcal{H})$.
Sei $V = LH\{f_m; m = 1, \dots, N\}$ und $W = LH(Im(\tau))$. Für y aus X gilt dann:

$$h_y(x) = K(x,y) = \sum_{m=1}^{N} f_m(x)\overline{f_m(y)}.$$

Also ist $h_y \in V$ für alle $y \in X$ und somit $\mathcal{L}_K \subseteq V$.
Wir fixieren nun $m \in \{1, \dots, N\}$ und wählen $\xi \in W^\perp, c_i \in \mathbb{C}$ und $z_i \in X$, $(1 \leq i \leq r)$ so, daß

$$\varphi_m = \xi + \sum c_i \tau(z_i).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} f_m(z) &= \langle \tau(z), \varphi_m \rangle \\ &= \sum \overline{c_i} \langle \tau(z), \tau(z_i) \rangle \\ &= \sum \overline{c_i} K(z, z_i) \\ &= \sum \overline{c_i} h_{z_i}(z). \end{aligned}$$

Also ist $f_m \in LH\{h_{z_i}\} \subseteq \mathcal{L}_K$ und damit $V \subseteq \mathcal{L}_K$.

□

Satz 1.14 zeigt, daß die Darstellung von K in Teil (b) nicht eindeutig ist, außer in trivialen Fällen.

Satz 1.15. *Sei K ein positiver Polynomkern auf $\mathbb{C}^n$ vom Grad M. Dann ist $N := rank(K) < \infty$ und es existieren linear unabhängige Polynome $f_1, \dots, f_N$ auf $\mathbb{C}^n$ vom Grad $\leq M$, so daß K eine Darstellung wie in Satz 1.14(b) hat. Ist $(\tau, \mathcal{H})$ eine Darstellung von K, so ist τ ein Polynom vom Grad M. Sind umgekehrt $f_1, \dots, f_N$ Polynome auf $\mathbb{C}^n$ vom Grad $\leq M$, dann definiert die Darstellung aus Satz 1.14(b) einen positiven Polynomkern K auf $\mathbb{C}^n$ vom Grad $\leq M$ mit $rank(K) \leq N$.*

Beweis. Der Vektorraum $\mathcal{L}_K$ ist in der Menge der Polynome vom Grad $\leq M$ enthalten, also gilt

$$N = dim \mathcal{L}_K < \infty.$$

Sei $(\tau_0, \mathcal{H}_0)$ eine Darstellung von K mit $LH(Im(\tau_0)) = \mathcal{H}_0$. Nach Satz 1.13 gilt $dim \mathcal{H}_0 = N$.
Man wähle zu τ_0 Funktionen $f_1, \dots, f_N$ wie in Teil (a) von Satz 1.14. Aus Satz 1.14 folgt dann, daß $f_1, \dots, f_N$ eine Basis des Vektorraumes $\mathcal{L}_K$ bilden, insbesondere also Polynome vom Grade $\leq M$ sind. Es folgt ebenfalls, daß auch $\tau_0 : \mathbb{C}^n \to \mathcal{H}_0$ ein Polynom vom Grad $\leq M$ ist.
Sei nun $deg(\tau_0) = M' \leq M$.
Nach Definition von f_m ist dann $deg(f_m) \leq M'$ für alle $m = 1, \dots, N$. Wegen $\mathcal{L}_K = LH\{f_m; m = 1, \dots, N\}$ gilt auch $deg(h) \leq M'$ für alle $h \in \mathcal{L}_K$.
Da nach Definition des Grades von K der Vektorraum $\mathcal{L}_K$ Polynome vom Grad M enthält, gilt $M \leq M'$ und somit $M = M'$.
Sei nun $(\tau, \mathcal{H})$ eine beliebige Darstellung von K.
Dann existiert nach Satz 1.9 eine unitäre Abbildung $U : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}$, so daß $\tau = U \circ \tau_0$ und somit ist τ ebenfalls ein Polynom vom Grad M.
Die umgekehrte Richtung ist klar. □

KAPITEL 2

Interpolation auf dem Bizylinder

In diesem Kapitel beweisen wir zunächst eine geeignete skalarwertige Version von Agler's Interpolationssatz für den Bizylinder ([**CW99**, Proposition 5.2]). Dieses Ergebnis ist grundlegend für die Herleitung der eingangs erwähnten Eigenschaft von Polynomen in zwei komplexen Variablen in Kapitel 3. Im Beweis des Interpolationssatzes werden wir die Andosche Ungleichung für ein Paar von vertauschenden Kontraktionen benutzen.
Danach werden wir sehen, daß dieser Interpolationssatz auch für Funktionen mit Werten in $L(\mathcal{E})$ ($\mathcal{E}$ ein Hilbertraum) gültig bleibt. Um dies einzusehen, benötigen wir eine von Neumannsche Ungleichung für Polynome mit Koeffizienten in $L(\mathcal{E})$, für die wir im zweiten Abschnitt dieses Kapitels einen Beweis geben werden.

1. Ein skalarwertiger Interpolationssatz

Bevor wir den Interpolationssatz formulieren, zeigen wir zunächst noch einige Ergebnisse, die wir für den Beweis des Satzes benötigen.
Sei $S \subseteq \mathbb{D}^2$ und $K : S \times S \to \mathbb{C}$ positiv definit. Für $f \in H^\infty(\mathbb{D}^2)$ definiert man

$$K_f : S \times S \to \mathbb{C}, \quad (z,w) \mapsto K(z,w)(1 - f(z)\bar{f}(w)).$$

Indem man für f die Koordinatenprojektionen

$$\mathbb{D}^2 \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto z_i \qquad (i = 1,2)$$

wählt, erhält man die Abbildungen

$$K_i : S \times S \to \mathbb{C}, \quad (z,w) \mapsto K(z,w)(1 - z_i \bar{w}_i) \qquad (i = 1,2).$$

Das folgende Lemma zeigt, daß aus der positiven Definitheit der Abbildungen K_1 und K_2 die positive Definitheit der Abbildung K_f für alle Funktionen $f \in H^\infty(\mathbb{D}^2)$ mit Supremumsnorm kleiner gleich 1 auf dem Bizylinder folgt:

Lemma 2.1. *Sind K_1 und K_2 positiv definit, so ist auch K_f für jede Funktion $f \in H^\infty(\mathbb{D}^2)$ mit $\|f\|_{\infty,\mathbb{D}^2} \leq 1$ positiv definit.*

Beweis. Nach dem Satz von Kolmogorov (Satz 1.9) kann man zu K eine Funktion

$$\tau : S \to \mathcal{H} \quad (\mathcal{H} \text{ ein Hilbertraum})$$

so wählen, daß

(i) $K(z,w) = \langle \tau(z), \tau(w) \rangle \quad (z,w \in S)$
(ii) $\mathcal{H} = \overline{LH}\{\tau(z); z \in S\}$.

(1) Wir zeigen zunächst, daß für $f \in H^\infty(\mathbb{D}^2)$ die Abbildung K_f genau dann positiv definit ist, wenn eine Kontraktion $T_f : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ existiert mit

$$T_f \tau(z) = f(z)\tau(z) \quad (z \in S).$$

Um dies einzusehen, beachte man, daß

$$\begin{aligned} &\| \sum_{i=1}^r x_i \tau(z_i) \|^2 - \| \sum_{i=1}^r x_i f(z_i) \tau(z_i) \|^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^r x_i \bar{x}_j \langle \tau(z_i), \tau(z_j) \rangle - \sum_{i,j=1}^r x_i \bar{x}_j f(z_i) \overline{f(z_j)} \langle \tau(z_i), \tau(z_j) \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^r x_i \bar{x}_j \underbrace{(1 - f(z_i)\bar{f}(z_j))K(z_i,z_j)}_{=K_f(z_i,z_j)} \end{aligned}$$

für $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{C}$ und $z_1, \ldots, z_r \in S$ gilt. Ist K_f positiv definit, so ist die letzte Doppelsumme nicht negativ und man kann die Kontraktion $T_f : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ als die eindeutige stetig lineare Fortsetzung der Kontraktion

$$\begin{aligned} LH\{\tau(z); z \in S\} &\to LH\{\tau(z); z \in S\}, \\ \sum_{i=1}^r \alpha_i \tau(z_i) &\mapsto \sum_{i=1}^r \alpha_i f(z_i) \tau(z_i) \end{aligned}$$

definieren.
Existiert umgekehrt eine Kontraktion $T_f : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ mit $T_f \tau(z) = f(z)\tau(z)$ für alle $z \in S$, so ist die linke Seite obiger Gleichungskette nicht negativ für alle $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{C}$ und $z_1, \ldots, z_r \in S$ und daher K_f positiv definit.

(2) Sei $f \in H^\infty(\mathbb{D}^2)$ eine Funktion mit $\|f\|_{\infty,\mathbb{D}^2} \leq 1$. Wir zeigen, daß aus der positiven Definitheit von K_1 und K_2 die Existenz einer Kontraktion T_f mit den oben beschriebenen Eigenschaften folgt. Als Anwendung von Teil (1) erhält man dann die positive Definitheit von K_f.

Sind K_1 und K_2 positiv definit, so existieren also Kontraktionen T_1 und T_2 in $L(\mathcal{H})$ mit

$$T_i\tau(z) = z_i\tau(z) \quad (z \in S) \quad (i = 1, 2).$$

Die Operatoren T_1 und T_2 vertauschen, da für alle $z \in S$ gilt:

$$T_1T_2\tau(z) = z_2T_1\tau(z) = z_2z_1\tau(z) = z_1z_2\tau(z) = z_1T_2\tau(z) = T_2T_1\tau(z).$$

Also ist $T = (T_1, T_2)$ ein vertauschendes Paar von Kontraktionen auf $\mathcal{H}$. Nach der Andoschen Ungleichung gilt dann

$$\|p(T)\| \leq \|p\|_{\infty,\mathbb{D}^2}$$

für jedes Polynom p in zwei komplexen Variablen. Wir verwenden nun ein Lemma, das wir später auch für banachraumwertige H^∞-Funktionen auf dem Polyzylinder benötigen und es dann an dieser Stelle beweisen werden (Lemma 2.9). Danach existiert zu $f \in H^\infty(\mathbb{D}^2)$ eine Folge von Polynomen $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\|p_k\|_{\infty,\mathbb{D}^2} \leq \|f\|_{\infty,\mathbb{D}^2}$ und $\lim\limits_{k\to\infty} p_k(z) = f(z)$ für $z \in \mathbb{D}^2$. Da nach Voraussetzung $\|f\|_{\infty,\mathbb{D}^2} \leq 1$ ist, gilt auch $\|p_k(T)\| \leq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt:

$$(p_k(T))\tau(z) = p_k(z)\tau(z) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} f(z)\tau(z) \quad (z \in S).$$

Also konvergiert $(p_k(T)x)_k$ für alle $x \in LH\{\tau(z); z \in S\}$ und sogar für alle $x \in \mathcal{H}$, da $(\|p_k(T)\|)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.
Also existiert $SOT\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} p_k(T)$ und definiert eine Kontraktion $T_f \in L(\mathcal{H})$ mit $T_f\tau(z) = f(z)\tau(z)$ für alle $z \in S$. Wie in Teil (1) gezeigt, impliziert dies die positive Definitheit von K_f.

$\square$

Lemma 2.2. *Seien $z^1, \ldots, z^r \in \mathbb{D}^2$. Dann bildet die Menge $\mathcal{T}$ aller Matrizen $T \in M(r, \mathbb{C})$, für die positiv semidefinite Matrizen $A = (A_{ij})$ und $B = (B_{ij})$ existieren mit*

$$T_{ij} = (1 - z_1^i\bar{z}_1^j)A_{ij} + (1 - z_2^i\bar{z}_2^j)B_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq r),$$

einen abgeschlossenen Kegel in $M(r, \mathbb{C})$, der alle positiv semidefiniten Matrizen enthält.

Beweis. (1) Um zu zeigen, daß $\mathcal{T}$ ein Kegel ist, seien $T, S \in \mathcal{T}$ und $\mu \geq 0$. Dann existieren positiv semidefinite Matrizen $A = (A_{ij})$, $B = (B_{ij})$ und $\tilde{A} = (\tilde{A}_{ij})$, $\tilde{B} = (\tilde{B}_{ij})$ mit

$$\begin{aligned} T_{ij} &= (1 - z_1^i\bar{z}_1^j)A_{ij} + (1 - z_2^i\bar{z}_2^j)B_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq r), \\ S_{ij} &= (1 - z_1^i\bar{z}_1^j)\tilde{A}_{ij} + (1 - z_2^i\bar{z}_2^j)\tilde{B}_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq r). \end{aligned}$$

Da für $1 \leq i, j \leq r$

$$T_{ij} + \mu S_{ij} = (1 - z_1^i \bar{z}_1^j)(A_{ij} + \mu \tilde{A}_{ij}) + (1 - z_2^i \bar{z}_2^j)(B_{ij} + \mu \tilde{B}_{ij})$$

mit $A + \mu\tilde{A}$ und $B + \mu\tilde{B} \in M(r, \mathbb{C})$ positiv semidefinit gilt, ist $T + \mu S \in \mathcal{T}$. Somit ist $\mathcal{T}$ ein Kegel.

(2) Zum Beweis der Abgeschlossenheit von $\mathcal{T}$ sei $(T^{(k)})_k$ eine Folge in $\mathcal{T}$ mit $T^{(k)} \to T$ für $k \to \infty$ in $M(r, \mathbb{C})$. Da Konvergenz in $M(r, \mathbb{C})$ gleich komponentenweiser Konvergenz ist, gilt auch $T_{ij}^{(k)} \to T_{ij}$ für alle $i, j = 1, \ldots, r$. Für die $T^{(k)}$ gilt außerdem

$$T_{ij}^{(k)} = (1 - z_1^i \bar{z}_1^j) A_{ij}^{(k)} + (1 - z_2^i \bar{z}_2^j) B_{ij}^{(k)} \quad (1 \leq i, j \leq r)$$

mit geeigneten positiv semidefiniten Matrizen $A^{(k)}, B^{(k)} \in M(r, \mathbb{C})$.
Wir müssen nun zeigen, daß der Grenzwert T wieder in $\mathcal{T}$ liegt. Dazu betrachten wir die Diagonaleinträge A_{ii} für $i = 1, \ldots, r$. Es gilt

$$0 \leq (1 - |z_1^i|^2) A_{ii}^{(k)} \leq T_{ii}^{(k)}.$$

Da die Folge $(T_{ii}^{(k)})_k$ konvergent, also beschränkt ist, ist auch $(A_{ii}^{(k)})_k$ für alle $i = 1, \ldots, r$ beschränkt.
Indem man die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung auf die durch $A^{(k)}$ gegebene positiv semidefinite hermitesche Form $(x, y) \mapsto \langle A^{(k)} x, y \rangle$ anwendet, erhält man

$$\begin{aligned} |A_{ij}^{(k)}|^2 &= |\langle A^{(k)} e_j, e_i \rangle|^2 \\ &\leq \langle A^{(k)} e_j, e_j \rangle \langle A^{(k)} e_i, e_i \rangle \\ &= A_{jj}^{(k)} A_{ii}^{(k)} \\ &\leq (\max_{i=1,\ldots,r} A_{ii}^{(k)})^2. \end{aligned}$$

Also sind auch die Folgen $(A_{ij}^{(k)})_k$ $(i, j = 1, \ldots, r)$ beschränkt. Nach Übergang zu geeigneten Teilfolgen darf man daher annehmen, daß

$$\begin{aligned} A^{(k)} &\overset{k\to\infty}{\longrightarrow} A \\ B^{(k)} &\overset{k\to\infty}{\longrightarrow} B \end{aligned}$$

für geeignete positiv semidefinite Matrizen $A, B \in M(r, \mathbb{C})$.
Wegen

$$T_{ij} = (1 - z_1^i \bar{z}_1^j) A_{ij} + (1 - z_2^i \bar{z}_2^j) B_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq r)$$

ist $T \in \mathcal{T}$, und die Abgeschlossenheit von $\mathcal{T}$ ist gezeigt.

(3) Um zu zeigen, daß $\mathcal{T}$ alle positiv semidefiniten Matrizen enthält, sei die Matrix $A = (A_{ij}) \in M(r, \mathbb{C})$ positiv semidefinit. Wegen

$$A_{ij} = (1 - z_1^i \bar{z_1}^j)(1 - z_1^i \bar{z_1}^j)^{-1} A_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq r),$$

genügt es zu zeigen, daß die Matrix $((1 - z_1^i \bar{z_1}^j)^{-1} A_{ij}) \in M(r, \mathbb{C})$ positiv semidefinit ist. Da mit zwei positiv semidefiniten Matrizen auch ihr komponentenweises Produkt wieder positiv semidefinit ist (Satz von Schur, siehe z.B. [**Pau86**, 3.6]), folgt dies aus der Darstellung

$$\frac{1}{1 - z_1^i \bar{z_1}^j} = \sum_{n=0}^{\infty} (z_1^i \bar{z_1}^j)^n$$

und der positiven Semidefinitheit der Matrix $(z_1^i \bar{z_1}^j)_{i,j}$.

□

Lemma 2.3. *Seien $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ Hilberträume und seien $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}$ Familien von Vektoren $x_i \in \mathcal{H}, y_i \in \mathcal{K}$.*
Dann gibt es eine Isometrie

$$V : \overline{LH}\{x_i; i \in I\} \to \mathcal{K}$$

mit

$$V x_i = y_i$$

für alle $i \in I$ genau dann, wenn

$$\langle y_i, y_j \rangle = \langle x_i, x_j \rangle$$

für alle $i, j \in I$ gilt.

Beweis. Sei zunächst $V : \overline{LH}\{x_i; i \in I\} \to \mathcal{K}$ eine Isometrie mit $V x_i = y_i$. Dann gilt

$$\langle y_i, y_j \rangle = \langle V x_i, V x_j \rangle = \langle x_i, x_j \rangle$$

für alle $i, j \in I$.
Sei nun $\langle y_i, y_j \rangle = \langle x_i, x_j \rangle$ für alle $i, j \in I$. Dann gilt für $r \in \mathbb{N}$, $\{i_1, \ldots, i_r\} \subset I$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{C}$, $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r} \in \mathcal{H}$ und $y_{i_1}, \ldots, y_{i_r} \in \mathcal{K}$

$$\begin{aligned} \|\sum_{\nu=1}^{r} \alpha_\nu x_{i_\nu}\|^2 &= \sum_{\nu,\mu=1}^{r} \alpha_\nu \bar{\alpha}_\mu \langle x_{i_\nu}, x_{i_\mu} \rangle \\ &= \sum_{\nu,\mu=1}^{r} \alpha_\nu \bar{\alpha}_\mu \langle y_{i_\nu}, y_{i_\mu} \rangle \\ &= \|\sum_{\nu=1}^{r} \alpha_\nu y_{i_\nu}\|^2. \end{aligned}$$

Dies zeigt die Wohldefiniertheit und die Isometrie der Abbildung

$$\begin{aligned} V_0 : LH\{x_i; i \in I\} &\rightarrow \mathcal{K}, \\ V_0(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i) &= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i y_i \ . \end{aligned}$$

Definiert man nun $V : \overline{LH}\{x_i; i \in I\} \rightarrow \mathcal{K}$ als die eindeutige stetig lineare Fortsetzung der Abbildung V_0, so ist V wie gewünscht. □

Lemma 2.4. *Seien $\mathcal{H}, \mathcal{H}', \mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ Hilberträume und sei*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in L(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}, \mathcal{H}' \oplus \mathcal{K}')$$

eine Kontraktion. Dann ist für jede Kontraktion

$$X : \mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{K},$$

für die der Operator $1 - DX \in L(\mathcal{K}')$ invertierbar ist, auch der Operator

$$A + BX(1 - DX)^{-1}C \in L(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$$

eine Kontraktion. Insbesondere gilt dies für strikte Kontraktionen $X \in L(\mathcal{K}', \mathcal{K})$.

Beweis. Sei $x \in \mathcal{H}$. Dann ist $y = (1 - DX)^{-1}Cx \in \mathcal{K}'$ und wegen

$$\begin{aligned} DXy + Cx &= DX(1 - DX)^{-1}Cx + Cx \\ &= (DX(1 - DX)^{-1} + 1)Cx \\ &= (DX + (1 - DX))(1 - DX)^{-1}Cx \\ &= y \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{pmatrix} Ax + BXy \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + BXy \\ Cx + DXy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\|Ax + BXy\|^2 + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Also gilt

$$\|(A + BX(1 - DX)^{-1}C)x\| = \|Ax + BXy\| \leq \|x\|,$$

was zu zeigen war. □

Wir werden im Folgenden Lemma 2.4 auf den Spezialfall $\mathcal{H} = \mathcal{H}' = \mathbb{C}$ anwenden. In diesem Fall werden wir die Operatoren A, C identifizieren mit ihren Werten $A1 \in \mathbb{C}$ und $C1 \in \mathcal{K}'$.
Nun können wir die anfangs erwähnte Verallgemeinerung von Agler's Interpolationssatz für den Bizylinder formulieren und beweisen:

Satz 2.5. *Sei $S \subseteq \mathbb{D}^2$ und $f : S \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Äquivalent sind:*

(a) Es gibt eine Funktion $F \in H^\infty(\mathbb{D}^2)$ mit $\|F\|_{\infty,\mathbb{D}^2} \leq 1$ und $f = F|S$.
(b) Es gibt positiv definite Abbildungen $K_1, K_2 : S \times S \to \mathbb{C}$ so, daß

$$1 - f(z)\overline{f(w)} = (1 - z_1\bar{w}_1)K_1(z,w) + (1 - z_2\bar{w}_2)K_2(z,w)$$

für alle $z, w \in S$ gilt.
(c) Es gibt Hilberträume $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ und einen unitären Operator

$$U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in L(\mathbb{C} \oplus (\mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2))$$

mit

$$f(z) = A + BZ(1 - DZ)^{-1}C \quad (z \in S).$$

Hierbei sei für $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ der Operator $Z : \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2 \to \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2$ definiert durch

$$Z(x_1, x_2) = (z_1x_1, z_2x_2).$$

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b).

Wir zeigen diese Implikation zunächst für $S \subseteq \mathbb{D}^2$ endlich.

(1) Sei also $S = \{z^1, \ldots, z^r\}$ endlich mit paarweise verschiedenen Punkten $z^1, \ldots z^r \in \mathbb{D}^2$. Definiere $A \in M(r, \mathbb{C})$ als die Matrizen mit (i,j)-Eintrag

$$A_{ij} = 1 - f(z^i)\overline{f(z^j)}$$

Da eine Abbildung $K : S \times S \to \mathbb{C}$ genau dann positiv definit ist, wenn die Matrix $(K(z^i, z^j))_{ij} \in M(r, \mathbb{C})$ positiv semidefinit ist (vgl. Bemerkung 1.4), genügt es (mit den Bezeichnungen aus Lemma 2.2) zu zeigen, daß $A \in \mathcal{T}$ ist. Dazu nehmen wir an, daß A nicht in $\mathcal{T}$ liegt.
Dann folgt mit den Trennungssätzen, daß in $M(r, \mathbb{C})'$ ein u existiert, so daß

$$(Re\ u)(A) < 0 \leq (Re\ u)(T) \quad (T \in \mathcal{T}).$$

Nach dem Satz über die Spur-Dualität (siehe z.B. [**Sch97**, 4.3.9]) existiert zu $u \in M(r,\mathbb{C})'$ ein $W \in M(r,\mathbb{C})$ so, daß

$$u(T) = tr(WT)$$

für alle $T \in M(r,\mathbb{C})$ gilt.
Da $\{A\} \cup \mathcal{T} \subseteq \{T \in M(r,\mathbb{C}); T = T^*\}$, gilt

$$(Re\ u)(T) = Re(tr(WT)) = tr\left(\frac{W+W^*}{2}T\right)$$

für alle $T \in \{A\} \cup \mathcal{T}$.
Indem man W durch $\frac{W+W^*}{2}$ ersetzt, darf man annehmen, daß W selbstadjungiert ist. In diesem Fall ist W automatisch positiv semidefinit. Dazu beachte man, daß $\mathcal{T}$ nach Lemma 2.2 alle positiv semidefiniten Matrizen enthält und daß

$$\begin{aligned}
\langle Wx, x\rangle &= \sum_{i=1}^{r} \langle Wx, e_i\rangle\langle e_i, x\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{r} \langle W\langle e_i, x\rangle x, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{r} \langle W(x \otimes x)e_i, e_i\rangle \\
&= tr(W(x \otimes x))
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{C}^r$ gilt. Da $tr(WT) \geq 0$ für alle positiv semidefiniten Matrizen $T \in M(r,\mathbb{C})$, ist $\langle Wx, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{C}^r$. Also ist W und somit auch die transponierte Matrix positiv semidefinit. Wir bezeichnen mit K die positiv definite Abbildung

$$K : S \times S \to \mathbb{C}, \quad K(z^i, z^j) = W_{ji}.$$

Dann gilt für $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{C}$

$$\sum_{i,j=1}^{r} x_i \bar{x}_j \underbrace{K(z^i, z^j)(1 - z_1^i \bar{z}_1^j)}_{=K_1(z^i,z^j)} = tr(WT) \geq 0$$

mit $(T_{ij})_{ij} = ((1 - z_1^i \bar{z}_1^j)x_i\bar{x}_j)_{ij} \in \mathcal{T}$ und

$$\sum_{i,j=1}^{r} x_i \bar{x}_j \underbrace{K(z^i, z^j)(1 - z_2^i \bar{z}_2^j)}_{=K_2(z^i,z^j)} = tr(W\tilde{T}) \geq 0$$

mit $(\tilde{T}_{ij})_{ij} = ((1 - z_2^i \bar{z}_2^j)x_i\bar{x}_j)_{ij} \in \mathcal{T}$.
Also sind K_1 und K_2 (wie in Lemma 2.1) positiv definit.

Dann ist nach Lemma 2.1 die Abbildung K_F positiv definit und man erhält den Widerspruch, daß

$$tr(WA) = \sum_{i,j=1}^{r} K(z^i, z^j) A_{ij} \geq 0$$

ist. Also gilt $A \in \mathcal{T}$ und somit die Behauptung für $S \subseteq \mathbb{D}^2$ endlich.

(2) Sei nun $S \subseteq \mathbb{D}^2$ beliebig und sei $M = \{z^1, \ldots, z^r\} \subseteq S$ endlich mit paarweise verschiedenen Punkten $z^1, \ldots, z^r \in S$. Nach (1) kann man dann positiv definite Abbildungen

$$K_1^M, K_2^M : M \times M \to \mathbb{C}$$

so wählen, daß

$$1 - f(z)\overline{f(w)} = (1 - z_1 \bar{w}_1) K_1^M(z,w) + (1 - z_2 \bar{w}_2) K_2^M(z,w)$$

für alle $z, w \in M$ gilt. Man setzt K_1^M, K_2^M auf $S \times S$ fort durch

$$K_1^M(z,w) = K_2^M(z,w) = 0$$

für alle $(z,w) \in (S \times S) \setminus (M \times M)$. Für alle $z, w \in S$ gelten dann die Ungleichungen

$$|K_1^M(z,w)| \leq \frac{1}{\sqrt{1 - |z_1|^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - |w_1|^2}}$$

und

$$|K_2^M(z,w)| \leq \frac{1}{\sqrt{1 - |z_2|^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - |w_2|^2}}.$$

Dies ist trivial, falls $z \notin M$ oder $w \notin M$.
Sei also $z \in M$ und $z = w$. Dann folgt, da die Gleichung aus Teil (b) für K_1^M und K_2^M gilt:

$$\begin{aligned} 1 &\geq 1 - |f(z)|^2 \\ &= (1 - |z_1|^2) K_1^M(z,z) + (1 - |z_2|^2) K_2^M(z,z) \\ &\geq (1 - |z_1|^2) K_1^M(z,z) \end{aligned}$$

Es gilt also

$$K_1^M(z,z) \leq \frac{1}{1 - |z_1|^2}.$$

Da nach Lemma 1.8

$$|K_1^M(z,w)|^2 \leq K_1^M(z,z) K_1^M(w,w)$$

für $z, w \in M$ gilt, folgt die Ungleichung für K_1^M. Entsprechend folgt auch die Ungleichung für K_2^M .

Wir möchten nun mit Hilfe eines Kompaktheitsargumentes den Beweis der Implikation (a) $\Rightarrow$ (b) beenden. Sei dazu $\mathcal{M} = \{M; M \subseteq S \text{ endlich}\}$. $\mathcal{M}$ ist ein gerichtetes System, partiell geordnet durch "$\subseteq$". Betrachtet man K_1^M und K_2^M als Netze auf $\mathcal{M}$ mit Werten in der Menge der Funktionen auf $S \times S$, die die beiden obigen Ungleichungen erfüllen, dann ist $(K_1^M, K_2^M)_{M\in\mathcal{M}}$ ein Netz in der kompakten Menge

$$\prod_{(z,w)\in S\times S} \bar{D}_{r_1(z,w)}(0) \times \prod_{(z,w)\in S\times S} \bar{D}_{r_2(z,w)}(0)$$

mit $r_j(z,w) = \frac{1}{\sqrt{1-|z_j|^2}}\frac{1}{\sqrt{1-|w_j|^2}}$ $\quad (j = 1,2)$. Sei $(K_1^{M_i}, K_2^{M_i})_{i\in I}$ ein konvergentes Teilnetz und sei $(K_1, K_2) = \lim\limits_{i\in I}(K_1^{M_i}, K_2^{M_i})$. Die Abbildungen

$$K_j : S \times S \to \mathbb{C} \quad (j = 1,2)$$

sind positiv definit, denn für $z^1, \ldots, z^r \in S$ gibt es ein $i_0 \in I$ mit $\{z^1, \ldots, z^r\} \subset M_{i_0}$, und folglich gilt für alle $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{k,l} c_k \bar{c}_l K_j(z^k, z^l) = \lim_{i\in I} \underbrace{\sum_{k,l} c_k \bar{c}_l K_j^{M_i}(z^k, z^l)}_{\geq 0 \text{ für alle } i \geq i_0} \geq 0.$$

Ganz ähnlich sieht man, daß

$$\begin{aligned} 1 - f(z)\overline{f(w)} &= \lim_{i\in I}(1 - z_1\bar{w}_1)K_1^{M_i}(z,w) + (1 - z_2\bar{w}_2)K_2^{M_i}(z,w) \\ &= (1 - z_1\bar{w}_1)K_1(z,w) + (1 - z_2\bar{w}_2)K_2(z,w) \end{aligned}$$

für beliebige $z, w \in S$ gilt.

(b) $\Rightarrow$ (c).
Nach Satz 1.9 gibt es Funktionen $\tau_i : S \to \mathcal{H}_i$ (H_i Hilbertraum, $i = 1,2$) so, daß

(i) $K_i(z,w) = \langle \tau_i(z), \tau_i(w) \rangle \quad (z, w \in S)$
(ii) $\mathcal{H}_i = \overline{LH}\{\tau_i(z); z \in S\}$

Die Voraussetzung

$$1 - f(z)\overline{f(w)} = (1 - z_1\bar{w}_1)K_1(z,w) + (1 - z_2\bar{w}_2)K_2(z,w) \quad (z, w \in S)$$

bedeutet genau, daß für $z, w \in S$ die Identität

$$\begin{aligned} &\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \begin{pmatrix} z_1\tau_1(z) \\ z_2\tau_2(z) \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \begin{pmatrix} w_1\tau_1(w) \\ w_2\tau_2(w) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \rangle \\ = \ &\langle \begin{pmatrix} f(z) \\ \begin{pmatrix} \tau_1(z) \\ \tau_2(z) \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f(w) \\ \begin{pmatrix} \tau_1(w) \\ \tau_2(w) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \rangle \end{aligned}$$

gilt, wobei das Skalarprodukt in dem Hilbertraum $\mathbb{C} \oplus (\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)$ gebildet wird. Nach Lemma 2.3 ist diese Bedingung äquivalent dazu, daß es eine Isometrie

$$L : \overline{LH}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \begin{pmatrix} z_1\tau_1(z) \\ z_2\tau_2(z) \end{pmatrix} \end{pmatrix}; z \in S\} \to \mathbb{C} \oplus (\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)$$

gibt mit der Eigenschaft, daß

$$L \begin{pmatrix} 1 \\ \begin{pmatrix} z_1\tau_1(z) \\ z_2\tau_2(z) \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(z) \\ \begin{pmatrix} \tau_1(z) \\ \tau_2(z) \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

für alle $z \in S$ gilt. Setze L zu einer unitären Abbildung $U \in L(\mathbb{C} \oplus (\mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2))$ fort, wobei $\mathcal{K}_i \supseteq \mathcal{H}_i$ geeignete Hilberträume sind, und zerlege U entsprechend der Zerlegung des Raumes $\mathbb{C} \oplus (\mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2)$ in

$$U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Wendet man nun U auf ein Element aus $LH\{ \begin{pmatrix} 1 \\ z_1\tau_1(z) \\ z_2\tau_2(z) \end{pmatrix}; z \in S\}$ an, so erhält man mit $u(z) = (\tau_1(z), \tau_2(z))$ die Gleichungen

$$A + BZu(z) = f(z)$$

und

$$C + DZu(z) = u(z).$$

Daraus erhält man

$$u(z) = (1 - DZ)^{-1}C$$

und Einsetzen ergibt dann

$$f(z) = A + BZ(1 - DZ)^{-1}C.$$

(c) $\Rightarrow$ (a).
Offensichtlich definiert die rechte Seite der Gleichung in Teil (c) eine holomorphe Fortsetzung $F : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{C}$ von f.
Außerdem gilt nach Lemma 2.4 auch $\|F\|_{\infty,\mathbb{D}^2} \leq 1$. $\square$

Aus dem Beweis von Satz 2.5 folgt auch:

Bemerkung 2.6. *(a) In der Situation (b) von Satz 2.5 haben die Abbildungen f, K_1 und K_2 Fortsetzungen zu einer holomorphen Abbildung $F : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{C}$ bzw. zu holomorphen Kernen $\hat{K}_1, \hat{K}_2 : \mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2 \to \mathbb{C}$ so, daß*

$$1 - F(z)\overline{F(w)} = (1 - z_1\bar{w}_1)\hat{K}_1(z,w) + (1 - z_2\bar{w}_2)\hat{K}_2(z,w)$$

für $z, w \in \mathbb{D}^2$ gilt. Im Falle $S = \mathbb{D}^2$ bedeutet dies, daß die positiv definiten Abbildungen K_1, K_2 in Teil (b) von Satz 2.5 automatisch holomorph sind.

(b) Definiert man in der Situation (c) von Satz 2.5 Funktionen

$$\hat{u} : \mathbb{D}^2 \to \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2, \quad \hat{u}(z) = (1 - DZ)^{-1}C$$

und

$$\hat{\tau}_i : \mathbb{D}^2 \to \mathcal{K}_i, \quad \hat{\tau}_i(z) = \pi_i \hat{u}(z) \quad (i = 1, 2),$$

so sind

$$\hat{K}_i : \mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2 \to \mathbb{C}, \quad \hat{K}_i(z,w) = \langle \hat{\tau}_i(z), \hat{\tau}_i(w) \rangle \quad (i = 1, 2)$$

positive holomorphe Kerne mit

$$1 - f(z)\overline{f(w)} = (1 - z_1\bar{w}_1)\hat{K}_1(z,w) + (1 - z_2\bar{w}_2)\hat{K}_2(z,w)$$

für alle $z, w \in S$. Dieselbe Formel gilt auch für alle $z, w \in \mathbb{D}^2$, wenn man auf der linken Seite $f : S \to \mathbb{C}$ durch die holomorphe Fortsetzung

$$F : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{C}, \quad F(z) = A + BZ(1 - DZ)^{-1}C$$

ersetzt.

Beweis. Der Beweis der Implikationen (b) $\Rightarrow$ (c) und (c) $\Rightarrow$ (a) von Satz 2.5 zeigt, daß es genügt, den Teil (b) der Bemerkung zu zeigen.
Sei $F : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{C}$ die in Teil (b) der Bemerkung definierte holomorphe Fortsetzung von f. Dann gilt mit den Bezeichnungen aus (b) für $z \in \mathbb{D}^2$

$$A + BZ\hat{u}(z) = F(z)$$

und

$$C + DZ\hat{u}(z) = \hat{u}(z)$$

oder äquivalent

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \begin{pmatrix} z_1\hat{\tau}_1(z) \\ z_2\hat{\tau}_2(z) \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(z) \\ \begin{pmatrix} \hat{\tau}_1(z) \\ \hat{\tau}_2(z) \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

für alle $z \in \mathbb{D}^2$. Da $U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ unitär ist, folgt

$$\begin{aligned} &\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \begin{pmatrix} z_1\hat{\tau}_1(z) \\ z_2\hat{\tau}_2(z) \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \begin{pmatrix} w_1\hat{\tau}_1(w) \\ w_2\hat{\tau}_2(w) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \rangle \\ = \; &\langle \begin{pmatrix} F(z) \\ \begin{pmatrix} \hat{\tau}_1(z) \\ \hat{\tau}_2(z) \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F(w) \\ \begin{pmatrix} \hat{\tau}_1(w) \\ \hat{\tau}_2(w) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \rangle \end{aligned}$$

für alle $z, w \in \mathbb{D}^2$. Nach Definition von $\hat{K}_i$ bedeutet dies genau, daß

$$1 - F(z)\overline{F(w)} = (1 - z_1\bar{w}_1)\hat{K}_1(z, w) + (1 - z_2\bar{w}_2)\hat{K}_2(z, w)$$

für alle $z, w \in \mathbb{D}^2$ gilt. $\square$

Im ersten Teil des Beweises der Implikation (a) $\Rightarrow$ (b) von Satz 2.5 haben wir Lemma 2.1 und damit die Andosche Ungleichung für vertauschende Paare von Kontraktionen auf Hilberträumen benutzt. Da die positiv definite Abbildung $K : S \times S \to \mathbb{C}$, auf die wir Lemma 2.1 im Beweis von Satz 2.5 angewendet haben, nur auf einer endlichen Menge $S = \{z_1, \dots, z_r\}$ definiert ist, kann man den Darstellungsraum $\mathcal{H}$ von K in Lemma 2.1 als endlichdimensionalen Hilbertraum wählen (siehe Satz 1.13). In den Beweis von Satz 2.5 ist also nur die Andosche Ungleichung für vertauschende Paare von Kontraktionen auf endlichdimensionalen Hilberträumen eingegangen. Wir werden später sehen, daß umgekehrt aus der Gültigkeit von Satz 2.5 die allgemeine Andosche Ungleichung folgt.

2. Die operatorwertige von Neumannsche Ungleichung

Seien im Folgenden $\mathcal{E}$ und $\mathcal{H}$ Hilberträume. Für zwei C^*-Algebren A und B sei $\alpha_0 : A \otimes B \to \mathbb{R}$ die minimale C^*-Norm auf dem algebraischen Tensorprodukt $A \otimes B$ (vgl. [**Sak71**, Thm. 1.22.6]). Die Vervollständigung $A \hat{\otimes}_{\alpha_0} B$ ist auf kanonische Weise eine C^*-Algebra. Nach [**Sak71**, Prop. 1.22.3] gilt für einen kompakten Hausdorffraum X und eine C^*-Algebra B

$$C(X)\hat{\otimes}_{\alpha_0} B = C(X)\hat{\otimes}_\epsilon B \hat{=} C(X, B).$$

Zu zwei $*$-Homomorphismen $\pi_1 : A \to L(\mathcal{H}_1)$ und $\pi_2 : B \to L(\mathcal{H}_2)$, $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ Hilberträume, existiert nach [**Sak71**, Prop. 1.22.9] genau ein $*$-Homomorphismus $\pi_1 \otimes \pi_2 : A\hat{\otimes}_{\alpha_0} B \to L(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ mit

$$\pi_1 \otimes \pi_2(a \otimes b) = \pi_1(a) \otimes \pi_2(b) \qquad (a \in A, b \in B).$$

Daraus erhält man sofort als Anwendung:

Satz 2.7. *Sei X ein kompakter Hausdorffraum und $\Psi : C(X) \to L(\mathcal{H})$ ein $*$-Homomorphismus. Dann existiert ein eindeutiger $*$-Homomorphismus*

$$\Psi^{\mathcal{E}} : C(X, L(\mathcal{E})) = C(X)\hat{\otimes}_\epsilon L(\mathcal{E}) \to L(\mathcal{H} \otimes \mathcal{E})$$

mit $\Psi^{\mathcal{E}}(f \otimes A) = \Psi(f) \otimes A$ für alle $f \in C(X)$ und $A \in L(\mathcal{E})$.

Zu $T = (T_1, T_2) \in L(\mathcal{H})^2$ vertauschend existiert nach [**And63**] eine vertauschende unitäre Dilatation $U = (U_1, U_2) \in L(\mathcal{K})^2$, $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$, mit

$$T^\alpha = P_{\mathcal{H}} U^\alpha{}_{|\mathcal{H}} \qquad (\alpha \in \mathbb{N}^2).$$

Wendet man Satz 2.7 auf den $C(\mathbb{T}^2)$-Funktionalkalkül

$$\Psi_U : C(\mathbb{T}^2) \to L(\mathcal{K}), \quad f \mapsto \Psi_U(f)$$

von U an, so erhält man einen eindeutigen $*$-Homomorphismus

$$\Psi_U^{\mathcal{E}} : C(\mathbb{T}^2, L(\mathcal{E})) = C(\mathbb{T}^2)\hat{\otimes}_\epsilon L(\mathcal{E}) \to L(\mathcal{K} \otimes \mathcal{E})$$

mit

$$\Psi_U^{\mathcal{E}}(f \otimes A) = \Psi_U(f) \otimes A \qquad (f \in C(\mathbb{T}^2), A \in L(\mathcal{E})).$$

Sei nun $p(z) = \sum_{|\alpha| \leq r} z^\alpha A_\alpha \in L(\mathcal{E})[z]$ ein Polynom in zwei komplexen Variablen mit Koeffizienten in $L(\mathcal{E})$. Dann definiert man für $T \in L(\mathcal{H})^2$ wie oben

$$p(T) = \sum_{|\alpha| \leq r} T^\alpha \otimes A_\alpha \in L(\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}),$$

und es folgt

$$\begin{aligned} p(T) &= \sum_{|\alpha|\leq r} T^\alpha \otimes A_\alpha \\ &= \sum_{|\alpha|\leq r} P_{\mathcal{H}} U^\alpha{}_{|\mathcal{H}} \otimes A_\alpha \\ &= \sum_{|\alpha|\leq r} (P_{\mathcal{H}} \otimes 1_{\mathcal{E}})(U^\alpha \otimes A_\alpha)_{|(\mathcal{H}\otimes\mathcal{E})} \\ &= \sum_{|\alpha|\leq r} P_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{E}}(U^\alpha \otimes A_\alpha)_{|(\mathcal{H}\otimes\mathcal{E})} \\ &= P_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{E}}\ p(U)_{|(\mathcal{H}\otimes\mathcal{E})} \\ &= P_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{E}}\ \Psi_U^{\mathcal{E}}(p)_{|(\mathcal{H}\otimes\mathcal{E})}. \end{aligned}$$

Da $*$-Homomorphismen kontraktiv sind, erhält man als Korollar eine operatorwertige von Neumannsche Ungleichung für zwei vertauschende Kontraktionen:

Korollar 2.8. *Sei $T = (T_1, T_2) \in L(\mathcal{H})^2$ ein vertauschendes Paar von Kontraktionen. Dann gilt für jedes Polynom $p \in L(\mathcal{E})[z]$ in zwei komplexen Variablen mit Koeffizienten in $L(\mathcal{E})$ die Ungleichung*

$$\|p(T)\| \leq \|p\|_{\infty,\mathbb{D}^2}.$$

Beweis. Sei wie oben $U = (U_1, U_2) \in L(\mathcal{K})^2$ eine unitäre Dilatation zu T und $p \in L(\mathcal{E})[z]$ ein Polynom. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|p(T)\| &= \|P_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{E}}\ p(U)_{|(\mathcal{H}\otimes\mathcal{E})}\| \\ &\leq \|p(U)\| \\ &= \|\Psi_U^{\mathcal{E}}(p)\| \\ &\leq \|p\|_{\infty,\mathbb{T}^2} \\ &= \|p\|_{\infty,\mathbb{D}^2}. \end{aligned}$$

□

Unter geeigneten Bedingungen kann man Polynome $p \in L(\mathcal{E})[z]$ durch holomorphe Funktionen $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}^2, L(\mathcal{E}))$ ersetzen. Dazu sei $T \in L(\mathcal{H})^2$ ein vertauschendes Paar von Operatoren mit Taylorspektrum $\sigma(T) \subset \mathbb{D}^2$ und die Abbildung $\mathcal{O}(\mathbb{D}^2) \to L(\mathcal{H}), f \mapsto f(T)$ bezeichne den analytischen Funktionalkalkül von T. Dann existiert eine eindeutige stetig lineare Abbildung

$$\Phi_T^{\mathcal{E}} : \mathcal{O}(\mathbb{D}^2, L(\mathcal{E})) = \mathcal{O}(\mathbb{D}^2)\ \tilde{\otimes}\ L(\mathcal{E}) \to L(\mathcal{H} \otimes \mathcal{E})$$

mit

$$\Phi_T^{\mathcal{E}}(f \otimes A) = f(T) \otimes A \qquad (f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}^2), A \in L(\mathcal{E})).$$

Dann erhält man eine Verallgemeinerung von Korollar 2.8 mit

Lemma 2.9. *Sei X ein Banachraum und $f \in H^\infty(\mathbb{D}^n, X)$. Dann existiert eine Folge $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von X-wertigen Polynomen p_k mit $\|p_k\|_{\infty,\mathbb{D}^n} \leq \|f\|_{\infty,\mathbb{D}^n}$, so daß $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{D}^n$ kompakt gleichmäßig gegen f konvergiert.*

Beweis. Sei ohne Einschränkung $\|f\|_{\infty,\mathbb{D}^n} = 1$. Sei $(r_k)_{k=1}^\infty$ eine Folge in $(0,1)$ mit $r_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Dann konvergiert die Folge $(f_{r_k})_{k=1}^\infty$, wobei $f_{r_k}(z) = f(r_k z)$ für $z \in \mathbb{D}^n$, auf $\mathbb{D}^n$ kompakt gleichmäßig gegen f. Außerdem gilt für die Norm

$$\|f_{r_k}\|_{\infty,\mathbb{D}^n} \leq \|f\|_{\infty,\mathbb{D}^n} \leq 1.$$

Da die Funktion f_{r_k} für alle $k \in \mathbb{N}$ auf einer Umgebung von $\mathbb{D}^n$ eine holomorphe Fortsetzung hat, kann man zu f_{r_k} ein X-wertiges Polynom q_k so wählen, daß

$$\|f_{r_k} - q_k\|_{\infty,\mathbb{D}^n} \leq \frac{1}{k}.$$

Die Folge $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Polynomen konvergiert auf $\mathbb{D}^n$ kompakt gleichmäßig gegen f, denn es gilt für $K \subset \mathbb{D}^n$ kompakt

$$\|f - q_k\|_{\infty,K} \leq \|f - f_{r_k}\|_{\infty,K} + \|f_{r_k} - q_k\|_{\infty,K} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Außerdem gilt $\|q_k\|_{\infty,\mathbb{D}^n} \leq 1+\frac{1}{k}$. Wir setzen $p_k = \frac{k}{k+1}\, q_k$. Dann ist $\|p_k\|_{\infty,\mathbb{D}^n} \leq 1$ und

$$\|q_k - p_k\|_{\infty,\mathbb{D}^n} = \frac{1}{1+k}\|q_k\|_{\infty,\mathbb{D}^n} \leq \frac{1}{k}.$$

Die Folge $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf $\mathbb{D}^n$ ebenfalls kompakt gleichmäßig gegen f, denn es gilt für $K \subset \mathbb{D}^n$ kompakt

$$\|f - p_k\|_{\infty,K} \leq \|f - q_k\|_{\infty,K} + \|q_k - p_k\|_{\infty,K} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Also ist $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von X-wertigen Polynomen mit den gewünschten Eigenschaften. □

Satz 2.10. *Sei $T \in L(\mathcal{H})^2$ ein vertauschendes Paar von Kontraktionen mit Taylorspektrum $\sigma(T) \subset \mathbb{D}^2$. Dann gilt für jedes $f \in H^\infty(\mathbb{D}^2, L(\mathcal{E}))$ die Ungleichung*

$$\|\Phi_T^{\mathcal{E}}(f)\| \leq \|f\|_{\infty,\mathbb{D}^2}.$$

Beweis. Zu $f \in H^\infty(\mathbb{D}^2, L(\mathcal{E}))$ existiert nach Lemma 2.9 eine Folge von Polynomen $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $L(\mathcal{E})[z]$ mit $\|p_k\|_{\infty,\mathbb{D}^2} \leq \|f\|_{\infty,\mathbb{D}^2}$, so daß $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{D}^2$ kompakt gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann folgt mit Korollar 2.8

$$\begin{aligned} \|\Phi_T^{\mathcal{E}}(f)\| &= \lim_{k\to\infty} \|\Phi_T^{\mathcal{E}}(p_k)\| \\ &\leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \|p_k\|_{\infty,\mathbb{D}^2} \\ &\leq \|f\|_{\infty,\mathbb{D}^2}. \end{aligned}$$

□

In der Situation von Satz 2.10 benutzen wir im Folgenden die Notation

$$f(T) := \Phi_T^{\mathcal{E}}(f)$$

für $f \in H^\infty(\mathbb{D}^2, L(\mathcal{E}))$.

3. Die operatorwertige Version des Interpolationssatzes

Mit Hilfe der operatorwertigen von Neumannschen Ungleichung können wir nun auch eine operatorwertige Version von Satz 2.5 beweisen. Sei dazu $\mathcal{E}$ ein Hilbertraum.

Satz 2.11. *Sei $S \subseteq \mathbb{D}^2$ und $f : S \to L(\mathcal{E})$ eine Funktion. Äquivalent sind:*

(a) Es gibt eine Funktion $F \in H^\infty(\mathbb{D}^2, L(\mathcal{E}))$ mit $\|F\|_{\infty,\mathbb{D}^2} \leq 1$ und $f = F|S$.

(b) Es gibt positiv definite Abbildungen $K_1, K_2 : S \times S \to L(\mathcal{E})$ so, daß

$$1 - f(z)f(w)^* = (1 - z_1\bar{w}_1)K_1(z, w) + (1 - z_2\bar{w}_2)K_2(z, w)$$

für alle $z, w \in S$ gilt.

(c) Es gibt Hilberträume $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ und einen unitären Operator

$$U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in L(\mathcal{E} \oplus (\mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2))$$

mit

$$f(z) = A + BZ(1 - DZ)^{-1}C \quad (z \in S).$$

Hierbei sei für $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ der Operator $Z : \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2 \to \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2$ definiert durch

$$Z(x_1, x_2) = (z_1x_1, z_2x_2).$$

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b).
Seien f und F wie in Bedingung (a) beschrieben.
Wir wählen eine Orthonormalbasis $(e_i)_{i\in I}$ von $\mathcal{E}$. Für eine endliche Teilmenge $J \subset I$ sei

$$\mathcal{E}_J = LH\{e_i; i \in J\}$$

und P_J die Orthogonalprojektion von $\mathcal{E}$ auf $\mathcal{E}_J$. Die Menge $\mathcal{J}$ aller endlichen Teilmengen von I ist durch die Mengeninklusion gerichtet, $(P_J)_{J\in\mathcal{J}}$ ist dann ein Netz, welches in der starken Operatortopologie gegen $1_{\mathcal{E}}$ konvergiert.

(1) Sei nun also $J \subset I$ endlich und sei zunächst $S = \{z^1, \dots, z^r\}$ endlich mit paarweise verschiedenen Punkten $z^1, \dots, z^r \in \mathbb{D}^2$. Es sei V der Vektorraum aller Abbildungen von $S \times \tilde{S}$ nach $L(\mathcal{E}_J)$, versehen mit der Supremumsnorm. Dann ist V endlichdimensional, da S endlich und auch $L(\mathcal{E}_J)$ endlichdimensional ist. Ferner sei

$$\begin{aligned}\mathcal{C} = \{g \in V; &\text{es existieren } K_1, K_2 : S \times S \to L(\mathcal{E}_J) \text{ positiv definit mit}\\ &g(z,\bar{w}) = (1 - z_1\bar{w}_1)K_1(z,w) + (1 - z_2\bar{w}_2)K_2(z,w)\\ &\qquad\qquad \text{für alle } z, w \in S\}.\end{aligned}$$

Offensichtlich ist $\mathcal{C}$ ein konvexer Kegel in V.
Wir wollen im ersten Teil des Beweises zeigen, daß die Funktion

$$h : S \times \tilde{S} \to L(\mathcal{E}_J),\ (z,w) \mapsto P_J(1 - f(z)f(\bar{w})^*)_{|\mathcal{E}_J}$$

zu $\mathcal{C}$ gehört. Dazu zeigen wir zunächst, daß $\mathcal{C}$ abgeschlossen und spitz ist. Zum Beweis der Spitzheit sei $g \in \mathcal{C}$, so daß auch $-g$ in $\mathcal{C}$ liegt. Also gilt:

$$\begin{aligned} g(z,\bar{w}) &= (1 - z_1\bar{w}_1)K_1(z,w) + (1 - z_2\bar{w}_2)K_2(z,w)\\ -g(z,\bar{w}) &= (1 - z_1\bar{w}_1)\tilde{K}_1(z,w) + (1 - z_2\bar{w}_2)\tilde{K}_2(z,w)\end{aligned}$$

mit $K_1, K_2, \tilde{K}_1, \tilde{K}_2 : S \times S \to L(\mathcal{E}_J)$ positiv definit. Für $z \in S$ gilt dann

$$\begin{aligned} 0 &= g(z,\bar{z}) - g(z,\bar{z})\\ &= (1 - |z_1|^2)(K_1(z,z) + \tilde{K}_1(z,z)) + (1 - |z_2|^2)(K_2(z,z) + \tilde{K}_2(z,z))\end{aligned}$$

Ist die Summe zweier positiver Operatoren $A, B \in L(\mathcal{E})$ gleich 0, so müssen die beiden Operatoren schon 0 gewesen sein:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (A+B)x, x\rangle\\ &= \langle Ax, x\rangle + \langle Bx, x\rangle \qquad (x \in \mathcal{E}),\end{aligned}$$

also $\langle Ax, x\rangle = 0 = \langle Bx, x\rangle$ für alle $x \in \mathcal{E}$ und damit $A = B = 0$. Somit gilt in obiger Gleichung

$$K_1(z,z) = \tilde{K}_1(z,z) = K_2(z,z) = \tilde{K}_2(z,z) = 0$$

für alle $z \in S$. Mit Lemma 1.7 folgt dann für $z, w \in S$ und $x, y \in \mathcal{E}_J$

$$\|K_1(z,w)\|^2 \leq \|K_1(z,z)\| \; \|K_1(w,w)\| = 0.$$

Also ist $K_1 = 0$. Analog zeigt man, daß auch $K_2 = 0$ ist und somit ist $g = 0$. Zum Beweis der Abgeschlossenheit sei $(g^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{C}$ mit Grenzwert g in V. Für die $g^{(n)}$ gilt

$$g^{(n)}(z,\bar{w}) = (1 - z_1\bar{w}_1)K_1^{(n)}(z,w) + (1 - z_2\bar{w}_2)K_2^{(n)}(z,w) \quad (z, w \in S)$$

mit geeigneten positiv definiten Abbildungen $K_1^{(n)}$ und $K_2^{(n)}$. Sei nun $z \in S$ fest. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$(1 - |z_i|^2)K_i^{(n)}(z,z) \leq g^{(n)}(z,\bar{z}) \quad (i = 1,2)$$

und somit auch

$$(1 - |z_i|^2)\|K_i^{(n)}(z,z)\| \leq \|g^{(n)}(z,\bar{z})\| \quad (i = 1,2).$$

Da die Folge $(g^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und damit normbeschränkt ist, ist die Folge $(\|K_i^{(n)}(z,z)\|)_{n\in\mathbb{N}}$ $(i = 1,2)$ für alle $z \in S$ beschränkt. Dann ist auch die Folge $(\|K_i^{(n)}(z,w)\|)_{n\in\mathbb{N}}$ $(i = 1,2)$ für alle $z, w \in S$ beschränkt, denn es gilt nach Lemma 1.7

$$\|K_i^{(n)}(z,w)\|^2 \leq \|K_i^{(n)}(z,z)\| \; \|K_i^{(n)}(w,w)\| \quad (n \in \mathbb{N}, i = 1,2).$$

Da $L(\mathcal{E}_J)$ endlichdimensional ist, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Grenzwerte $K_i(z,w) = lim_{n\to\infty}K_i^{(n)}(z,w)$ in $L(\mathcal{E}_J)$ für alle $z, w \in S$ und $i = 1, 2$ existieren. Die Grenzwert-Abbildungen $K_i : S \times S \to L(\mathcal{E}_J)$ $(i = 1,2)$ sind wieder positiv definit und es gilt

$$g(z,\bar{w}) = (1 - z_1\bar{w}_1)K_1(z,w) + (1 - z_2\bar{w}_2)K_2(z,w)$$

für $z, w \in S$. Damit ist die Abgeschlossenheit von $\mathcal{C}$ gezeigt.
Wir zeigen jetzt mit einem Trennungsargument, daß h zu $\mathcal{C}$ gehört. Dazu zeigen wir, daß für alle $l \in V'$ (stetiger Dualraum), die $Re\ l(g) > 0$ für $g \in \mathcal{C}\setminus\{0\}$ erfüllen, schon $Re\ l(h) \geq 0$ folgt. Denn da V endlichdimensional ist, existiert nach [**Kle55**, Theorem 2.7], falls $h \notin \mathcal{C}$, eine stetige Linearform l auf V mit $Re\, l(g) > 0$ für $g \in \mathcal{C}\setminus\{0\}$ und $Re\, l(h) < 0$. Sei also im Folgenden $l \in V'$ wie oben beschrieben.
Zu $g \in V$ definieren wir

$$g^* : S \times \tilde{S} \to L(\mathcal{E}_J),\ (z,w) \mapsto g(\bar{w},\bar{z})^*,$$

also gilt $g^* \in V$ und $(g^*)^* = g$. Ferner sei

$$L : V \to \mathbb{C},\ g \mapsto \frac{1}{2}(l(g) + \overline{l(g^*)}),$$

also $L \in V'$. Für $g \in V$ mit $g = g^*$ ist offenbar $L(g) = Re\ l(g)$. Also gilt $L(g) = Re\ l(g)$ für alle $g \in \mathcal{C}$, da diese $g = g^*$ erfüllen:

$$\begin{aligned} g^*(z, \bar{w}) &= g(w, \bar{z})^* \\ &= ((1 - w_1\bar{z}_1)K_1(w, z))^* + ((1 - w_2\bar{z}_2)K_2(w, z))^* \\ &= (1 - z_1\bar{w}_1)K_1(z, w) + (1 - z_2\bar{w}_2)K_2(z, w) \\ &= g(z, \bar{w}) \qquad (z, w \in S). \end{aligned}$$

Weiter sei H der Vektorraum aller Abbildungen von $\tilde{S}$ nach $L(\mathcal{E}_J, \mathbb{C})$, also ist H endlichdimensional. Wir wollen nun H mit einem Skalarprodukt versehen. Zu $\varphi, \psi \in H$ sei

$$\varphi \times \psi : S \times \tilde{S} \to L(\mathcal{E}_J),\ (z, w) \mapsto \varphi(\bar{z})^*\psi(w),$$

also $\varphi \times \psi \in V$. Man rechnet nach, daß die Identität $\varphi \times \psi = (\psi \times \varphi)^*$ für φ, ψ aus H gilt. Wir definieren nun

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{C},\ \langle \varphi, \psi \rangle = L(\psi \times \varphi)$$

und behaupten, daß $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf H ist. Die Linearität im ersten Argument ist klar. Es gilt weiter

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \psi \rangle &= L(\psi \times \varphi) \\ &= \frac{1}{2}(l(\psi \times \varphi) + \overline{l((\psi \times \varphi)^*)}) \\ &= \overline{L((\psi \times \varphi)^*)} \\ &= \overline{L(\varphi \times \psi)} \\ &= \overline{\langle \psi, \varphi \rangle} \qquad (\varphi, \psi \in H). \end{aligned}$$

Somit ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sesquilinear. Sei nun $\varphi \in H$. Dann ist die Abbildung

$$S \times S \to L(\mathcal{E}_J),\ (z, w) \mapsto \varphi \times \varphi(z, \bar{w})$$

positiv definit, denn für endliche Folgen (z_i) in S und (x_i) in $\mathcal{E}_J$ gilt

$$\begin{aligned} \sum \langle \varphi \times \varphi(z_i, \bar{z}_j)x_j, x_i \rangle &= \sum \langle \varphi(\bar{z}_i)^*\varphi(\bar{z}_j)x_j, x_i \rangle \\ &= \sum \langle \varphi(\bar{z}_j)x_j, \varphi(\bar{z}_i)x_i \rangle \\ &= \| \sum \varphi(\bar{z}_i)x_i \|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Nach Satz 1.15 in [**Bar02**] ist auch die Abbildung

$$K_1 : S \times S \to L(\mathcal{E}_J),\ (z, w) \mapsto (1 - z_1\bar{w}_1)^{-1}\varphi \times \varphi(z, \bar{w})$$

positiv definit und somit gilt

$$\varphi \times \varphi(z, \bar{w}) = (1 - z_1 \bar{w}_1) K_1(z, w) \qquad (z, w \in S).$$

Daher liegt die Abbildung $\varphi \times \varphi$ in $\mathcal{C}$, und es ist

$$\langle \varphi, \varphi \rangle = L(\varphi \times \varphi) = \mathrm{Re}\ l(\varphi \times \varphi) \geq 0.$$

Aufgrund der Wahl von l gilt $\langle \varphi, \varphi \rangle = 0$ genau dann, wenn $\varphi \times \varphi = 0$ ist. Wegen

$$\begin{aligned} |\varphi(z)x|^2 &= \langle \varphi(z)^* \varphi(z)x, x \rangle \\ &= \langle \varphi \times \varphi(\bar{z}, z)x, x \rangle \quad (z \in \tilde{S}, x \in \mathcal{E}_J) \end{aligned}$$

ist das äquivalent zu $\varphi = 0$, weswegen $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit ist. Mit diesem Skalarprodukt ist H also ein Hilbertraum.

Die Multiplikationen mit den Koordinatenfunktionen

$$T_i : H \to H,\ T_i \varphi(z) = z_i \varphi(z) \qquad (i = 1, 2)$$

sind stetig, da H endlichdimensional ist. Wir werden zeigen, daß T_1 und T_2 strikte Kontraktionen sind. Für $\varphi \in H \setminus \{0\}$ und $i = 1, 2$ ist

$$\begin{aligned} \|\varphi\|^2 - \|T_i \varphi\|^2 &= L(\varphi \times \varphi) - L((T_i \varphi) \times (T_i \varphi)) \\ &= L(\varphi \times \varphi - (T_i \varphi) \times (T_i \varphi)) > 0, \end{aligned}$$

denn die Darstellung

$$\begin{aligned} &(\varphi \times \varphi - (T_i \varphi) \times (T_i \varphi))(z, \bar{w}) \\ &= \varphi(\bar{z})^* \varphi(\bar{w}) - z_i \varphi(\bar{z})^* \bar{w}_i \varphi(\bar{w}) \\ &= (1 - z_i \bar{w}_i) \varphi(\bar{z})^* \varphi(\bar{w}) \\ &= (1 - z_i \bar{w}_i) \varphi \times \varphi(z, \bar{w}) \qquad (z, w \in S,\ i = 1, 2) \end{aligned}$$

zeigt, daß die Abbildung $\varphi \times \varphi - (T_i \varphi) \times (T_i \varphi)$ nur für $\varphi = 0$ gleich 0 ist und somit für $\varphi \in H \setminus \{0\}$ in $\mathcal{C} \setminus \{0\}$ liegt. Da H endlichdimensional ist, sind dann T_1 und T_2 strikte Kontraktionen. Außerdem gilt für $\varphi \in H$ und $z \in \tilde{S}$

$$\begin{aligned} T_1 T_2 \varphi(z) &= z_2 T_1 \varphi(z) = z_2 z_1 \varphi(z) \\ &= z_1 z_2 \varphi(z) = z_1 T_2 \varphi(z) \\ &= T_2 T_1 \varphi(z). \end{aligned}$$

Also ist $T = (T_1, T_2) \in L(H)^2$ ein vertauschendes Paar von strikten Kontraktionen.

Da $\sigma(T) = \tilde{S} \subset \mathbb{D}^2$, ist nach Satz 2.10 dann $\tilde{F}(T) \in L(H \otimes \mathcal{E})$ ein Operator mit

$$\|\tilde{F}(T)\| \leq \|\tilde{F}\|_{\infty,\mathbb{D}^2} \leq 1.$$

Nun behaupten wir, daß für alle $u, v \in \mathcal{O}(\mathbb{D}^2, L(\mathcal{E})), \varphi, \psi \in H, x, y \in \mathcal{E}$ und $(z, w) \in S \times \tilde{S}$ die folgende Gleichheit gilt:

$$\langle u(T)\varphi \otimes x, v(T)\psi \otimes y\rangle_{H\otimes\mathcal{E}} = L\big((z,w) \mapsto \langle u(w)x, v(\bar{z})y\rangle_{\mathcal{E}}\psi \times \varphi(z,w)\big).$$

Da bei festgehaltenen φ, ψ, x, y beide Seiten der Gleichung stetige sesquilineare Abbildungen in u und v definieren, genügt es, die Behauptung für Funktionen der Form

$$u = u_0 \otimes A \quad \text{und} \quad v = v_0 \otimes B \quad (u_0, v_0 \in \mathcal{O}(\mathbb{D}^2), A, B \in L(\mathcal{E}))$$

zu überprüfen:

$$\begin{aligned}
&\langle u(T)\varphi \otimes x, v(T)\psi \otimes y\rangle_{H\otimes\mathcal{E}} \\
&\quad= \langle u_0(T)\varphi, v_0(T)\psi\rangle_H \langle Ax, By\rangle_{\mathcal{E}} \\
&\quad= L\big((v_0(T)\psi) \times (u_0(T)\varphi)\langle Ax, By\rangle_{\mathcal{E}}\big) \\
&\quad= L\big((z,w) \mapsto (v_0(T)\psi)(\bar{z})^*(u_0(T)\varphi)(w)\langle Ax, By\rangle_{\mathcal{E}}\big) \\
&\quad= L\big((z,w) \mapsto \overline{v_0(\bar{z})}\psi(\bar{z})^* u_0(w)\varphi(w)\langle Ax, By\rangle_{\mathcal{E}}\big) \\
&\quad= L\big((z,w) \mapsto (\psi \times \varphi)(z,w)\langle u_0(w)Ax, v_0(\bar{z})By\rangle_{\mathcal{E}}\big) \\
&\quad= L\big((z,w) \mapsto \langle u(w)x, v(\bar{z})y\rangle_{\mathcal{E}}\psi \times \varphi(z,w)\big).
\end{aligned}$$

Mit dem bisher Gezeigten können wir jetzt den Beweis des endlichdimensionalen Falles abschließen. Für $i \in J$ sei $\varphi_i \in H$ definiert durch

$$\varphi_i : \tilde{S} \to L(\mathcal{E}_J, \mathbb{C}), \ \ \varphi_i(z)x = \langle x, e_i\rangle.$$

Da $\tilde{F}(T) \in L(H \otimes \mathcal{E})$ eine Kontraktion ist, folgt $((z,w) \in S \times \tilde{S})$:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|\sum_{i\in J} \varphi_i \otimes e_i\|^2 - \|\tilde{F}(T)(\sum_{i\in J} \varphi_i \otimes e_i)\|^2 \\
&= \sum_{i\in J} \langle \varphi_i, \varphi_i\rangle_H - \sum_{i,j\in J} \langle \tilde{F}(T)(\varphi_i \otimes e_i), \tilde{F}(T)(\varphi_j \otimes e_j)\rangle_{H\otimes\mathcal{E}} \\
&= \sum_{i\in J} \langle \varphi_i, \varphi_i\rangle_H - L\big((z,w) \mapsto \sum_{i,j\in J} \langle \tilde{F}(w)e_i, \tilde{F}(\bar{z})e_j\rangle_{\mathcal{E}}(\varphi_j \times \varphi_i)(z,w)\big) \\
&= L\big((z,w) \mapsto \sum_{i,j\in J} \langle (1 - \tilde{F}(\bar{z})^*\tilde{F}(w))e_i, e_j\rangle_{\mathcal{E}}(\varphi_j \times \varphi_i)(z,w)\big) \\
&= L\big((z,w) \mapsto \sum_{i,j\in J} \langle (1 - F(z)F(\bar{w})^*)e_i, e_j\rangle_{\mathcal{E}}(\varphi_j \times \varphi_i)(z,w)\big).
\end{aligned}$$

Schließlich gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j\in J} \langle (1-f(z)f(\bar{w})^*)e_i, e_j\rangle (\varphi_j \times \varphi_i)(z,w)x \\
&= \sum_{i,j\in J} \langle (1-f(z)f(\bar{w})^*)e_i, e_j\rangle \langle x, e_i\rangle e_j \\
&= \sum_{j\in J} \Big\langle (1-f(z)f(\bar{w})^*) \sum_{i\in J} \langle x, e_i\rangle e_i, e_j\Big\rangle e_j \\
&= P_J(1-f(z)f(\bar{w})^*)x \\
&= h(z,w)x
\end{aligned}$$

für $z \in S, w \in \tilde{S}$ und $x \in \mathcal{E}_J$.
Zusammengenommen ergibt sich also $L(h) \geq 0$. Wegen

$$\begin{aligned}
h^*(z,w) &= h(\bar{w},\bar{z})^* \\
&= (P_J(1-f(\bar{w})f(z)^*)_{|\mathcal{E}_J})^* \\
&= P_J(1-f(z)f(\bar{w})^*)_{|\mathcal{E}_J} \\
&= h(z,w) \qquad (z \in S, w \in \tilde{S})
\end{aligned}$$

gilt $h = h^*$ und folglich $Re\; l(h) = L(h) \geq 0$, was zu zeigen war.

(2) Sei nun $S \subseteq \mathbb{D}^2$ beliebig. Für $M = \{z^1, \ldots, z^r\} \subseteq S$ und $J \subset I$ endlich existieren positiv definite Abbildungen

$$K_1^{M,J}, K_2^{M,J} : M \times M \to L(\mathcal{E}_J)$$

mit

$$P_J(1-f(z)f(w)^*)_{|\mathcal{E}_J} = (1-z_1\bar{w}_1)K_1^{M,J}(z,w) + (1-z_2\bar{w}_2)K_2^{M,J}(z,w)$$

für alle $z,w \in M$. Wir definieren Abbildungen $L_i^{M,J} : S \times S \to L(\mathcal{E})$ $(i = 1,2)$ durch $L_i^{M,J} = 0$ auf $(S \times S) \setminus (M \times M)$ und

$$L_i^{M,J}(z,w) = \iota_J K_i^{M,J} P_J$$

für $z,w \in M$, wobei $\iota_J : \mathcal{E}_J \to \mathcal{E}$ die Inklusionsabbildung ist. Offensichtlich sind die $L_i^{M,J}$ für $i = 1,2$ positiv definit. Für festes $z,w \in S$ gilt

$$\|L_i^{M,J}(z,w)\| \leq \frac{1}{\sqrt{1-|z_i|^2}\sqrt{1-|w_i|^2}} \quad (i = 1,2).$$

Dies ist trivial für $(z,w) \in (S \times S) \setminus (M \times M)$. Für $z \in M$ gilt

$$\begin{aligned}
&(1-|z_1|^2)\|L_1^{M,J}(z,z)\| \\
= \;& \sup_{\|x\|\le 1} (1-|z_1|^2)\langle L_1^{M,J}(z,z)x,x\rangle \\
\le \;& \sup_{\|x\|\le 1} ((1-|z_1|^2)\langle L_1^{M,J}(z,z)x,x\rangle + (1-|z_2|^2)\langle L_2^{M,J}(z,z)x,x\rangle) \\
= \;& \sup_{\|x\|\le 1} \langle (1-f(z)f(z)^*)P_Jx, P_Jx\rangle \\
= \;& \sup_{\|x\|\le 1} (\|P_Jx\|^2 - \|f(z)^*P_Jx\|^2) \\
\le \;& 1
\end{aligned}$$

und somit

$$\|L_1^{M,J}(z,z)\| \le \frac{1}{1-|z_1|^2}.$$

Da nach Lemma 1.7 für positiv definite Abbildungen

$$\|L_1^{M,J}(z,w)\|^2 \le \|L_1^{M,J}(z,z)\| \; \|L_1^{M,J}(w,w)\|$$

gilt, folgt die Ungleichung für $L_1^{M,J}$. Entsprechend folgt auch die Ungleichung für $L_2^{M,J}$.
Versehen mit der Relativtopologie der schwachen Operatortopologie bilden die abgeschlossenen Kugeln $\bar{B}_{r_i(z,w)}(0) \subset L(\mathcal{E})$, $i = 1,2$ mit

$$r_i(z,w) = \frac{1}{\sqrt{1-|z_i|^2}\sqrt{1-|w_i|^2}}$$

kompakte Hausdorffräume. Wir fassen die Familien $(L_i^{M,J})_{M,J}$ $(i=1,2)$ als Netze in dem kompakten Produktraum

$$\prod_{z,w\in S} \bar{B}_{r_i(z,w)}(0)$$

mit $r_i(z,w)$ wie oben auf. Durch Übergang zu konvergenten Teilnetzen erhalten wir Netze $(L_i^{M_\alpha,J_\alpha})_{\alpha\in A}$ $(i=1,2)$, die in den entsprechenden Produkträumen (d.h. punktweise in der schwachen Operatortopologie) gegen Abbildungen

$$K_i : S \times S \to L(\mathcal{E}) \qquad (i=1,2)$$

konvergieren. Die Abbildungen K_i sind positiv definit, denn es gilt

$$\sum_{k,l=1}^{r} \langle K_i(z^k,z^l)c_l, c_k\rangle = \lim_{\alpha\in A} \sum_{k,l=1}^{r} \langle L_i^{(M_\alpha,J_\alpha)}(z^k,z^l)c_l,c_k\rangle \ge 0 \quad (i=1,2).$$

für alle $z^1,\ldots,z^r \in S$ und $c_1,\ldots,c_r \in \mathcal{E}$. Außerdem gilt

$$1 - f(z)f(w)^* = (1-z_1\bar{w}_1)K_1(z,w) + (1-z_2\bar{w}_2)K_2(z,w)$$

für alle $z, w \in S$. Um dies einzusehen, fixieren wir $z, w \in S$ und eine endliche Menge $J \subset I$. Wir wählen einen Index $\alpha_0 \in A$ mit $\{z, w\} \subset M_{\alpha_0}$ und $J \subset J_{\alpha_0}$ und prüfen nach, daß

$$\begin{aligned}
&\langle (1 - f(z)f(w)^*)x, y\rangle \\
&= \lim_{\alpha \geq \alpha_0} \langle P_{J_\alpha}(1 - f(z)f(w)^*)_{|\mathcal{E}_{J_\alpha}} x, y\rangle \\
&= \lim_{\alpha \geq \alpha_0} \langle \big((1 - z_1\bar{w}_1)L_1^{(M_\alpha, J_\alpha)}(z, w) + (1 - z_2\bar{w}_2)L_2^{(M_\alpha, J_\alpha)}(z, w)\big)x, y\rangle \\
&= \langle ((1 - z_1\bar{w}_1)K_1(z, w) + (1 - z_2\bar{w}_2)K_2(z, w))x, y\rangle
\end{aligned}$$

für alle $x, y \in \mathcal{E}_J$ gilt.

Da aber $J \subset I$ eine beliebige endliche Menge war und

$$\overline{LH}\{\mathcal{E}_J; J \subset I \text{ endlich}\} = \mathcal{E}$$

ist, folgt Teil (b).

(b) $\Rightarrow$ (c).

Wähle wie in Satz 1.6 Funktionen $k_i : S \to L(\mathcal{H}_i, \mathcal{E})$ (H_i Hilbertraum, $i = 1, 2$) so, daß

$$K_i(z, w) = k_i(z)k_i(w)^* \quad (z, w \in S).$$

Die Voraussetzung

$$1 - f(z)f(w)^* = (1 - z_1\bar{w}_1)K_1(z, w) + (1 - z_2\bar{w}_2)K_2(z, w) \quad (z, w \in S)$$

bedeutet genau, daß für $z, w \in S$ und $x, y \in \mathcal{E}$ die Identität

$$\begin{aligned}
&\left\langle \begin{pmatrix} x \\ \begin{pmatrix} (z_1k_1(z))^*x \\ (z_2k_2(z))^*x \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ \begin{pmatrix} (w_1k_1(w))^*y \\ (w_2k_2(w))^*y \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right\rangle \\
= &\left\langle \begin{pmatrix} f(z)^*x \\ \begin{pmatrix} k_1(z)^*x \\ k_2(z)^*x \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f(w)^*y \\ \begin{pmatrix} k_1(w)^*y \\ k_2(w)^*y \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right\rangle
\end{aligned}$$

gilt. Nach Lemma 2.3 ist diese Bedingung äquivalent dazu, daß es eine Isometrie

$$L : \overline{LH}\left\{ \begin{pmatrix} x \\ \begin{pmatrix} (z_1k_1(z))^*x \\ (z_2k_2(z))^*x \end{pmatrix} \end{pmatrix}; z \in S \text{ und } x \in \mathcal{E}\right\} \to \mathcal{E} \oplus (\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)$$

gibt mit der Eigenschaft, daß

$$L \begin{pmatrix} x \\ \begin{pmatrix} (z_1k_1(z))^*x \\ (z_2k_2(z))^*x \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(z)^*x \\ \begin{pmatrix} k_1(z)^*x \\ k_2(z)^*x \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (z \in S, x \in \mathcal{E}).$$

Wähle Hilberträume $\mathcal{K}_i \supseteq \mathcal{H}_i$ $(i = 1, 2)$ und einen unitären Operator

$$U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in L(\mathcal{E} \oplus (\mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2))$$

so, daß U^* eine Fortsetzung von L ist. Fasse $k_i(z)^*$ auf als Operator in $L(\mathcal{E}, \mathcal{K}_i)$, $(z \in S, i = 1, 2)$ und definiere $u : S \to L(\mathcal{E}, \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2)$, $u(z) = \begin{pmatrix} k_1(z)^* \\ k_2(z)^* \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$A^* + C^* Z^* u(z) = f(z)^*$$

und

$$B^* + D^* Z^* u(z) = u(z).$$

Daraus erhält man

$$u(z) = (1 - D^* Z^*)^{-1} B^*$$

und Einsetzen ergibt dann

$$f(z)^* = A^* + C^* Z^* (1 - D^* Z^*)^{-1} B^*$$

oder äquivalent

$$f(z) = A + B(1 - ZD)^{-1} ZC.$$

Wenn man die Formel

$$\begin{aligned} (1 - ZD)^{-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} (ZD)^k \\ &= 1 + Z \left(\sum_{k=0}^{\infty} (DZ)^k \right) D \\ &= 1 + Z(1 - DZ)^{-1} D \end{aligned}$$

benutzt, sieht man, daß

$$\begin{aligned} f(z) &= A + B(1 + Z(1 - DZ)^{-1} D) ZC \\ &= A + BZC - BZ(1 - DZ)^{-1}(1 - DZ)C + BZ(1 - DZ)^{-1} C \\ &= A + BZ(1 - DZ)^{-1} C \end{aligned}$$

wie gewünscht.

(c) $\Rightarrow$ (a).
Offensichtlich definiert die rechte Seite der Gleichung in Teil (c) eine holomorphe Fortsetzung $F \in H^\infty(\mathbb{D}^2, L(\mathcal{E}))$ von f.
Außerdem gilt nach Lemma 2.4 auch $\|F\|_{\infty, \mathbb{D}^2} \leq 1$. $\square$

Wie im skalarwertigen Fall folgt aus dem Beweis des Satzes auch

Bemerkung 2.12. *(a) In der Situation (b) von Satz* 2.11 *haben die Abbildungen K_1, K_2 und f Fortsetzungen zu holomorphen Kernen*

$$\hat{K}_1, \hat{K}_2 : \mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2 \to L(\mathcal{E})$$

bzw. zu einer holomorphen Abbildung

$$F : \mathbb{D}^2 \to L(\mathcal{E})$$

so, daß

$$1 - F(z)F(w)^* = (1 - z_1\bar{w}_1)\hat{K}_1(z,w) + (1 - z_2\bar{w}_2)\hat{K}_2(z,w)$$

für $z, w \in \mathbb{D}^2$ gilt. Im Falle $S = \mathbb{D}^2$ bedeutet dies, daß die positiv definiten Abbildungen K_1, K_2 in Teil (b) von Satz 2.11 *automatisch holomorph sind.*

(b) Definiert man in der Situation (c) von Satz 2.11 *Funktionen*

$$\hat{u} : \mathbb{D}^2 \to L(\mathcal{E}, \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2), \quad \hat{u}(z) = (1 - D^*Z^*)^{-1}B^*$$

und

$$\hat{k}_i : \mathbb{D}^2 \to L(\mathcal{K}_i, \mathcal{E}), \quad \hat{k}_i(z) = \hat{u}(z)^*\iota_i \quad (i = 1, 2),$$

wobei $\iota_i : \mathcal{K}_i \to \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2$ für $i = 1, 2$ die kanonischen Einbettungen sind, so gilt $\hat{k}_i(z)^* = \pi_i\hat{u}(z)$ für $z \in \mathbb{D}^2$ und die Abbildungen

$$\hat{K}_i : \mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2 \to L(\mathcal{E}), \quad \hat{K}_i(z,w) = \hat{k}_i(z)\hat{k}_i(w)^* \quad (i = 1, 2)$$

sind positive holomorphe Kerne mit

$$1 - f(z)f(w)^* = (1 - z_1\bar{w}_1)\hat{K}_1(z,w) + (1 - z_2\bar{w}_2)\hat{K}_2(z,w)$$

für alle $z, w \in S$. Dieselbe Formel gilt auch für alle $z, w \in \mathbb{D}^2$, wenn man auf der linken Seite $f : S \to L(\mathcal{E})$ durch die holomorphe Fortsetzung

$$F : \mathbb{D}^2 \to L(\mathcal{E}), \quad F(z) = A + BZ(1 - DZ)^{-1}C$$

ersetzt.

Beweis. Der Beweis der Implikationen (b) $\Rightarrow$ (c) und (c) $\Rightarrow$ (a) von Satz 2.11 zeigt, daß es genügt, den Teil (b) der Bemerkung zu zeigen.
Sei $F : \mathbb{D}^2 \to L(\mathcal{E})$ die in Teil (b) der Bemerkung definierte holomorphe Fortsetzung von f mit

$$F(z) = A + BZ(1 - DZ)^{-1}C$$

oder äquivalent (vgl. Beweis der Implikation (b) $\Rightarrow$ (c) von Satz 2.11)

$$F(z)^* = A^* + C^*Z^*(1 - D^*Z^*)^{-1}B^*.$$

Dann gilt mit den Bezeichnungen aus (b) für $z \in \mathbb{D}^2$

$$A^* + C^* Z^* \hat{u}(z) = F(z)^*$$

und

$$B^* + D^* Z^* \hat{u}(z) = \hat{u}(z)$$

oder äquivalent

$$\begin{pmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \begin{pmatrix} (z_1 \hat{k}_1(z))^* \\ (z_2 \hat{k}_2(z))^* \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(z)^* \\ \begin{pmatrix} \hat{k}_1(z)^* \\ \hat{k}_2(z)^* \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

für alle $z \in \mathbb{D}^2$. Da $U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ unitär ist, folgt

$$\begin{aligned} &\langle \begin{pmatrix} x \\ \begin{pmatrix} (z_1 \hat{k}_1(z))^* x \\ (z_2 \hat{k}_2(z))^* x \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ \begin{pmatrix} (w_1 \hat{k}_1(z))^* y \\ (w_2 \hat{k}_2(w))^* y \end{pmatrix} \end{pmatrix} \rangle \\ = \; &\langle \begin{pmatrix} F(z)^* x \\ \begin{pmatrix} \hat{k}_1(z)^* x \\ \hat{k}_2(z)^* x \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F(w)^* y \\ \begin{pmatrix} \hat{k}_1(w)^* y \\ \hat{k}_2(w)^* y \end{pmatrix} \end{pmatrix} \rangle \end{aligned}$$

für alle $z, w \in \mathbb{D}^2$ und $x, y \in \mathcal{E}$. Nach Definition von $\hat{K}_i$ bedeutet dies genau (mit vertauschten Rollen von z und w), daß

$$1 - F(z)F(w)^* = (1 - z_1 \bar{w}_1)\hat{K}_1(z,w) + (1 - z_2 \bar{w}_2)\hat{K}_2(z,w)$$

für alle $z, w \in \mathbb{D}^2$ gilt. $\square$

Wir haben im Beweis der Implikation (a) $\Rightarrow$ (b) von Satz 2.11 die operatorwertige von Neumannsche Ungleichung für vertauschende Paare von Kontraktionen benutzt. Umgekehrt folgt aus der Gültigkeit der in Teil (c) von Satz 2.11 gegebenen Darstellung für beschränkte holomorphe Funktionen auf $\mathbb{D}^2$ die operatorwertige von Neumannsche Ungleichung.

Bemerkung 2.13. *Aus der Gültigkeit von Satz* 2.11 *folgt die Gültigkeit der operatorwertigen von Neumannschen Ungleichung in der in Satz* 2.10 *beschriebenen Form.*

Beweis. Sei $f \in H^\infty(\mathbb{D}^2, L(\mathcal{E}))$ und sei ohne Einschränkung $\|f\|_{\infty,\mathbb{D}^2} = 1$. Nach Satz 2.11 (c) hat f für $z \in \mathbb{D}^2$ eine Darstellung

$$f(z) = A + BZ(1 - DZ)^{-1}C$$

mit einem unitären Operator

$$U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in L(\mathcal{E} \oplus (\mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2)).$$

Sei $T = (T_1, T_2) \in L(\mathcal{H})^2$ ein vertauschendes Paar von Kontraktionen mit $\sigma(T) \subset \mathbb{D}^2$. Benutzt man Standardeigenschaften des analytischen Funktionalkalküls, so erhält man

$$f(T) = 1_{\mathcal{H}} \otimes A + (1_{\mathcal{H}} \otimes B)Z(T)(1_{\mathcal{H}\otimes(\mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2)} - (1_{\mathcal{H}} \otimes D)Z(T))^{-1} 1_{\mathcal{H}} \otimes C.$$

Da der Operator

$$\begin{pmatrix} 1_{\mathcal{H}} \otimes A & 1_{\mathcal{H}} \otimes B \\ 1_{\mathcal{H}} \otimes C & 1_{\mathcal{H}} \otimes D \end{pmatrix} \hat{=} 1_{\mathcal{H}} \otimes U \in L(\mathcal{H} \otimes (\mathcal{E} \oplus (\mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2)))$$

eine Kontraktion ist, folgt die Behauptung aus Lemma 2.4, falls die Abbildung $Z(T) \in L(\mathcal{H} \otimes (\mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2))$ eine Kontraktion ist. Um dies einzusehen, seien

$$\pi_i : \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2 \to \mathcal{K}_i, \quad (k^1, k^2) \mapsto k^i$$

die kanonischen Projektionen. Da für $h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{H}$ und $k_1^i, \ldots, k_n^i \in \mathcal{K}_i$ $(i = 1, 2)$, gilt

$$\begin{aligned}
\|\sum_{i=1}^n h_i \otimes (k_i^1, k_i^2)\|^2 &= \sum_{i,j=1}^n \langle h_i \otimes (k_i^1, k_i^2), h_j \otimes (k_j^1, k_j^2)\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^n \langle h_i, h_j\rangle(\langle k_i^1, k_j^1\rangle + \langle k_i^2, k_j^2\rangle) \\
&= \sum_{i,j=1}^n (\langle h_i \otimes k_i^1, h_j \otimes k_j^1\rangle + \langle h_i \otimes k_i^2, h_j \otimes k_j^2\rangle) \\
&= \|(\sum_{i=1}^n h_i \otimes k_i^1, \sum_{i=1}^n h_i \otimes k_i^2)\|^2
\end{aligned}$$

und da $\overline{LH}\{(h \otimes k^1, h \otimes k^2); h \in \mathcal{H}, k^i \in \mathcal{K}_i \text{ für } i = 1, 2\} = (\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}_1) \oplus (\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}_2)$ ist, gibt es eine eindeutige unitäre Abbildung

$$U : \mathcal{H} \otimes (\mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2) \to (\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}_1) \oplus (\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}_2)$$

mit

$$U(h \otimes (k^1, k^2)) = (h \otimes k^1, h \otimes k^2)$$

für $h \in \mathcal{H}$ und $k^1 \in \mathcal{K}_1, k^2 \in \mathcal{K}_2$. Wegen

$$Z(z) = z_1 \begin{pmatrix} 1_{\mathcal{K}_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_{\mathcal{K}_2} \end{pmatrix} \in L(\mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2)$$

gilt

$$Z(T) = T_1 \otimes \begin{pmatrix} 1_{\mathcal{K}_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + T_2 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_{\mathcal{K}_2} \end{pmatrix} \in L(\mathcal{H} \otimes (\mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2)).$$

Vermöge U ist dieser Operator unitär äquivalent zu der Kontraktion

$$(T_1 \otimes 1_{\mathcal{K}_1}) \oplus (T_2 \otimes 1_{\mathcal{K}_2}) \in L((\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}_1) \oplus (\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}_2)).$$

Also ist $Z(T)$ eine Kontraktion, und Lemma 2.4 zeigt, daß auch $f(T)$ eine Kontraktion ist. □

Insbesondere folgt aus der Gültigkeit von Satz 2.10 auch die von Neumannsche Ungleichung für operatorwertige Polynome. Denn ist $T = (T_1, T_2) \in L(\mathcal{H})^2$ ein vertauschendes Paar von Kontraktionen und ist p ein operatorwertiges Polynom in zwei komplexen Variablen, so folgt

$$\|p(T)\| = \lim_{r \uparrow 1} \|p(rT)\| \leq \|p\|_{\infty, \mathbb{D}^2}.$$

KAPITEL 3

Darstellung von Funktionen als Summen von Quadraten

In [**CW99**] haben Cole und Wermer gezeigt, daß die Andosche Ungleichung für ein Paar von vertauschenden Kontraktionen äquivalent ist zu einer elementaren Eigenschaft komplexer Polynome in zwei Variablen (siehe Satz 3.3). Im eindimensionalen Fall kann man die entsprechende Eigenschaft eindimensionaler komplexer Polynome direkt beweisen und erhält so einen alternativen Beweis der von Neumannschen Ungleichung für einzelne Kontraktionen. Ob ein ähnliches Vorgehen für Polynome in zwei Variablen möglich ist, ist eine interessante offene Frage.

1. Der eindimensionale Fall

Ist $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ rational, d.h. gibt es Polynome p, q in einer komplexen Variablen mit

$$f(z) = \frac{q(z)}{p(z)}$$

und $p(z) \neq 0$ für $z \in \mathbb{D}$, so hat f eine Fortsetzung zu einer holomorphen Funktion auf einer offenen Umgebung U von $\overline{\mathbb{D}}$. Wählt man die obige Darstellung von f so, daß p und q keine gemeinsamen Nullstellen besitzen, so hat p keine Nullstelle in $\overline{\mathbb{D}}$. Ist zusätzlich f eine innere Funktion, d.h. $|p(z)| \geq |q(z)|$ für $z \in \mathbb{D}$ und $|p(z)| = |q(z)|$ für $z \in \mathbb{T}$, so gibt es $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{D}$ und $c \in \partial\mathbb{D}$ so, daß

$$f(z) = c \prod_{i=1}^{N} \frac{z - \beta_i}{1 - \bar{\beta}_i z}$$

für $z \in \mathbb{D}$ gilt (siehe z.B. [**Con81**, Korollar 4.11]). In diesem Fall ist N eindeutig bestimmt (N ist die Anzahl der Nullstellen von f in $\mathbb{D}$ in Vielfachheiten gezählt). Man nennt N den Grad der rationalen inneren Funktion f $(N = deg(f))$.
Ist f eine rationale innere Funktion vom Grade N und ist

$$f(z) = \frac{q(z)}{p(z)} \quad (z \in \mathbb{D})$$

eine Darstellung von f durch teilerfremde Polynome p, q in einer komplexen Variablen, so sind p und q bis auf multiplikative Konstanten eindeutig bestimmt und es gilt

$$deg(q) = deg(p) = N.$$

Lemma 3.1. *Sei f eine rationale innere Funktion vom Grade $n \geq 1$ und sei*

$$f(z) = \frac{q(z)}{p(z)} \quad (z \in \mathbb{D})$$

eine Darstellung von f durch teilerfremde Polynome p, q in einer komplexen Variablen. Dann existieren Polynome A_ν auf $\mathbb{C}$ mit $deg(A_\nu) \leq n-1$ für jedes $\nu = 1, \ldots, n$ so, daß

$$1 - f(z)\overline{f(w)} = (1 - z\bar{w}) \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{A_\nu(z)}{p(z)}\right) \overline{\left(\frac{A_\nu(w)}{p(w)}\right)}$$

für alle $z, w \in \mathbb{D}$ gilt.

Beweis. durch Induktion nach n.
Nach obigen Vorbemerkungen hat f für $n = 1$ die Form

$$f(z) = \frac{q(z)}{p(z)} \quad (z \in \mathbb{D})$$

mit

$$\begin{aligned} q(z) &= c(z - \beta) \quad \text{und} \\ p(z) &= 1 - \bar{\beta}z, \end{aligned}$$

wobei $|c| = 1$ und $|\beta| < 1$. Man rechnet nach:

$$\begin{aligned} 1 - f(z)\overline{f(w)} &= 1 - c\frac{z-\beta}{1-\bar{\beta}z}\bar{c}\frac{\bar{w}-\bar{\beta}}{1-\beta\bar{w}} \\ &= 1 - \frac{(z-\beta)(\bar{w}-\bar{\beta})}{(1-\bar{\beta}z)(1-\beta\bar{w})} \\ &= \frac{1+|\beta|^2 z\bar{w} - z\bar{w} - |\beta|^2}{(1-\bar{\beta}z)(1-\beta\bar{w})} \\ &= (1-z\bar{w})\frac{1-|\beta|^2}{(1-\bar{\beta}z)(1-\beta\bar{w})} \\ &= (1-z\bar{w})\frac{1-|\beta|^2}{p(z)\overline{p(w)}}. \end{aligned}$$

Also gilt für $n = 1$ die Behauptung mit

$$A_1(z) = (1 - |\beta|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Sei nun g eine rationale innere Funktion vom Grade $n+1$ und sei

$$g(z) = \frac{q(z)}{p(z)}$$

eine Darstellung von g durch teilerfremde Polynome p, q in einer komplexen Variablen. Für g existieren rationale innere Funktionen h_1, h_2 mit $deg(h_1) = n$ und $deg(h_2) = 1$ so, daß $g = h_1 h_2$. Seien $h_1 = \frac{q_1}{p_1}$ und $h_2 = \frac{q_2}{p_2}$ Darstellungen von h_1 und h_2 durch teilerfremde Polynome p_1, q_1 und p_2, q_2 auf $\mathbb{C}$, wobei $p = p_1 p_2$ und $q = q_1 q_2$. Nach Induktionsvoraussetzung existieren dann Polynome B_ν mit Grad $\leq n-1$ für $\nu = 1, \ldots, n$ auf $\mathbb{C}$ und eine Konstante $C \in \mathbb{C}$, so daß

$$1 - h_1(z)\overline{h_1(w)} = (1 - z\bar{w}) \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{B_\nu(z)}{p_1(z)}\right) \overline{\left(\frac{B_\nu(w)}{p_1(w)}\right)}$$

und

$$1 - h_2(z)\overline{h_2(w)} = (1 - z\bar{w}) \left(\frac{C}{p_2(z)}\right) \overline{\left(\frac{C}{p_2(w)}\right)}$$

für alle $z, w \in \mathbb{D}$ gilt. Man setzt nun

$$A_\nu = p_2 B_\nu \quad \text{für } 1 \leq \nu \leq n$$

und

$$A_{n+1} = q_1 C.$$

Dann gilt

$$1 - h_1(z)\overline{h_1(w)} = (1 - z\bar{w}) \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{A_\nu(z)}{p(z)}\right) \overline{\left(\frac{A_\nu(w)}{p(w)}\right)}$$

und

$$\begin{aligned}
&h_1(z)\overline{h_1(w)}(1 - h_2(z)\overline{h_2(w)}) \\
&= \left(\frac{q_1(z)}{p_1(z)}\right) \overline{\left(\frac{q_1(w)}{p_1(w)}\right)} (1 - z\bar{w}) \left(\frac{C}{p_2(z)}\right) \overline{\left(\frac{C}{p_2(w)}\right)} \\
&= (1 - z\bar{w}) \left(\frac{q_1(z)C}{p_1(z)p_2(z)}\right) \overline{\left(\frac{q_1(w)C}{p_1(w)p_2(w)}\right)} \\
&= (1 - z\bar{w}) \left(\frac{A_{n+1}(z)}{p(z)}\right) \overline{\left(\frac{A_{n+1}(w)}{p(w)}\right)}.
\end{aligned}$$

Damit folgt dann

$$\begin{aligned}
1 - g(z)\overline{g(w)} &= 1 - h_1(z)\overline{h_1(w)} + h_1(z)\overline{h_1(w)}(1 - h_2(z)\overline{h_2(w)}) \\
&= (1 - z\bar{w}) \sum_{\nu=1}^{n+1} \left(\frac{A_\nu(z)}{p(z)}\right) \overline{\left(\frac{A_\nu(w)}{p(w)}\right)}
\end{aligned}$$

für $z, w \in \mathbb{D}$ und jedes A_ν, $\nu = 1, \dots, n+1$, ist ein Polynom vom Grade $\leq n$. $\square$

Bemerkung. Da zwei Polynome $p, q \in \mathbb{C}[z]$ mit $|p| = |q|$ auf $\mathbb{C}$ den gleichen Grad und die gleichen Nullstellen haben, können sie sich höchstens durch eine multiplikative Konstante vom Betrag 1 unterscheiden.

Damit folgt nun die gewünschte Eigenschaft für Polynome in einer komplexen Variablen:

Satz 3.2. *Seien p, q Polynome in einer komplexen Variablen. Es gelte*

$$|p(z)| \geq |q(z)|$$

für $z \in \mathbb{D}$ und

$$|p(z)| = |q(z)|$$

für $z \in \mathbb{T}$.
Sei $N := deg(q)$. Dann existieren Polynome A_ν auf $\mathbb{C}$ mit $deg(A_\nu) \leq N - 1$, $1 \leq \nu \leq N$, so daß

$$p(z)\overline{p(w)} - q(z)\overline{q(w)} = (1 - z\bar{w}) \sum_{\nu=1}^{N} A_\nu(z)\overline{A_\nu(w)}$$

für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt. Die Summe auf der rechten Seite definiert einen positiven Polynomkern vom Grade $\leq N - 1$ auf $\mathbb{C}$.

Beweis. Nach obiger Bemerkung kann man annehmen, daß $|p| \not\equiv |q|$ auf $\mathbb{C}$. Wir setzen zunächst voraus, daß p und q teilerfremde Polynome sind. Aus der Teilerfremdheit und da $|p(z)| \geq |q(z)|$ auf $\mathbb{D}$ folgt, daß p keine Nullstelle in $\overline{\mathbb{D}}$ hat. Also können wir eine Funktion f auf $\mathbb{D}$ definieren als $f = \frac{q}{p}$. Offensichtlich ist f eine nicht konstante, rationale innere Funktion auf $\mathbb{D}$ mit $deg(f) = N \geq 1$. Wir wählen nun wie in Lemma 3.1 Polynome A_ν mit $deg(A_\nu) \leq N - 1$ für $1 \leq \nu \leq N$. Multipliziert man nun beide Seiten der Gleichung in Lemma 3.1 mit $p(z)\overline{p(w)}$, so erhält man

$$p(z)\overline{p(w)} - q(z)\overline{q(w)} = (1 - z\bar{w}) \sum_{\nu=1}^{N} A_\nu(z)\overline{A_\nu(w)}$$

für $z, w \in \mathbb{D}$. Da beide Seiten dieser Gleichung Polynome in den Variablen $z, \bar{w}$ sind, muß sie auch für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten.
Seien nun p und q nicht teilerfremd. Dann kann man p und q schreiben als $p = rp_1$ und $q = rq_1$ mit p_1 und q_1 teilerfremd und $deg(q_1) < deg(q)$. Die

Voraussetzungen des Satzes für p_1 und q_1 folgen aus den entsprechenden Bedingungen für p und q.
Da für die teilerfremden Polynome p_1 und q_1 Polynome $A_{1\nu}$, $\nu = 1, \dots, N$ mit

$$p_1(z)\overline{p_1(w)} - q_1(z)\overline{q_1(w)} = (1 - z\bar{w}) \sum_{\nu=1}^{N} A_{1\nu}(z)\overline{A_{1\nu}(w)}$$

und $deg(A_{1\nu}) \leq deg(q_1) - 1$ existieren, folgt die gewünschte Gleichung aus

$$\begin{aligned} p(z)\overline{p(w)} - q(z)\overline{q(w)} &= r(z)\overline{r(w)}(p_1(z)\overline{p_1(w)} - q_1(z)\overline{q_1(w)}) \\ &= r(z)\overline{r(w)}(1 - z\bar{w}) \sum_{\nu=1}^{N} A_{1\nu}(z)\overline{A_{1\nu}(w)} \\ &= (1 - z\bar{w}) \sum_{\nu=1}^{N} A_\nu(z)\overline{A_\nu(w)}, \end{aligned}$$

wobei die $A_\nu = rA_{1\nu}$ für $\nu = 1, \dots, N$ Polynome sind, die jeweils Grad $\leq deg(r) + deg(q_1) - 1 = deg(q) - 1$ haben. Somit gilt die Behauptung in allen Fällen.
Die Schlußbemerkung in Satz 3.2 folgt direkt aus Satz 1.15. $\square$

2. Die Quadratsummendarstellung auf dem Bizylinder

Wir wollen im Folgenden zeigen, daß man Satz 2.5 und damit die Andosche Ungleichung für Paare von vertauschenden Kontraktionen auf Hilberträumen benutzen kann, um ein Analogon von Satz 3.2 für Polynome in zwei komplexen Variablen zu zeigen.

Satz 3.3. *Seien p, q Polynome in zwei komplexen Variablen. Es gelte*

$$|p(z)| \geq |q(z)|$$

für $z \in \mathbb{D}^2$ und

$$|p(z)| = |q(z)|$$

für $z \in \mathbb{T}^2$. Sei $N := deg(q)$. Dann gibt es Polynome A_ν, B_ν, $(\nu = 1, \dots, r)$, vom Grade $\leq N - 1$ auf $\mathbb{C}^2$, so daß

$$\begin{aligned} |p(z)|^2 - |q(z)|^2 &= (1 - |z_1|^2) \sum_{\nu=1}^{r} |A_\nu(z)|^2 \\ &+ (1 - |z_2|^2) \sum_{\nu=1}^{r} |B_\nu(z)|^2 \end{aligned}$$

für alle $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ *gilt und allgemeiner*

$$\begin{aligned} p(z)\overline{p(w)} - q(z)\overline{q(w)} &= (1 - z_1\overline{w_1}) \sum_{\nu=1}^{r} A_\nu(z)\overline{A_\nu(w)} \\ &+ (1 - z_2\overline{w_2}) \sum_{\nu=1}^{r} B_\nu(z)\overline{B_\nu(w)} \end{aligned}$$

für alle $z = (z_1, z_2)$ *und* $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$.

Beweis. Ist $p \equiv 0$, so ist auch $q \equiv 0$ und die beiden Gleichungen sind erfüllt für $r = 1$ und $A_1 = B_1 = 0$. Also kann man ohne Einschränkung annehmen, daß $p \not\equiv 0$ ist.
Sei $V = \{z \in \mathbb{C}^2; p(z) = 0\}$ die Nullstellenmenge von p. Wir definieren

$$f(z) = \frac{q(z)}{p(z)}$$

für $z \in \mathbb{D}^2 \cap V^C$. Da $|p(z)| \geq |q(z)|$ für $z \in \mathbb{D}^2$, folgt

$$|f(z)| \leq 1$$

für $z \in \mathbb{D}^2 \cap V^C$. Dann kann man f nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz (siehe z.B. [**Kra82**, Theorem 7.3.3]) zu einer analytischen Funktion f auf $\mathbb{D}^2$ mit $\|f\|_{\infty,\mathbb{D}^2} \leq 1$ fortsetzen. Nach Satz 2.5 und Bemerkung 2.6 existieren dann positive holomorphe Kerne K_1 und K_2 auf $\mathbb{D}^2$, zu denen nach Satz 1.9 Darstellungen $(\tau_1, \mathcal{H}_1)$ und $(\tau_2, \mathcal{H}_2)$ exstieren, so daß

$$1 - f(z)\overline{f(w)} = (1 - z_1\overline{w_1})K_1(z, w) + (1 - z_2\overline{w_2})K_2(z, w)$$

für alle $z = (z_1, z_2)$ *und* $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{D}^2$ gilt. Multipliziert man diese Gleichung mit $p(z)\overline{p(w)}$, so erhält man

$$\begin{aligned} &p(z)\overline{p(w)} - q(z)\overline{q(w)} \\ = \;& (1 - z_1\bar{w}_1)p(z)\overline{p(w)}K_1(z, w) + (1 - z_2\bar{w}_2)p(z)\overline{p(w)}K_2(z, w) \end{aligned}$$

zunächst für $z, w \in \mathbb{D}^2 \cap V^C$ und aus Stetigkeitsgründen für alle $z, w \in \mathbb{D}^2$. Definiert man

$$\begin{aligned} R_1(z, w) &= p(z)\overline{p(w)}K_1(z, w) \quad \text{und} \\ R_2(z, w) &= p(z)\overline{p(w)}K_2(z, w) \quad (z, w \in \mathbb{D}^2), \end{aligned}$$

so wird die Gleichung zu

$$p(z)\overline{p(w)} - q(z)\overline{q(w)} = (1 - z_1\overline{w_1})R_1(z, w) + (1 - z_2\overline{w_2})R_2(z, w)$$

für alle $z, w \in \mathbb{D}^2$. R_1 und R_2 sind ebenfalls positive holomorphe Kerne auf $\mathbb{D}^2$ mit Darstellungen $(p\tau_1, \mathcal{H}_1)$ und $(p\tau_2, \mathcal{H}_2)$. Setzt man

$$K = K_1 + K_2,$$

und

$$R = R_1 + R_2$$

so sind auch K und R auf $\mathbb{D}^2$ positiv definit. Eine Darstellung $(\tau, \mathcal{H})$ von K im Sinne von Satz 1.9 erhält man wie folgt. Wir setzen

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$$

und

$$\tau : \mathbb{D}^2 \to \mathcal{H}, \quad \tau(z) = \tau_1(z) \oplus \tau_2(z).$$

Dann ist $(\tau, \mathcal{H})$ eine Darstellung von K.
Eine Darstellung $(\sigma, \mathcal{H})$ von R erhält man mit der Abbildung

$$\sigma : \mathbb{D}^2 \to \mathcal{H}, \quad \sigma(z) = p(z)\tau(z).$$

Nach Satz 1.11 ist σ auf $\mathbb{D}^2$ analytisch und es existieren Vektoren $b_{jk} \in \mathcal{H}$, $0 \leq j, k < \infty$, so daß

$$\sigma(z) = \sum_{j,k \geq 0} b_{jk} z_1^j z_2^k \qquad (z \in \mathbb{D}^2)$$

und

$$\sum_{j,k \geq 0} \|b_{jk}\| r^{j+k} < \infty \qquad (r < 1).$$

Für $j + k \geq N = deg(q)$ ist $b_{jk} = 0$, denn:
Fixiere $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| = 1$. Für jede Abbildung ρ von $\mathbb{D}^2$ in eine Menge S sei $\rho_\alpha : \mathbb{D} \to S$ definiert durch

$$\rho_\alpha(z) = \rho(z, \alpha z).$$

Auf diese Weise erhält man Polynome p_α und q_α mit $deg(q_\alpha) \leq N$ auf $\mathbb{C}$ und analytische Abbildungen $\tau_\alpha, \sigma_\alpha : \mathbb{D} \to \mathcal{H}$. Dann folgt $(\alpha\bar{\alpha} = 1)$

$$\begin{aligned}
&p_\alpha(z)\overline{p_\alpha(w)} - q_\alpha(z)\overline{q_\alpha(w)} \\
&\quad = \quad p(z, \alpha z)\overline{p(w, \alpha w)} - q(z, \alpha z)\overline{q(w, \alpha w)} \\
&\quad = \quad (1 - z\bar{w})R_1((z, \alpha z), (w, \alpha w)) + (1 - \alpha z\bar{\alpha}\bar{w})R_2((z, \alpha z), (w, \alpha w)) \\
&\quad = \quad (1 - z\bar{w})R((z, \alpha z), (w, \alpha w)) \\
&\quad = \quad (1 - z\bar{w})R^\alpha(z, w)
\end{aligned}$$

für alle $z, w \in \mathbb{D}$, wobei

$$R^{\alpha}(z,w) = R((z,\alpha z),(w,\alpha w)) \quad (z,w \in \mathbb{D})$$

ein positiver holomorpher Kern auf $\mathbb{D}$ ist. Dieser hat die Darstellung $(\sigma_\alpha, \mathcal{H})$, denn es gilt:

$$\begin{aligned} R^{\alpha}(z,w) &= R((z,\alpha z),(w,\alpha w)) \\ &= \langle \sigma(z,\alpha z), \sigma(w,\alpha w)\rangle \\ &= \langle \sigma_\alpha(z), \sigma_\alpha(w)\rangle \quad (z,w \in \mathbb{D}). \end{aligned}$$

Da p_α und q_α Polynome auf $\mathbb{D}$ sind, für die die Voraussetzungen aus Satz 3.2 gelten, existiert auf $\mathbb{D}$ ein positiver Polynomkern M^α mit Grad $\leq N-1$, so daß $M^\alpha = R^\alpha$ auf $\mathbb{D}^2$. Nach Satz 1.15 hat M^α eine Darstellung $(\chi^\alpha, \mathcal{H}^\alpha)$, wobei $\chi^\alpha : \mathbb{D} \to \mathcal{H}^\alpha$ ein Polynom vom Grad $\leq N-1$ ist. Dann ist $(\chi^\alpha, \mathcal{H}^\alpha)$ auch eine Darstellung von R^α. Der positive holomorphe Kern R^α hat also zwei Darstellungen $(\sigma_\alpha, \mathcal{H})$ und $(\chi^\alpha, \mathcal{H}^\alpha)$. Dann existiert nach Satz 1.9 eine lineare Abbildung $U : \mathcal{H}^\alpha \to \mathcal{H}$, so daß

$$\sigma_\alpha = U \circ \chi^\alpha$$

auf $\mathbb{D}$ gilt. Also ist auch σ_α ein Polyom vom Grad $\leq N-1$.
Setzt man nun

$$d_p(\alpha) = \sum_{j+k=p} b_{jk}\alpha^k \quad \textit{für } p \geq 0,$$

dann folgt mit der Reihendarstellung von σ

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha(z) = \sigma(z,\alpha z) &= \sum_{j,k\geq 0} b_{jk} z^j (\alpha z)^k \\ &= \sum_{j,k\geq 0} b_{jk} z^{j+k}\alpha^k \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} d_p(\alpha) z^p \end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{D}$. Da $deg(\sigma_\alpha) \leq N-1$ ist, gilt:

$$0 = d_p(\alpha) = \sum_{k=0}^{p} b_{p-k,k}\alpha^k$$

für $p \geq N$. Da dies für alle α mit $|\alpha| = 1$ richtig ist, ist $b_{p-k,k} = 0$ für alle $p \geq N$ und $k = 0, \ldots, p$ und somit $b_{jk} = 0$ für $j + k \geq N$.
Damit und mit der Reihendarstellung von σ folgt nun

$$\sigma(z) = \sum_{j+k\leq N-1} b_{jk} z_1^j z_2^k$$

für $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2$.
Die positiven holomorphen Kerne R_1 und R_2 kann man auf $\mathbb{C}^2$ zu positiven Polynomkernen mit Grad $\leq N-1$ fortsetzen. Sei dazu E die Projektion von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{H}_1$. Da für $z \in \mathbb{D}^2$

$$\sigma(z) = p(z)\tau(z) = p(z)\tau_1(z) \oplus p(z)\tau_2(z),$$

gilt, hat man also

$$E(\sigma(z)) = p(z)\tau_1(z) \quad (z \in \mathbb{D}^2).$$

Setzt man $c_{jk} = E(b_{jk})$ für alle j, k mit $j + k \leq N - 1$, so erhält man für alle $z \in \mathbb{D}^2$

$$p(z)\tau_1(z) = \sum_{j+k \leq N-1} c_{jk} z_1^j z_2^k.$$

Da R_1 die Darstellung $(p\tau_1, \mathcal{H}_1)$ hat, gilt

$$R_1(z, w) = \langle p(z)\tau_1(z), p(w)\tau_1(w) \rangle \quad (z, w \in \mathbb{D}^2)$$

und somit gibt es eine Fortsetzung von R_1 zu einem positiven Polynomkern mit Grad $\leq N - 1$ auf $\mathbb{C}^2$. Nach Satz 1.15 existieren dann Polynome $A_1, \ldots, A_d$ vom Grade $\leq N - 1$ auf $\mathbb{C}^2$, so daß für alle $z, w \in \mathbb{D}^2$

$$R_1(z, w) = \sum_{\nu=1}^{d} A_\nu(z)\overline{A_\nu(w)}$$

gilt. Analog existieren auch zu R_2 Polynome $B_1, \ldots, B_{d'}$ vom Grade $\leq N - 1$ auf $\mathbb{C}^2$, so daß für alle $z, w \in \mathbb{D}^2$

$$R_2(z, w) = \sum_{\nu=1}^{d'} B_\nu(z)\overline{B_\nu(w)}$$

gilt. Setzt man nun die obigen Darstellungen von R_1 und R_2 in die Gleichung

$$p(z)\overline{p(w)} - q(z)\overline{q(w)} = (1 - z_1\overline{w_1})R_1(z, w) + (1 - z_2\overline{w_2})R_2(z, w)$$

von oben ein, so erhält man die Behauptung. □

Bemerkung 3.4. *(a) Nach dem Beweis von Satz* 3.3 *kann man die Polynome* A_ν, B_ν *so wählen, daß*

$$deg(A_\nu) \leq deg(q) - 1$$

und

$$deg(B_\nu) \leq deg(q) - 1$$

für $\nu = 1, \ldots, r$.

(b) Die Darstellung für $p(z)\overline{p(w)} - q(z)\overline{q(w)}$ in Satz 3.3 kann aus der für $|p(z)|^2 - |q(z)|^2$ gegebenen Darstellung hergeleitet werden.

Beweis. Von (b).
Seien also die Voraussetzungen wie in Satz 3.3 und es gelte:

$$\begin{aligned} |p(z)|^2 - |q(z)|^2 &= (1-|z_1|^2)\sum_{\nu=1}^{r}|A_\nu(z)|^2 \\ &+ (1-|z_2|^2)\sum_{\nu=1}^{r}|B_\nu(z)|^2 \end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{C}^2$. Man definiert für alle Polynome A auf $\mathbb{C}^2$ das Polynom $\tilde{A}$ durch:

$$\tilde{A}(z) = \overline{A(\bar{z})} \qquad (z \in \mathbb{C}^2).$$

Ist

$$A(z) = \sum_{j,k=0}^{N} c_{jk} z_1^j z_2^k,$$

dann ist

$$\tilde{A}(z) = \sum_{j,k=0}^{N} \overline{c_{jk}} z_1^j z_2^k.$$

Dann kann man obige Gleichung auch schreiben als

$$\begin{aligned} p(z)\tilde{p}(\bar{z}) - q(z)\tilde{q}(\bar{z}) &= (1-z_1\overline{z_1})\sum_{\nu=1}^{r}A_\nu(z)\tilde{A}_\nu(\bar{z}) \\ &+ (1-z_2\overline{z_2})\sum_{\nu=1}^{r}B_\nu(z)\tilde{B}_\nu(\bar{z}) \end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{C}^2$.
Man definiert das Polynom $S(z_1, z_2, \xi_1, \xi_2)$ in vier komplexen Variablen durch

$$\begin{aligned} S(z,\xi) &= p(z)\tilde{p}(\xi) - q(z)\tilde{q}(\xi) \\ &- (1-z_1\xi_1)\sum_{\nu=1}^{r}A_\nu(z)\tilde{A}_\nu(\xi) - (1-z_2\xi_2)\sum_{\nu=1}^{r}B_\nu(z)\tilde{B}_\nu(\xi). \end{aligned}$$

Dann folgt mit obiger Gleichung, daß $S(z,\bar{z}) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}^2$. Schreibt man nun das Polynom $S(z,\bar{z})$ als

$$S(z,\bar{z}) = \sum a_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta$$

mit Koeffizienten $a_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^2$, so gilt

$$a_{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha!\beta!}\frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha}\frac{\partial^\beta}{\partial \bar{z}^\beta}S(z,\bar{z})|_{z=0} = 0$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^2$ und somit $S(z,\xi) = 0$ für alle $z, \xi \in \mathbb{C}^2$. Also gilt die Gleichung aus Satz 3.3 für alle $z, \bar{w} \in \mathbb{C}^2$. □

Korollar 3.5. *Sei φ eine rationale innere Funktion auf $\mathbb{D}^2$ mit $\varphi = \frac{q}{p}$ für Polynome p, q in zwei komplexen Variablen und $p \neq 0$ auf $\mathbb{D}^2$. Dann existieren Polynome A_ν, B_ν, $\nu = 1, \dots, r$, in zwei komplexen Variablen, so daß, falls man $f_\nu = \frac{A_\nu}{p}$ und $g_\nu = \frac{B_\nu}{p}$ setzt,*

$$\begin{aligned} 1 - \varphi(z)\overline{\varphi(w)} &= (1 - z_1\bar{w}_1)\sum_{\nu=1}^{r} f_\nu(z)\overline{f_\nu(w)} \\ &+ (1 - z_2\bar{w}_2)\sum_{\nu=1}^{r} g_\nu(z)\overline{g_\nu(w)} \end{aligned}$$

für alle $z = (z_1, z_2)$ und $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{D}^2$ gilt.
Die Funktionen f_ν, g_ν sind rational und auf $\mathbb{D}^2$ analytisch.

Beweis. Nach Satz 3.3 existieren Polynome A_ν, B_ν, $\nu = 1, \dots, r$, in zwei komplexen Variablen, so daß

$$\begin{aligned} p(z)\overline{p(w)} - q(z)\overline{q(w)} &= (1 - z_1\bar{w}_1)\sum_{\nu=1}^{r} A_\nu(z)\overline{A_\nu(w)} \\ &= (1 - z_2\bar{w}_2)\sum_{\nu=1}^{r} B_\nu(z)\overline{B_\nu(w)} \end{aligned}$$

für alle $z = (z_1, z_2)$ und $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{D}^2$ gilt. Dividiert man beide Seiten dieser Gleichung durch $p(z)\overline{p(w)} (\neq 0)$, so erhält man

$$\begin{aligned} 1 - \varphi(z)\overline{\varphi(w)} &= (1 - z_1\bar{w}_1)\sum_{\nu=1}^{r} f_\nu(z)\overline{f_\nu(w)} \\ &+ (1 - z_2\bar{w}_2)\sum_{\nu=1}^{r} g_\nu(z)\overline{g_\nu(w)} \end{aligned}$$

für alle $z = (z_1, z_2)$ und $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{D}^2$. □

3. Ein Kalkül holomorpher $\mathbb{C}$-wertiger Funktionen

Um Satz 3.2 und Satz 3.3 in der Operatorentheorie anwenden zu können, benötigen wir noch einen Kalkül für holomorphe $\mathbb{C}$-wertige Funktionen.
Sei dazu im Folgenden $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum.
Jede Funktion $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}^2)$ hat eine Potenzreihendarstellung

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^2} a_\alpha z^\alpha$$

für $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2$. Diese Potenzreihenentwicklung konvergiert kompakt gleichmäßig und absolut auf $\mathbb{D}^2$. Für zwei strikte Kontraktionen $S, T \in L(\mathcal{H})$ definiert man dann $f(S,T)$ durch

$$f(S,T) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^2} a_\alpha S^{\alpha_1} T^{\alpha_2}.$$

Für jedes vertauschende Tupel $T = (T_1, \dots, T_n) \in L(\mathcal{H})^n$ von Operatoren kann man ein gemeinsames Spektrum, das sogenannte Taylor-Spektrum, $\sigma(T) \subset \mathbb{C}^n$ so definieren, daß gilt:

(i) $\emptyset \neq \sigma(T) \subset \mathbb{C}^n$ ist kompakt
(ii) Es existiert ein Algebrenhomomorphismus

$$\Phi : \mathcal{O}(\sigma(T)) \to L(\mathcal{H}), \quad f \mapsto \Phi(f) =: f(T)$$

mit

$$\Phi(1) = 1_{\mathcal{H}} \quad \text{und} \quad \Phi(z_i) = T_i \quad (1 \leq i \leq n).$$

Die Abbildung Φ erfüllt außerdem für $f = (f_1, \dots, f_m) \in \mathcal{O}(U)^m$, wobei $U \supset \sigma(T)$ offen sei, den spektralen Abbildungssatz

$$\sigma(f_1(T), \dots, f_m(T)) = f(\sigma(T)).$$

Für $T \in L(\mathcal{H})^n$ vertauschend gilt

$$\sigma(T^*) = \widetilde{\sigma(T)}.$$

Für $f \in \mathcal{O}(U)$ mit $U \supset \sigma(T)$ offen, ist

$$\tilde{f} : \tilde{U} \to \mathbb{C}, \quad \tilde{f}(z) := \overline{f(\bar{z})}$$

analytisch und es gilt

$$f(T)^* = \tilde{f}(T^*).$$

Die Definition und Beweise der wichtigsten Eigenschaften des analytischen Funktionalkalküls in mehreren Variablen findet der Leser etwa in [**EP96**].
Für $T \in L(\mathcal{H})$ definiert

$$\begin{aligned} L_T : L(\mathcal{H}) &\to L(\mathcal{H}) \ , \ X \mapsto TX \\ R_T : L(\mathcal{H}) &\to L(\mathcal{H}) \ , \ X \mapsto XT \end{aligned}$$

die Links- bzw. Rechtsmultiplikation mit T. Offensichtlich ist für zwei vertauschende Tupel $S = (S_1, \dots, S_n) \in L(\mathcal{H})^n$ und $T = (T_1, \dots, T_n) \in L(\mathcal{H})^n$ das Tupel

$$M_{(S,T)} := (L_S, R_T) = (L_{S_1}, \dots, L_{S_n}, R_{T_1}, \dots, R_{T_n}) \in L(L(\mathcal{H}))^{2n}$$

vertauschend. Man kann zeigen (siehe [**Esc88**]), daß in diesem Fall

$$\sigma(M_{(S,T)}) = \sigma(S) \times \sigma(T) \quad (\subset \mathbb{C}^{2n})$$

gilt. Somit läßt sich $M_{(S,T)}$ vermöge des analytischen Funktionalkalküls in Funktionen $f \in \mathcal{O}(\sigma(S) \times \sigma(T))$ einsetzen. Ist $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}^n \times \mathbb{D}^n)$ eine analytische Funktion mit Potenzreihenentwicklung $f(z, w) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^2} a_\alpha z^{\alpha_1} w^{\alpha_2}$ und gilt $\sigma(S) \cup \sigma(T) \subset \mathbb{D}^n$, so folgt

$$\begin{aligned} f(M_{(S,T)})(1_\mathcal{H}) &= (\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^2} a_\alpha L_S^{\alpha_1} R_T^{\alpha_2})(1_\mathcal{H}) \\ &= (\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^2} a_\alpha L_{S^{\alpha_1}} R_{T^{\alpha_2}})(1_\mathcal{H}) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^2} a_\alpha S^{\alpha_1} T^{\alpha_2}. \end{aligned}$$

Hat die Funktion $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}^n \times \mathbb{D}^n)$ die Form

$$f(z, w) = g(z)h(w)$$

mit analytischen Funktionen g und h, dann gilt

$$\begin{aligned} f(M_{(S,T)})(1_\mathcal{H}) &= g(M_{(S,T)})h(M_{(S,T)})(1_\mathcal{H}) \\ &= g(L_S)h(R_T)(1_\mathcal{H}) \\ &= (L_{g(S)} R_{h(T)})(1_\mathcal{H}) \\ &= g(S)h(T). \end{aligned}$$

4. Anwendungen in der Operatorentheorie

Sei T im Folgenden eine strikte Kontraktion auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. In diesem Fall gilt auch $1_{\mathcal{H}} - TT^* > 0$.

Satz 3.6. *Sei T wie oben und φ eine rationale innere Funktion auf $\mathbb{C}$. Dann existieren rationale Funktionen f_ν, $\nu = 1, \dots, n$, auf $\mathbb{C}$, die analytisch auf $\mathbb{D}$ sind, so daß gilt:*

$$1_{\mathcal{H}} - \varphi(T)\varphi(T)^* = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(T)(1_{\mathcal{H}} - TT^*)f_\nu(T)^*.$$

Beweis. Sei φ eine rationale innere Funktion auf $\mathbb{C}$. Dann kann man φ schreiben als $\varphi = \frac{q}{p}$ mit teilerfremden Polynomen p und q auf $\mathbb{C}$. Nach Lemma 3.1 existieren dann rationale Funktionen $f_1, \dots, f_n$ auf $\mathbb{C}$, deren Nenner mit p übereinstimmen, so daß

$$1 - \varphi(z)\overline{\varphi(w)} = (1 - z\bar{w}) \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(z)\overline{f_\nu(w)}$$

für $z, w \in \mathbb{D}$ gilt. Insbesondere ist jedes f_ν analytisch auf $\mathbb{D}$. Nach Definition von $\tilde{\varphi}$ kann man diese Gleichung auch in der Form

$$1 - \varphi(z)\tilde{\varphi}(\bar{w}) = (1 - z\bar{w}) \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(z)\tilde{f}_\nu(\bar{w})$$

für $z, w \in \mathbb{D}$ schreiben. Da z und w unabhängig sind, gilt auch

$$1 - \varphi(z)\tilde{\varphi}(\xi) = (1 - z\xi) \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(z)\tilde{f}_\nu(\xi) = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(z)(1 - z\xi)\tilde{f}_\nu(\xi)$$

für $z, \xi \in \mathbb{D}$.
Die Funktion

$$\Phi(z, \xi) = 1 - \varphi(z)\tilde{\varphi}(\xi) \quad (z, \xi \in \mathbb{D})$$

ist analytisch auf $\mathbb{D}^2$. Dann folgt die Behauptung mit dem im vorherigen Abschnitt eingeführten analytischen Funktionalkalkül

$$\begin{aligned}
1_{\mathcal{H}} - \varphi(T)\varphi(T)^* &= 1_{\mathcal{H}} - \varphi(T)\tilde{\varphi}(T^*) \\
&= \Phi(M_{(T,T^*)})(1_{\mathcal{H}}) \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(L_T)(1_{L(\mathcal{H})} - L_T R_{T^*})\tilde{f}_\nu(R_{T^*})(1_{\mathcal{H}}) \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} L_{f_\nu(T)}(1_{L(\mathcal{H})} - L_T R_{T^*}) R_{\tilde{f}_\nu(T^*)}(1_{\mathcal{H}}) \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(T)(1_{\mathcal{H}} - TT^*) f_\nu(T)^*.
\end{aligned}$$

□

Aus Satz 3.6 folgt die von Neumannsche Ungleichung für die strikte Kontraktion T, denn offensichtlich gilt

$$1_{\mathcal{H}} - \varphi(T)\varphi(T)^* \geq 0$$

und somit

$$\|\varphi(T)\| \leq 1.$$

Sei nun p ein Polynom in einer komplexen Variablen mit $|p(z)| \leq 1$ auf $\overline{\mathbb{D}}$. Dann existiert nach dem Satz von Carathéodory (siehe [**Gar81**, Theorem 2.1]) eine Folge von endlichen Blaschke-Produkten $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$, die auf $\mathbb{D}$ kompakt gleichmäßig gegen p konvergiert. Indem man Satz 3.6 auf die Funktionen φ_n anwendet, erhält man

$$\|p(T)\| = \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(T)\| \leq 1.$$

Daraus erhält man die von Neumannsche Ungleichung auch für beliebige Kontraktionen $T \in L(\mathcal{H})$. Sei dazu p ein Polynom in einer komplexen Variablen mit $\|p\|_{\infty,\mathbb{D}} \leq 1$, so folgt

$$\|p(T)\| = \lim_{r\uparrow 1} \|p(rT)\| \leq 1.$$

Eine analoge Aussage gilt auch für ein Paar von vertauschenden strikten Kontraktionen:

Satz 3.7. *Sei (T_1, T_2) ein Paar von vertauschenden strikten Kontraktionen auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und φ eine rationale innere Funktion auf $\mathbb{D}^2$. Dann existieren rationale Funktionen $f_1, \ldots, f_s$ und $g_1, \ldots, g_s$ auf $\mathbb{C}^2$, die auf $\mathbb{D}^2$ analytisch sind, so daß die folgende Gleichheit gilt:*

$$\begin{aligned} 1_{\mathcal{H}} - \varphi(T_1,T_2)\varphi(T_1,T_2)^* &= \sum_{\nu=1}^{s} f_\nu(T_1,T_2)(1_{\mathcal{H}} - T_1T_1^*)f_\nu(T_1,T_2)^* \\ &+ \sum_{\nu=1}^{s} g_\nu(T_1,T_2)(1_{\mathcal{H}} - T_2T_2^*)g_\nu(T_1,T_2)^*. \end{aligned}$$

Beweis. Sei φ eine rationale innere Funktion auf $\mathbb{D}^2$. Dann kann man φ schreiben als $\varphi = \frac{q}{p}$ mit Polynomen p und q. Dann existieren nach Korollar 3.5 rationale Funktionen $f_1, \ldots, f_s$ und $g_1, \ldots, g_s$ auf $\mathbb{C}^2$, deren Nenner mit p übereinstimmen, so daß

$$1 - \varphi(z)\overline{\varphi(w)} = (1 - z_1\bar{w}_1)\sum_{\nu=1}^{s} f_\nu(z)\overline{f_\nu(w)} + (1 - z_2\bar{w}_2)\sum_{\nu=1}^{s} g_\nu(z)\overline{g_\nu(w)}$$

für $z = (z_1, z_2)$ und $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{D}^2$ gilt. Insbesondere ist jedes f_ν und jedes g_ν analytisch auf $\mathbb{D}^2$. Nach Definition von $\tilde{\varphi}$ kann man diese Gleichung auch in der Form

$$1 - \varphi(z)\tilde{\varphi}(\bar{w}) = (1 - z_1\bar{w}_1)\sum_{\nu=1}^{s} f_\nu(z)\tilde{f}_\nu(\bar{w}) + (1 - z_2\bar{w}_2)\sum_{\nu=1}^{s} g_\nu(z)\tilde{g}_\nu(\bar{w})$$

für $z = (z_1, z_2)$ und $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{D}^2$ schreiben. Da z und w unabhängig sind, gilt auch

$$\begin{aligned} 1 - \varphi(z)\tilde{\varphi}(\xi) &= (1 - z_1\xi_1)\sum_{\nu=1}^{s} f_\nu(z)\tilde{f}_\nu(\xi) + (1 - z_2\xi_2)\sum_{\nu=1}^{s} g_\nu(z)\tilde{g}_\nu(\xi) \\ &= \sum_{\nu=1}^{s} f_\nu(z)(1 - z_1\xi_1)\tilde{f}_\nu(\xi) + \sum_{\nu=1}^{s} g_\nu(z)(1 - z_2\xi_2)\tilde{g}_\nu(\xi) \end{aligned}$$

für $z, \xi \in \mathbb{D}^2$. Die Funktion

$$\Phi(z, \xi) := 1 - \varphi(z)\tilde{\varphi}(\xi)$$

ist analytisch auf $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2$. Dann folgt die Behauptung mit dem im vorherigen Abschnitt eingeführten Funktionalkalkül für das Paar $T = (T_1, T_2)$ von vertauschenden strikten Kontraktionen wie im Beweis von Satz 3.6:

$$
\begin{aligned}
&1_{\mathcal{H}} - \varphi(T)\varphi(T)^* \\
&= 1_{\mathcal{H}} - \varphi(T)\tilde{\varphi}(T^*) \\
&= \Phi(M_{(T,T^*)})(1_{\mathcal{H}}) \\
&= \sum_{\nu=1}^{s} f_\nu(T)(1_{\mathcal{H}} - T_1T_1^*)\tilde{f}_\nu(T^*) + \sum_{\nu=1}^{s} g_\nu(T)(1_{\mathcal{H}} - T_2T_2^*)\tilde{g}_\nu(T^*) \\
&= \sum_{\nu=1}^{s} f_\nu(T)(1_{\mathcal{H}} - T_1T_1^*)f_\nu(T)^* + \sum_{\nu=1}^{s} g_\nu(T)(1_{\mathcal{H}} - T_1T_1^*)g_\nu(T)^*.
\end{aligned}
$$

□

Aus Satz 3.7 folgt die Andosche Ungleichung für das Paar (T_1, T_2) von vertauschenden strikten Kontraktionen:
Sei p ein Polynom in zwei komplexen Variablen mit $\|p\|_{\infty,\mathbb{D}^2} \leq 1$. Da der Satz von Carathéodory auch mehrdimensional gilt (siehe [**Rud69**, S.126]), existiert eine Folge $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ von rationalen inneren Funktionen auf $\mathbb{D}^2$, die auf $\mathbb{D}^2$ kompakt gleichmäßig gegen p konvergiert. Aus Satz 3.7 folgt $\|\varphi_n(T_1, T_2)\| \leq 1$ und somit gilt

$$\|p(T_1, T_2)\| = \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(T_1, T_2)\| \leq 1$$

genau wie im eindimensionalen Fall. Daraus erhält man auch für ein beliebiges Paar von vertauschenden Kontraktionen $T \in L(\mathcal{H})^2$ die Andosche Ungleichung. Sei dazu p ein Polynom in zwei komplexen Variablen, so folgt

$$\|p(T)\| = \lim_{r\uparrow 1} \|p\|_{\infty,\mathbb{D}^2} \Big\| \frac{p}{\|p\|_{\infty,\mathbb{D}^2}}(rT) \Big\| \leq \|p\|_{\infty,\mathbb{D}^2}.$$

Bemerkung. Für Polynome in $N \geq 3$ Variablen ist Satz 3.3 falsch. Denn würde ein solcher Satz gelten, dann würde daraus wie im oben beschriebenen zweidimensionalen Fall die Andosche Ungleichung für ein beliebiges Tupel von vertauschenden Kontraktionen folgen. Wir wissen aber, daß ein solches Analogon der Andoschen Ungleichung falsch ist (siehe [**Var74**]).

Wie eingangs erwähnt, ist eine interessante offene Frage (vgl. [**CW99**]), ob es möglich ist, einen direkten Beweis für Satz 3.3 zu geben, der nicht die Andosche Ungleichung für Paare von vertauschenden Kontraktionen benutzt. Wir schließen die Arbeit mit einigen Anmerkungen zu diesem Problem.

Die von Rudin in [**Rud69**, Satz 5.5.1] gegebene Version des Satzes von Carathéodory zeigt, daß jede Funktion $f \in H^\infty(\mathbb{D}^n)$ auf $\mathbb{D}^n$ kompakt gleichmäßig durch eine Folge innerer Funktionen in $A(\mathbb{D}^n)$ approximiert werden kann. Für $n = 1$ sind die inneren Funktionen in $A(\mathbb{D})$ genau die endlichen Blaschke-Produkte. Nach Satz 5.2.5 in [**Rud69**] sind allgemeiner die inneren Funktionen in $A(\mathbb{D}^n)$ genau die rationalen Funktionen der Form

$$f(z) = \frac{m(z)\tilde{p}(\frac{1}{z})}{p(z)},$$

wobei p ein Polynom in n komplexen Variablen ist, das keine Nullstelle in $\bar{\mathbb{D}}^n$ hat, und m ein Monom ist so, daß $m(z)\tilde{p}(\frac{1}{z})$ ein Polynom in n komplexen Variablen ist. Es genügt also, Satz 3.3 zu beweisen für den Fall, daß p ein Polynom in zwei komplexen Variablen ohne Nullstellen in $\bar{\mathbb{D}}^2$ ist und daß q ein Polynom in zwei komplexen Variablen von der Form

$$q(z) = m(z)\tilde{p}(\frac{1}{z})$$

mit einem geeigneten Monom m ist. Für einfache Beispiele der Form

$$p(z) = 1 + az_1 + bz_2 \quad (a, b \in \mathbb{C} : |a| + |b| < 1)$$

und

$$m(z) = z_1 z_2$$

haben Cole und Wermer in [**CW99**] die Lösbarkeit dieses Problems durch explizite Rechnungen nachgeprüft. Ob das Problem allgemein mit direkten Methoden lösbar ist, muß an dieser Stelle offen bleiben.

<u>Offenes Problem</u>: Sie p ein Polynom in zwei komplexen Variablen ohne Nullstellen in $\bar{\mathbb{D}}^2$ und sei $m(z) = z^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{N}^2)$ ein Monom mit der Eigenschaft, daß $q(z) = m(z)\tilde{p}(\frac{1}{z})$ ein Polynom in zwei komplexen Variablen ist. Man zeige ohne Benutzung der Andoschen Ungleichung, daß endlich viele Polynome $A_1, \ldots, A_r, B_1, \ldots, B_r$ in zwei komplexen Variablen existieren mit

$$|p(z)|^2 - |q(z)|^2 = (1 - |z_1|^2) \sum_{\nu=1}^{r} |A_\nu(z)|^2 + (1 - |z_2|^2) \sum_{\nu=1}^{r} |B_\nu(z)|^2$$

für alle $z \in \mathbb{C}^2$.

Literaturverzeichnis

[Agl88] J. Agler. An abstract approach to model theory. *Surveys of some recent results in operator theory*, 2:1–23, 1988.

[Agl90] J. Agler. On the representation of certain holomorphic functions defined on a polydisc. *Operator Theory: Advances and Applications*, 48:47–66, 1990.

[AM99] J. Agler and J. E. McCarthy. Nevanlinna-pick interpolation on the bidisk. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 506:191–204, 1999.

[And63] T. Ando. On a pair of commuting contractions. *Acta Sci. Math.*, 24:88–90, 1963.

[Aro50] N. Aronzajn. Theory of reproducing kernels. *Trans. Am. Math. Soc.*, 68:337–404, 1950.

[Bar02] C. Barbian. Positivitätsbedingungen funktionaler Hilberträume und Anwendungen in der mehrdimensionalen Operatorentheorie. Diplomarbeit, Universität des Saarlandes, 2002.

[BCR84] C. Berg, J.P.R. Christensen, and P. Ressel. *Harmonic Analysis on Semigroups*. Springer Verlag, New York, 1984.

[CD75] M.J. Crabb and A.M. Davie. von neumann's inequality for hilbert space operators. *Bull. London Math. Soc.*, 48:49–50, 1975.

[Con81] J.B. Conway. *Subnormal Operators*. Pitman Research Notes in Mathematics, Vol.51, Boston, 1981.

[Con85] J.B. Conway. *A course in functional analysis*. Springer Verlag, New York, 1985.

[CW99] B.J. Cole and J. Wermer. Ando's theorem and sums of squares. *Indiana Univ. Math. J.*, 48:767–791, 1999.

[EP96] J. Eschmeier and M. Putinar. *Spectral decompositions and analytic sheaves*. London Math. Society Monographs, Vol.10, Clarendon Press, Oxford, 1996.

[EP02] J. Eschmeier and M. Putinar. Spherical contrations and interpolation problems on the unit ball. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 542:219–236, 2002.

[Esc88] J. Eschmeier. Tensor products and elementary operators. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 390:47–66, 1988.

[Gar81] J. Garnett. *Bounded analytic functions*. Academic Press, New York, 1981.

[Jar81] H. Jarchow. *Locally convex spaces*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1981.

[Kle55] V.L. Klee. Separation properties of convex cones. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 6:313–318, 1955.

[Kra82] S.G. Krantz. *Function Theory of Several Complex Variables*. Wiley-Interscience Publication, New York, 1982.

[Par70] S. Parrott. Unitary dilations for commuting contractions. *Pacific Math. J.*, 34:481–490, 1970.

[Pau86] V. I Paulsen. *Completely bounded maps and dilations*. Pitman Research Notes in Mathematics, Vol.146, New York, 1986.

[Ran86] R.M. Range. *Holomorphic functions and integral representations in several complex variables.* Springer Verlag, New York, 1986.

[Rud69] W. Rudin. *Function theory on polydiscs.* Benjamin, New York, 1969.

[Rud91] W. Rudin. *Functional Analysis.* McGraw-Hill International Editions, New York, 1991.

[Sak71] S. Sakai. *C^*-algebras and W^*-algebras.* Springer Verlag, Berlin, 1971.

[Sch97] H. Schröder. *Funktionalanalysis.* Akademie Verlag, Berlin, 1997.

[SN53] B. Sz.-Nagy. Sur les contractions de l'espace de hilbert. *Acta Sci. Math.*, 6:87–92, 1953.

[SN74] B. Sz.-Nagy. *Unitary dilations of Hilbert space operators and related topics.* American Mathematical Society, Providence, 1974.

[Var74] N. Th. Varopoulos. On an inequality of von neumann and an application of the metric theory of tensor products to operators theory. *J. Funct. Anal.*, 16:83–100, 1974.

[Wer97] D. Werner. *Funktionalanalysis.* Springer Verlag, Berlin, 1997.