Bachelorarbeit

Ein Satz über Rand-Darstellungen von Arveson

Sebastian Toth

Datum der Abgabe: 04.05.2017

Betreuung: Prof. Dr. Jörg Eschmeier

Fakultät 6 - Mathematik und Informatik

Universität des Saarlandes

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich die Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Saarbrücken, den 4. Mai 2017

Sebastian Toth

Danksagung

Ich danke meinen Kommilitonen und Freunden, mit denen ich mich im Studium über mathematische Probleme austauschen konnte, sowie meiner Familie, die mich während des Studiums immer unterstützt hat.

Bei Dominik Schillo möchte ich mich für die sehr gute Betreuung der Bachelorarbeit bedanken. Er hatte immer ein offenes Ohr für Fragen und Probleme, die bei der Arbeit entstanden, und immer eine sehr gute Antwort darauf.

Ich danke Daniel Kraemer und Sebastian Langendörfer, die ich auch jederzeit zu mathematischen Themen befragen durfte und die immer eine sehr gute Lösung parat hatten.

Zu Letzt möchte ich Herrn Prof. Eschmeier für die sehr gute Betreuung und das interessante Thema bedanken, das mir einen guten ersten Einblick in die Theorie der von-Neumann-Algebren und vollständig positiven Abbildungen gebracht hat.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **1**

1 Operatortopologien **5**

2 Grundlegende Resultate **9**
2.1 Von-Neumann-Algebren 9
2.2 Vollständig positive Abbildungen 13

3 Projektionen **17**

4 Darstellungen **27**
4.1 Darstellungen auf L(H) 27
4.2 Die universelle Darstellung 39
4.3 Rand-Darstellungen 40

5 Der zentrale Träger **41**

6 Arvesons Satz über Rand-Darstellungen **47**

7 Wesentlich normale Operatoren **59**

Literaturverzeichnis **61**

Einleitung

Bei seinen Studien zu Dilatationen im Jahre 1969 stellte sich für William Arveson die Frage nach einem Analogon zum Choquet-Rand in der nicht-kommutativen Operatorentheorie. Der Choquet-Rand spielt in der Theorie der kommutativen Banachalgebren eine wichtige Rolle. Für einen kompakten Hausdorffraum X und eine abgeschlossene Teilalgebra $A \subset C(X)$ der stetigen Funktionen von X nach $\mathbb{C}$ mit $1 \in A$, die die Punkte von X trennt, definierte Gustav Choquet dazu sogenannte Choquet-Punkte. Ein Punkt $x \in X$ ist dabei genau ein Choquet-Punkt, falls das einzige Darstellende Maß $\mu_{A,x}$ für die Punktauswertung in x, das heißt das einzige reguläre Borelmaß auf X mit

$$f(x) = \int_X f d\mu_{A,x} \quad (f \in A),$$

das Dirac-Maß im Punkt x ist. Man nennt die Menge aller Choquet-Punkte von X den Choquet-Rand $\partial_{\mathrm{Ch}}(A)$.

Die Punktauswertung für x

$$\hat{x} \colon C(X) \to \mathbb{C}, f \mapsto f(x)$$

heißt Rand-Darstellung, falls für jedes positive lineare Funktional

$$\varphi \colon C(X) \to \mathbb{C}$$

mit $\varphi|_A = \hat{x}|_A$ folgt, dass $\varphi = \hat{x}$ gilt. Mit dem Rieszschen-Darstellungssatz überlegt man sich, dass

$$\partial_{\mathrm{Ch}}(A) = \{x \in X;\ \hat{x} \colon C(X) \to \mathbb{C} \text{ ist eine Rand-Darstellung}\}$$

ist.

Betrachtet man nun die kommutative C^*-Algebra $C(X)$, dann sind sind die Punktauswertungen

$$\hat{x} \colon C(X) \to \mathbb{C}, f \mapsto f(x)\ (x \in X)$$

bis auf kanonische Identifizierung die irreduziblen Darstellungen. Jedes positve lineare Funktional

$$\varphi \colon C(X) \to \mathbb{C}$$

ist außerdem vollständig positiv (vgl. Abschnitt 2.2) und mit dem Satz von Stone-Weierstraß überlegt man sich, dass $C^*(A) = C(X)$ gilt.

Allgemeiner definierte Arveson nun auch für den nicht kommutativen Fall den Begriff der Rand-Darstellung.

Sei $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}$ ein Operatorraum (vgl. Abschnitt 2.2) so, dass $\mathcal{B} = C^*(\mathcal{M})$ von $\mathcal{M}$ erzeugt wird. Man nennt eine irreduzible Darstellung (vgl. Definition 4.1)

$$\pi \colon \mathcal{B} \to L(H)$$

Rand-Darstellung für $\mathcal{M}$, wenn die einzige vollständig positive Abbildung

$$\varphi \colon \mathcal{B} \to L(H)$$

mit $\varphi|_{\mathcal{M}} = \pi|_{\mathcal{M}}$ die Abbildung $\varphi = \pi$ selbst ist.

Im Unterschied zum kommutativen Fall macht es für nicht kommutative C^*-Algebren Sinn sich zu überlegen, wann die Identität eine Rand-Darstellung ist. Diese Frage wurde von Arveson 1969 beantwortet und soll im Folgenden Gegenstand der Arbeit sein. Dabei ist vor allem interessant, dass die Kriterien dafür, dass die Identität eine Rand-Darstellung ist, oft einfach nachzuprüfen sind.

Im ersten Kapitel wiederholen wir zunächst einige Grundlagen über Operatortopologien, um von-Neumann-Algebren und deren Eigenschaften sowie ultraschwach stetige Abbildungen besser zu verstehen. Diese werden wir in den folgenden Kapiteln häufig gebrauchen.

In Kapitel zwei geht es um grundlegende Resultate über von-Neumann-Algebren und vollständig positive Abbildungen. Dabei ist zum Beispiel Schurs Lemma interessant. Mit diesem lässt sich folgern, dass die von einer irreduziblen Menge in den stetig linearen Operatoren erzeugte von-Neumann-Algebra gleich allen stetig linearen Operatoren ist. Arveson nutzt in seinem Beweis des Satzes über Rand-Darstellungen, diesen und viele weitere Sätze aus diesem Teil der Arbeit.

Das dritte Kapitel behandelt orthogonale Projektionen auf Hilberträumen. Dabei ist für das Hauptresultat vor allem die sogenannte Trägerprojektion wichtig, deren orthogonales Komplement die größte Projektion im Kern einer ultraschwach stetigen vollständig positiven Abbildung ist. Wir wollen uns in diesem Kapitel auch überlegen, dass eine solche Projektion existiert. Die Eigenschaften der Projektionen werden unter anderem dazu verwendet, eine Fixpunkteigenschaft im Beweis des Hauptresultates zu zeigen.

In Kapitel vier werden wir zeigen, dass sich eine Darstellung, die als Definitionsbereich die stetig linearen Operatoren hat, in zwei Teildarstellungen zerlegen lässt, wobei eine die kompakten Operatoren zu Null macht und die andere ein Vielfaches der Identität ist. Dies wollen wir in Kapitel sechs im Beweis des Hauptresultates verwenden. Arveson nutzt in seinem Satz über Rand-Darstellungen außerdem aus, dass sich unter geeigneten Voraussetzungen, die von der universellen Darstellung herkommen, stetige Funktionale ultraschwach stetig fortsetzen lassen. In diesem Teil werden auch noch einige Grundlagen über Darstellungen wiederholt.

Im fünften Kapitel geht es nochmals um Projektionen, nämlich um den zentralen Träger einer orthogonalen Projektion bezüglich einer von-Neumann-Algebra. Dieser ist

die kleinste Projektion größer gleich der ursprünglichen Projektion im Zentrum der von-Neumann-Algebra. Diese Eigenschaften der Projektion wird auch verwendet, um die oben genannte Fixpunkteigenschaft im Beweis des Hauptresultates zu zeigen.

Das sechste Kapitel behandelt schließlich Arvesons Satz über Rand-Darstellungen, welcher besagt, dass unter bestimmten Voraussetzungen die Identität genau dann eine Rand-Darstellung ist, wenn die Quotientenabbildung in die Calkin-Algebra keine vollständige Isometrie ist.

Im letzten Kapitel geben wir noch eine kleine Anwendung des Satzes über Rand-Darstellungen für wesentlich normale Operatoren.

1 Operatortopologien

In diesem Kapitel erinnern wir an einige grundlegende Operatortopologien. Diese spielen vor allem bei der Untersuchung von von-Neumann-Algebren und deren Eigenschaften eine wichtige Rolle. Dabei ist die ultraschwache Topologie hervorzuheben, die entweder als w*-Topologie bezüglich der Spurdualität oder durch ihre Halbnormen charakterisiert werden kann.

Sei H ein komplexer Hilbertraum, $L(H)$ die Algebra der linearen beschränkten Operatoren auf H, $K(H)$ bezeichne die kompakten Operatoren auf H und $C_1(H)$ die Spurklasseoperatoren auf H.

Definition 1.1. Die *starke Operatortopologie* (τ_{SOT}) auf $L(H)$ ist die lokalkonvexe Topologie (vgl. [14]) erzeugt von den Halbnormen

$$\|\cdot\|_x : L(H) \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ T \mapsto \|Tx\| \quad (x \in H).$$

Die *schwache Operatortopologie* (τ_{WOT}) auf $L(H)$ ist die lokalkonvexe Topologie erzeugt von den Halbnormen

$$\|\cdot\|_{x,y} : L(H) \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ T \mapsto |\langle Tx, y\rangle| \quad (x, y \in H).$$

Die *ultrastarke Operatortopologie* (τ_{US}) auf $L(H)$ ist die lokalkonvexe Topologie erzeugt von den Halbnormen

$$\|\cdot\|_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}} : L(H) \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ T \mapsto \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|Tx_n\|^2\right)^{1/2} \qquad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(H).$$

Die *ultraschwache Operatortopologie* (τ_{UW}) auf $L(H)$ ist die lokalkonvexe Topologie erzeugt von den Halbnormen

$$\|\cdot\|_{(x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}}} : L(H) \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ T \mapsto \left|\sum_{n=0}^{\infty} \langle Tx_n, y_n\rangle\right| \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(H).$$

Definition 1.2. Eine unitale C^*-Unteralgebra $\mathcal{A}$ von $L(H)$ heißt *von-Neumann-Algebra*, falls $\mathcal{A}$ in der ultraschwachen Operatortopologie abgeschlossen ist.

Satz 1.3. *Sei $\mathcal{A} \subset L(H)$ eine involutive Algebra. Dann gilt*

$$\overline{\mathcal{A}}^{\mathrm{SOT}} = \overline{\mathcal{A}}^{\mathrm{WOT}} = \overline{\mathcal{A}}^{\mathrm{US}} = \overline{\mathcal{A}}^{\mathrm{UW}}.$$

Beweis. [10, Theorem 4.2] □

Seien $\mathcal{A}$ eine von-Neumann-Algebra auf H. Wir definieren

$$\mathcal{A}_* = \{f\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C};\ f \text{ ist linear und ultraschwach stetig}\}.$$

Lemma 1.4. *Es ist $\mathcal{A}_* \subset \mathcal{A}'$.*

Beweis. Sei $f \in \mathcal{A}_*$, $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}$, $T \in \mathcal{A}$ mit $\lim_{k\to\infty} \|T_k - T\| = 0$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(H)$. Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{\infty} \langle (T_k - T)x_n, y_n\rangle\right| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |\langle (T_k - T)x_n, y_n\rangle| \\ &\leq \|T_k - T\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|\,\|y_n\|\right) \\ &\leq \|T_k - T\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|y_n\|\right)^{1/2} \\ &\overset{k\to\infty}{\to} 0.\end{aligned}$$

Aus der ultraschwachen Stetigkeit von f folgt

$$|f(T_k) - f(T)| \overset{k\to\infty}{\to} 0.$$

□

Die folgenden Isomorphismen dienen dazu, dass wir den Prädual einer von-Neumann-Algebra $\mathcal{A}$ im Folgenden mit $\mathcal{A}_*$ identifizieren können.

Satz 1.5. *Die Abbildung*

$$\varphi\colon L(H) \to C_1(H)',\ T \mapsto \operatorname{tr}(\cdot T)$$

mit

$$\operatorname{tr}(\cdot T)\colon C_1(H) \to \mathbb{C},\ S \mapsto \operatorname{tr}(ST) \text{ für alle } T \in L(H)$$

definiert einen isometrischen Isomorphismus und ein Homöomorphismus, wenn man $L(H)$ mit der ultraschwachen Topologie und $C_1(H)'$ mit seiner schwach-$*$-Topologie versieht.

Beweis. [8, Theorem 19.2] □

Satz 1.6. *Die Abbildung*

$$\phi\colon \left(C_1(H), \|\cdot\|_{C_1(H)}\right) \to \left(L(H)_*, \|\cdot\|_{L(H)'}\right),\ S \mapsto \operatorname{tr}(S\cdot)$$

mit

$$\operatorname{tr}(S\cdot)\colon L(H) \to \mathbb{C},\ T \mapsto \operatorname{tr}(ST) \text{ für alle } S \in C_1(H)$$

ist ein isometrischer Isomorphismus.

Beweisidee. Sei

$$j\colon C_1(H) \hookrightarrow C_1(H)'',\ T \mapsto j(T)(x') = x'(T)$$

die kanonische Isometrie von $C_1(H)$ in den Bidual $C_1(H)''$. Als Folgerung von Satz 1.5 erhält man, dass die Komposition

$$\phi\colon C_1(H) \overset{j}{\hookrightarrow} C_1(H)'' \overset{\varphi}{\to} L(H)'$$

eine Isometrie ist mit $\operatorname{Im}\Phi = L(H)_*$. Offensichtlich ist

$$\phi(S)(T) = \operatorname{tr}(ST) \quad (S \in C_1(H), T \in L(H)).$$

□

Sei

$${}^{\perp}\mathcal{A} = \{f \in L(H)_*;\ f(T) = 0 \text{ für alle } T \in \mathcal{A}\}$$

Man sieht leicht ein, dass ${}^{\perp}\mathcal{A}$ $\|\cdot\|_{L(H)'}$-abgeschlossen ist.

Korollar 1.7. *Die Abbildung*

$$\phi_{\mathcal{A}}\colon \left(C_1(H)/\phi^{-1}({}^{\perp}\mathcal{A}), \|\cdot\|_{C_1(H)/\phi^{-1}({}^{\perp}\mathcal{A})}\right) \to (\mathcal{A}_*, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}),\ [S] \mapsto \operatorname{tr}(S\cdot)$$

mit

$$\operatorname{tr}(S\cdot)\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C},\ T \mapsto \operatorname{tr}(ST) \textit{ für alle } S \in C_1(H)$$

ist ein isometrischer Isomorphismus.

Korollar 1.8. *Die Abbildung*

$$\varphi_{\mathcal{A}}\colon \mathcal{A} \to \left(C_1(H)/\phi^{-1}({}^{\perp}\mathcal{A})\right)',\ T \mapsto \operatorname{tr}(\cdot T)$$

mit

$$\operatorname{tr}(\cdot T)\colon C_1(H)/\phi^{-1}({}^{\perp}\mathcal{A}) \to \mathbb{C},\ [S] \mapsto \operatorname{tr}(ST) \textit{ für alle } T \in \mathcal{A}$$

definiert einen isometrischen Isomorphismus.

Beweisidee. Da $\mathcal{A} \subset L(H)$ als von-Neumann-Algebra ultraschwach abgeschlossen ist, ist $\varphi(\mathcal{A}) \subset C_1(H)'$ w*-abgeschlossen. Also definiert die Komposition

$$(*)\ \mathcal{A} \overset{\varphi}{\to} \varphi(\mathcal{A}) = \left({}^{\perp}\varphi(\mathcal{A})\right)^{\perp} \overset{\cong}{\to} \left(C_1(H)/{}^{\perp}\varphi(\mathcal{A})\right)'$$

einen isometrischen Isomorphismus. Hierbei ist die zweite Abbildung die Umkehrabbildung des isometrischen Isomorphismus aus [12, Satz 6.15 (i)]. Man überlegt sich, dass für den isometrischen Isomorphismus

$$\phi\colon C_1(H) \to L(H)_*$$

die Identität

$$\phi({}^{\perp}\varphi(\mathcal{A})) = {}^{\perp}\mathcal{A}$$

gilt. Also ist der obige isometrische Isomorphismus $(*)$ genau $\varphi_{\mathcal{A}}$. □

Die obigen Sätze zeigen, dass sich die ultraschwache Topologie τ_{UW} auf $L(H)$ mit der w*-Topologie τ_{w^*} auf $C_1(H)'$ identifizieren lässt. Daher schreiben wir im Folgenden τ_{w^*} für τ_{UW}.

Wir betrachten nun noch einige grundlegende Eigenschaften von von-Neumann -Algebren, die im Folgenden nützlich sein werden.

Satz 1.9. *Auf normbeschränkten Mengen stimmen die* WOT*-Topologie und die* w*-*Topologie überein.*

Beweis. [7, Proposition I.2.5] □

Satz 1.10 (Dichtheitssatz von Kaplansky 1)**.** *Falls $\mathcal{A} \subset L(H)$ eine von-Neumann-Algebra ist, dann ist die Einheitskugel von $\mathcal{A}$* WOT*-abgeschlossen.*

Beweis. [21, Abschnitt 19.3, Theorem 19.5] □

Korollar 1.11 (Dichtheitssatz von Kaplansky 2)**.** *Falls $\mathcal{A} \subset L(H)$ eine C^*-Algebra ist, dann ist die Einheitskugel von $\mathcal{A}$* w*-*dicht in der Einheitskugel des* WOT*-Abschlusses von A.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 1.10 und Satz 1.9 □

Sei X ein Banachraum. Dann bezeichnen wir mit

$$\mathrm{ball}(X, c) = \{x \in X;\ \|x\| \leq c\}$$

die Kugel in X um 0 mit Radius c und mit

$$\mathrm{ball}(X) = \mathrm{ball}(X, 1)$$

die Einheitskugel auf X.

Im Folgenden sei τ_{w^*} die w*-Topologie.

Satz 1.12. *Seien X, Y Banachräume und sei $S\colon Y' \to X'$ stetig linear. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) S ist w*-stetig*

(b) $S\colon (\mathrm{ball}(Y'), \tau_{\mathrm{w}^*}) \to (X', \tau_{\mathrm{w}^*})$ ist stetig

Beweis. [13, Lemma 1.16] □

2 Grundlegende Resultate

Wir benötigen einige Grundlegende Resultate über von-Neumann-Algebren die beim Beweis des Hauptsatzes der Arbeit eine wichtige Rolle spielen werden. Außerdem werden in diesem Kapitel vollständig positive Abbildungen und einige wichtige Sätze, wie der Arvesonsche Fortsetzungssatz, eingeführt.

2.1 Von-Neumann-Algebren

Seien H ein komplexer Hilbertraum.

Sei $\mathcal{M} \subset L(H)$. Im Folgenden bezeichne

$$\mathcal{M}' = \{\, T \in L(H)\, ;\, TS = ST \text{ für alle } S \in \mathcal{M}\}$$

den *Kommutanten* von $\mathcal{M}$.
Sei M eine Menge. Dann bezeichnen wir mit Id_M die Identität auf M.

Satz 2.1. *Sei $\mathcal{A} \subset L(H)$ eine unitale C^*-Unteralgebra. Dann ist $\mathcal{A}$ genau dann eine von-Neumann-Algebra, wenn $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$ gilt.*

Beweis. [21, Abschnitt 18.3. Theorem 18.7] □

Definition 2.2. Eine von-Neumann-Algebra $\mathcal{A}$ heißt *Faktor*, falls $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}' = \mathbb{C}\,\mathrm{Id}_H$ gilt.

Definition 2.3. Sei X ein Banachraum. Dann definieren wir durch

$$j\colon X \to X'',\ j(x)(x') = x'(x)$$

die kanonische Isometrie von X in den Bidual X''.

Proposition 2.4. *Seien X, Y Banachräume, $S\colon Y' \to X'$ linear. Dann gilt: S ist genau dann* w*-stetig, wenn ein $T \in L(X,Y)$ existiert mit $S = T'$.*

Beweis. Sei $S\colon Y' \to X'$ linear und w*-stetig. Da S w*-stetig ist, ist $j(x) \circ S$ für jedes $x \in X$ w*-stetig. Nach [12, Lemma 7.14] gilt deshalb $j(x) \circ S \in j(Y)$ für jedes $x \in X$. Daher ist

$$T\colon X \to Y,\ x \to j^{-1}(j(x) \circ S)$$

wohldefiniert. Als Verkettung stetiger Abbildungen ist $T \in L(X,Y)$ und man rechnet leicht nach, dass $T' = S$ gilt.

Sei nun $T \in L(X,Y)$ und $S = T'$. Seien $(y'_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ein Netz in Y' und $y' \in Y'$ mit $\tau_{\mathrm{w}^*}\text{-}\lim_\alpha y'_\alpha = y'$, dann gilt für jedes $y \in Y$ $\lim_\alpha y'_\alpha(y) = y'(y)$. Also folgt

$$\lim_\alpha Sy'_\alpha(x) = y'_\alpha(Tx) = y'(Tx) = Sy'(x).$$

Somit ist S w*-stetig.

□

Proposition 2.5. *Seien X, Y Banachräume und $T \in L(X,Y)$. Dann ist $\operatorname{Im} T'$ genau dann normabgeschlossen, wenn $\operatorname{Im} T'$ w*- abgeschlossen ist.*

Beweis. [12, Korollar 8.8.] □

Proposition 2.6. *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ C^*-Algebren, $M \subset \mathcal{A}$ und $\pi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein $*$-Homomorphismus. Dann gilt $\pi(C^*(M)) = C^*(\pi(M))$.*

Beweis. $\pi(C^*(M)) \subset C^*(\pi(M))$ sieht man leicht ein, da $*$-Homomorphismen stetig sind. Für $C^*(\pi(M)) \subset \pi(C^*(M))$ genügt es zu zeigen, dass $\pi(C^*(M))$ eine C^*-Algebra ist. Dass $\pi(C^*(M))$ normabgeschlossen ist folgt aus [21, Theorem 11.1]. Den Rest rechnet man leicht nach. □

Der folgende Satz ist wichtig, wenn wir Aussagen über die vom Bild eines ultraschwach stetigen $*$-Homorphismus erzeugte von-Neumann-Algebra treffen wollen.

Proposition 2.7. *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ von-Neumann-Algebren, $M \subset \mathcal{A}$ und $\pi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein ultraschwach stetiger $*$-Homomorphismus. Dann gilt $\pi(W^*(M)) = W^*(\pi(M))$.*

Beweis. $\pi(W^*(M)) \subset W^*(\pi(M))$ sieht man leicht ein. Für $W^*(\pi(M)) \subset \pi(W^*(M))$ genügt es zu zeigen, dass $\pi(W^*(M))$ eine von-Neumann-Algebra ist. Wegen Proposition 2.6 gilt $\pi(C^*(M)) = C^*(\pi(M))$. Aus Proposition 2.4 und Proposition 2.5 folgt, dass $\pi(W^*(M))$ ultraschwach abgeschlossen ist. Damit ist $\pi(W^*(M))$ eine von-Neumann-Algebra. □

Im Folgenden wollen wir eine Version von Schur's Lemma zeigen, das eine Verbindung zwischen irreduziblen Mengen und von diesen erzeugten von-Neumann-Algebren herstellt.
Sei $\mathcal{M} \subset L(H)$. Mit

$$\begin{aligned}\operatorname{Red}(\mathcal{M}) = \{&H_0 \subset H \text{ abgeschlossener Teilraum ;}\\ &TH_0 \subset H_0 \text{ und } T^*H_0 \subset H_0 \text{ für alle } T \in \mathcal{M}\}\end{aligned}$$

bezeichnen wir die Menge aller reduzierenden Teilräume von $\mathcal{M}$. $\mathcal{M}$ heißt *irreduzibel*, falls $\operatorname{Red}(\mathcal{M}) = \{0, H\}$ gilt.

Bemerkung 2.8. Eine einfache Überlegung zeigt, dass $\mathcal{S} \subset L(H)$ genau dann irreduzibel ist, wenn $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*$ irreduzibel ist. Dabei bezeichne

$$\mathcal{S}^* = \{\ S^*\ ;\ S \in \mathcal{S}\}.$$

Proposition 2.9. *Sei $\mathcal{M} \subset L(H)$. Sei $K \subset H$ ein abgeschlossener Untervektorraum von H und $P_K \in L(H)$ die orthogonale Projektion auf K. Dann gilt: K ist genau dann invariant unter $\mathcal{M} \cup \mathcal{M}^*$, wenn $P_K \in (\mathcal{M} \cup \mathcal{M}^*)'$ ist.*

Beweis. Sei K invariant unter $\mathcal{M} \cup \mathcal{M}^*$. Dann gilt $TP_K = P_K T P_K$ für alle $T \in \mathcal{M} \cup \mathcal{M}^*$. Also ist

$$P_K T = (T^* P_K)^* = (P_K T^* P_K)^* = P_K T P_K$$

und daher folgt $TP_K = P_K T$ für alle $T \in \mathcal{M} \cup \mathcal{M}^*$.

Umgekehrt gelte $TP_K = P_K T$ für alle $T \in \mathcal{M} \cup \mathcal{M}^*$. Offensichtlich ist K dann invariant unter $\mathcal{M} \cup \mathcal{M}^*$. □

Bemerkung 2.10. Das Bild einer orthogonalen Projektion $P \subset L(H)$ ist immer abgeschlossen.

Beweis. Sei $P \in L(H)$ eine orthogonale Projektion. Dann ist $\mathrm{Id}_H - P \in L(H)$ eine orthogonale Projektion mit $\mathrm{Im}(P) = \ker(\mathrm{Id}_H - P)$. □

Satz 2.11 (Schurs Lemma)**.** *$\mathcal{S} \subset L(H)$ ist genau dann irreduzibel, wenn*

$$(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*)' = \{\lambda \,\mathrm{Id}_H \,;\, \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

gilt.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $H \neq \{0\}$.

Sei $(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*)' = \{\lambda \,\mathrm{Id}_H \,;\, \lambda \in \mathbb{C}\}$ und $K \subset H$ ein abgeschlossener Untervektorraum von H, der $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*$-invariant ist. Sei P_K die orthogonale Projektion auf K. Wegen obiger Proposition ist $P_K \in (\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*)'$. Also ist $P_K = \lambda \,\mathrm{Id}_H$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$. Aus $P_K^2 = P_K$ folgt, dass $\lambda \in \{0, 1\}$ gilt. Daher ist $K \in \{\{0\}, H\}$. Damit ist $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*$ und somit auch $\mathcal{S}$ irreduzibel.

Sei $\mathcal{S}$ und somit auch $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*$ irreduzibel. Wir wolllen zeigen, dass $(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*)' = \{\lambda \,\mathrm{Id}_H \,;\, \lambda \in \mathbb{C}\}$ gilt:

„$\supset$“: Klar.

„$\subset$“: Wir zeigen zunächst, dass $(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*)'$ nullteilerfrei ist. Seien dazu $S, T \in (\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*)'$ mit $ST = 0$ und $T \neq 0$. Da $\overline{TH}$ invariant unter $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*$ ist, folgt wegen $\overline{TH} \neq \{0\}$ aus der Irreduzibelität von $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*$, dass $\overline{TH} = H$ ist. Daher gilt wegen $SH = S\overline{TH} = \{0\}$, dass $S = 0$ ist. Sei $T \in (\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*)'$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass T selbstadlungiert ist. Sonst setze $\mathrm{Re}(T) = (T + T^*)/2$ und $\mathrm{Im}(T) = (T - T^*)/2i$. Dann sind $\mathrm{Re}(T), \mathrm{Im}(T)$ selbstadjungiert, $T = \mathrm{Re}(T) + i\,\mathrm{Im}(T)$ und $\mathrm{Re}(T), \mathrm{Im}(T) \in (\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*)'$. Wenn wir zeigen können, dass $\mathrm{Re}(T), \mathrm{Im}(T) \in \{\lambda \,\mathrm{Id}_H \,;\, \lambda \in \mathbb{C}\}$ ist $T \in \{\lambda \,\mathrm{Id}_H \,;\, \lambda \in \mathbb{C}\}$. Sei also T selbstadjungiert. Es genügt zu zeigen, dass $\sigma(T) = \{\lambda\}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ ist. Denn dann ist $\sigma(T - \lambda \,\mathrm{Id}_H) = \{0\}$. Und es gilt

$$\|T - \lambda \,\mathrm{Id}_H\| = r(T - \lambda \,\mathrm{Id}_H) = 0,$$

nach einem Satz für den Spektralradius normaler Operatoren (vgl. [12, Lemma 14.4 (a)]). Also ist $T = \lambda \operatorname{Id}_H$. Da $(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*)'$ nullteilerfrei ist, ist

$$C(\sigma(T)) \cong C^*(T) \subset (\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*)'$$

nullteilerfrei (vgl. [12, Lemma 14.13]). Dies geht aber nur wenn $\sigma(T) = \{\lambda\}$ gilt. Denn angenommen es gibt $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(T)$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Seien U_1 und U_2 disjunkte relativ kompakte offene Umgebungen von λ_1 und λ_2 in $\sigma(T)$. Ein Argument aus der Topolgie (z.B. in [5, Proposition 7.1.9]) zeigt, wir können

$$0 \leq f_i \leq \chi_{U_i} \text{ und } f_i \neq 0 \text{ für } i = 1, 2,$$

finden, wobei χ_{U_i} die Indikatorfunktion von U_i ist. Dann gilt aber $f_1 f_2 = 0$ □

Hier noch eine wichtige Folgerung aus Schurs Lemma, die wir im Hauptsatz der Arbeit gebrauchen werden.

Satz 2.12. *Ist $\mathcal{M} \subset L(H)$ mit $\operatorname{Id}_H \in \mathcal{M}$ irreduzibel, so ist $\operatorname{Mat}(l, \mathcal{M}) \subset L(H^l)$ für alle $l \in \mathbb{N}$ irreduzibel.*

Beweis. Nach Schurs Lemma genügt zu zeigen, dass $(\operatorname{Mat}(l, \mathcal{M}) \cup \operatorname{Mat}(l, \mathcal{M})^*)' = \mathbb{C} \operatorname{Id}_{H^l}$ gilt. Seien dazu $S = (S_{i,j})_{i,j=1}^l \in (\operatorname{Mat}(l, \mathcal{M}) \cup \operatorname{Mat}(l, \mathcal{M})^*)'$ und $T = (T_{i,j})_{i,j=1}^l \in \operatorname{Mat}(l, \mathcal{M}) \cup \operatorname{Mat}(l, \mathcal{M})^*$. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{l} S_{i,k} T_{k,j} = (ST)_{i,j} = (TS)_{i,j} = \sum_{k=0}^{l} T_{i,k} S_{k,j} \text{ für } i, j \in \{1, \ldots, l\}.$$

Beachte, dass $E_{mn} = (\delta_{m,i} \delta_{n,j} \operatorname{Id}_H)_{i,j=1}^l \in \operatorname{Mat}(l, \mathcal{M}) \cup \operatorname{Mat}(l, \mathcal{M})^*$ für alle $n, m \in \{1, \ldots, l\}$ ist. Daraus folgt

$$S_{i,m} \delta_{n,j} = \sum_{k=0}^{l} S_{i,k} \delta_{m,k} \delta_{n,j} = (SE_{mn})_{i,j} = (E_{mn} S)_{i,j} = \sum_{k=0}^{l} \delta_{m,i} \delta_{n,k} S_{k,j} = S_{n,j} \delta_{m,i}$$

für $i, j, m, n \in \{1, \ldots, l\}$. Sei $m \in \{1, \ldots, l\}$. Für $i \in \{1, \ldots, l\}$ mit $i \neq m$ und $j = m = n$ gilt dann

$$S_{i,m} = S_{i,m} \delta_{m,j} = S_{m,j} \delta_{m,i} = 0.$$

Daraus folgt $S = (S_{i,j} \delta_{i,j})_{i,j=1}^l$. Man überlegt sich ebenfalls, dass für $P_{mn} \in \operatorname{Mat}(l, L(H))$ mit

$$(P_{mn})_{i,j} = \begin{cases} \operatorname{Id}_H \delta_{n,j} & \text{, für } i = m, \\ \operatorname{Id}_H \delta_{m,j} & \text{, für } i = n, \\ \operatorname{Id}_H \delta_{i,j} & \text{, sonst} \end{cases}$$

für alle $n, m \in \{1, \dots, l\}$ ein Element von $\mathrm{Mat}(l, \mathcal{M}) \cup \mathrm{Mat}(l, \mathcal{M})^*$ ist. Wegen $P_{nm}P_{mn} = \mathrm{Id}_{H^l}$ gilt dann

$$P_{nm}SP_{mn} = P_{nm}P_{mn}S = S$$

und somit $S_{n,n} = S_{m,m}$ für alle $n, m \in \{1, \dots, l\}$. Also ist $S = (S_{1,1}\delta_{i,j})_{i,j=1}^{l}$. Sei nun $R = (R_{1,1}\delta_{1,i}\delta_{1,j})_{i,j=1}^{l} \in \mathrm{Mat}(l, \mathcal{M}) \cup \mathrm{Mat}(l, \mathcal{M})^*$. Dann gilt

$$S_{1,1}R_{1,1} = (SR)_{1,1} = (RS)_{1,1} = R_{1,1}S_{1,1}.$$

Da $\mathcal{M}$ irreduzibel ist, ist $(\mathcal{M} \cup \mathcal{M}^*)' = \mathbb{C}\,\mathrm{Id}_H$. Es folgt daher $S_{1,1} \in (\mathcal{M} \cup \mathcal{M}^*)' = \mathbb{C}\,\mathrm{Id}_H$. Also gibt es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $S_{1,1} = \lambda\,\mathrm{Id}_H$ und es ist $S = \lambda\,\mathrm{Id}_{H^l} \in \mathbb{C}\,\mathrm{Id}_{H^l}$. □

2.2 Vollständig positive Abbildungen

Ist $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra, so ist für jedes $n \geq 1$ die Menge $\mathrm{Mat}(n, \mathcal{A})$ der $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in $\mathcal{A}$ mit der koeffizientenweisen Addition und Skalarmultiplikation sowie der üblichen Matrixmultiplikation eine $\mathbb{C}$-Algebra. Durch

$$\mathrm{Mat}(n, \mathcal{A}) \to \mathrm{Mat}(n, \mathcal{A}),\ (a_{i,j})_{i,j=1}^{n} \mapsto (a_{j,i}^*)_{i,j=1}^{n}$$

wird eine Involution auf $\mathrm{Mat}(n, \mathcal{A})$ definiert. Auf der involutiven Algebra $\mathrm{Mat}(n, \mathcal{A})$ gibt es eine eindeutige Norm die $\mathrm{Mat}(n, \mathcal{A})$ zu einer C^*-Algebra macht. Um die Existenz zu begründen, wähle man mit Gelfand-Naimark eine isometrische Darstellung $\pi\colon \mathcal{A} \to L(H)$, benutze den $*$-Isomorphismus

$$\rho\colon\ \mathrm{Mat}(n, L(H)) \to L(H^n)$$

mit

$$\rho((T_{i,j})_{i,j=1}^{n})\colon H^n \to H^n,\ (x_i)_{i=1}^{n} \mapsto \left(\sum_{j=1}^{n} T_{i,j}x_j\right)_{i=1}^{n}$$

für alle $(T_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in \mathrm{Mat}(n, L(H))$, um $\mathrm{Mat}(n, L(H))$ zu einer C^*-Algebra zu machen und beachte, dass dann

$$\pi^{(n)}\colon\ \mathrm{Mat}(n, \mathcal{A}) \to \mathrm{Mat}(n, L(H)),\ (a_{i,j})_{i,j=1}^{n} \mapsto (\pi(a_{i,j}))_{i,j=1}^{n}$$

ein injektiver $*$-Homomorphismus ist mit abgeschlossenem Bild. Also wird durch

$$\|(a_{i,j})_{i,j=1}^{n}\| = \|\pi^{(n)}((a_{i,j})_{i,j=1}^{n})\|$$

eine C^*-Norm auf $\mathrm{Mat}(n, \mathcal{A})$ definiert.
Unter einem *Operatorraum* $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ in einer unitalen C^*-Algebra $\mathcal{A}$ versteht man einen linearen Teilraum $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ mit $1 \in \mathcal{M}$. Ein *Operatorsystem* $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ in einer unitalen

C^*-Algebra $\mathcal{A}$ ist ein Operatorraum für den $\mathcal{S} = \mathcal{S}^*$ gilt. Sei $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ ein Operatorsystem und seien

$$\mathcal{S}_{sa} = \{a \in \mathcal{S};\ a = a^*\},\ \mathcal{S}_+ = \{a \in \mathcal{S};\ a \geq 0 \text{ in } \mathcal{A}\}.$$

Ein elementares Argument zeigt, dass

$$\mathcal{S}_{sa} = \mathcal{S}_+ - \mathcal{S}_+,\ \mathcal{S} = \mathcal{S}_{sa} + i\mathcal{S}_{sa}$$

gilt. Eine lineare Abbildung $\phi\colon S \to \mathcal{B}$ in eine C^*-Algebra $\mathcal{B}$ heißt *positiv*, falls $\phi(\mathcal{S}_+) \subset \mathcal{B}_+$ ist. Insbesondere ist dann $\phi(\mathcal{S}_{sa}) \subset \mathcal{B}_{sa}$.

Sei $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ wie oben ein Operatorsystem und sei $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ ein Operatorraum. Dann sind für $n \geq 1$ die Mengen $\mathrm{Mat}(n, \mathcal{S}) \subset \mathrm{Mat}(n, \mathcal{A})$ Operatorsysteme und die Mengen $\mathrm{Mat}(n, \mathcal{M}) \subset \mathrm{Mat}(n, \mathcal{A})$ Operatorräume in der C^*-Algebra $\mathrm{Mat}(n, \mathcal{A})$. Man nennt eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathcal{S} \to \mathcal{B}$ in eine C^*-Algebra *vollständig positiv*, wenn für jedes $n \geq 1$ die Abbildung

$$\varphi^{(n)}\colon\ \mathrm{Mat}(n, \mathcal{S}) \to \mathrm{Mat}(n, \mathcal{B});\ (a_{i,j})_{i,j=1}^n \mapsto (\varphi(a_{i,j}))_{i,j=1}^n$$

positiv ist. Eine lineare Abbildung $\psi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{B}$ in eine C^*-Algebra heißt *vollständig beschränkt*, wenn

$$\|\psi\|_{cb} = \sup_{n \geq 1} \|\psi^{(n)}\| < \infty$$

gilt. Man nennt $\psi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{B}$ *vollständig isometrisch* beziehungsweise *vollständig kontraktiv*, wenn alle Abbildungen $\psi^{(n)}\colon \mathrm{Mat}(n, \mathcal{M}) \to \mathrm{Mat}(n, \mathcal{B})$ $(n \geq 1)$ isometrisch beziehungsweise kontraktiv sind.

Es gibt einfache Beispiele von Abbildungen, die positiv, aber nicht vollständig positiv sind, und von Abbildungen, die beschränkt, aber nicht vollständig beschränkt sind. Alle $*$-Homomorphismen $\pi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sind vollständig positiv und vollständig kontraktiv. Man kann zeigen, dass vollständig positive Abbildungen $\varphi\colon S \to \mathcal{B}$ immer vollständig beschränkt sind mit $\|\varphi\|_{cb} = \|\varphi\| = \|\varphi(1)\|$.
Der Satz von Stinespring gibt eine Art GNS-Konstruktion für vollständig positive Abbildungen.

Satz 2.13 (Stinespring)**.** *Sei $\mathcal{A}$ eine unitale C^*-Algebra und $\varphi\colon \mathcal{A} \to L(H)$ eine vollständig positive Abbildung. Dann gibt es einen Hilbertraum K, einen $*$-Homomorphismus $\pi\colon \mathcal{A} \to L(K)$ und einen stetig linearen Operator $V\colon H \to K$ mit $\|V\|^2 = \|\varphi\|$ so, dass $\varphi(a) = V^*\pi(a)V$ für alle $a \in \mathcal{A}$ gilt.*

Falls φ unital ist, kann man V als Isometrie wählen.

Beweis. [18, Theorem 4.1] □

Satz 2.14 (Schwarz)**.** *Sei $\mathcal{A}$ eine unitale C^*-Algebra und $\varphi\colon \mathcal{A} \to L(H)$ eine vollständig positive Abbildung. Dann gilt*

$$\varphi(a)^*\varphi(a) \leq \|\varphi\|\varphi(a^*a)$$

für alle $a \in \mathcal{A}$.

Beweis. Wegen des Satzes von Stinespring (Satz 2.13) gibt es einen Hilbertraum K, einen $*$-Homomorphismus $\pi\colon \mathcal{A} \to L(K)$ und ein $V \in L(H,K)$ mit $\|VV^*\| = \|V\|^2 = \|\varphi\|$ so, dass $\varphi(a) = V^*\pi(a)V$ für alle $a \in \mathcal{A}$ gilt. Daher folgt für alle $a \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned}\varphi(a)^*\varphi(a) &= V^*\pi(a)^*VV^*\pi(a)V \\ &\leq V^*\pi(a)^*(\|VV^*\|\,\mathrm{Id}_K)\pi(a)V \\ &= \|\varphi\|V^*\pi(a^*a)V \\ &= \|\varphi\|\varphi(a^*a).\end{aligned}$$

□

Der folgende Satz ist eine Art Hahn-Banach für vollständig positive Abbildungen.

Satz 2.15 (Arversonscher Fortsetzungssatz, 1969)**.** *Sei $\mathcal{A}$ eine unitale C^*-Algebra, $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ ein Operatorsystem und $\varphi\colon \mathcal{S} \to L(H)$ eine vollständig positive Abbildung. Dann existiert eine vollständig positive Abbildung $\psi\colon \mathcal{A} \to L(H)$, so dass $\psi|_{\mathcal{S}} = \varphi$ gilt.*

Beweis. [18, Theorem 7.5] □

Korollar 2.16. *Sei $\mathcal{A}$ eine unitale C^*-Algebra, $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ ein Operatorraum und $\varphi\colon \mathcal{M} \to L(H)$ eine unitale, vollständige Kontraktion. Dann gibt es eine vollständig positive Abbildung $\psi\colon \mathcal{A} \to L(H)$ mit $\psi|_{\mathcal{M}} = \varphi$.*

Beweis. [18, Corollary 7.6] □

3 Projektionen

In diesem Kapitel wollen wir uns überlegen, dass es für eine ultraschwach stetige vollständige positive Abbildung ψ, die eine von-Neumann-Algebra $\mathcal{A}$ in sich selbst abbildet, eine größte Projektion P im Kern der Abbildung gibt. Man nennt $1-P$ die Trägerprojektion von ψ.

Im Folgenden sei H ein komplexer Hilbertraum.

Satz 3.1. *Sei $\mathcal{A} \subset L(H)$ eine ultraschwach abgeschlossene C^*-Algebra. Ist $(T_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ein monton wachsendes Netz selbstadjungierter Operatoren aus $\mathcal{A}$, das nach oben beschränkt ist, dann konvergiert $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ ultraschwach und in der starken Operatortopologie gegen ein selbstadjungiertes T aus $\mathcal{A}$, wobei T die kleinste obere Schranke von $\{T_\alpha;\ \alpha \in A\}$ in $L(H)$ ist.*

Beweis. Ohne Einschränkung gebe es ein $c > 0$, so dass

$$-c\,\mathrm{Id}_H \leq T_\alpha \leq c\,\mathrm{Id}_H \quad \text{für alle} \quad \alpha \in A$$

gilt.

Sonst wähle ein $\alpha_0 \in A$ und setze $I = \{\alpha \in A;\ \alpha \geq \alpha_0\}$. Ohne Einschränkung können wir $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ durch $(T_i)_{i\in I}$ ersetzen, da aus der Konvergenz von $(T_i)_{i\in I}$ gegen einen Operator $T \in \mathcal{A}$, die Konvergenz von $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ gegen T folgt. Es gilt $T_i \geq T_{\alpha_0}$ für alle $i \in I$ und somit

$$\langle T_i x, x\rangle \geq \langle T_{\alpha_0} x, x\rangle \geq -\|T_{\alpha_0}\|\langle x, x\rangle$$

für alle $i \in I$ und $x \in H$. Ist S eine obere Schranke für $\{T_\alpha;\ \alpha \in A\}$ so folgt aber auch

$$\langle T_\alpha x, x\rangle \leq \langle Sx, x\rangle \leq \|S\|\langle x, x\rangle$$

für alle $\alpha \in A$ und $x \in H$. Setze $c = \max\{\|T_{\alpha_0}\|,\ \|S\|\}$, dann erhält man die gewünschte Ungleichung.

Aus [12, Satz 12.10] folgt für alle $\alpha \in A$:

$$\|T_\alpha\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle T_\alpha x, x\rangle| \leq c.$$

Nach Alaoglou-Bourbaki ist $\mathrm{ball}(L(H), c)$ in der ultraschwachen Operatortopologie kompakt. Daraus folgt, dass es ein $T \in \mathrm{ball}(L(H), c) \cap \mathcal{A}$ und ein Teilnetz $(T_i)_{i\in I} = (T_{\alpha_i})_{i\in I}$ von $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ gibt, das in der ultraschwachen Operatortopologie gegen T konvergiert.

Da $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ monton wachsend ist, erhält man auch, dass $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ in der ultraschwachen Operatortopolgie gegen T konvergiert. Das sieht man wie folgt ein:

Sei $\epsilon > 0$, $x \in H$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(H)$. Dann gibt es ein $i_0 \in I$, so dass

$$|\sum_{n=0}^{\infty} \langle Tx_n, x_n\rangle - \sum_{n=0}^{\infty} \langle T_i x_n, x_n\rangle| < \epsilon \quad \text{für alle} \quad i \geq i_0 \ (i \in I)$$

gilt. Da $\{\alpha_i;\ i \in I\} \subset A$ kofinal ist, gibt es für $\alpha \geq \alpha_{i_0}$ $(\alpha \in A)$ ein $i_1 \in I$ mit $\alpha_{i_1} \geq \alpha$ und $i_1 \geq i_0$. Also ist

$$\langle T_{i_1} x, x\rangle = \langle T_{\alpha_{i_1}} x, x\rangle \geq \langle T_\alpha x, x\rangle \geq \langle T_{\alpha_{i_0}} x, x\rangle = \langle T_{i_0} x, x\rangle \ (x \in H)$$

beziehungsweise

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle T_{i_1} x_n, x_n\rangle \geq \sum_{n=0}^{\infty} \langle T_\alpha x_n, x_n\rangle \geq \sum_{n=0}^{\infty} \langle T_{i_0} x_n, x_n\rangle.$$

Also gilt für alle $\alpha \in A$ mit $\alpha \geq \alpha_{i_0}$

$$|\sum_{n=0}^{\infty} \langle Tx_n, x_n\rangle - \sum_{n=0}^{\infty} \langle T_\alpha x_n, x_n\rangle| < \epsilon$$

und daher

$$\lim_{\alpha\in A} \sum_{n=0}^{\infty} \langle T_\alpha x_n, x_n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle Tx_n, x_n\rangle.$$

Mit der Polarisationsgleichung erhält man für alle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(H)$

$$\lim_{\alpha\in A} \sum_{n=0}^{\infty} \langle T_\alpha x_n, y_n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle Tx_n, y_n\rangle.$$

Aus

$$\langle Tx, y\rangle = \lim_{\alpha\in A} \langle T_\alpha x, y\rangle = \lim_{\alpha\in A} \langle x, T_\alpha y\rangle = \overline{\lim_{\alpha\in A} \langle T_\alpha y, x\rangle} = \overline{\langle Ty, x\rangle} = \langle x, Ty\rangle$$

folgt, dass T selbstadjungiert ist. Da

$$\langle T_\beta x, x\rangle \geq \langle T_\alpha x, x\rangle \quad \text{für alle} \quad \beta \geq \alpha$$

gilt, gilt auch

$$\langle Tx, x\rangle = \lim_{\beta\geq\alpha} \langle T_\beta x, x\rangle \geq \langle T_\alpha x, x\rangle$$

beziehungsweise $T \geq T_\alpha$ für alle $\alpha \in A$. Also ist T eine obere Schranke von $\{T_\alpha;\ \alpha \in A\}$ in $L(H)$.

Ist $S \in L(H)$ eine weitere obere Schranke von $\{T_\alpha;\ \alpha \in A\}$, so gilt

$$\langle Sx, x\rangle \geq \langle T_\alpha x, x\rangle \quad \text{für alle} \quad x \in H,\ \alpha \in A$$

und deshalb

$$\langle Sx, x\rangle \geq \lim_{\alpha\in A} \langle T_\alpha x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle \quad \text{für alle} \quad x \in H,$$

also $S \geq T$. Damit ist T die kleinste obere Schranke von $\{T_\alpha;\ \alpha \in A\}$.

Nach [12, Bemerkung nach Korollar 14.16] ist $\sigma(T - T_\alpha) \subset \mathbb{R}_+$ und $T - T_\alpha$ ist selbstadjungiert für alle $\alpha \in A$. Also gibt es eine Wurzel von $T - T_\alpha$ für alle $\alpha \in A$. Es gilt

$$\|(T - T_\alpha)^{\frac{1}{2}} x\|^2 = \langle (T - T_\alpha)^{\frac{1}{2}} x, (T - T_\alpha)^{\frac{1}{2}} x\rangle = \langle (T - T_\alpha)x, x\rangle \overset{\alpha}{\to} 0.$$

Wegen

$$\|(T - T_\alpha)^{\frac{1}{2}}\| = \|(T - T_\alpha)\|^{\frac{1}{2}} \leq (2c)^{\frac{1}{2}}$$

ergibt sich aus

$$\|(T - T_\alpha)x\| \leq \|(T - T_\alpha)^{\frac{1}{2}}\| \|(T - T_\alpha)^{\frac{1}{2}} x\|$$

die Konvergenz in der starken Operatortopologie. □

Lemma 3.2. *Sind $P, Q \in L(H)$ orthogonale Projektionen, dann sind äquivalent*

(a) $P \geq Q$,

(b) $\mathrm{Im}(Q) \subset \mathrm{Im}(P)$,

(c) $P - Q$ *ist eine orthogonale Projektion,*

(d) $PQ = Q$,

(e) $QP = Q$.

Beweis. Sei $P \geq Q$. Es ist $H = \mathrm{Im}(P) \oplus \ker(P)$. Sei $x \in \mathrm{Im}(Q)$, dann ist $x = v \oplus w \in \mathrm{Im}(P) \oplus \ker(P)$ und es gilt

$$\langle x, x\rangle = \langle Qx, x\rangle \leq \langle Px, x\rangle \leq \langle x, x\rangle$$

also

$$\langle v, v \oplus w\rangle = \langle P(v \oplus w), v \oplus w\rangle = \langle v \oplus w, v \oplus w\rangle.$$

Daraus folgt

$$0 = \langle w, v \oplus w\rangle = \langle w, w\rangle.$$

und somit $w = 0$ und $x \in \mathrm{Im}\, P$.

Sei $\mathrm{Im}(Q) \subset \mathrm{Im}(P)$. Für $x \in H$ ist $PQx = Qx$, also $PQ = Q$ und wegen

$$QP = (PQ)^* = Q^* = Q$$

gilt $(P-Q)^2 = P-Q$. Außerdem ist $P-Q = (P-Q)^*$ und damit orthogonal Projektion. Somit ist $P - Q$ positiv also $P \geq Q$. □

Korollar 3.3. *Ist $(P_\alpha)_{\alpha\in A}$ ein Netz von orthogonalen Projektionen in einer ultraschwach abgeschlossenen C^*-Algebra $\mathcal{A} \subset L(H)$, so gilt:*

(a) Ist $(P_\alpha)_{\alpha\in A}$ monoton wachsend, dann konvergiert $(P_\alpha)_{\alpha\in A}$ in der starken Operatortopologie gegen $P \in \mathcal{A}$, wobei P die orthogonale Projektion auf den Normabschluss von $\bigcup_{\alpha\in A} P_\alpha H$ ist.

(b) Ist $(P_\alpha)_{\alpha\in A}$ monoton fallend, dann konvergiert $(P_\alpha)_{\alpha\in A}$ in der starken Operatortopologie gegen $P \in \mathcal{A}$, wobei P die orthogonale Projektion auf den Normabschluss von $\bigcap_{\alpha\in A} P_\alpha H$ ist.

Beweis. Sei $(P_\alpha)_{\alpha\in A}$ monoton wachsend. Für alle $x \in H$ und $\alpha \in A$ gilt

$$0 \leq \langle P_\alpha x, x\rangle \leq \|P_\alpha\|\langle x, x\rangle \leq \langle x, x\rangle.$$

Nach Satz 3.1 konvergiert $(P_\alpha)_{\alpha\in A}$ stark und in der ultraschwachen Operatortopologie gegen ein selbstadjungiertes $P \in \mathcal{A}$. Nutzt man die Stetigkeit des Skalarproduktes und die starke Konvergenz von $(P_\alpha)_{\alpha\in A}$ aus, so sieht man wegen

$$\langle Px, y\rangle = \lim_{\alpha\in A} \langle P_\alpha x, y\rangle = \lim_{\alpha\in A} \langle P_\alpha x, P_\alpha y\rangle = \langle Px, Py\rangle = \langle P^2 x, y\rangle$$

für alle $x, y \in H$, dass P wieder eine orthogonale Projektion ist.

Wir müssen noch zeigen, dass $\mathrm{Im}(P) = \overline{\bigcup_{\alpha\in A} P_\alpha H}^{\|\cdot\|}$ gilt. Da $\mathrm{Im}(P)$ norm- abgeschlossen ist und $P_\alpha \leq P$ (also $\mathrm{Im}(P_\alpha) \subset \mathrm{Im}(P)$) für alle $\alpha \in A$ gilt, ist $\overline{\bigcup_{\alpha\in A} P_\alpha H}^{\|\cdot\|} \subset \mathrm{Im}(P)$.

Die Menge $\bigcup_{\alpha\in A} P_\alpha H$ ist ein Vektorraum. Denn seien $\beta \in \mathbb{C}$ und $x, y \in \bigcup_{\alpha\in A} P_\alpha H$. Dann gibt es $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ mit $x \in P_{\alpha_1} H$, $y \in P_{\alpha_2} H$ und ein $\alpha \in A$, so dass $\alpha \geq \alpha_1, \alpha_2$ ist. Daraus folgt $P_\alpha \geq P_{\alpha_1}$ und $P_\alpha \geq P_{\alpha_2}$. Also $P_{\alpha_1} H \subset P_\alpha H$,$P_{\alpha_2} H \subset P_\alpha H$ und $\beta x + y \in P_\alpha H \subset \bigcup_{\alpha\in A} P_\alpha H$.

Damit ist auch $M = \overline{\bigcup_{\alpha\in A} P_\alpha H}^{\|\cdot\|}$ ein Vektorraum. Sei P_M die orthogonale Projektion auf M. Offenbar gilt $\mathrm{Im}(P_\alpha) \subset \mathrm{Im}(P_M)$ und somit $P_\alpha \leq P_M$ für alle $\alpha \in A$. Aus Satz 3.1 folgt, dass $P \leq P_M$ ist und daher $\mathrm{Im}(P) \subset \mathrm{Im}(P_M) = M$ gilt.

Sei jetzt $(P_\alpha)_{\alpha\in A}$ monoton fallend. Indem man Satz 3.1 auf das Netz $(-P_\alpha)_{\alpha\in A}$ anwendet, sieht man, dass $(P_\alpha)_{\alpha\in A}$ stark und in der ultraschwachen Operatortopologie gegen eine orthogonale Projektion $P \in L(H)$ konvergiert und, dass P die größte untere Schranke von $(P_\alpha)_{\alpha\in A}$ ist. Wir müssen noch zeigen, dass $\mathrm{Im}(P) = \bigcap_{\alpha\in A} P_\alpha H$ ist. Es gilt $P \leq P_\alpha$ und somit $\mathrm{Im}(P) \subset \mathrm{Im}(P_\alpha)$ für alle $\alpha \in A$. Daraus folgt, dass $\mathrm{Im}(P) \subset \bigcap_{\alpha\in A} P_\alpha H$ ist. Sei $P_{\bigcap_{\alpha\in A} P_\alpha H}$ die orthogonale Projektion auf $\bigcap_{\alpha\in A} P_\alpha H$. Dann erhält man, dass $P_\alpha \geq P_{\bigcap_{\alpha\in A} P_\alpha H}$ gilt. Da P die größte untere Schranke ist, ist $P \geq P_{\bigcap_{\alpha\in A} P_\alpha H}$ und die Behauptung folgt wie oben. □

Lemma 3.4. *Ist $T \in L(H)$ selbstadjungiert und*

$$\Phi\colon C(\sigma(T)) \to L(H),\ f \mapsto \Phi(f)$$

der stetige Funktionalkalkül, so gilt für $f \in C(\sigma(T))$: Aus $f \geq 0$ folgt $f(T) = \Phi(f) \geq 0$.

Beweis. Ist $f \in C(\sigma(T))$ mit $f \geq 0$, so ist $\sqrt{f} \in C(\sigma(T))$ und es gilt

$$\Phi(f) = \Phi(\sqrt{f})\Phi(\sqrt{f})$$

sowie

$$\Phi(\sqrt{f})^* = \Phi(\overline{\sqrt{f}}) = \Phi(\sqrt{f}).$$

Es folgt

$$\langle \Phi(f)x, x\rangle = \langle \Phi(\sqrt{f})x, \Phi(\sqrt{f})x\rangle \geq 0.$$

□

Im Folgenden sei für $T \in L(H)$

$$C^*(T) = \overline{\{p(T, T^*);\ p \in \mathbb{C}[z_1, z_2] \text{ mit } p(0) = 0\}}^{\|\cdot\|}.$$

Satz 3.5. *Sei $\mathcal{A} \subset L(H)$ eine ultraschwach abgeschlossene C^*-Algebra und $T \in \mathcal{A}$ ein Operator mit $0 \leq T \leq \mathrm{Id}_H$. Dann ist $(T^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $\mathcal{A}$ die ultraschwach gegen die Projektion auf den Norm-Abschluss von* $\mathrm{Im}(T)$ *konvergiert.*

Beweis. Für $0 \leq T \leq \mathrm{Id}_H$ ist nach [12, Lemma 14.4(a), Satz 12.10 und der Bemerkung nach Korollar 14.6] $\sigma(T) \subset [0, 1]$. Da $0 \leq \sqrt[n]{\cdot} \leq \sqrt[n+1]{\cdot} \leq 1$ auf $\sigma(T)$ gilt, erhält man aus Lemma 3.4, dass $0 \leq T^{\frac{1}{n}} \leq T^{\frac{1}{n+1}} \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dabei ist $(T^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge selbstadjungierter Operatoren in $C^*(T) \subset \mathcal{A}$. Aus Satz 3.1 folgt, dass ein selbstadjungierter Operator $P \in \mathcal{A}$ existiert so, dass $(T^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ stark gegen P konvergiert. Da

$$\|(T^{\frac{1}{n}} - P)x\| \overset{n\to\infty}{\to} 0 \quad \text{für alle} \quad x \in H$$

und auch

$$\|(T^{\frac{1}{n}} - P)Px\| \overset{n\to\infty}{\to} 0 \quad \text{für alle} \quad x \in H$$

sowie $\|T^{\frac{1}{n}}\| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist

$$\|(T^{\frac{2}{n}} - P^2)x\| \leq \|T^{\frac{1}{n}}\|\|(T^{\frac{1}{n}} - P)x\| + \|(T^{\frac{1}{n}} - P)Px\| \overset{n\to\infty}{\to} 0 \quad \text{für alle} \quad x \in H.$$

Durch den Übergang zur Teilfolge mit geradem Index folgt, dass $(T^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ stark gegen P^2 konvergiert. Da die starke Operatortopologie hausdorffsch ist, erhält man $P^* = P = P^2$. Also ist P eine orthogonale Projektion.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $T^{\frac{1}{n}}$ der Normgrenzwert von Polynomen in T, die man ohne konstante Terme wählen kann. Also folgt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $T^{\frac{1}{n}}x = 0$ gilt, falls $Tx = 0$ ist. Somit folgt $Px = 0$ aus $Tx = 0$. Ist umgekehrt $Px = 0$, so ergibt sich

$$0 = \langle Px, x\rangle \geq \langle Tx, x\rangle = \|T^{\frac{1}{2}}x\|^2$$

und damit auch

$$Tx = (T^{\frac{1}{2}})^2 x = 0.$$

Insgesamt gilt $\ker(P) = \ker(T)$ und daher ist

$$\operatorname{Im}(P) = \ker(P)^\perp = \ker(T)^\perp = \ker(T^*)^\perp = \overline{\operatorname{Im}(T)}.$$

□

Korollar 3.6. *Sei T ein Operator in einer ultraschwach abgeschlossenen C^*-Algebra $\mathcal{A} \subset L(H)$. Dann gehört die orthogonale Projektion auf $\overline{\operatorname{Im}(T)}^{\|\cdot\|}$ zu $\mathcal{A}$.*

Beweis. Sei $T \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$. Der Operator TT^* ist selbstadjungiert. Da

$$\|T^*x\|^2 = \langle TT^*x, x\rangle = 0,$$

falls $TT^*x = 0$ ist, gilt $\ker(T^*) = \ker(TT^*)$. Aus [12, Lemma 12.4 und Korollar 11.13] folgt

$$\overline{\operatorname{Im} T} = \overline{\operatorname{Im} TT^*} = \overline{\operatorname{Im} \frac{TT^*}{\|TT^*\|}}.$$

Da $0 \leq \frac{TT^*}{\|TT^*\|} \leq \mathrm{Id}_H$ folgt die Behauptung aus Satz 3.5. □

Satz 3.7. *Ist $\mathcal{A} \subset L(H)$ eine ultraschwach abgeschlossene C^*-Algebra, dann existiert eine orthogonale Projektion $P \in \mathcal{A}$, mit $PT = TP = T$ für alle $T \in \mathcal{A}$.*

Beweis. Sei

$$\Delta = \mathcal{P}_e(\{P \in \mathcal{A};\ P \text{ orthogonale Projektion}\}) \quad \text{(endliche Potenzmenge)}$$

versehen mit der Ordnung

$$\alpha \leq \beta \Longleftrightarrow \alpha \subset \beta \quad (\alpha, \beta \in \Delta).$$

Für $\alpha = \{P_1, \ldots, P_n\} \in \Delta$ sei P_α die orthogonale Projektion auf $\overline{\operatorname{Im}(\sum_{i=1}^n P_i)}$. Dann ist $P_\alpha \in \mathcal{A}$ nach Korollar 3.6. Es gilt $\overline{\operatorname{Im}(\sum_{i=1}^n P_i)} = \overline{\sum_{i=1}^n \operatorname{Im}(P_i)}$. Denn aus

$$\left\langle \left(\sum_{i=1}^n P_i \right) x, x \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle P_i^2 x, x\rangle = \sum_{i=1}^n \|P_i^2 x\|^2 \quad (x \in H)$$

folgt $\ker(\sum_{i=1}^n P_i) = \bigcap_{i=1}^n \ker(P_i)$ und damit

$$\begin{aligned}
\overline{\operatorname{Im}\left(\sum_{i=1}^n P_i \right)} &= \ker\left(\sum_{i=1}^n P_i \right)^\perp \\
&= \left(\bigcap_{i=1}^n \ker(P_i) \right)^\perp \\
&= \overline{\sum_{i=1}^n \operatorname{Im}(P_i)}.
\end{aligned}$$

Somit ist $(P_\alpha)_\alpha \in \Delta$ ein monoton wachsendes Netz orthogonaler Projektionen in $\mathcal{A}$. Wegen Korollar 3.3 ist die orthogonale Projektion P auf $\overline{\bigcup_{\alpha\in A} P_\alpha H}^{\|\cdot\|}$ in $\mathcal{A}$. Da nach Korollar 3.6 $\mathrm{Im}(T) \subset \overline{\bigcup_{\alpha\in A} P_\alpha H}^{\|\cdot\|}$ für alle $T \in \mathcal{A}$ gilt, folgt $PT = T$ und $TP = (PT^*)^* = (T^*)^* = T$ für alle $T \in \mathcal{A}$. □

Satz 3.8 (Eine Ungleichung von Schwarz)**.** *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ C^*-Algebren mit $B \subset L(H)$ und $\psi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ eine 2-positive lineare Abbildung. Dann gilt*

$$\|\psi(a^*b)\| \leq \|\psi(a^*a)\|^{\frac{1}{2}}\|\psi(b^*b)\|^{\frac{1}{2}}$$

für alle $a, b \in \mathcal{A}$.

Beweis. Seien $a, b \in \mathcal{A}$ und

$$M = \begin{pmatrix} a^*a & a^*b \\ b^*a & b^*b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0.$$

Da ψ 2-positiv ist, folgt

$$\psi_2(M) = \begin{pmatrix} \psi(a^*a) & \psi(a^*b) \\ \psi(b^*a) & \psi(b^*b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(a^*a) & \psi(a^*b) \\ \psi(a^*b)^* & \psi(b^*b) \end{pmatrix}.$$

Im Folgenden seien $x = \psi(a^*a), z = \psi(a^*b)$ und $y = \psi(b^*b)$. Wir wollen zeigen, dass für alle $\xi, \eta \in H$ gilt

$$|\langle z\eta, \xi\rangle| \leq |\langle x\xi, \xi\rangle|^{\frac{1}{2}}|\langle y\eta, \eta\rangle|^{\frac{1}{2}}.$$

Da die Skalarprodukte auf der rechten Seite größer Null sind, können wir die Beträge dort weglassen. Angenommen es gäbe $\xi, \eta_0 \in H$, so dass

$$|\langle z\eta_0, \xi\rangle| > \langle x\xi, \xi\rangle^{\frac{1}{2}}\langle y\eta_0, \eta_0\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Wir wählen ein $\Theta \in [0, 2\pi)$, so dass

$$|\langle z\eta_0, \xi\rangle| = -e^{i\Theta}\langle z\eta_0, \xi\rangle$$

und setzen $\eta = e^{i\Theta}\eta_0$. Es gilt

$$-\langle z\eta, \xi\rangle = |\langle z\eta_0, \xi\rangle| > \langle x\xi, \xi\rangle^{\frac{1}{2}}\langle y\eta_0, \eta_0\rangle^{\frac{1}{2}} = \langle x\xi, \xi\rangle^{\frac{1}{2}}\langle y\eta, \eta\rangle^{\frac{1}{2}} \geq 0.$$

Angenommen $\langle x\xi, \xi\rangle = 0$. Da $\langle z\eta, \xi\rangle < 0$ ist, gibt es ein $c \in \mathbb{R}_+$, so dass

$$2c\langle z\eta, \xi\rangle + \langle y\eta, \eta\rangle < 0.$$

Daraus folgt aber

$$\begin{aligned} \langle \psi_2(M)(c\xi \oplus \eta), c\xi \oplus \eta\rangle &= c^2\langle x\xi, \xi\rangle + c\langle z\eta, \xi\rangle + c\langle z^*\xi, \eta\rangle + \langle y\eta, \eta\rangle \\ &= 2c\langle z\eta, \xi\rangle + \langle y\eta, \eta\rangle \\ &< 0, \end{aligned}$$

was ein Widerspruch zur Positivität von $\psi_2(M)$ ist. Ähnlich sieht man, dass $\langle y\eta, \eta\rangle = 0$ ein Widerspruch zur Positivität von $\psi_2(M)$ ist. Angenommen $\langle y\eta, \eta\rangle = 0$. Da $\langle z\eta, \xi\rangle < 0$, gibt es ein $c \in \mathbb{R}_+$, so dass

$$\langle x\xi, \xi\rangle + 2c\langle z\eta, \xi\rangle < 0.$$

Daraus folgt aber

$$\begin{aligned}\langle \psi_2(M)(\xi \oplus c\eta), \xi \oplus c\eta\rangle &= \langle x\xi, \xi\rangle + c\langle z\eta, \xi\rangle + c\langle z^*\xi, \eta\rangle + c^2\langle y\eta, \eta\rangle \\ &= \langle x\xi, \xi\rangle + 2c\langle z\eta, \xi\rangle \\ &< 0,\end{aligned}$$

was ein Widerspruch zur Positivität von $\psi_2(M)$ ist. Seien also
$c = \langle y\eta, \eta\rangle^{\frac{1}{2}}, d = \langle x\xi, \xi\rangle^{\frac{1}{2}} > 0$, dann gilt:

$$\begin{aligned}\langle \psi_2(M)(c\xi \oplus d\eta), c\xi \oplus d\eta\rangle &= c^2\langle x\xi, \xi\rangle + cd\langle z\eta, \xi\rangle + cd\langle z^*\xi, \eta\rangle + d^2\langle y\eta, \eta\rangle \\ &= c^2\langle x\xi, \xi\rangle + 2cd\langle z\eta, \xi\rangle + d^2\langle y\eta, \eta\rangle \\ &< c^2\langle x\xi, \xi\rangle - 2cd\langle x\xi, \xi\rangle^{\frac{1}{2}}\langle y\eta, \eta\rangle^{\frac{1}{2}} + d^2\langle y\eta, \eta\rangle \\ &= (c\langle x\xi, \xi\rangle^{\frac{1}{2}} - d\langle y\eta, \eta\rangle^{\frac{1}{2}})^2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Dies ist aber ebenfalls ein Widerspruch, und somit gilt:

$$|\langle z\eta, \xi\rangle| \leq |\langle x\xi, \xi\rangle|^{\frac{1}{2}}|\langle y\eta, \eta\rangle|^{\frac{1}{2}}$$

beziehungsweise

$$|\langle \psi(a^*b)\eta, \xi\rangle| \leq |\langle \psi(a^*a)\xi, \xi\rangle|^{\frac{1}{2}}|\langle \psi(b^*b)\eta, \eta\rangle|^{\frac{1}{2}}$$

für alle $\xi, \eta \in H$. Sei $\eta \in H$ beliebig. Setze $\xi = \psi(a^*b)\eta$. Dann erhält man mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned}\|\psi(a^*b)\eta\|^2 &= |\langle \psi(a^*b)\eta, \psi(a^*b)\eta\rangle| \\ &\leq |\langle \psi(a^*a)\psi(a^*b)\eta, \psi(a^*b)\eta\rangle|^{\frac{1}{2}}|\langle \psi(b^*b)\eta, \eta\rangle|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (\|\psi(a^*a)\psi(a^*b)\eta\|\|\psi(a^*b)\eta\|\|\psi(b^*b)\eta\|\|\eta\|)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (\|\psi(a^*a)\|\|\psi(a^*b)\eta\|\|\psi(a^*b)\eta\|\|\psi(b^*b)\|\|\eta\|\|\eta\|)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\psi(a^*a)\|^{\frac{1}{2}}\|\psi(b^*b)\|^{\frac{1}{2}}\|\psi(a^*b)\eta\|\|\eta\|.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\|\psi(a^*b)\eta\| \leq \|\psi(a^*a)\|^{\frac{1}{2}}\|\psi(b^*b)\|^{\frac{1}{2}}\|\eta\|$$

für alle $\eta \in H$. Also ist

$$\|\psi(a^*b)\| \leq \|\psi(a^*a)\|^{\frac{1}{2}}\|\psi(b^*b)\|^{\frac{1}{2}}.$$

□

Im Folgenden sei für $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ in einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$

$$\mathcal{M}^* = \{a^*;\ a \in \mathcal{A}\}.$$

Kommen wir nun zum wichtigsten Satz des Kapitels, den wir später gebrauchen werden.

Definition 3.9. Ein Operator $U \in L(H)$ heißt *partielle Isometrie*, falls

$$\|Ux\| = \|x\| \text{ für alle } x \in H \text{ mit } x \perp \ker U \text{ gilt.}$$

Man nennt $(\ker U)^\perp$ den *Anfangsraum* von U und die Menge $\operatorname{Im} U$ den *Zielraum* von U.

Satz 3.10 (Trägerprojektion)**.** *Sei $\mathcal{A} \subset L(H)$ eine von-Neumann-Algebra und $\psi\colon \mathcal{A} \to L(H)$ eine lineare ultraschwach stetige 2-positive Abbildung. Dann gibt es eine orthogonale Projektion $P \in \mathcal{A}$ mit:*

(a) $\mathrm{Id}_H - P$ *ist die größte Projektion in* $\ker(\psi)$*,*

(b) $\psi(T) = \psi(PT) = \psi(TP)$ *für alle* $T \in \mathcal{A}$*,*

(c) für $T \in \mathcal{A}$ *ist* $\psi(T^*T) = 0$ *genau dann, wenn* $PT^*T = 0$ *ist oder auch genau dann, wenn* $PT^*TP = 0$ *ist.*

Beweis. Sei $\mathcal{M} = \bigcap_{S \in \mathcal{A}} \ker(\psi(S\cdot))$. Dann ist $\mathcal{M}$ ein ultraschwach abgeschlossenes und norm-abgeschlossenes Linksideal in $\mathcal{A}$. Sei $\mathcal{N} = \mathcal{M} \cap \mathcal{M}^*$. Man überlegt sich leicht, dass $\mathcal{N}$ eine ultraschwach abgeschlossene C^*-Algebra ist. Nach Satz 3.7 existiert dann eine orthogonale Projektion $Q \in \mathcal{N}$ so, dass $QT = TQ = T$ für alle $T \in \mathcal{N}$ gilt. Sei

$$\tilde{\mathcal{M}} = \{T \in \mathcal{A};\ TQ = T\}.$$

Da $\mathcal{M}$ ein Linksideal ist, ist $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}$. Sei $T \in \mathcal{M}$ und $T = W|T|$ seine Polarzerlegung ([21, Theorem 12.8]). Dann gilt $|T| = W^*T \in \mathcal{M}$. Da $|T|$ selbstadjungiert ist, gilt sogar $|T| \in \mathcal{N}$. Nach Wahl von Q folgt dann aber $|T|Q = |T|$ und somit

$$TQ = W|T|Q = W|T| = T.$$

Also ist $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M}$ und Q eine maximale orthogonale Projektion in $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M}$ mit $TQ = T$ für alle $T \in \mathcal{M}$.

Nach Satz 3.8 folgt für alle $T \in \mathcal{A}$ mit $\psi(T^*T) = 0$ und alle $S \in \mathcal{A}$:

$$\|\psi(S^*T)\| \leq \|\psi(S^*S)\|^{\frac{1}{2}} \|\psi(T^*T)\|^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Also ist

$$\mathcal{M} = \{T \in \mathcal{A};\ \psi(T^*T) = 0\}.$$

Wegen $\psi(Q) = \psi(Q^*Q) = 0$ gilt $Q \in \ker(\psi)$. Sei F eine weitere Projektion in $\ker(\psi)$. Dann folgt aus $\psi(F^*F) = \psi(F) = 0$, dass $F \in \mathcal{M} = \tilde{\mathcal{M}}$ ist, also gilt $FQ = F$. Daraus folgt $F \leq Q$ und Q ist die größte orthogonale Projektion in $\ker(\psi)$.

Wegen Satz 3.8 erhält man außerdem für alle $T \in \mathcal{A}$:

$$\|\psi(QT)\| \leq \|\psi(Q)\|^{\frac{1}{2}} \|\psi(T^*T)\|^{\frac{1}{2}} = 0$$

und somit $\psi(QT) = 0$. Analog sieht man $\psi(TQ) = 0$. Daher gilt

$$\psi(T) = \psi((\mathrm{Id}_H - Q)T + QT) = \psi((\mathrm{Id}_H - Q)T) + \psi(QT) = \psi((\mathrm{Id}_H - Q)T)$$

und analog $\psi(T) = \psi(T(\mathrm{Id}_H - Q))$ für alle $T \in \mathcal{A}$.

Ist $\psi((\mathrm{Id}_H - Q)TT^*(\mathrm{Id}_H - Q))) = 0$, so ist aber auch

$$\psi(TT^*) = \psi((\mathrm{Id}_H - Q)TT^*(\mathrm{Id}_H - Q)) = 0.$$

Ist $TT^* \in \ker(\psi)$, dann ist $T^* \in \mathcal{M} = \tilde{\mathcal{M}}$ und daher ist $T^*Q = T^*$. Es ergibt sich:

$$0 = TT^* - TT^* = TT^*(\mathrm{Id}_H - Q) + TT^*Q - TT^* = TT^*(\mathrm{Id}_H - Q)$$

und daher $(\mathrm{Id}_H - Q)TT^*(\mathrm{Id}_H - Q) = 0$.

Setzt man $P = \mathrm{Id}_H - Q$, so folgt die Behauptung. □

4 Darstellungen

Dieses Kapitel soll Darstellungen von C^*-Algebren behandeln.

Im Folgenden sei H ein komplexer Hilbertraum.

Definition 4.1. Sei $\mathcal{A}$ eine unitale C^*-Algebra. Eine *Darstellung* ist ein $*$-Homomorphismus $\pi\colon \mathcal{A} \to L(H)$. Für eine Darstellung
$\pi\colon \mathcal{A} \to L(H)$ definiert man

$$\mathrm{Lat}(\pi) = \{M \subset H \text{ abgeschlossener Teilraum } ;\ \pi(x)M \subset M \text{ für alle } x \in \mathcal{A}\}$$

und nennt π *irreduzibel*, falls $\pi \neq 0$ ist und $\mathrm{Lat}(\pi) = \{\{0\}, H\}$ gilt.

Definition 4.2. Eine Darstellung $\pi\colon \mathcal{A} \to L(H)$ heißt *nichtentartet*, falls die C^*-Algebra der Operatoren $\pi(\mathcal{A})$ trivialen Nullraum hat. Dabei heißt für $E \subset L(H)$ die Menge

$$\mathrm{null}(E) = \bigcap(\ker A;\ A \in E)$$

der *Nullraum* von E.

Lemma 4.3. *Sei $\pi\colon \mathcal{A} \to L(H)$ eine Darstellung. Dann ist π genau dann nichtentartet, wenn*

$$\overline{LH\{\pi(a)\xi;\ \xi \in H,\ a \in \mathcal{A}\}} = H$$

gilt.

Beweis. [17, Lemma 3.3.6] □

4.1 Darstellungen auf L(H)

Im Folgenden wollen wir auf einen Satz hinarbeiten, der es erlaubt, jede Darstellung auf $L(H)$ auf geschickte Art in zwei Teildarstellungen zu zerlegen. Dabei macht eine Teildarstellung die kompakten Operatoren zu Null und die andere ist bis auf unitäre Äquivalenz ein Vielfaches der Identität.

Satz 4.4. *Sei $T \in L(H)$ normal und kompakt mit $T \neq 0$ und sei*

$$(\lambda_n)_{0 \leq n < N} \quad (N \in \mathbb{N} \text{ oder } N = \infty)$$

eine Abzählung von $\sigma(T) \cap \{0\}^c$. Ist $P_n = P_{\ker(\lambda_n - T)}$ die orthogonale Projektion auf $\ker(\lambda_n - T)$*, so gilt*

$$T = \sum_{0 \leq n < N} \lambda_n P_n. \tag{4.1}$$

Beweis. [12, Korollar 14.17.] □

Lemma 4.5. *Sei* $\{0\} \neq \mathcal{A} \subset K(H)$ *eine* C^**-Algebra,* $0 \neq T \in \mathcal{A}$ *normal und* $\lambda \in \sigma(T) \cap \{0\}^c$*. Dann ist die orthogonale Projektion* $P_{\ker(\lambda - T)}$ *auf* $\ker(\lambda - T)$ *ein Element von* $\mathcal{A}$*.*

Beweis. Sei $\lambda \in \sigma(T) \cap \{0\}^c$. Da λ ein isolierter Punkt in $\sigma(T)$ ist, definiert

$$\chi_\lambda \colon \sigma(T) \mapsto \mathbb{C},\ z \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } z = \lambda, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Funktion $\chi_\lambda \in C(\sigma(T))$ mit $\chi_\lambda = \overline{\chi_\lambda} = \chi_\lambda^2$. Durch anwenden des stetigen Funktionalkalküls sieht man, dass $\chi_\lambda(T)$ eine orthogonale Projektion in $L(H)$ definiert. Wir zeigen, dass $P_{\ker(\lambda - T)} = \chi_\lambda(T)$ gilt. Da beide Operatoren orthogonale Projektionen sind, genügt es zu zeigen, dass $\operatorname{Im} \chi_\lambda(T) = \ker(\lambda - T)$ gilt. Offensichtlich ist $(\lambda - T)\chi_\lambda(T) = ((\lambda - z)\chi_\lambda(z))(T) = 0$. Sei umgekehrt $h \in \ker(\lambda - T)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \chi_\lambda(T)h &= \chi_\lambda(T)h + \left(\frac{1 - \chi_\lambda}{\lambda - z}\right)(T)(\lambda - T)h \\ &= \chi_\lambda(T)h + \left(\frac{1 - \chi_\lambda}{\lambda - z}(\lambda - z)\right)(T)h \\ &= h. \end{aligned}$$

Da $\chi_\lambda \in C(\sigma(T))$, gibt es nach Stone-Weierstraß eine Folge von Polynomen $p_n \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ so, dass

$$\sup_{z \in \sigma(T)} |p_n(z, \overline{z}) - \chi_\lambda(z)| \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

gilt. Da $\chi_\lambda(0) = 0$ für $\dim H = \infty$ gilt, kann man in jedem Fall erreichen, dass die Polynome p_n keinen konstanten Term besitzen. Also ist

$$\chi_\lambda(T) = \lim_{n \to \infty} p_n(T, T^*) \in \mathcal{A}.$$

□

Definition 4.6. Sei $\mathcal{A} \subset L(H)$ eine C^*-Algebra. Eine orthogonale Projektion $P \in \mathcal{A}$ heißt *minimal* in $\mathcal{A}$, falls für eine Projektion $Q \in \mathcal{A}$ mit $Q \leq P$ folgt $Q = 0$ oder $Q = P$

Proposition 4.7. *Seien* $\mathcal{A} \subset K(H)$ *eine* C^**-Algebra und* $0 \neq E \in \mathcal{A}$ *eine orthogonale Projektion. Dann ist* E *genau dann minimal, wenn* $E\mathcal{A}E = \mathbb{C}E$ *gilt.*

Beweis. Sei $E\mathcal{A}E = \mathbb{C}E$ und $F \in \mathcal{A}$ eine orthogonale Projektion mit $F \leq E$. Es folgt $F = EFE \in E\mathcal{A}E$. Wegen $E\mathcal{A}E = \mathbb{C}E$ existiert ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $F = \lambda E$. Da F eine Projektion ist, gilt dann aber $F = 0$ oder $F = E$.

Sei nun E minimal in $\mathcal{A}$. Dann ist für jede Projektion $F \in E\mathcal{A}E$, wegen $EF = F$ schon $F \leq E$. Daraus folgt $F = 0$ oder $F = E$. Die Menge $E\mathcal{A}E$ ist eine C^*-Algebra kompakter Operatoren. Wegen Satz 4.4 und Lemma 4.5 ist $E\mathcal{A}E$ dann die abgeschlossene lineare Hülle seiner Projektionen. Daraus folgt $E\mathcal{A}E = \mathbb{C}E$. □

Proposition 4.8. *Falls $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra kompakter Operatoren auf H ist, dann hat jede orthogonale Projektion $0 \neq P \in \mathcal{A}$ endlich dimensionales Bild und ist die Summe von minimalen orthogonalen Projektionen in $\mathcal{A}$.*

Beweis. Sei $0 \neq P \in \mathcal{A}$ orthogonale Projektion. Da P kompakt ist, ist $\overline{\text{ball}(\text{Im}(P))} = \overline{P\,\text{ball}(H)} \subset \text{Im}(P)$ kompakt. Nach [12, Satz 4.18] ist dann $\dim(\text{Im}(P)) < \infty$.

Sei $\dim(\text{Im}(P)) = n$ und

$$M_0 = \{F \in \mathcal{A};\ F \text{ ist eine orthogonale Projektion mit } \{0\} \neq \text{Im}(F) \subsetneq \text{Im}(P)\}.$$

Falls $M_0 = \emptyset$ gilt, war P schon minimal, sonst wähle ein $P_1 \in M_0$ und betrachte

$$M_1 = \{F \in \mathcal{A};\ F \text{ ist eine orthogonale Projektion mit } \{0\} \neq \text{Im}(F) \subsetneq \text{Im}(P_1)\}.$$

falls $M_1 = \emptyset$ ist, war P_1 schon minimal. Sonst fahre fort.

Spätestens nach n Schritten haben wir ein minimales $E_0 \in \mathcal{A}$ mit $E_0 \leq P$ gefunden, da $M_{n-1} = \emptyset$ ist.

Ist $E_0 \neq P$, kann man mit obiger Methode ein minimales E_1 in $\mathcal{A}$ wählen mit $E_1 \leq P - E_0$. Gilt $E_1 = P - E_0$ sind wir fertig. Sonst wählen wir mit obiger Methode ein minimales E_2 in $\mathcal{A}$ mit $E_2 \leq P - E_0 - E_1$. Wegen $\text{Im}(P - \sum_{i=0}^{k+1} E_i) \subsetneq \text{Im}(P - \sum_{i=0}^{k} E_i) \subsetneq \text{Im}(P)$ für alle $k \in \{0, \ldots, n\}$ finden wir ein $k_0 \in \{1, \ldots, n\}$ mit $E_{k_0} = P - \sum_{i=0}^{k_0-1} E_i$. □

Satz 4.9. *Falls $\mathcal{A} \subset K(H)$ eine irreduzible C^*-Algebra ist, gilt $\mathcal{A} = K(H)$.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $\mathcal{A}$ eine Projektion E mit $\dim(\text{Im}(E)) = 1$ besitzt. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $\mathcal{A}$ eine orthogonale Projektion F enthält. Sonst wähle ein $S \in \mathcal{A}$ und setze $T = \frac{1}{2}(S + S^*) \in \mathcal{A}$. T ist offenbar selbstadjungiert. Wegen [12, Korollar 14.17.] und da sich $\chi_{\{\lambda_n\}}(T) = P|_{\ker(\lambda_n \text{Id}_H - T)}$ für alle $\lambda_n \in \sigma(T)$ $(n \in \mathbb{N})$ durch $p_i(T)$, wobei die p_i $(i \in \mathbb{N})$ Polynome ohne konstanten Term sein sollen, approximieren lässt, gibt es eine orthogonale Projektion $F \in \mathcal{A}$. Wegen Proposition 4.8 lässt sich F als endliche Summe von minimalen Projektionen in $\mathcal{A}$ schreiben. Damit gibt es eine minimale Projektion $E \in \mathcal{A}$ mit $E \leq F$. Seien $0 \neq \xi, \eta_0 \in EH$ mit $\|\xi\| = 1$ und $\eta = \eta_0 - \langle \xi, \eta_0 \rangle \xi$. Da E minimal ist, gibt es für alle $T \in \mathcal{A}$ ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $ETE = \lambda E$. Daher gilt

$$\langle \eta, T\xi \rangle = \langle E\eta, TE\xi \rangle = \langle \eta, ETE\xi \rangle = \langle \eta, \lambda\xi \rangle = \overline{\lambda}\langle \eta, \xi \rangle = 0.$$

Da $\overline{\mathcal{A}\xi}$ invariant unter $\mathcal{A}$ ist, folgt aus der Irreduzibilität von $\mathcal{A}$, dass $\overline{\mathcal{A}\xi} = H$ ist. Deshalb gilt $\eta = 0$ und somit $\eta_0 = \langle \xi, \eta_0 \rangle \xi$. Daraus ergibt sich $EH = \mathbb{C}\xi$.

Nun wollen wir zeigen, dass $\mathcal{A}$ jede Projektion F mit $\dim(\text{Im}(F)) = 1$ enthält. Sei F eine solche orthogonale Projektion, dann gibt es ein ξ_F mit $\|\xi_F\| = 1$ so, dass $F\eta = \langle \eta, \xi_F \rangle \xi_F$ für alle $\eta \in H$ gilt. Sei E eine orthogonale Projektion in $\mathcal{A}$ mit $E\eta = \langle \eta, \xi_E \rangle \xi_E$ für ein $\xi_E \in H$ mit $\|\xi_E\| = 1$ und alle $\eta \in H$. Wie oben sieht man, dass $\overline{\mathcal{A}\xi_E} = H$ ist. Sei $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}$ mit $\lim_{n \to \infty} T_n \xi_E = \xi_F$. Ohne Einschränkung können wir dann annehmen, dass $\|T_n \xi_E\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Es ist $T_n E T_n^* \in \mathcal{A}$ und

$$T_n E T_n^* \eta = T_n(\langle T_n^* \eta, \xi_E \rangle \xi_E) = \langle \eta, T_n \xi_E \rangle T_n \xi_E$$

für alle $\eta \in H$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\|T_n E T_n^* \eta - F\eta\| &= \|\langle \eta, T_n\xi_E\rangle T_n\xi_E - \langle \eta, \xi_F\rangle \xi_F\| \\ &= \|\langle \eta, T_n\xi_E\rangle T_n\xi_E - \langle \eta, \xi_F\rangle T_n\xi_E + \langle \eta, \xi_F\rangle T_n\xi_E - \langle \eta, \xi_F\rangle \xi_F\| \\ &\leq |\langle \eta, T_n\xi_E - \xi_F\rangle| \|T_n\xi_E\| + |\langle \eta, \xi_F\rangle| \|T_n\xi_E - \xi_F\| \\ &\leq \|\eta\| \|T_n\xi_E - \xi_F\| \|T_n\xi_E\| + \|\eta\| \|\xi_F\| \|T_n\xi_E - \xi_F\| \\ &= 2\|\eta\| \|T_n\xi_E - \xi_F\| \\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

für alle $\eta \in H$. Damit gilt

$$\|T_n E T_n^* - F\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

und daher ist $F \in \mathcal{A}$. Also enthält $\mathcal{A}$ jede Projektion deren Bild Dimension 1 hat. Jede Projektion mit endlich dimensionalem Bild lässt sich als Linearkombination von Projektionen schreiben deren Bild Dimension 1 hat. Daher enthält $\mathcal{A}$ jede Projektion mit endlichem Bild. Wegen Satz 4.4 und [12, Lemma 9.1] lässt sich jedes $T \in K(H)$ durch Linearkombinationen von Projektionen mit endlich dimensionalem Bild approximieren. Somit ist $\mathcal{A} = K(H)$. □

Proposition 4.10. *Sei E eine minimale Projektion in einer C^*-Algebra $\mathcal{A} \subset K(H)$. Sei $\xi \in EH$ mit $\|\xi\| = 1$ und $H_\xi = \overline{\mathcal{A}\xi}$. Dann ist $\mathcal{A}|_{H_\xi} = K(H_\xi)$.*

Beweis. $H_\xi = \overline{\mathcal{A}\xi}$ ist $\mathcal{A}$ invariant. Daher ist die Abbildung

$$\mathcal{A} \to K(H_\xi),\ T \mapsto T|_{H_\xi}$$

ein wohldefinierter $*$-Homomorphismus und $\mathcal{A}|_{H_\xi}$ ist eine C^*-Teilalgebra von $K(H_\xi)$. Nach Satz 4.9 genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{A}|_{H_\xi}$ irreduzibel ist. Sei $R \in L(H_\xi)$ so, dass $R\mathcal{A}|_{H_\xi} = \mathcal{A}|_{H_\xi} R$ gilt. Wir werden zeigen, dass R ein Vielfaches der Identität ist. Seien $S, T \in \mathcal{A}$. Setze $R_0 = R - (\langle R\xi, \xi\rangle \xi)\,\mathrm{Id}_{H_\xi} \in L(H_\xi)$. Dann gilt $R_0\mathcal{A}|_{H_\xi} = \mathcal{A}|_{H_\xi} R_0$ und $\langle R_0\xi, \xi\rangle = 0$. Für alle $\eta \in H_\xi$ folgt außerdem

$$ET^*R_0\eta = (ET^*)|_{H_\xi} R_0\eta = R_0(ET^*)|_{H_\xi}\eta = R_0 ET^*\eta.$$

Aus der Minimalität von E erhält man wegen Proposition 4.7 $ET^*SE = \lambda E$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$. Also gilt wegen $\xi \in H_\xi$

$$\begin{aligned}\langle R_0 S\xi, T\xi\rangle &= \langle R_0 SE\xi, TE\xi\rangle \\ &= \langle ET^* R_0 SE\xi, \xi\rangle \\ &= \langle R_0 ET^* SE\xi, \xi\rangle \\ &= \lambda\langle R_0 E\xi, \xi\rangle \\ &= \lambda\langle R_0\xi, \xi\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Da $\mathcal{A}\xi$ dicht in H_ξ liegt, folgt aus der Stetigkeit des Skalarproduktes $\langle R_0 v, w\rangle = 0$ für alle $v, w \in H_\xi$. Deshalb ist $R_0 = 0$. $\mathcal{A}|_{H_\xi}$ vertauscht daher mit keinen nicht trivialen orthogonalen Projektionen und eine kleine Rechnung zeigt, dass es somit irreduzibel ist. □

Satz 4.11. *Seien K ein weiterer komplexer Hilbertraum, $\mathcal{A} \subset K(H)$ eine C^*-Algebra und*

$$\pi\colon \mathcal{A} \to L(K)$$

eine nichtentartete Darstellung. Dann existiert eine Indexmenge I sowie eine Zerlegung

$$K = \bigoplus_{i\in I} K_i$$

von K in $\pi(\mathcal{A})$-invariante Unterräume $\{0\} \neq K_i \subset K$ $(i \in I)$ derart, dass für jedes $i \in I$ ein abgeschlossener $\mathcal{A}$-invarianter Unterraum $H_i \subset H$ und eine unitäre Abbildung

$$U_i\colon H_i \to K_i$$

existiert, so dass

$$\pi(T)|_{K_i} = U_i T|_{H_i} U_i^*$$

für alle $T \in \mathcal{A}$ gilt.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass es eine minimale orthogonale Projektion $E \in \mathcal{A}$ gibt mit $\pi(E) \neq 0$. Da π nicht entartet ist, gibt es ein $S \in \mathcal{A}$ mit $\pi(S) \neq 0$. S ist die Linearkombination von selbstadjungierten Elementen. Also gibt es ein $T \in \mathcal{A}$ mit $T^* = T$ und $\pi(T) \neq 0$. Wegen [12, Korollar 14.17] und da sich $\chi_{\{\lambda_n\}}(T) = P|_{\ker(\lambda_n \mathrm{Id}_H - T)}$ für alle $\lambda_n \in \sigma(T)$ $(n \in \mathbb{N})$ durch $p_i(T)$, wobei die p_i $(i \in \mathbb{N})$ Polynome ohne konstanten Term sein sollen, approximieren lässt, lässt sich T als Normgrenzwert von Linearkombinationen aus orthogonalen Projektionen in $\mathcal{A}$ schreiben. Daher gibt es eine orthogonale Projektion $F \in \mathcal{A}$ mit $\pi(F) \neq 0$. F ist wegen Proposition 4.8 die Summe von minimalen Projektionen in $\mathcal{A}$, daher existiert eine minimale Projektion $E \in \mathcal{A}$ mit $E \leq F$ und $\pi(E) \neq 0$.

Sei nun E solch eine minimale orthogonale Projektion in $\mathcal{A}$ mit $\pi(E) \neq 0$. Wegen der Minimalität von E gibt es für alle $T \in \mathcal{A}$ ein $\lambda_T \in \mathbb{C}$ mit $ETE = \lambda_T E$. Wir setzen

$$\alpha\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C},\ T \mapsto \lambda_T.$$

Man rechnet leicht nach, dass α wohldefiniert und linear ist. Außerdem gilt

$$\pi(ETE) = \pi(\alpha(T)E) = \alpha(T)\pi(E).$$

Wir wählen Einheitsvektoren $\eta \in \pi(E)H$ und $\xi \in EH$. Sei $K_0 = \overline{\pi(\mathcal{A})\eta}$. Dann ist K_0 invariant unter $\pi(\mathcal{A})$. Für $T \in \mathcal{A}$ gilt wegen $\pi(E)\eta = \eta$ und $E\xi = \xi$

$$\begin{aligned}
\|\pi(T)\eta\|^2 &= \|\pi(T)\pi(E)\eta\|^2 \\
&= \|\pi(TE)\eta\|^2 \\
&= \langle \pi(TE)\eta, \pi(TE)\eta \rangle \\
&= \langle \pi(ET^*TE)\eta, \eta \rangle \\
&= \alpha(T^*T)\langle \pi(E)\eta, \eta \rangle \\
&= \alpha(T^*T)\|\eta\|^2 \\
&= \alpha(T^*T)\|\xi\|^2 \\
&= \alpha(T^*T)\langle E\xi, \xi \rangle \\
&= \langle ET^*TE\xi, \xi \rangle \\
&= \langle TE\xi, TE\xi \rangle \\
&= \|T\xi\|^2.
\end{aligned}$$

Setze

$$\tilde{U}_0 \colon \mathcal{A}\xi \to K_0,\ T\xi \mapsto \pi(T)\eta.$$

Man überprüft leicht, dass $\tilde{U}_0$ eine wohldefinierte lineare Isometrie ist. Da K_0 als abgeschlossener Teilraum des Hilbertraumes K vollständig ist und $\mathcal{A}\xi$ dicht in dem $\mathcal{A}$-invarianten Hilbertraum $H_0 = \overline{\mathcal{A}\xi}$ liegt, hat $\tilde{U}_0$ nach [12, Satz 1.16] eine eindeutige stetige Fortsetzung $U_0 \colon H_0 \to K_0$. Die Linearität und die Isometrie vererbt sich von $\tilde{U}_0$ auf U_0. Eine kleine Rechnung zeigt außerdem, dass U_0 surjektiv und somit unitär ist. Aus der Definition von U_0 und der $\mathcal{A}$-Invarianz von H_0 folgt außerdem $UT|_{H_0} = \pi(T)|_{K_i}U_0$.

Im Folgenden wollen wir das Lemma von Zorn anwenden um den Beweis zu beenden. Sei $\mathcal{M}$ die Menge der Mengen M, die paarweise orthogonale $\pi(\mathcal{A})$ invariante Unterräumen $K_i \subset K$ enthalten derart, dass für jedes i ein abgeschlossener $\mathcal{A}$-invarianter Unterraum $H_i \subset H$ und eine unitäre Abbildung

$$U_i \colon H_i \to K_i$$

existiert, so dass

$$\pi(T)|_{K_i} = U_i T|_{H_i} U_i^*$$

für alle $T \in \mathcal{A}$ gilt. Wir wollen $\mathcal{M}$ bezüglich der Halbordnung

$$M_1 \leq M_2 \iff M_1 \subset M_2 \quad \text{für alle} \quad M_1, M_2 \in \mathcal{M}$$

betrachten. Sei $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$ eine Kette und $S = \bigcup_{M \in \mathcal{C}} M$. Falls wir zeigen können, dass $S \in \mathcal{M}$ gilt, ist S eine obere Schranke für $\mathcal{C}$. Dazu genügt es zu zeigen, dass die Elemente in S paarweise orthogonal sind. Seien $K_1, K_2 \in S$ mit $K_1 \neq K_2$. Dann gibt es $M_1, M_2 \in \mathcal{C}$ mit $K_1 \in M_1$ und $K_2 \in M_2$. Da $\mathcal{C}$ total geordnet ist, gilt entweder $M_1 \leq M_2$ oder

$M_2 \leq M_1$. Sei ohne Einschränkung $M_1 \leq M_2$, dann sind $K_1, K_2 \in M_2$ und damit ist $K_1 \perp K_2$. Daraus folgt $S \in \mathcal{M}$. Wegen des Lemmas von Zorn existiert daher ein maximales Element $\tilde{M} \in \mathcal{M}$.

Angenommen $\bigoplus_{\tilde{K}\in\tilde{M}} \tilde{K} \subsetneq K$.
Die Menge $\bigoplus_{\tilde{K}\in\tilde{M}} \tilde{K} \subset K$ ist $\pi(\mathcal{A})$- invariant, da die $\tilde{K} \in \tilde{M}$ invariant unter $\pi(\mathcal{A})$ sind. Somit ist auch $(\bigoplus_{\tilde{K}\in\tilde{M}} \tilde{K})^\perp$ invariant unter $\pi(\mathcal{A})$. Da π nicht entartet ist, folgt

$$\overline{\pi(\mathcal{A})\left(\bigoplus_{\tilde{K}\in\tilde{M}} \tilde{K}\right)^\perp} = \left(\bigoplus_{\tilde{K}\in\tilde{M}} \tilde{K}\right)^\perp.$$

Wir betrachten im Folgenden $\pi(\cdot)|_{(\bigoplus_{\tilde{K}\in\tilde{M}} \tilde{K})^\perp}$. Wie oben folgt, dass es einen Unterraum $L \subset (\bigoplus_{\tilde{K}\in\tilde{M}} \tilde{K})^\perp$ invariant unter $\pi(\mathcal{A})|_{(\bigoplus_{\tilde{K}\in\tilde{M}} \tilde{K})^\perp}$ gibt, der dann auch $\pi(\mathcal{A})$-invariant ist so, dass ein abgeschlossener $\mathcal{A}$-invarianter Unterraum $\tilde{H} \subset H$ und eine unitäre Abbildung

$$U\colon \tilde{H} \to L$$

existiert, so dass

$$\pi(T)|_L = UT|_{\tilde{H}}U^*.$$

für alle $T \in \mathcal{A}$ gilt. Wegen $L \subset \left(\bigoplus_{\tilde{K}\in\tilde{M}} \tilde{K}\right)^\perp$, ergibt sich $L \perp \tilde{K}$ für alle $\tilde{K} \in \tilde{M}$. Daher ist

$$M' = \{L\} \cup \{\tilde{K};\ \tilde{K} \in \tilde{M}\} \in \mathcal{M}.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von $\tilde{M}$. Daher muss $K = \bigoplus_{\tilde{K}\in\tilde{M}} \tilde{K}$ gelten. □

Korollar 4.12. *Seien K ein weiterer komplexer Hilbertraum,*

$$\pi\colon K(H) \to L(K)$$

eine nichtentartete Darstellung. Dann existiert eine Indexmenge I sowie eine Zerlegung

$$K = \bigoplus_{i\in I} K_i$$

von K in $\pi(\mathcal{A})$-invariante Unterräume $\{0\} \neq K_i \subset K$ $(i \in I)$ derart, dass für jedes $i \in I$ eine unitäre Abbildung

$$U_i\colon H \to K_i$$

existiert, so dass

$$\pi(T)|_{K_i} = U_i T U_i^*$$

für alle $T \in K(H)$ gilt.

Beweis. Wende Satz 4.11 auf $K(H)$ an. Mit den Bezeichnungen aus Satz 4.11 folgt mit der Invarianz der $\{0\} \neq H_i \subset H$ unter $K(H)$ und der Irreduzibilität von $K(H)$, dass $H = H_i$ gilt. □

Proposition 4.13. *Seien $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra und $0 \neq \pi\colon \mathcal{A} \to L(H)$ eine irreduzible Darstellung auf H. Dann ist π* zyklisch*, das heißt es gibt ein $0 \neq h_0 \in H$ mit $H = \overline{\pi(\mathcal{A})h_0}$.*

Beweis. Wegen $\pi \neq 0$, gibt es ein $x \in \mathcal{A}$ mit $\pi(x) \neq 0$. Also gibt es ein $0 \neq h_0 \in H$ mit $\pi(x)h_0 \neq 0$. Man überlegt sich leicht, dass $\overline{\pi(\mathcal{A})h_0}$ invariant unter $\pi(H)$ ist. Wegen $0 \neq \pi(x)h_0 \in \overline{\pi(\mathcal{A})h_0}$, gilt außerdem $\overline{\pi(\mathcal{A})h_0} \neq \{0\}$. Da π irreduzibel ist, folgt dann aber schon $\overline{\pi(\mathcal{A})h_0} = H$. □

Kommen wir nun zum Satz der eine geschickte Zerlegung von Darstellungen auf $L(H)$ liefert, und den wir im Hauptsatz der Arbeit benutzen wollen.

Satz 4.14. *Seien H_1 und H_2 komplexe Hilberträume und $\pi\colon L(H_1) \to L(H_2)$ eine Darstellung von $L(H_1)$. Dann sind $K = \overline{\pi(K(H_1))H_2}$ und $K^\perp$ invariant unter $\pi(L(H_1))$ und*

$$\pi_1\colon L(H_1) \to L(K),\ T \mapsto \pi(T)|_K$$

sowie

$$\pi_2\colon L(H_1) \to L(K^\perp),\ T \mapsto \pi(T)|_{K^\perp}$$

zwei Teildarstellungen von π mit $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$.

Es gilt

$$\pi_2(K(H_1)) = \{0\}$$

und es existiert eine Indexmenge I sowie eine Zerlegung

$$K = \bigoplus_{i \in I} K_i$$

von K in π_1-invariante Unterräume $\{0\} \neq K_i \subset K$ $(i \in I)$ derart, dass für jedes $i \in I$ eine unitäre Abbildung

$$U_i\colon K_i \to H_1$$

existiert, so dass

$$\pi_1(T)|_{K_i} = U_i^* T U_i$$

für alle $T \in L(H_1)$ gilt.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $K = \overline{\pi(K(H_1))H_2}$ und $K^\perp$ invariant unter $\pi(L(H_1))$ sind. Sei dazu $k \in K$. Dann gibt es eine Folge $(\pi(T_n)h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\pi(K(H_1))H_2$ mit $k = \lim_{n\to\infty} \pi(T_n)h_n$. Für $S \in L(H_1)$ gilt dann

$$\pi(S)k = \pi(S) \lim_{n\to\infty} \pi(T_n)h_n = \lim_{n\to\infty} \pi(S)\pi(T_n)h_n = \lim_{n\to\infty} \pi(ST_n)h_n \in K.$$

Seien $S \in L(H_1)$, $k \in K$ und $k^\perp \in K^\perp$. Wegen $\pi(S^*)k \in K$ gilt dann:

$$\langle \pi(S)k^\perp, k\rangle = \langle k^\perp, \pi(S)^*k\rangle = \langle k^\perp, \pi(S^*)k\rangle = 0.$$

Also sind K und $K^\perp$ tatsächlich $\pi(L(H_1))$-invariant.

Wir setzen

$$\pi_1 \colon L(H_1) \to L(K),\ T \mapsto \pi(T)|_K$$

und

$$\pi_2 \colon L(H_1) \to L(K^\perp),\ T \mapsto \pi(T)|_{K^\perp}.$$

Seien $T \in K(H_1)$ und $k^\perp \in K^\perp$. Dann ist

$$\pi_2(T)k^\perp = \pi(T)k^\perp \in K \cap K^\perp = \{0\}.$$

Daraus folgt $\pi_2(K(H_1)) = \{0\}$.

Sei

$$\sigma \colon K(H_1) \to L(K),\ T \mapsto \pi_1(T)$$

und $k \in K$. Dann gibt es eine Folge $(\pi(T_n)(k_n \oplus k_n^\perp))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\pi(K(H_1))K \oplus K^\perp$ mit $k = \lim_{n\to\infty} \pi(T_n)(k_n \oplus k_n^\perp)$. Es folgt:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{n\to\infty} \pi(T_n)(k_n \oplus k_n^\perp) \\ &= \lim_{n\to\infty} ((\pi_1(T_n)k_n) \oplus (\pi_2(T_n)k_n^\perp)) \\ &= \lim_{n\to\infty} \pi_1(T_n)k_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \sigma(T_n)k_n \\ &\in \overline{\sigma(K(H_1))K}. \end{aligned}$$

Daher ist $\overline{\sigma(K(H_1))K} = K$ und somit σ eine nichtentartete Darstellung von $K(H_1)$ auf K (vgl. Lemma 4.3). Nach Satz 4.11 existiert dann eine Indexmenge I und eine Zerlegung

$$K = \bigoplus_{i\in I} K_i$$

von K in σ-invariante Unterräume $\{0\} \neq K_i \subset K$ $(i \in I)$ derart, dass für jedes $i \in I$ eine unitäre Abbildung

$$U_i \colon K_i \to H_1$$

existiert, so dass

$$\sigma(T)|_{K_i} = U_i^* T U_i$$

für alle $T \in K(H_1)$ gilt. Sei nun $i \in I$ und $\tilde{K}$ ein abgeschlossener $\sigma(K(H_1))|_{K_i}$ invarianter Teilraum dann gilt

$$K(H_1)U_i\tilde{K} = U_i\sigma(K(H_1))|_{K_i}U_i^*U_i\tilde{K} = U_i\sigma(K(H_1))|_{K_i}\tilde{K} \subset U_i\tilde{K}.$$

Da U_i unitär ist, ist $U_i\tilde{K} \subset H_1$ abgeschlossen. Damit ist $U_i\tilde{K}$ ein invarianter Teilraum von $K(H_1)$. Wegen der Irreduzibelität von $K(H_1)$ ist $U_i\tilde{K} \in \{\{0\}, H_1\}$. Aus der Bijektivität von U_i folgt, dass $\tilde{K} \in \{\{0\}, K_i\}$ gilt. Daher ist $\sigma(\cdot)|_{K_i}$ irreduzibel und somit zyklisch wegen Proposition 4.13, das heißt es gilt $\overline{\sigma(K(H_1))|_{K_i}\tilde{k}} = K_i$ für ein $0 \neq \tilde{k} \in K_i$. Wir wollen zeigen, dass K_i invariant unter $\pi_1(L(H_1))$ ist. Sei dazu $k_i \in K_i$. Dann gibt es eine Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $K(H_1)$ mit $k_i = \lim_{n\to\infty} \sigma(T_n)|_{K_i}\tilde{k}$. Für $S \in L(H_1)$ gilt dann, da K_i abgeschlossen in K und σ-invariant ist,

$$\begin{aligned}
\pi_1(S)k_i &= \pi_1(S) \lim_{n\to\infty} \sigma(T_n)|_{K_i}\tilde{k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \pi_1(S)\sigma(T_n)|_{K_i}\tilde{k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \pi_1(S)\sigma(T_n)\tilde{k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \pi_1(S)\pi(T_n)\tilde{k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \pi_1(ST_n)\tilde{k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sigma(ST_n)\tilde{k} \\
&\in K_i.
\end{aligned}$$

Damit ist $\pi_1(\cdot)|_{K_i}$ eine wohldefinierte Darstellung.

Wir wollen zeigen, dass

$$\pi_1(T)|_{K_i} = U_i^* T U_i$$

für alle $T \in L(H_1)$ gilt. Sei dazu $k_i \in K_i$. Wie oben finden wir dann eine Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von kompakten Operatoren und ein $0 \neq \tilde{k} \in K_i$ mit $k_i = \lim_{n\to\infty} \sigma(T_n)|_{K_i}\tilde{k}$. Für alle

$S \in L(H_1)$ folgt

$$\begin{aligned}
\pi_1(S)|_{K_i} k_i &= \pi_1(S) k_i \\
&= \pi_1(S)(\lim_{n\to\infty} \sigma(T_n)|_{K_i} \tilde{k}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \pi_1(S)\sigma(T_n)|_{K_i} \tilde{k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \pi_1(S)\sigma(T_n)\tilde{k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \pi_1(S)\pi(T_n)\tilde{k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \pi_1(ST_n)\tilde{k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sigma(ST_n)\tilde{k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sigma(ST_n)|_{K_i} \tilde{k} \\
&= \lim_{n\to\infty} U_i^* ST_n U_i \tilde{k} \\
&= \lim_{n\to\infty} U_i^* SU_i U_i^* T_n U_i \tilde{k} \\
&= \lim_{n\to\infty} U_i^* SU_i \sigma(T_n)|_{K_i} \tilde{k} \\
&= U_i^* SU_i (\lim_{n\to\infty} \sigma(T_n)|_{K_i} \tilde{k}) \\
&= U_i^* SU_i k_i.
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$\pi_1(T)|_{K_i} = U_i^* T U_i$$

für alle $T \in L(H_1)$ und alle $i \in I$. □

Jetzt wollen wir noch zeigen, dass das oben definierte π_1 ultraschwach stetig ist.

Satz 4.15. *Seien K ein komplexer Hilbertraum und $\pi_1 \colon L(H) \to L(K)$ eine Darstellung so, dass eine Indexmenge I und eine unitäre Abbildung*

$$U \colon K \to \bigoplus_{i\in I} H$$

existieren mit

$$\pi_1(T) = U^*(\bigoplus_{i\in I} T)U.$$

für alle $T \in L(H)$. Dann ist π_1 ultraschwach stetig.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die Abbildung

$$\varphi \colon L(H) \to L\left(\bigoplus_{i\in I} H\right),\ T \mapsto \bigoplus_{i\in I} T$$

w*-stetig ist. Nach Satz 1.12 genügt es zu zeigen, dass $\varphi|_{\mathrm{ball}(L(H))}$ w*-stetig ist. Sei dazu $(T_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ein Netz in $\mathrm{ball}(L(H))$ mit $\tau_{\mathrm{w}^*}\text{-}\lim_\alpha T_\alpha = T$. Nach Alaoglou-Bourbaki ist $\mathrm{ball}(L(H))$ w*-kompakt, also ist $T \in \mathrm{ball}(L(H))$. Die Abbildung φ ein $*$-Homomorphismus und damit normbeschränkt. Daher sind $\varphi(T), \varphi(T_\alpha) \in \mathrm{ball}(L(H), \|\varphi\|)$ für alle $\alpha \in \mathcal{A}$. Da auf normbeschränkten Mengen $\tau_{\mathrm{WOT}} = \tau_{\mathrm{w}^*}$ gilt, genügt es zu zeigen, dass $\tau_{\mathrm{WOT}}\text{-}\lim_\alpha \varphi(T_\alpha) = \varphi(T)$ ist. Seien dazu $\epsilon > 0$ und $\xi, \eta \in \bigoplus_{i\in I} H$. Dann gibt es ein endliches $J \subset I$ mit

$$\left|\sum_{i\in I}\|\xi_i\|^2 - \sum_{i\in J}\|\xi_i\|^2\right| < \left(\frac{\epsilon}{3\|\eta\|+1}\right)^2.$$

Wegen $\tau_{\mathrm{w}^*}\text{-}\lim_\alpha T_\alpha = T$, gibt es ein $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ mit

$$\left|\sum_{i\in J}\langle T_\alpha\xi_i, \eta_i\rangle - \sum_{i\in J}\langle T\xi_i, \eta_i\rangle\right| < \frac{\epsilon}{3}$$

für alle $\alpha \geq \alpha_0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i\in I}\langle T_\alpha\xi_i, \eta_i\rangle - \sum_{i\in I}\langle T\xi_i, \eta_i\rangle\right| \\
&\leq \left|\sum_{i\in I}\langle T_\alpha\xi_i, \eta_i\rangle - \sum_{i\in J}\langle T_\alpha\xi_i, \eta_i\rangle\right| + \left|\sum_{i\in J}\langle T_\alpha\xi_i, \eta_i\rangle - \sum_{i\in J}\langle T\xi_i, \eta_i\rangle\right| \\
&+ \left|\sum_{i\in J}\langle T\xi_i, \eta_i\rangle - \sum_{i\in I}\langle T\xi_i, \eta_i\rangle\right| \\
&\leq \left(\sum_{i\in I\setminus J}\|T_\alpha\xi_i\|^2\right)^{1/2}\|\eta\| + \frac{\epsilon}{3} + \left(\sum_{i\in I\setminus J}\|T\xi_i\|^2\right)^{1/2}\|\eta\| \\
&\leq \left(\sum_{i\in I\setminus J}\|T_\alpha\|^2\|\xi_i\|^2\right)^{1/2}\|\eta\| + \frac{\epsilon}{3} + \left(\sum_{i\in I\setminus J}\|T\|^2\|\xi_i\|^2\right)^{1/2}\|\eta\| \\
&\leq \left(\sum_{i\in I\setminus J}\|\xi_i\|^2\right)^{1/2}\|\eta\| + \frac{\epsilon}{3} + \left(\sum_{i\in I\setminus J}\|\xi_i\|^2\right)^{1/2}\|\eta\| \\
&\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Bleibt noch zu zeigen, dass

$$L\left(\bigoplus_{i\in I} H\right) \to L(K),\ \bigoplus_{i\in I} T \mapsto U^*\left(\bigoplus_{i\in I} T\right)U$$

w*-stetig ist. Sei dazu $(S_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ein Netz in $\bigoplus_{i\in I} H$ mit $\tau_{\mathrm{w}^*}\text{-}\lim_\alpha S_\alpha = S$. Dann gilt für $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(K)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\langle U^*S_\alpha U\xi_n,\eta_n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle S_\alpha U\xi_n, U\eta_n\rangle \xrightarrow{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty}\langle SU\xi_n,U\eta_n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle U^*SU\xi_n,\eta_n\rangle.$$

□

4.2 Die universelle Darstellung

Im folgenden Abschnitt soll es um die universelle Darstellung gehen, deren sehr nützliche Eigenschaften wir im Hauptsatz der Arbeit verwenden wollen.

Satz 4.16 (GNS-Konstruktion)**.** *Sei $\mathcal{A}$ eine unitale C^*-Algebra und $f\colon \mathcal{A}\to\mathbb{C}$ ein positives lineares Funktional. Dann existiert ein Hilbertraum H_f, eine unitale Darstellung $\pi_f\colon \mathcal{A}\to L(H_f)$ und ein zyklischer Vektor $\xi_f\in H_f$ (d.h es gilt $\overline{\pi(\mathcal{A})\xi_f}^{\|\cdot\|} = H_f$) so, dass*

$$f(a) = \langle \pi_f(a)\xi_f,\xi_f\rangle$$

für alle $a\in\mathcal{A}$ gilt.

Beweis. [6, Chapter VIII 5.14] □

Definition 4.17. Sei $\mathcal{A}'_+$ die Menge aller positiven Funktionale auf $\mathcal{A}$. Für $f\in\mathcal{A}'_+$ bezeichne H_f und $\pi_f\colon\mathcal{A}\to L(H_f)$ eine Darstellung wie in Satz 4.16. Dann heißt $\pi\colon\mathcal{A}\to L(H_\pi)$ mit $H_\pi = \bigoplus_{f\in\mathcal{A}'_+} H_f$ und $\pi(a) = \bigoplus_{f\in\mathcal{A}'_+}\pi_f(a)$ die *universelle Darstellung* von $\mathcal{A}$.

Satz 4.18. *Sei $\pi\colon\mathcal{A}\to L(H_\pi)$ die universelle Darstellung der C^*-Algebra $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B} = W^*(\pi(\mathcal{A}))$ die von $\pi(\mathcal{A})$ erzeugte von-Neumann-Algebra. Dann hat jedes Norm-stetige lineare Funktional $h\colon\pi(\mathcal{A})\to\mathbb{C}$ eine* w*-stetige Fortsetzung $\tilde{h}\colon\mathcal{B}\to\mathbb{C}$.*

Beweis. Sei $\pi\colon\mathcal{A}\to L(H_\pi)$ die universelle Darstellung der C^*-Algebra $\mathcal{A}$. Dann gilt per Definition

$$H_\pi = \bigoplus_{f\in\mathcal{A}'_+} H_f,\ \pi(a) = \bigoplus_{f\in\mathcal{A}'_+}\pi_f(a),$$

und $\pi_f\colon\mathcal{A}\to L(H_f)$ ist eine Darstellung auf einem Hilbertraum H_f so, dass es einen zyklischen Einheitsvektor $\xi_f\in H_f$ gibt mit

$$f(a) = \langle\pi_f(a)\xi_f,\xi_f\rangle \quad (a\in\mathcal{A}).$$

Sei $\mathcal{B} = \overline{\pi(\mathcal{A})}^{\mathrm{WOT}}$ die von $\pi(\mathcal{A})$ erzeugte von-Neumann-Algebra. Falls $h'\in\pi(\mathcal{A})'_+$ ein positives lineares Funktional ist, dann ist $h = h'\circ\pi\in\mathcal{A}'_+$ ein positives lineares Funktional auf $\mathcal{A}$. Daher ist

$$h'(\pi(a)) = h(a) = \langle\pi_h(a)\xi_h,\xi_h\rangle = \langle\pi(a)\hat{\xi}_h,\hat{\xi}_h\rangle,$$

wobei $\hat{\xi}_h$ das Element in $H_\pi = \oplus_{f \in \mathcal{A}'_+} H_f$ ist, welches in der Komponente H_h mit ξ_h übereinstimmt und alle anderen Komponenten gleich 0 sind. Es folgt, dass

$$h' \colon (\pi(\mathcal{A}), \tau_{\mathrm{WOT}}) \to \mathbb{C}$$

stetig ist. Sei

$$\tilde{h} \colon (\mathcal{B}, \tau_{\mathrm{WOT}}) \to \mathbb{C}$$

eine stetige Fortsetzung von h'. Da $\mathcal{B} \subset L(H_\pi)$ in der w*-Topologie abgeschlossen ist und da die w*-Topologie von $\mathcal{B} = (C^1(H_\pi)/{}^\perp\mathcal{B})'$ die Relativtopologie der w*-Topologie von $L(H_\pi)$ ist folgt, dass auf ball($\mathcal{B}$) die Relativtopologie der w*-Topologie von $\mathcal{B}$ mit der Relativtopologie der schwachen Operatortopologie τ_{WOT} von $L(H_\pi)$ übereinstimmt. Daher folgt aus Satz 1.12, dass $\tilde{h} \colon \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ stetig bezüglich der w*-Topologie auf der von-Neumann-Algebra $\mathcal{B}$ ist.

Falls $h' \in \pi(\mathcal{A})'$ ein Norm-stetiges lineares Funktional auf der C^*-Algebra $\pi(\mathcal{A})$ ist, dann gibt es $h'_1, \dots h'_4 \in \pi(\mathcal{A}'_+)$ (vgl. [21, Theorem 11.2]) so, dass

$$h' = h'_1 - h'_2 + i(h'_3 - h'_4)$$

ist. Wir haben oben gesehen, dass $h'_1, \dots h'_4$ w*-stetige Fortsetzungen $\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_4 \colon \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ haben. Aber dann ist $\tilde{h} = \tilde{h}_1 - \tilde{h}_2 + i(\tilde{h}_3 - \tilde{h}_4)$ eine w*-stetige Fortsetzung von h' auf $\mathcal{B}$. □

4.3 Rand-Darstellungen

Zum Schluss des Kapitels nochmals die Definition einer Rand-Darstellung, die auf William Averson zurückgeht.

Definition 4.19. Sei $\mathcal{A}$ eine unitale C^*-Algebra und $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ ein Operatorraum mit $C^*(\mathcal{M}) = \mathcal{A}$. Man nennt eine irreduzible Darstellung $\pi \colon \mathcal{A} \to L(H)$ eine *Rand-Darstellung* für $\mathcal{M}$, wenn die einzige vollständige positive Abbildung $\varphi \colon \mathcal{A} \to L(H)$ mit $\varphi = \pi$ auf $\mathcal{M}$ die Abbildung $\varphi = \pi$ selbst ist.

5 Der zentrale Träger

In diesem Kapitel geht es um den zentralen Träger einer orthogonalen Projektion in einer von-Neumann-Algebra und seine Eigenschaften. Dabei sind vor allem die zentralen Träger der orthogonalen Projektionen, die zu den Bildern von Teildarstellungen gehören von Interesse.

Im Folgenden sei H ein komplexer Hilbertraum und $\mathcal{A}$ eine von-Neumann-Algebra auf H. Sei $M \subset H$ ein abgeschlossener Teilraum von H, dann bezeichnen wir mit P_M die orthogonale Projektion auf M. Für eine Familie von $(M_i)_{i\in I}$ Teilräumen $M_i \subset H$ $(i \in I)$ definieren wir

$$\bigvee_{i\in I} M_i = \overline{\mathrm{LH}\left(\bigcup_{i\in I} M_i\right)}.$$

Definition 5.1. Sei $E \in L(H)$ eine orthogonale Projektion und

$$K_E = \bigcap\{\mathrm{Im}\, F;\ F \in \mathcal{A}\cap\mathcal{A}' \text{ ist eine orthogonale Projektion mit } F \geq E\}.$$

Dann heißt die orthogonale Projektion $C(E) = P_{K_E}$ der *zentrale Träger* von E in $\mathcal{A}$.

Lemma 5.2. *Sei $E \in L(H)$ eine orthogonale Projektion. Der zentrale Träger $C(E)$ von E ist die kleinste Projektion im Zentrum $\mathcal{A}\cap\mathcal{A}'$ von $\mathcal{A}$ mit $E \leq C(E)$.*

Beweis. Die Menge $I = \{F \in \mathcal{A}\cap\mathcal{A}';\ F \geq E \text{ orthogonale Projektion}\}$ ist gerichtet vermöge

$$F_1 \leq F_2 \Leftrightarrow F_1 H \subset F_2 H.$$

Wendet man Korollar 3.3 auf das monoton fallende Netz $(F)_{F\in I}$ an, so erhält man die Behauptung. □

Satz 5.3. *Sei $U \in L(H)$. Dann sind äquivalent:*

(a) U ist eine partielle Isometrie,

(b) U^*U ist eine orthogonale Projektion,

(c) $U = UU^*U$,

(d) UU^* ist eine orthogonale Projektion,

(e) U^* ist eine partielle Isometrie.

In diesem Fall sind U^*U und UU^* orthogonale Projektionen auf den Anfangs- bzw. Zielraum von U.

Beweis. [21, Proposition 12.6 und Korollar 12.7] □

Definition 5.4. Seien $P, Q \in \mathcal{A}$ orthogonale Projektionen. Wir schreiben $P \sim Q$ in $\mathcal{A}$, falls es ein $U \in \mathcal{A}$ gibt mit $P = U^*U$ und $Q = UU^*$.

In diesem Fall ist U eine partielle Isometrie mit Anfangsraum $\operatorname{Im} P$ und Zielraum $\operatorname{Im} Q$.

Lemma 5.5. *Sei $T \in \mathcal{A}$. Dann gilt $P_{\overline{\operatorname{Im} T}} \sim P_{(\ker T)^\perp} = P_{\overline{\operatorname{Im} T^*}}$ in $\mathcal{A}$.*

Beweis. [21, Lemma 24.4] □

Proposition 5.6. *Sei $P \in \mathcal{A}$ eine orthogonale Projektion. Dann gilt*

$$C(P) = P_{M_P}.$$

mit

$$M_P = \bigvee_{T \in \mathcal{A}} \operatorname{Im} TP.$$

Beweis. Für alle $T \in \mathcal{A}$ gilt wegen $C(P) \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$, dass $C(P)T = TC(P)$ ist. Daher ist $\operatorname{Im} C(P)$ reduzierend für $\mathcal{A}$. Wegen $P \leq C(P)$ ist $\operatorname{Im} P \subset \operatorname{Im} C(P)$. Folglich gilt

$$\operatorname{Im} TP = T \operatorname{Im} P \subset T \operatorname{Im} C(P) \subset \operatorname{Im} C(P)$$

für alle $T \in \mathcal{A}$. Daher ist $M_P subset \operatorname{Im} C(P)$ beziehungsweise $P_{M_P} \leq C(P)$. Andererseits ist $\bigvee_{T \in \mathcal{A}} \operatorname{Im} TP$ reduzierend für $\mathcal{A}$. Deshalb gilt $P_{M_P} T = T P_{M_P}$ für alle $T \in \mathcal{A}$. Außerdem ist $\operatorname{Im} P \subset M_P$. Da M_P auch reduzierend für $\mathcal{A}'$ ist, gilt $P_{M_P} \in \mathcal{A}'' = \mathcal{A}$. Aus $P_{M_P} \in \mathcal{A}$ folgt daher $C(P) \leq P_{M_P}$ und somit die Behauptung. □

Proposition 5.7. *Seien P und Q zwei orthogonale Projektionen in $\mathcal{A}$. Dann sind äquivalent:*

(a) $C(Q)C(P) \neq 0$,

(b) $P\mathcal{A}Q \neq \{0\}$,

(c) Es gibt orthogonale Projektionen $P_1, Q_1 \in \mathcal{A}$ mit $0 \neq P_1 \leq P$ und $0 \neq Q_1 \leq Q$ so, dass $P_1 \sim Q_1$ in $\mathcal{A}$ gilt.

Beweis. $(c) \Rightarrow (b)$: Seien $P_1, Q_1 \in \mathcal{A}$ orthogonale Projektionen mit $0 \neq P_1 \leq P$ und $0 \neq Q_1 \leq Q$ so, dass $P_1 \sim Q_1$ in $\mathcal{A}$ gilt. Dann gibt es per Definition eine partielle Isometrie $U \in \mathcal{A}$ mit $Q_1 = U^*U, P_1 = UU^*$, Anfangsraum $\operatorname{Im} Q_1$, Zielraum $\operatorname{Im} P_1$. Sei $0 \neq x \in \operatorname{Im} Q_1$. Dann gilt

$$\|PUQx\| = \|PUx\| = \|Ux\| = \|x\| \neq 0$$

Daher ist $PUQ \neq 0$ und somit $P\mathcal{A}Q \neq \{0\}$.

$(b) \Rightarrow (a)$: Sei $P\mathcal{A}Q \neq \{0\}$. Dann gibt es ein $T \in \mathcal{A}$ mit $PTQ \neq 0$. Da $C(Q), C(P) \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$ und $P, T, Q \in \mathcal{A}$ mit $P \leq C(P)$ und $Q \leq C(Q)$ sind, folgt

$$PTQC(Q)C(P) = C(P)PTQC(Q) = PTQ \neq 0$$

und somit $C(Q)C(P) \neq 0$.

$(a) \Rightarrow (c)$: Sei $C(Q)C(P) \neq 0$. Da $C(Q)C(P)$ die orthogonale Projektion auf $M_P \cap M_Q$ ist, kann nicht $M_P \perp M_Q$ gelten. Also existieren $T, S \in \mathcal{A}$ und $z, w \in H$ mit $\langle TPz, SQw\rangle \neq 0$. Daraus folgt $\langle QS^*TPz, w\rangle \neq 0$. Sei $\tilde{T} = S^*T$. Dann ist $\tilde{T} \neq 0$ und $Q\tilde{T}P \neq 0$. Setze nun

$$Q_1 = P_{\overline{\operatorname{Im} Q\tilde{T}P}} \text{und} P_1 = P_{\overline{\operatorname{Im} P\tilde{T}^*Q}}.$$

Nach Korollar 3.6 gilt $P_1, Q_1 \in \mathcal{A}$. Offensichtlich ist $P_1 \leq P$ und $Q_1 \leq Q$. Nach Lemma 5.5 gilt $P_1 \sim Q_1$ in $\mathcal{A}$. □

Proposition 5.8. *Seien P und Q zwei orthogonale Projektionen in $\mathcal{A}$ mit $P \sim Q$ in $\mathcal{A}$. Dann gilt $C(P) = C(Q)$.*

Beweis. Seien P und Q zwei orthogonale Projektionen in $\mathcal{A}$ mit $P \sim Q$ in $\mathcal{A}$. Dann gibt es per Definition eine partielle Isometrie $U \in \mathcal{A}$ mit $P = U^*U, Q = UU^*$, Anfangsraum $\operatorname{Im} P$, Zielraum $\operatorname{Im} Q$. Wegen $C(Q) \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$,$U, P \in \mathcal{A}$ und $Q \leq C(Q)$ gilt

$$\begin{aligned} &C(Q)P = C(Q)U^*U = C(Q)U^*UU^*U = U^*C(Q)UU^*U = U^*C(Q)QU \\ &= U^*QU = U^*UU^*U = P^2 = P. \end{aligned}$$

Also ist $C(Q) \geq P$. Analog sieht man $C(P) \geq Q$. Also ist $C(P) \leq C(Q)$ und $C(Q) \leq C(P)$. Daraus folgt $C(Q) = C(P)$. □

Satz 5.9. *Sei $\rho\colon \mathcal{A} \to L(H)$ eine Darstellung, $\mathcal{B} = W^*(\rho(\mathcal{A}))$ die von $\rho(\mathcal{A})$ erzeugte von-Neumann-Algebra, $M_1, M_2 \in \operatorname{Lat}(\rho)$ und*

$$\pi_1\colon \mathcal{A} \to L(M_1),\ a \mapsto \rho(a)|_{M_1}$$

sowie

$$\pi_2\colon \mathcal{A} \to L(M_2),\ a \mapsto \rho(a)|_{M_2}$$

die zugehörigen Teildarstellungen von ρ. Dann sind äquivalent:

(a) Ist $T \in L(M_1, M_2)$ mit $T\pi_1(a) = \pi_2(a)T$ für alle $a \in \mathcal{A}$, dann folgt $T = 0$.

(b) Sind $K_i \in \operatorname{Lat}(\pi_i)$ für $i = 1, 2$ so, dass es einen unitären Operator $U \in L(K_1, K_2)$ gibt mit $U\pi_1(a)|_{K_1} = \pi_2(a)|_{K_2}U$ für alle $a \in \mathcal{A}$, dann folgt $K_1 = \{0\} = K_2$.

(c) Für die zentralen Projektionen $C(P_{M_1})$ und $C(P_{M_2})$ von P_{M_1} und P_{M_2} in $\mathcal{B}'$ ist $C(P_{M_1})C(P_{M_2}) = 0$.

Beweis. $(a) \Rightarrow (b)$: Es gelte (a). Angenommen es gibt einen unitären Operator $U \in L(K_1, K_2)$ zwischen nicht-trivialen Räumen $K_i \in \mathrm{Lat}(\pi_i)$ mit $U\pi_1(a)|_{K_1} = \pi_2(a)|_{K_2}U$ für alle $a \in \mathcal{A}$. Setze

$$T\colon M_1 = K_1 \oplus K_1^\perp \to M_2,\ \xi \oplus \eta \mapsto U\xi.$$

Dann ist $0 \neq T \in L(M_1, M_2)$ ein Operator mit

$$T\pi_1(a)\left(k_1 + k_1^\perp\right) = U\pi_1(a)k_1 = \pi_2(a)Uk_1 = \pi_2(a)T\left(k_1 + k_1^\perp\right)$$

für alle $k_1 \in K_1$ und $k_1^\perp \in K_1^\perp$ im Widerspruch zu (a).

$(b) \Rightarrow (c)$: Es gelte (b). Angenommen es ist $C(P_{M_1})C(P_{M_2}) \neq 0$ für die zentralen Träger $C(P_{M_1})$ und $C(P_{M_2})$ von P_{M_1} und P_{M_2} in $\mathcal{B}'$. Dann gibt es wegen Proposition 5.7 orthogonale Projektionen $0 \neq P_1, P_2 \in \mathcal{B}'$ mit $P_1 \leq P_{M_1}$ und $P_2 \leq P_{M_2}$ so, dass $P_1 \sim P_2$ in $\mathcal{B}'$ ist. Da $P_1 \sim P_2$ in $\mathcal{B}'$ gilt, gibt es eine partielle Isometrie $U \in \mathcal{B}'$, die einen unitären Operator

$$U\colon\ \mathrm{Im}\, P_1 \to \mathrm{Im}\, P_2$$

induziert. Insbesondere gilt die Vertauschungsrelation

$$U\pi_1(a)x = U\rho(a)x = \rho(a)Ux = \pi_2(a)Ux$$

für alle $a \in \mathcal{A}$ und $x \in \mathrm{Im}\, P_1$. Dies ist ein Widerspruch zu (b) (mit $K_i = \mathrm{Im}\, P_i$).

$(c) \Rightarrow (a)$: Sei $C(P_{M_1})C(P_{M_2}) = 0$, wobei $C(P_{M_1})$ und $C(P_{M_2})$ die zentralen Träger von P_{M_1} und P_{M_2} in $\mathcal{B}'$ sind. Sei $T \in L(M_1, M_2)$ mit $T\pi_1(a) = \pi_2(a)T$ für alle $a \in \mathcal{A}$. Für $a \in \mathcal{A}$, $m_1 \in M_1$ und $m_1^\perp \in M_1^\perp$ gilt

$$(TP_{M_1})\,\rho(a)\left(m_1 + m_1^\perp\right) = T\pi_1(a)m_1 = \pi_2(a)Tm_1 = \rho(a)\,(TP_{M_1})\left(m_1 + m_1^\perp\right).$$

Also ist $TP_{M_1} \in \mathcal{B}'$. Wir setzen $S = TP_{M_1}$. Aus Lemma 5.5 folgt $P_{\ker S^\perp} \sim P_{\overline{\mathrm{Im}\, S}}$ in $\mathcal{B}'$. Wegen Proposition 5.8 gilt $C(P_{\ker S^\perp}) = C(P_{\overline{\mathrm{Im}\, S}})$. Aus

$$\ker S^\perp = \overline{\mathrm{Im}\, S^*} = \overline{\mathrm{Im}\, P_{M_1}T^*} \subset M_1$$

folgt

$$P_{\ker S^\perp} \leq P_{M_1} \leq C(P_{M_1})$$

und somit

$$C(P_{\ker S^\perp}) \leq C(P_{M_1}).$$

Aus

$$\overline{\mathrm{Im}\, S} = \overline{\mathrm{Im}\, TP_{M_1}} \subset M_2$$

folgt

$$P_{\overline{\operatorname{Im} S}} \leq P_{M_2} \leq C(P_{M_2})$$

und somit

$$C(P_{\overline{\operatorname{Im} S}}) \leq C(P_{M_2}).$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= C(P_{\ker S^\perp})C(P_{M_1})C(P_{M_2})C(P_{\overline{\operatorname{Im} S}}) \\ &= C(P_{\ker S^\perp})C(P_{\overline{\operatorname{Im} S}}) \\ &= C(P_{\overline{\operatorname{Im} S}})^2 \\ &= C(P_{\overline{\operatorname{Im} S}}) \\ &\geq P_{\overline{\operatorname{Im} S}} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Daher ist $\overline{\operatorname{Im} S} = \{0\}$. Somit folgt wegen $S = TP_{M_1}$, dass $T = 0$ ist. □

Der folgende Satz wird im Hauptteil der Arbeit benötigt.

Satz 5.10. *Seien H_1 und H_2 Hilberträume und $\rho\colon L(H_1) \to L(H_2)$ eine Darstellung und $K \in \operatorname{Lat}(\rho)$ so, dass für die zugehörigen Teildarstellungen*

$$\pi_1\colon L(H_1) \to L(K),\ T \mapsto \rho(T)|_K$$

sowie

$$\pi_2\colon L(H_1) \to L(K^\perp),\ T \mapsto \rho(T)|_{K^\perp}$$

gilt $\pi_2(K(H_1)) = \{0\}$ und eine Indexmenge I sowie eine unitäre Abbildung

$$W\colon K \to \bigoplus_{i\in I} H_1$$

existiert, so dass

$$\pi_1(T) = W^* \left(\bigoplus_{i\in I} T \right) W.$$

für alle $T \in L(H_1)$ gilt. Sei $\mathcal{B} = W^*(\pi(L(H_1))$ die von $\pi(L(H_1))$ erzeugte von-Neumann-Algebra. Dann ist P_K im Zentrum $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}'$ von $\mathcal{B}$.

Beweis. Angenommen es gibt $\{0\} \neq K_i \in \operatorname{Lat}(\pi_i)$ für $i = 1, 2$ und ein unitäres $U \in L(K_1, K_2)$ mit $U\pi_1(T)|_{K_1} = \pi_2(T)|_{K_2}U$ für alle $T \in L(H_1)$. Daraus folgt, dass $\pi_1(T)|_{K_1} = 0$ und damit auch $\left(\bigoplus_{i\in I} T\right) WK_1 = 0$ ist für alle $T \in K(H_1)$. Die Annahme, dass $K_1 \neq \{0\}$ ist, erlaubt es einen Vektor $\xi = (\xi_i)_{i\in I} \in WK_1$ mit einer Komponente $\xi_{i_0} \neq 0$

zu wählen. Dazu gäbe es einen Operator $T \in K(H_1)$ mit $T\xi_{i_0} \neq 0$. Dies führt zu dem Widerspruch

$$\left(\bigoplus_{i\in I} T\right)(\xi) = (T\xi_i)_{i\in I} \neq 0.$$

Aus Satz 5.9 folgt für die zentralen Träger $C(P_K)$ und $C(P_{K^\perp})$ von P_K und $P_{K^\perp}$ in $\mathcal{B}'$, dass $C(P_K)C(P_{K^\perp}) = 0$ gilt. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= C(P_K)C(P_{K^\perp})P_{K^\perp} \\ &= C(P_K)P_{K^\perp} \\ &= C(P_K)(\mathrm{Id}_{H_2} - P_K) \\ &= C(P_K) - C(P_K)P_K \\ &= C(P_K) - P_K. \end{aligned}$$

Also ist $P_K = C(P_K) \in \mathcal{B}'' \cap \mathcal{B}' = \mathcal{B} \cap \mathcal{B}'$ nach dem Bikommutantensatz. □

6 Arvesons Satz über Rand-Darstellungen

Kommen wir nun zum Hauptteil der Arbeit. In diesem soll die Frage beantwortet werden, wann die Identität eine Rand-Darstellung ist.

Seien H ein komplexer Hilbertraum, $\mathcal{A}$ eine von-Neumann-Algebra auf H und $\mathcal{A}_*$ der Prädual von $\mathcal{A}$.

Die folgenden Sätze dienen zur Vorbereitung auf den Hauptsatz der Arbeit.

Satz 6.1. *Sei $\psi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ eine lineare ultraschwach stetige vollständig positive Abbildung so, dass $\psi = \psi \circ \psi$ und $\|\psi\| \leq 1$ gilt. Sei P die Trägerprojektion von ψ, das heißt, dass $\mathrm{Id}_H - P$ die größte Projektion im Kern von ψ ist (vgl. Satz 3.10). Dann vertauscht P mit allen Fixpunkten von ψ.*

Beweis. Nach Satz 3.10 gilt

$$\psi(T) = \psi(PT) = \psi(TP) \quad \text{für alle} \quad T \in \mathcal{A}$$

und $\psi(TT^*) = 0$ genau dann, wenn $PTT^*P = 0$ für alle $T \in \mathcal{A}$ gilt. Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller $T \in \mathcal{A}$ mit $\psi(T) = T$. Es ist $\psi(T^*) = \psi(T)^*$ für alle $T \in \mathcal{A}$, da ψ positiv ist. Daher folgt aus $T \in \mathcal{F}$ wegen

$$\psi(T^*) = \psi(T)^* = T^*,$$

dass auch $T^* \in \mathcal{F}$ ist. Deshalb genügt es zu zeigen, dass für jedes $T \in \mathcal{F}$ folgt $PTP = TP$, denn dann gilt

$$PT = (T^*P)^* = (PT^*P)^* = PTP = TP.$$

Dies folgt wiederum wenn wir gezeigt haben, dass $PT^*PTP = PT^*TP$ für alle $T \in \mathcal{F}$ gilt. Denn dann folgt für jedes $T \in \mathcal{F}$ und $h \in H$

$$\begin{aligned}
\|(TP - PTP)h\|^2 &= \langle TPh - PTPh, TPh - PTPh\rangle \\
&= \langle TPh, (\mathrm{Id}_H - P)TPh\rangle - \underbrace{\langle PTPh, (\mathrm{Id}_H - P)TPh\rangle}_{=0} \\
&= \langle TPh, TPh\rangle - \langle TPh, PTPh\rangle + \underbrace{\langle (\mathrm{Id}_H - P)TPh, PTPh\rangle}_{=0} \\
&= \langle TPh, TPh\rangle - \langle PTPh, PTPh\rangle \\
&= \langle PT^*TPh, h\rangle - \langle PT^*PTPh, h\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Zunächst bemerken wir, dass für jedes $T \in \mathcal{F}$ wegen Satz 2.14 gilt, dass

$$T^*T = \psi(T)^*\psi(T) = \psi(PT)^*\psi(PT) \leq \psi(T^*PT)$$

ist. Wegen

$$\langle T^*T - T^*PTh, h\rangle = \langle (\mathrm{Id}_H - P)Th, Th\rangle \geq 0$$

für alle $h \in H$ und alle $T \in \mathcal{F}$ gilt

$$T^*PT \leq T^*T \leq \psi(T^*PT)$$

für alle $T \in \mathcal{F}$. Multiplizieren wir von links und rechts mit $P = P^*$, erhalten wir wegen

$$\langle (PT^*TP - PT^*PTP)h, h\rangle = \langle (T^*T - T^*PT)Ph, Ph\rangle \geq 0$$

und

$$\langle (P\psi(T^*PT)P - PT^*TP)h, h\rangle = \langle (\psi(T^*PT) - T^*T)Ph, Ph\rangle \geq 0$$

für alle $h \in H$ und $T \in \mathcal{F}$, dass

$$PT^*PTP \leq PT^*TP \leq P\psi(T^*PT)P$$

gilt. Also genügt es zu zeigen, dass $P\psi(T^*PT)P = PT^*PTP$ für alle $T \in \mathcal{F}$ ist. Wir haben aber gezeigt, dass

$$\psi(T^*PT) - T^*PT \geq 0$$

für alle $T \in \mathcal{F}$ gilt. Für $T \in \mathcal{F}$ gibt es deshalb ein $S \in \mathcal{A}$ mit $S^*S = \psi(T^*PT) - T^*PT$. Außerdem folgt aus $\psi \circ \psi = \psi$, dass $\psi(S^*S) = \psi(\psi(T^*PT) - T^*PT) = 0$ ist. Aus Satz 3.10 folgt dann, dass $P\psi(T^*PT)P - PT^*PTP = P(\psi(T^*PT) - T^*PT)P = PS^*SP = 0$ gilt. □

Satz 6.2 (Banachlimes). *Es gibt eine lineare Abbildung* $\Lambda\colon \ell^\infty(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ *mit*

$$\Lambda((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \Lambda((x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}) \quad \textit{für alle} \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{C}), \tag{6.1}$$

$$\Lambda((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \geq 0 \textit{ falls } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{C}) \textit{ ist mit } x_n \geq 0 \textit{ für alle } n \in \mathbb{N} \tag{6.2}$$

und

$$\Lambda((1)_{n\in\mathbb{N}}) = 1. \tag{6.3}$$

Eine solche Abbildung heißt Banachlimes.

Beweis. [6, Chapter III Theorem 7.1] □

Satz 6.3 (Lemma von Lax-Milgram). *Sei $B\colon H \times H \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform so, dass für $x, y \in H$ gilt*

$$|B(x,y)| \leq M\|x\|\|y\|,$$

wobei $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann existiert ein $T \in L(H)$ mit $\|T\| \leq M$ und

$$B(x,y) = \langle Tx, y\rangle \quad (x, y \in H).$$

Beweis. Für jedes $x \in H$ ist $B(\cdot, x) \in H'$ mit

$$\|B(\cdot, x)\| \leq M\|x\|.$$

Nach dem Satz von Riesz-Fréchet gibt es genau ein $x_S \in H$ so, dass

$$B(y,x) = \langle y, x_S\rangle \quad (y \in H)$$

und

$$\|x_S\| = \|B(\cdot, x)\| \leq M\|x\|$$

gilt. Setzt man

$$S\colon H \to H,\ x \to x_S,$$

so ist $S \in L(H)$ und für $T = S^*$ folgt die Behauptung. □

Satz 6.4. *Sei $\mathcal{A}_0$ eine* WOT*-dichte unitale C^*-Algebra in $\mathcal{A}$ so, dass für jedes stetig lineare Funktional auf $\mathcal{A}_0$ eine ultraschwachstetige Fortsetzung auf $\mathcal{A}$ existiert. Dann gibt es für jede vollständig positive Abbildung $\rho\colon \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_0$ mit $\|\rho\| \leq 1$ eine ultraschwachstetige vollständig positive lineare Abbildung $\psi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ mit $\|\psi\| \leq 1$, $\psi \circ \psi = \psi$, $\psi \circ \rho = \psi$ auf $\mathcal{A}_0$ und so, dass für $T \in \mathcal{A}_0$ aus $\rho(T) = T$ folgt, dass auch $\psi(T) = T$.*

Beweis. Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sei

$$\rho^n\colon \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_0,\ T \mapsto \rho^n(T)$$

die n-fache Komposition von ρ mit sich selbst. Sei $\Lambda\colon \ell^\infty(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ ein Banachlimes. Wir definieren $\psi_0\colon \mathcal{A}_0 \to L(H)$ wie folgt:

Wir halten ein $T \in \mathcal{A}_0$ fest und definieren eine sesquilineare Form durch

$$[\cdot,\cdot]_T\colon H \times H \to \mathbb{C},\ (h_1, h_2) \mapsto \Lambda((\langle \rho^n(T)h_1, h_2\rangle)_{n\geq 1}).$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
|[h_1,h_2]_T| &= |\Lambda((\langle \rho^n(T)h_1, h_2\rangle)_{n\geq 1})| \\
&\leq \|\Lambda\| \sup_{n\geq 1}\{|\langle \rho^n(T)h_1, h_2\rangle|\} \\
&\leq \sup_{n\geq 1}\{\|\rho^n(T)\|\|h_1\|\|h_2\|\} \\
&\leq \sup_{n\geq 1}\{\|\rho^n(T)\|\}\|h_1\|\|h_2\| \\
&\leq \|T\|\|h_1\|\|h_2\|.
\end{aligned}$$

Daher folgt mit Satz 6.3, dass ein eindeutiges $S_T \in L(H)$ existiert mit $[h_1, h_2]_T = \langle S_T h_1, h_2\rangle$ für alle $h_1, h_2 \in H$. Wir definieren

$$\psi_0 \colon \mathcal{A}_0 \to L(H),\ T \mapsto S_T.$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\langle S_{T_1+\lambda T_2} h_1, h_2\rangle &= [h_1, h_2]_{T_1+\lambda T_2} \\
&= \Lambda((\langle \rho^n(T_1+\lambda T_2)h_1, h_2\rangle)_{n\geq 1}) \\
&= \Lambda((\langle \rho^n(T_1)h_1, h_2\rangle + \lambda\langle \rho^n(T_2)h_1, h_2\rangle)_{n\geq 1}) \\
&= \Lambda((\langle \rho^n(T_1)h_1, h_2\rangle)_{n\geq 1}) + \lambda\Lambda(\langle \rho^n(T_2)h_1, h_2\rangle)_{n\geq 1})) \\
&= [h_1, h_2]_{T_1} + \lambda[h_1, h_2]_{T_2} \\
&= \langle S_{T_1} h_1, h_2\rangle + \lambda\langle S_{T_2} h_1, h_2\rangle \\
&= \langle (S_{T_1} + \lambda S_{T_2})h_1, h_2\rangle
\end{aligned}$$

für alle $h_1, h_2 \in H$ gilt $S_{T_1+\lambda T_2} = S_{T_1} + \lambda S_{T_2}$ für alle $T_1, T_2 \in \mathcal{A}_0$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Also ist ψ_0 linear. Aus

$$\|S_T h\|^2 = \langle S_T h, S_T h\rangle = [h, S_T h]_T \leq \|T\|\|S_T h\|\|h\|$$

für alle $h \in H$ folgt $\|S_T h\| \leq \|T\|\|h\|$ für alle $h \in H$, das heißt $\|S_T\| \leq \|T\|$. Deshalb ist ψ_0 stetig mit $\|\psi_0\| \leq 1$.

Wir wollen nun zeigen, dass

$$\psi_0(T) \in \overline{C(\{\rho^n(T);\ n \geq 1\})}^{\mathrm{WOT}} \subset \mathcal{A}.$$

gilt.

Wäre für ein $T \in \mathcal{A}_0$

$$\psi_0(T) \notin \overline{C(\{\rho^n(T);\ n \geq 1\})}^{\mathrm{WOT}}$$

so gäbe es nach dem Trennungssatz ([12, Satz 7.10 (b)]) $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in H$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$(*)\ \ \mathrm{Re}\left(\sum_{i=1}^{n} \langle \psi_0(T)x_i, y_i\rangle\right) > \alpha \geq \sup_{n\geq 1}\left(\mathrm{Re}\left(\sum_{i=0}^{n}\langle \rho^n(T)x_i, y_i\rangle\right)\right).$$

Aber die linke Seite ist definitionsgemäß gleich

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{i=1}^{n} \Lambda\left((\langle \rho^n(T)x_i, y_i\rangle)_{n\geq 1}\right)\right) = \Lambda\left(\left(\mathrm{Re}\left(\sum_{i=1}^{n}\langle \rho^n(T)x_i, y_i\rangle\right)\right)_{n\geq 1}\right).$$

Da $\Lambda\colon \ell^\infty(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ ein positives Funktional auf der C^*-Algebra $\ell^\infty(\mathbb{C})$ ist, ist dies aber kleiner gleich der rechten Seite in $(*)$. Dieser Widerspruch zeigt, dass

$$\psi_0(T) \in \overline{C(\{\rho^n(T);\ n \geq 1\})}^{\mathrm{WOT}} \text{ für alle } T \in \mathcal{A}_0.$$

Da ρ vollständig positiv ist, ist auch ρ^n vollständig positiv. Seien

$$\psi_{0,k}\colon \operatorname{Mat}(k,\mathcal{A}_0) \to \operatorname{Mat}(k,\mathcal{A}),\ (T_{i,j})_{i,j=1}^k \mapsto (\psi_0(T_{i,j}))_{i,j=1}^k$$

und

$$\rho_k^n\colon \operatorname{Mat}(k,\mathcal{A}_0) \to \operatorname{Mat}(k,\mathcal{A}_0),\ (T_{i,j})_{i,j=1}^k \mapsto (\rho^n(T_{i,j}))_{i,j=1}^k$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $k \in \mathbb{N}$, $h \in H^k$ und $(T_{i,j})_{i,j=1}^k \in \operatorname{Mat}(k,\mathcal{A}_0)$ mit $(T_{i,j})_{i,j=1}^k \geq 0$

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{0,k}((T_{i,j})_{i,j=1}^k)h, h\rangle &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \langle \psi_0(T_{i,j})h_j, h_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \Lambda((\langle \rho^n(T_{i,j})h_j, h_i\rangle)_{n\geq 1}) \\
&= \Lambda\left((\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \langle \rho^n(T_{i,j})h_j, h_i\rangle)_{n\geq 1}\right) \\
&= \Lambda\left((\langle \rho_k^n((T_{i,j})_{i,j=1}^k)h, h\rangle)_{n\geq 1}\right) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Also ist ψ_0 vollständig positiv.

Wir konstruieren nun eine eine Fortsetzung ψ von ψ_0 auf $\mathcal{A}$. Nach Voraussetzung existiert für jedes norm-stetige lineare Funktional $f\colon \mathcal{A}_0 \to \mathbb{C}$ eine ultraschwach stetige Fortsetzung $f^\sim \in \mathcal{A}_*$. Wegen des Dichtheitssatzes von Kaplansky (Korollar 1.11) gilt $\overline{\operatorname{ball}(\mathcal{A}_0)}^{\mathrm{w}^*} = \operatorname{ball}(\mathcal{A})$. Ist $S \in \overline{\operatorname{ball}(\mathcal{A}_0)}^{\mathrm{w}^*}$, dann gibt es ein Netz $(T_j)_{j\in J}$ in $\operatorname{ball}(\mathcal{A}_0)$ mit $S = \tau_{\mathrm{w}^*}\text{-}\lim_j T_j$. Für alle $g \in \mathcal{A}_*$ gilt

$$|g(S)| = \lim_j |g(T_j)| \leq \sup_{T\in\operatorname{ball}(\mathcal{A}_0)} \{|g(T)|\}.$$

Das heißt es ist

$$\sup_{T\in\operatorname{ball}(\mathcal{A}_0)} \{|g(T)|\} = \sup_{T\in\overline{\operatorname{ball}(\mathcal{A}_0)}^{\mathrm{w}^*}} \{|g(T)|\}.$$

Daraus folgt für alle $f \in \mathcal{A}_0'$

$$\begin{aligned}
\|f\| &= \sup_{T\in\operatorname{ball}(\mathcal{A}_0)} \{|f(T)|\} \\
&= \sup_{T\in\operatorname{ball}(\mathcal{A}_0)} \{|f^\sim(T)|\} \\
&= \sup_{T\in\overline{\operatorname{ball}(\mathcal{A}_0)}^{\mathrm{w}^*}} \{|f^\sim(T)|\} \\
&= \sup_{T\in\operatorname{ball}(\mathcal{A})} \{|f^\sim(T)|\} \\
&= \|f^\sim\|.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\mathcal{A}_0' \to \mathcal{A}_*,\ f \mapsto f^\sim$$

ein isometrischer Isomorphismus. Sei $T \in \mathcal{A}$ und setze

$$u_T \colon \mathcal{A}_* \to \mathbb{C},\ f \mapsto (f \circ \psi_0)^\sim(T).$$

Die Abbildung $\mathcal{A}_* \to \mathcal{A}_0',\ f \mapsto f \circ \psi_0$ ist stetig linear mit Norm kleiner gleich $\|\psi_0\|$. Da auch die Auswertung $\mathcal{A}_* \to \mathbb{C},\ f \mapsto f(T)$ stetig linear mit Norm kleiner gleich $\|T\|$ ist, ist $u_T \colon \mathcal{A}_* \to \mathbb{C}$ stetig linear mit

$$\|u_T\| \leq \|\psi_0\|\|T\| \leq \|T\|.$$

Seien $\varphi_\mathcal{A}$ sowie $\phi_\mathcal{A}$ die isometrischen Isomorphismen aus Korollar 1.8 und Korollar 1.7. Setze

$$\psi \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A},\ T \mapsto \varphi_\mathcal{A}^{-1}(u_T \circ \phi_\mathcal{A}) = \varphi_\mathcal{A}^{-1} \circ \phi_\mathcal{A}'(u_T).$$

Seien $S, T \in \mathcal{A}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$, dann gilt wegen $u_{T+\lambda S} = u_T + \lambda u_S$

$$\begin{aligned}
\psi(T + \lambda S) &= \varphi_\mathcal{A}^{-1}(u_{T+\lambda S} \circ \phi_\mathcal{A}) \\
&= \varphi_\mathcal{A}^{-1}((u_T + \lambda u_S) \circ \phi_\mathcal{A}) \\
&= \varphi_\mathcal{A}^{-1}(u_T \circ \phi_\mathcal{A}) + \lambda \varphi_\mathcal{A}^{-1}(u_S \circ \phi_\mathcal{A}) \\
&= \psi(T) + \lambda \psi(S).
\end{aligned}$$

Also ist ψ eine stetig lineare Kontraktion. Desweiteren rechnet man nach, dass für $T \in \mathcal{A}$

$$\delta_T \colon \mathcal{A}_* \to \mathbb{C},\ f \mapsto f(T)$$

ein stetig lineares Funktional definiert. Sei $T \in \mathcal{A}_0$ und $S \in C_1(H)/\phi^{-1}({}^\perp\mathcal{A})$. Wegen

$$\begin{aligned}
u_T \circ \phi_\mathcal{A}(S) &= u_T(\phi_\mathcal{A}(S)) \\
&= (\phi_\mathcal{A}(S) \circ \psi_0)^\sim(T) \\
&= \phi_\mathcal{A}(S)(\psi_0(T)) \\
&= (\delta_{\psi_0(T)} \circ \phi_\mathcal{A})(S)
\end{aligned}$$

für alle $f \in \mathcal{A}_*$, gilt

$$u_T \circ \phi_\mathcal{A} = \delta_{\psi_0(T)} \circ \phi_\mathcal{A}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\psi(T) &= \varphi_\mathcal{A}^{-1}(u_T \circ \phi_\mathcal{A}) \\
&= \varphi_\mathcal{A}^{-1}(\delta_{\psi_0(T)} \circ \phi_\mathcal{A}) \\
&= \varphi_\mathcal{A}^{-1}(\mathrm{tr}(\cdot\psi_0(T))) \\
&= \varphi_\mathcal{A}^{-1}(\varphi_\mathcal{A}(\psi_0(T))) \\
&= \psi_0(T).
\end{aligned}$$

Es gilt außerdem

$$\begin{aligned} f(\psi(T)) &= f(\varphi_{\mathcal{A}}^{-1}(u_T \circ \phi_{\mathcal{A}})) \\ &= \phi_{\mathcal{A}}(\phi_{\mathcal{A}}^{-1}(f))(\varphi_{\mathcal{A}}^{-1}(u_T \circ \phi_{\mathcal{A}})) \\ &= \mathrm{tr}(\phi_{\mathcal{A}}^{-1}(f)\varphi_{\mathcal{A}}^{-1}(u_T \circ \phi_{\mathcal{A}})) \\ &= \varphi_{\mathcal{A}}(\varphi_{\mathcal{A}}^{-1}(u_T \circ \phi_{\mathcal{A}}))(\phi_{\mathcal{A}}^{-1}(f)) \\ &= (u_T \circ \phi_{\mathcal{A}})(\phi_{\mathcal{A}}^{-1}(f)) \\ &= u_T(\phi_{\mathcal{A}}(\phi_{\mathcal{A}}^{-1}(f))) \\ &= u_T(f) \\ &= (f \circ \psi_0)^{\sim}(T) \end{aligned}$$

für alle $f \in \mathcal{A}_*$ und $T \in \mathcal{A}$. Wir wollen nun nachrechnen, dass ψ ultraschwach stetig ist. Seien dazu $(T_j)_{j\in J}$ ein Netz in $\mathcal{A}$, $T \in \mathcal{A}$ mit $\tau_{\mathrm{w}^*}\text{-}\lim_j T_j = T$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(H)$. Indem man die zuletzt bewiesene Identität anwendet auf die ultraschwach stetige Linearform

$$f\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C},\ T \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \langle Tx_n, y_n\rangle$$

erhält man

$$\begin{aligned} \lim_j \sum_{n=0}^{\infty} \langle \psi(T_j)x_n, y_n\rangle &= \lim_j \left(\sum_{n=0}^{\infty} \langle \psi_0(\cdot)x_n, y_n\rangle\right)^{\sim}(T_j) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \langle \psi_0(\cdot)x_n, y_n\rangle\right)^{\sim}(T) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle \psi(T)x_n, y_n\rangle. \end{aligned}$$

Jetzt zeigen wir, dass ψ vollständig positiv ist. Es gilt $\overline{\mathcal{A}_0}^{\mathrm{WOT}} = \mathcal{A}$ und

$$\overline{\mathrm{Mat}(n, \mathcal{A}_0)}^{\mathrm{US}} = \overline{\mathrm{Mat}(n, \mathcal{A}_0)}^{\mathrm{WOT}} = \mathrm{Mat}(n, \overline{\mathcal{A}_0}^{\mathrm{WOT}}) = \mathrm{Mat}(n, \mathcal{A})$$

für alle $n \geq 1$. Setze

$$\psi_n\colon\ \mathrm{Mat}(n, \mathcal{A}) \to \mathrm{Mat}(n, \mathcal{A}),\ (T_{i,j})_{i,j=1}^n \mapsto (\psi(T_{i,j}))_{i,j=1}^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Man rechnet leicht nach, dass ψ_n ultraschwach stetig ist und $\psi_n|_{\mathrm{Mat}(n,\mathcal{A}_0)} = \psi_{0,n}$ gilt. Sei $B \in \mathrm{Mat}(n, \mathcal{A})$ positiv. Dann gibt es ein $C \in \mathrm{Mat}(n, \mathcal{A})$ mit $B = C^*C$. Sei

$(C_j)_{j\in J}$ ein Netz in $\mathrm{Mat}(n,\mathcal{A}_0)$ mit $\tau_{\mathrm{US}}\text{-}\lim_j C_j = C$. Dann gilt für alle $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2(H^n)$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\langle (C^*C - C_j^*C_j)x_k, x_k\rangle\right| &= \left|\sum_{k=0}^{\infty}\langle C^*Cx_k, x_k\rangle - \sum_{k=0}^{\infty}\langle C_j^*C_jx_k, x_k\rangle\right| \\ &= \left|\sum_{k=0}^{\infty}\|Cx_k\|^2 - \sum_{k=0}^{\infty}\|C_jx_k\|^2\right| \\ &= \left|\|C\|_{(x_k)_{k\in\mathbb{N}}} - \|C_j\|_{(x_k)_{k\in\mathbb{N}}}\right| \left|\|C\|_{(x_k)_{k\in\mathbb{N}}} + \|C_j\|_{(x_k)_{k\in\mathbb{N}}}\right| \\ &\le \|C - C_j\|_{(x_k)_{k\in\mathbb{N}}} \left(2\|C\|_{(x_k)_{k\in\mathbb{N}}} + \|C - C_j\|_{(x_k)_{k\in\mathbb{N}}}\right) \\ &\xrightarrow{j} 0.\end{aligned}$$

Aus der Polarisationsgleichung folgt dann, für alle $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}, (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^2(H^n)$

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}\langle (C^*C - C_j^*C_j)x_k, y_k\rangle\right| \xrightarrow{j} 0.$$

Setze $B_j = C_j^*C_j$. Dann ist $B_j \in \mathrm{Mat}(n,\mathcal{A}_0)$ positiv und es gilt $\tau_{\mathrm{w}^*}\text{-}\lim_j B_j = B$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $h \in H^n$ folgt aus der Positivität von $\psi_{0,n}$

$$\langle \psi_n(B)h, h\rangle = \lim_j \langle \psi(B_j)h, h\rangle = \lim_j \langle \psi_{n,0}(B_j)h, h\rangle \ge 0.$$

Also ist ψ_n positiv für alle $n \ge 1$. Somit ist ψ vollständig positiv.

Sei $T \in \mathcal{A}_0$. Dann gilt für alle $h_1, h_2 \in H$

$$\begin{aligned}\langle \psi(\rho(T))h_1, h_2\rangle &= \langle \psi_0(\rho(T))h_1, h_2\rangle \\ &= \Lambda((\langle \rho^{n+1}(T)h_1, h_2\rangle)_{n\ge1}) \\ &= \Lambda((\langle \rho^{n}(T)h_1, h_2\rangle)_{n\ge1}) \\ &= \langle \psi(T)h_1, h_2\rangle.\end{aligned}$$

Deshalb ist $(\psi\circ\rho)(T) = \psi(T)$ für alle $T \in \mathcal{A}_0$.

Sei nun $\rho(T) = T$ für ein $T \in \mathcal{A}_0$. Dann folgt $\rho^n(T) = T$ für alle $n \ge 1$. Somit gilt

$$\begin{aligned}\langle \psi(T)h_1, h_2\rangle &= \Lambda((\langle \rho^{n}(T)h_1, h_2\rangle)_{n\ge1}) \\ &= \Lambda((\langle Th_1, h_2\rangle)_{n\ge1}) \\ &= \langle Th_1, h_2\rangle\Lambda((1)_{n\ge1}) \\ &= \langle Th_1, h_2\rangle,\end{aligned}$$

das heißt $\psi(T) = T$.

Da die Menge $\overline{C(\{\rho^n(T);\ n\ge1\})}^{\mathrm{WOT}}$ norm-beschränkt ist gilt,

$$\overline{C(\{\rho^n(T);\ n\ge1\})}^{\mathrm{WOT}} = \overline{C(\{\rho^n(T);\ n\ge1\})}^{\mathrm{w}^*}.$$

Da ψ ultraschwach stetig ist und $\psi(\rho^n(T)) = \psi(T)$ für alle $T \in \mathcal{A}_0$ und $n \ge 1$ gilt, folgt $\psi\circ\psi(T) = \psi(T)$ für alle $T \in \mathcal{A}_0$, also aus Stetigkeitsgründen auch für alle $T \in \mathcal{A}$. □

Jetzt können wir den Hauptsatz der Arbeit formulieren und beweisen.

Satz 6.5 (Arvesons Satz über Rand-Darstellungen)**.** *Sei $\mathcal{M} \subset L(H)$ ein irreduzibler Operatorraum und $K(H) \subset C^*(\mathcal{M})$. Dann ist die identische Darstellung*

$$\mathrm{Id}\colon C^*(\mathcal{M}) \hookrightarrow L(H)$$

genau dann eine Rand-Darstellung für $\mathcal{M}$, wenn die Einschränkung der Quotientenabbildung

$$q\colon L(H) \to C(H) = L(H)/K(H)$$

in die Calkin-Algebra auf $\mathcal{M} + \mathcal{M}^*$ nicht vollständig isometrisch ist.

Beweis. „⇒“ Sei

$$q\colon L(H) \to C(H) = L(H)/K(H)$$

vollständig isometrisch auf $\mathcal{M} + \mathcal{M}^*$. Wir werden eine vollständig positive Abbildung

$$\phi\colon C^*(\mathcal{M}) \to L(H)$$

konstruieren mit $\phi \neq \mathrm{Id}$, aber $\phi|_{\mathcal{M}} = \mathrm{Id}\,|_{\mathcal{M}}$. Sei dazu $\mathcal{S} = \overline{\mathcal{M} + \mathcal{M}^*}^{\|\cdot\|}$. Man überlegt sich leicht, dass für alle $n \geq 1$ gilt $\mathrm{Mat}(n, \mathcal{S}) = \overline{\mathrm{Mat}(n, \mathcal{M} + \mathcal{M}^*)}^{\|\cdot\|}$. Da q ein $*$-Homomorphismus ist, sind auch die $q^{(n)}\colon \mathrm{Mat}(n, L(H)) \to \mathrm{Mat}(n, C(H))$ $*$-Homomorphismen und deshalb positiv für alle $n \geq 1$. Insbesondere sind die $q^{(n)}$ stetig und $q|_{\mathcal{S}}$ ist eine vollständige Isometrie. Daher sind für alle $n \geq 1$ die $q^{(n)}|_{\mathrm{Mat}(n,\mathcal{S})}$ eingeschränkt auf ihr Bild invertierbar mit $(q^{(n)}|_{\mathrm{Mat}(n,\mathcal{S})})^{-1} = (q|_{\mathcal{S}}^{-1})^{(n)}$. Somit ist $q|_{\mathcal{S}}^{-1}\colon q(\mathcal{S}) \to \mathcal{S}$ vollständig isometrisch. Weiterhin gilt $q|_{\mathcal{S}}^{-1}(\mathrm{Id}_{C(H)}) = \mathrm{Id}_H$. Nach Korollar 2.16 gibt es dann, da $q(S)$ ein Operatorsystem ist, ein vollständig positives lineares

$$\psi\colon C(H) \to L(H)$$

mit $\psi|_{q(\mathcal{S})} = q|_{\mathcal{S}}^{-1}$. Wir setzen

$$\phi\colon C^*(\mathcal{M}) \to L(H), T \mapsto (\psi \circ q)(T).$$

Die Abbildung ϕ ist als Verkettung vollständig positiver Abbildungen vollständig positiv und es ist $\phi|_{\mathcal{M}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}}$. Aber es gilt $\phi \neq \mathrm{Id}$, da $K(H) \subset C^*(\mathcal{M})$ und $\phi(K(H)) = \{0\}$ ist.

„⇐“ Sei q nicht vollständig isometrisch auf $\mathcal{M} + \mathcal{M}^*$. Wir wollen zeigen, dass dann Id eine Rand-Darstellung für $\mathcal{M}$ ist.

Wir zeigen zunächst, dass es reicht, den Fall zu betrachten in dem $q|_{\mathcal{M}+\mathcal{M}^*}$ keine Isometrie ist. Sonst wähle ein $n \geq 1$ so, dass $q^{(n)}|_{\mathrm{Mat}(n,\mathcal{M}+\mathcal{M}^*)}$ keine Isometrie ist und betrachte

$$q_n\colon L(H^n) \to C(H^n) = L(H^n)/K(H^n).$$

Da $\mathrm{Mat}(n, L(H)) = L(H^n)$ und $\mathrm{Mat}(n, C(H)) = C(H^n)$ gilt, ist $q_n|_{\mathrm{Mat}(n,\mathcal{M}+\mathcal{M}^*)}$ keine Isometrie, weil $q^{(n)}|_{\mathrm{Mat}(n,\mathcal{M}+M^*)}$ keine Isometrie ist. Satz 2.12 zeigt, dass $\mathrm{Mat}(n, \mathcal{M})$ irreduzibel ist. Außerdem gilt $\mathrm{Mat}(n, C^*(\mathcal{M})) = C^*(\mathrm{Mat}(n, \mathcal{M}))$, was man leicht nachrechnet. Ersetzt man nun q durch q_n, so ergibt sich aus dem folgenden Beweis, dass

$$\mathrm{Id}_n \colon C^*(\mathrm{Mat}(n, \mathcal{M})) \hookrightarrow L(H^n)$$

eine Rand-Darstellung für $\mathrm{Mat}(n, \mathcal{M}))$ ist. Sei

$$\phi \colon C^*(\mathcal{M}) \to L(H)$$

nun eine vollständig positive lineare Fortsetzung von $\mathrm{Id}\,|_{\mathcal{M}}$. Dann ist $\phi^{(n)}$ eine vollständig positive Fortsetzung von $\mathrm{Id}_n\,|_{\mathrm{Mat}(n,\mathcal{M})}$. Da Id_n Rand-Darstellung für $\mathrm{Mat}(n, \mathcal{M}))$ ist, folgt $\phi^{(n)} = \mathrm{Id}_n$. Damit erhält man dann aber auch $\phi = \mathrm{Id}$.

Sei also $q|_{\mathcal{M}+\mathcal{M}^*}$ keine Isometrie. Dann gibt es ein $K \in K(H)$ und ein $T \in \mathcal{M} + \mathcal{M}^*$ mit $\|T + K\| < \|T\|$. Sei

$$\phi \colon C^*(\mathcal{M}) \to L(H)$$

eine vollständig positive Abbildung mit $\phi(T) = T$ für alle $T \in \mathcal{M}$, das heißt $\phi|_{\mathcal{M}} = \mathrm{Id}\,|_{\mathcal{M}}$. Wir müssen zeigen, dass dann schon $\phi = \mathrm{Id}$ beziehungsweise $\phi(T) = T$ für alle $T \in C^*(\mathcal{M})$ gilt. Wir wollen im Folgenden Sätze über von-Neumann-Algebren anwenden, daher setzen wir ϕ mit dem klassischen Arvesonschen Fortsetzungssatz (Satz 2.15) auf ganz $L(H)$ vollständig positiv fort und ersetzen ϕ durch seine Fortsetzung. Sei $\mathcal{F} \subset L(H)$ die Menge aller Fixpunkte von ϕ, also die Menge aller $T \in L(H)$ mit $\phi(T) = T$. Da $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}$ ist, genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{F} = C^*(\mathcal{F})$ gilt. Denn dann ist $C^*(\mathcal{M}) \subset \mathcal{F}$, was wir zeigen wollten. Da ϕ stetig ist und $\phi(T^*) = \phi(T)^*$ wegen der Positivität von ϕ für alle $T \in L(H)$ gilt, ist $\mathcal{F}$ ein normabgeschlossenes Operatorsystem. Für $\mathcal{F} = C^*(\mathcal{F})$ müssen wir also nur noch zeigen, dass $ST \in F$ oder äquivalent $S^*T \in \mathcal{F}$ für alle $S, T \in \mathcal{F}$ gilt. Wegen

$$\begin{aligned} S^*T = \frac{1}{4}[&(T+S)^*(T+S) - (T-S)^*(T-S) \\ &+ i(T+iS)^*(T+iS) - (T-iS)^*(T-iS)] \end{aligned}$$

für alle $S, T \in L(H)$ genügt es sogar zu zeigen, dass aus $\phi(T) = T$ folgt, dass $\phi(T^*T) = T^*T$ gilt. Das soll im Folgenden unser Ziel sein.

Sei $\pi \colon L(H) \to L(\mathcal{H})$ die universelle Darstellung von $L(H)$ (vgl. Definition 4.17) und $\mathcal{A} = W^*(\pi(L(H)))$. Nach Satz 4.14 existiert ein $K \in \mathrm{Lat}(\pi)$ so, dass für die zugehörigen Teildarstellungen

$$\pi_1 \colon L(H) \to L(K),\ T \mapsto \pi(T)|_K$$

sowie

$$\pi_2 \colon L(H) \to L(K^\perp),\ T \mapsto \pi(T)|_{K^\perp}$$

$\pi_2(K(H)) = \{0\}$ ist und eine Indexmenge I sowie eine unitäre Abbildung

$$U\colon K \to \bigoplus_{i\in I} H$$

existieren mit

$$\pi_1(T) = U^* \left(\bigoplus_{i\in I} T \right) U.$$

für alle $T \in L(H)$. Sei $E = P_K$ die orthogonale Projektion auf K. Nach Satz 5.10 ist E im Zentrum von $\mathcal{A}$. Nun wollen wir zeigen, dass E minimal im Zentrum von $\mathcal{A}$ ist (vgl. Definition 4.6). Offenbar ist $\pi_1(L(H))$ isomorph zu $L(H)$ und daher ein Faktor (vgl. Definition 2.2). Da π_1 isometrisch und nach Satz 4.15 w*-stetig ist, ist $\pi_1(L(H)) \subset L(K)$ eine von-Neumann-Algebra. Also ist $\mathcal{A}|_K = \pi_1(L(H))$ beziehungsweise $\mathcal{A}E = \pi_1(L(H))$. Ist $0 \neq F \leq E$ eine orthogonale Projektion im Zentrum von $\mathcal{A}$, so gilt wegen $E \in \mathcal{A}$

$$F\pi_1(L(H)) = F\mathcal{A}E = \mathcal{A}EF = \pi_1(L(H))F.$$

Somit ist $F|_K$ im Zentrum von $\pi_1(L(H))$. Da $\pi_1(L(H))$ ein Faktor ist, folgt $F|_K \in \mathbb{C}\,\mathrm{Id}_K$. Damit ist $F|_K = \mathrm{Id}_K$, denn $F|_K$ ist eine orthogonale Projektion ungleich Null. Mit $F \leq E$ erhält man $F = E$. Also ist E eine minimale Projektion im Zentrum von $\mathcal{A}$.

Schließlich folgt aus $T \in L(H)$ und $\pi(T)E = 0$, dass $T = 0$ ist, denn $\pi(T)E = \pi_1(T)$ und π_1 ist injektiv. Sei nun $\mathcal{A}_0 = \pi(L(H))$. Dann hat jedes stetig lineare Funktional nach Satz 4.18 eine ultraschwach stetige Fortsetzung auf $\mathcal{A}$. Wir wenden Satz 6.4 auf die Abbildung $\rho = \pi \circ \phi \circ \pi^{-1}\colon \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_0$ an, um eine idempotente ultraschwach stetige lineare Abbildung $\psi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ zu erhalten mit $\|\psi\| \leq 1$ ist so, dass $\psi(S) = S$ gilt für alle $S \in \{\pi(T);\ \phi(T) = T\}$ gilt außerdem $\psi(S) = S$ und es ist

$$\psi \circ \pi \circ \phi = \psi \circ \rho \circ \pi = \psi \circ \pi.$$

Sei P die Trägerprojektion (vgl. Satz 3.10) von ψ. Wir zeigen, dass $PE = E$ gilt. Nach Satz 6.1 ist $P \in \mathcal{A}$ und P vertauscht mit $\pi(\mathcal{M})$. Da E im Zentrum von $\mathcal{A}$ ist folgt, dass PE mit $\pi(\mathcal{M})E = \pi_1(\mathcal{M})$ vertauscht. Da $\mathcal{M}$ ein irreduzibler Operatorraum ist, folgt mit einer Version des Lemmas von Schur (Satz 2.11), dass $W^*(\mathcal{M}) = L(H)$ gilt. Da π_1 nach Satz 4.15 ultraschwach stetig ist, ergibt sich wegen Proposition 2.7

$$W^*(\pi_1(\mathcal{M})) = \pi_1(W^*(\mathcal{M})) = \pi_1(L(H)) = \mathcal{A}E.$$

Daher vertauscht PE mit $\mathcal{A}E$ und deshalb ist PE Zentralprojektion in $\mathcal{A}E$. Aus der Minimalität von E folgt $PE = 0$ oder $PE = E$. Wir zeigen jetzt, dass $PE \neq 0$ ist. Wäre $PE = 0$, so würde gelten $P(1 - E) = P$. Dann folgt aber

$$\psi \circ \pi = \psi \circ P\pi P = \psi \circ P(1 - E)\pi P = \psi \circ P(0 \oplus \pi_2)P = \psi \circ (0 \oplus \pi_2).$$

Da wir oben angenommen haben, dass $q|_{\mathcal{M}+\mathcal{M}^*}$ keine Isometrie ist, gibt es Operatoren $T \in \mathcal{M} + \mathcal{M}^*$ und $S \in K(H)$ mit $\|T + S\| < \|T\|$. Wegen $\pi_2(S) = 0$ und $\phi(T) = T$ gilt, dass

$$\pi(T) = \psi \circ \pi(T) = \psi(0 \oplus \pi_2(T)) = \psi(0 \oplus \pi_2(T + S))$$

ist. Als universelle Darstellung ist π isometrisch. Aber dann ergibt sich

$$\|T\| = \|\pi(T)\| = \|\psi(0 \oplus \pi_2(T + S))\| \leq \|\psi\|\|\pi_2\|\|T + S\| \leq \|T + S\| < \|T\|.$$

Dies ist ein Widerspruch. Also ist $PE = E$.

Sei nun $T \in L(H)$ so, dass $\phi(T) = T$ gilt. Wir wollen zeigen, dass $\phi(T^*T) = T^*T$ folgt. Wegen $\psi \circ \pi \circ \phi = \psi \circ \pi$ gilt

$$\psi(\pi(\phi(T^*T) - T^*T)) = 0.$$

Aus der Schwarzschen Ungleichung (Satz 2.14) erhält man

$$T^*T = \phi(T)^*\phi(T) \leq \phi(T^*T).$$

Daher ist

$$\pi(\phi(T^*T) - T^*T) \geq 0$$

und es gibt ein $S \in L(\mathcal{H})$ mit

$$S^*S = \pi(\phi(T^*T) - T^*T).$$

Da P die Trägerprojektion von ψ ist, folgt mit Satz 3.10 aus

$$\psi(S^*S) = \psi(\pi(\phi(T^*T) - T^*T)) = 0,$$

dass

$$P(\pi(\phi(T^*T) - T^*T))P = PS^*SP = 0$$

gilt. Multipliziert man rechts und links mit E, erhält man aus $PE = EP = E$ (vgl. Lemma 3.2)

$$\pi_1(\phi(T^*T) - T^*T) = E\pi(\phi(T^*T) - T^*T)E = EP(\pi(\phi(T^*T) - T^*T))PE = 0.$$

Da π_1 injektiv ist, ergibt sich

$$\phi(T^*T) - T^*T = 0.$$

□

7 Wesentlich normale Operatoren

In diesem Kapitel wollen wir noch eine kleine Anwendung von Arvesons Satz über Rand-Darstellungen geben.

Im Folgenden seien H ein komplexer Hilbertraum und $r(T)$ der Spektralradius für ein $T \in L(H)$.

Definition 7.1. Ein Operator $T \in L(H)$ heißt *wesentlich normal*, falls $TT^* - T^*T \in K(H)$ ist, oder äquivalent $T + K(H) \in C(H)$ normal ist.

Definition 7.2. Das *wesentliche Spektrum* eines Operators $T \in L(H)$ ist definiert durch

$$\sigma_e(T) = \sigma_{C(H)}(T + K(H)),$$

das Spektrum von $T + K(H)$ in der Calkin-Algebra $C(H)$.

Satz 7.3 (Fuglede)**.** *Seien $T, N \in L(H)$ und N normal. Gilt $TN = NT$ so ist auch $T^*N = NT^*$.*

Beweis. [19, Satz 12.6] □

Satz 7.4. *Sei $\mathcal{M} \subset L(H)$ ein irreduzibler Operatorraum von vertauschenden wesentlich normalen Operatoren. Falls $r_e(T) < \|T\|$ für ein $T \in \mathcal{M}$ gilt, ist die identische Darstellung*

$$\mathrm{Id}\colon C^*(\mathcal{M}) \to L(H),\ T \mapsto T$$

eine Rand-Darstellung.

Beweis. Wir zeigen erst, dass $C^*(\mathcal{M})$ alle kompakten Operatoren enthält. Sei $T \in \mathcal{M}$ normal. Nach Voraussetzung ist $T \in \mathcal{M}'$ und, da T normal ist, $T \in (\mathcal{M} \cup \mathcal{M}^*)'$ nach Satz 7.3. Wegen Satz 2.11 ist T dann ein Skalar. Daher folgt für jeden Nicht-Skalar $T \in \mathcal{M}$, dass $T^*T - TT^* = K$ für ein $0 \neq K \in K(H)$ ist. Besteht $\mathcal{M}$ nur aus Skalaren, ist die Behauptung trivial, da dann $\mathcal{M} = C^*(\mathcal{M}) \cong \mathbb{C}$ gilt. Wir können also ohne Einschränkung annehmen, dass $C^*(\mathcal{M})$ einen kompakten Operator $0 \neq K \in K(H)$ enthält. Da für jeden abgeschlossenen Untervektorraum $F \subset H$ aus $C^*(\mathcal{M})F \subset F$ folgt, dass $\mathcal{M}F \subset F$ und $\mathcal{M}^*F \subset F$ gilt, ist auch $C^*(\mathcal{M})$ irreduzibel. Sei $0 \neq h \in H$, dann ist $\overline{C^*(\mathcal{M}) \cap K(H)h}$ invariant unter $C^*(\mathcal{M})$. Da $C^*(\mathcal{M})$ irreduzibel ist, folgt $\overline{C^*(\mathcal{M}) \cap K(H)h} \in \{\{0\}, H\}$. Ist $\overline{C^*(\mathcal{M}) \cap K(H)h} = \{0\}$, gilt $h \perp \overline{C^*(\mathcal{M}) \cap K(H)H}$. Daraus folgt, dass $\overline{C^*(\mathcal{M}) \cap K(H)H}$ ein $C^*(\mathcal{M})$ invarianter Unterraum ist, der nicht mit ganz H übereinstimmt. Es gilt also $\overline{C^*(\mathcal{M}) \cap K(H)H} = \{0\}$. Das kann aber wegen $K \in$

$C^*(\mathcal{M}) \cap K(H)$ nicht sein. Daher ist $\overline{C^*(\mathcal{M}) \cap K(H)h} = H$ und somit $C^*(\mathcal{M}) \cap K(H)$ irreduzibel. Aus Satz 4.9 folgt dann aber $K(H) = C^*(\mathcal{M}) \cap K(H) \subset C^*(\mathcal{M})$.

Sei nun die Quotientenabbildung

$$q\colon L(H) \to C(H)$$

gegeben. Dann ist $q(\mathcal{M})$ nach Voraussetzung eine Menge vertauschender normaler Operatoren in $C(H)$. Nach [12, Lemma 14.4] ist $\|q(T)\|$ der Spektralradius von $q(T)$ für alle $T \in \mathcal{M}$. Nach Voraussetzung gibt es aber ein $T \in \mathcal{M}$ mit $\|q(T)\| = r_e(T) < \|T\|$. Also ist q nicht isometrisch und somit folgt die Behauptung aus Satz 6.5. □

Satz 7.5. *Sei $\mathcal{A}$ eine nicht-kommutative irreduzible Algebra von wesentlich normalen Operatoren mit $\mathrm{Id}_H \in \mathcal{A}$. Dann ist die identische Darstellung*

$$\mathrm{Id}\colon C^*(\mathcal{A}) \to L(H),\ T \mapsto T$$

eine Rand-Darstellung für $\mathcal{A}$.

Beweis. Die Quotientenabbildung

$$q\colon L(H) \to C(H)$$

bildet $\mathcal{A}$ auf normale Elemente in $C(H)$ ab. Für $X, Y \in q(\mathcal{A})$ definieren wir

$$\langle X, Y\rangle = XY^* - Y^*X.$$

Dann ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine Sesquilinear-Form auf $q(\mathcal{A})$, so dass $\langle X, X\rangle = 0$ gilt für alle $X \in q(\mathcal{A})$. Also folgt aus der Polarisationsformel $\langle X, Y\rangle = 0$ für alle $X, Y \in q(\mathcal{A})$. Daher ist $XY^* = Y^*X$. Wegen Satz 7.3 ist $q(\mathcal{A})$ kommutativ. Wählen wir $S, T \in \mathcal{A}$ als Elemente, die nicht vertauschen, dann gilt $ST - TS \neq 0$ und $q(ST - TS) = 0$. Also ist q nicht isometrisch. Wegen $0 \neq ST - TS \in \mathcal{A}$ und $q(ST - TS) = 0$ folgt außerdem, dass es ein $0 \neq K \in K(H)$ gibt mit $K = ST - TS \in C^*(\mathcal{A})$. Wie im Beweis von Satz 7.4 erhält man dann $K(H) \subset C^*(\mathcal{A})$. Nach Satz 6.5 folgt die Behauptung. □

Literaturverzeichnis

[1] H. W. Alt, *Linear Functional Analysis*, Universitext, Springer-Verlag London, Ltd., London, 2016. An application-oriented introduction, Translated from the German edition by Robert Nürnberg. MR3497775

[2] W. Arveson, *Subalgebras of C^*-algebras. II*, Acta Math. **128** (1972), no. 3-4, 271–308. MR0394232

[3] ———, *An invitation to C^*-algebras*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976. Graduate Texts in Mathematics, No. 39. MR0512360

[4] B. Bekka, P. de la Harpe, and A. Valette, *Kazhdan's property (T)*, New Mathematical Monographs, vol. 11, Cambridge University Press, Cambridge, 2008. MR2415834

[5] D. L. Cohn, *Measure theory*, Second, Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks], Birkhäuser/Springer, New York, 2013. MR3098996

[6] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Second, Graduate Texts in Mathematics, vol. 96, Springer-Verlag, New York, 1990. MR1070713

[7] ———, *The Theory of Subnormal Operators*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 36, American Mathematical Society, Providence, RI, 1991. MR1112128

[8] ———, *A Course in Operator Theory*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 21, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. MR1721402

[9] J. Dixmier, *C^*-algebras*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1977. Translated from the French by Francis Jellett, North-Holland Mathematical Library, Vol. 15. MR0458185

[10] ———, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (algèbres de von Neumann)*, Les Grands Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics], Éditions Jacques Gabay, Paris, 1996. Reprint of the second (1969) edition. MR1451139

[11] J. Eschmeier, *Analysis III*, Vorlesungsskript, Universität des Saarlandes, Germany, 2015.

[12] ———, *Funktionalanalysis I*, Vorlesungsskript, Universität des Saarlandes, Germany, 2016.

[13] K. Everad, *Über sphärische Isometrien und exakte Sequenzen von Toeplitzalgebren*, Diplomarbeit, Universität des Saarlandes, Germany, 2008.

[14] K. Floret and J. Wloka, *Einführung in die Theorie der lokalkonvexen Räume*, Lecture Notes in Mathematics, No. 56, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1968. MR0226355

[15] Kunyu Guo, Junyun Hu, and Xianmin Xu, *Toeplitz algebras, subnormal tuples and rigidity on reproducing $\mathbf{C}[z_1, \ldots, z_d]$-modules*, J. Funct. Anal. **210** (2004), no. 1, 214–247. MR2052120

[16] S. Hardy, *Representations of C*-Algebras*, University of Virginia, USA, 2010.

[17] J. Haupenthal, *Modellsätze für sphärische Kontraktionen*, Staatsexamensarbeit, Universität des Saarlandes, Germany, 2003.

[18] V. Paulsen, *Completely Bounded Maps and Operator Algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 78, Cambridge University Press, Cambridge, 2002. MR1976867

[19] W. Rudin, *Functional Analysis*, Second, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, Inc., New York, 1991. MR1157815

[20] D. Werner, *Funktionalanalysis*, extended, Springer-Verlag, Berlin, 2000. MR1787146

[21] K. H. Zhu, *An Introduction to Operator Algebras*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1993. MR1257406