UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Eindeutigkeit der Normtopologie auf halbeinfachen Banachalgebren

Bachelorarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science
im Studiengang Mathematik
der Fakultät Mathematik und Informatik
der Universität des Saarlandes

vorgelegt von

Evelyn Weber

nach einem Thema von

Prof. Dr. Jörg Eschmeier

Saarbrücken, 2017

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich die Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Saarbrücken, den 07. Juni 2017

Evelyn Weber

Inhaltsverzeichnis

1 Präliminarien **11**

2 Subharmonische Funktionen **13**
2.1 Eigenschaften subharmonischer Funktionen 13
2.2 Der Satz von Vesentini 19
2.3 Der Satz von Liouville für subharmonische Funktionen 22

3 Das Jacobson-Radikal **27**
3.1 Das Jacobson-Radikal 27
3.2 Irreduzible Darstellungen 30

4 Anwendungen subharmonischer Funktionen auf Banachalgebren **35**
4.1 Der Satz von Zemánek 35
4.2 Der Satz von B. E. Johnson 37
4.3 Subadditivität des Spektralradius in kommutativen Banachalgebren 39

Literaturverzeichnis **43**

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wollen wir uns mit folgender Fragestellung beschäftigen:

“Sind je zwei vollständige Normen auf einer
komplexen Algebra $\mathcal{A}$ äquivalent?“

Hat $\mathcal{A}$ endliche Dimension als Vektorraum, so sind alle Normen auf $\mathcal{A}$ äquivalent und somit kann die obige Frage in diesem Fall positiv beantwortet werden.
Im Fall unendlich dimensionaler nicht unitaler Algebren kann wie folgt ein Gegenbeispiel konstruiert werden.
Nach einem Resultat von D. Langwitz ([1], Satz 1) gibt es zu jedem vorgegebenen, unendlich dimensionalen Banachraum $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ eine überabzählbare Indexmenge A und eine Familie $(\|\cdot\|_\alpha)_{\alpha\in A}$ paarweise nicht äquivalenter, vollständiger Normen auf $\mathcal{A}$. Schließlich wird $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_\alpha)$ für jedes $\alpha \in A$ vermöge der Multiplikation

$$\cdot\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}, \qquad (x, y) \longmapsto 0$$

zu einer nicht unitalen Banachalgebra. Bezeichnet weiter $\mathcal{A}_+$ die Unitalisierung der Algebra $(\mathcal{A}, \cdot)$, so induziert die Familie $(\|\cdot\|_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine entsprechende Familie von paarweise nicht äquivalenten, vollständigen Normen auf $\mathcal{A}_+$. Somit sind die entsprechenden Gegenbeispiele gefunden.
Andererseits folgt aus Definition 3.3 dieser Arbeit sofort, dass die obigen Banachalgebren $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_\alpha)$ $(\alpha \in A)$ nicht halbeinfach sind.
Betrachtet man nun eine kommutative halbeinfache Banachalgebra $\mathcal{A}$, so kann man, wie im Folgenden dargelegt, mit wenig Aufwand zeigen, dass alle vollständigen Normen auf $\mathcal{A}$ äquivalent sind (siehe auch [2], S.1).
Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ vollständige Normen auf einer kommutativen, halbeinfachen Banachalgebra $\mathcal{A}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}$ sowie $a \in \mathcal{A}$ ein Element mit

$$\lim_{n\to\infty} \|a_n\|_1 = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \|a - a_n\|_2 = 0.$$

Nach dem Graphensatz ([3], Satz 8.11) folgt die Stetigkeit von $id_{\mathcal{A}}\colon (\mathcal{A}, \|\cdot\|_1) \to (\mathcal{A}, \|\cdot\|_2)$ und damit die Äquivalenz der beiden Normen, wenn man zeigen kann, dass $a = 0$ ist. Mithilfe von Satz 4.7, welcher besagt, dass der Spektralradius $r\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ auf kommutativen Banachalgebren subadditiv ist, folgt aus

$$\begin{aligned} r(a) &\le r(a_n) + r(a - a_n) \\ &\le \|a_n\|_1 + \|a - a_n\|_2 \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $r(a) = 0$. Ein Satz von Zemánek (Satz 4.2) zeigt nun, dass a im Jacobson-Radikal von $\mathcal{A}$ liegt und darum $a = 0$ gilt.

Der Beweis, dass das soeben bewiesene Resultat auch ohne die Forderung der Kommutativität an die zugrunde gelegte Banachalgebra $\mathcal{A}$ richtig bleibt, konnte erst im Jahr 1967 durch B. E. Johnson [4] erbracht werden. In seinem Beweis nutzt er irreduzible Darstellungen, mit denen er das Problem auf den Fall primitiver Algebren reduzieren und lösen kann.
Bernard Aupetit [2] fand 1982 einen alternativen Beweis des Satzes von Johnsons, der sich auf die Theorie subharmonischer Funktionen stützt. Ziel dieser Arbeit ist die ausführliche Darlegung von Aupetits Argument aus [2] und die Ausarbeitung der hierfür benötigten Hilfsresultate.

Im ersten Kapitel stellen wir zunächst einige funktionalanalytische Grundlagen über unitale Banachalgebren bereit, die wir im Laufe der Arbeit benutzen werden.
Das zweite Kapitel widmet sich der Theorie subharmonischer Funktionen. Neben grundlegenden Eigenschaften beweisen wir ein Resultat von Vesentini aus dem Jahre 1968 (Satz 2.23) und formulieren eine Version des Satzes von Liouville für subharmonische Funktionen (Korollar 2.31).
Im darauffolgenden Kapitel definieren wir das Jacobson-Radikal einer unitalen Algebra. Wie auch im Falle einer kommutativen halbeinfachen Banachalgebra spielt dieses im Beweis des Hauptresultates eine entscheidende Rolle. Im Zusammenhang damit benötigen wir einige Resultate über irreduzible Darstellungen, wie etwa den Dichtheitssatz von Jacobson, die wir im Anschluss bereitstellen.
Das letzte Kapitel enthält die Hauptergebnisse dieser Arbeit. Zunächst beweisen wir den erwähnten Satz von Zemánek, der mithilfe der Theorie subharmonischer Funktionen weitere Charakterisierungen des Jacobson-Radikals liefert. Anschließend können wir einen Beweis des Satzes von B.E. Johnson liefern. Als weitere Anwendung untersuchen wir die Subadditivität des Spektralradius in kommutativen Banachalgebren.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich meinen Dank an Herrn Prof. Dr. Jörg Eschmeier für die Vergabe eines interessanten Themas und die Unterstützung bei der Entstehung dieser Arbeit aussprechen.
Für eine ausgezeichnete Betreuung möchte ich mich ganz herzlich bei Daniel Kraemer bedanken, dessen unermüdliche Hilfsbereitschaft diese Arbeit erst ermöglicht hat. Ebenfalls danken möchte ich Sebastian Langendörfer für die Hilfe bei der Literaturrecherche.
Schließlich bedanke ich mich bei meinen Freunden und Kommilitonen, die mich während des Bachelorstudiums begleitet und unterstützt haben.

1 Präliminarien

Alle Algebren, die im Laufe der Arbeit betrachtet werden, seien unital und komplex. In diesem Kapitel bezeichne $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Norm $\|\cdot\|$. Zunächst stellen wir einige Grundlagen über Banachalgebren bereit.

Definition 1.1. Für $a \in \mathcal{A}$ nennt man

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - a \notin \mathcal{A}^{-1}\}$$

das *Spektrum von* a in $\mathcal{A}$. Dabei sei $\mathcal{A}^{-1} = \{x \in \mathcal{A} \mid x \text{ invertierbar in } \mathcal{A}\}$.

Lemma 1.2. *(a) Für $a \in \mathcal{A}$ mit $\|a\| < 1$ ist $1 - a \in \mathcal{A}^{-1}$ und es gilt*

$$(1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n.$$

(b) Die Menge $\mathcal{A}^{-1} \subseteq \mathcal{A}$ ist offen und die Abbildung

$$\mathcal{A}^{-1} \longrightarrow \mathcal{A}^{-1}, \qquad x \longmapsto x^{-1}$$

ist ein Homöomorphismus.

(c) Für $a \in \mathcal{A}$ ist $\emptyset \neq \sigma(a) \subseteq \mathbb{C}$ kompakt mit $\sigma(a) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|a\|\}$.

Einen Beweis findet man in [3, Lemma 5.9] und [3, Bemerkung 5.10].

Satz 1.3. *Sei $x \in \mathcal{A}$. Für jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ mit $\sigma(x) \subseteq U$ existiert ein $\delta > 0$ so, dass $\sigma(y) \subseteq U$ für alle $y \in \mathcal{A}$ mit $\|x - y\| < \delta$.*

Beweis. Seien $x \in \mathcal{A}$ und $U \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $\sigma(x) \subseteq U$. Angenommen es gäbe Folgen $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lambda_n \in \sigma(x_n) \cap U^c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $|\lambda_n| \leq \|x_n\|$ ist $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Insbesondere existiert eine Teilfolge $(\lambda_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und ein $\lambda \in U^c$ mit $\lim_{k\to\infty} \lambda_{n_k} = \lambda$ und somit ist $\lambda - x \in \mathcal{A}^{-1}$. Nach Lemma 1.2 müsste es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ geben so, dass $\lambda_{n_k} - x_{n_k} \in \mathcal{A}^{-1}$ für alle $k \geq k_0$, was aber nach Voraussetzung nicht möglich ist. $\square$

Definition 1.4. Für $a \in \mathcal{A}$ nennen wir

$$r(a) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(a)\}$$

den *Spektralradius von* a in $\mathcal{A}$. Gilt $r(a) = 0$, so heißt a *quasinilpotent.*

Wie etwa in [[5], Theorem 3.2.8] beweist man folgendes Lemma.

Lemma 1.5. *Für $a \in \mathcal{A}$ gilt $r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$.*

Bemerkung 1.6. Insbesondere gilt $r(\lambda a) = |\lambda| r(a)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und $a \in \mathcal{A}$.

Als nächstes erinnern wir an die Definition holomorpher Banachraum-wertiger Funktionen.

Definition 1.7. Seien X ein Banachraum, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in U$. Eine Abbildung $f\colon U \to X$ heißt *komplex differenzierbar in* z_0, falls der Grenzwert

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

in X existiert. Die Funktion f heißt *holomorph* auf U, falls sie in allen $z_0 \in U$ komplex differenzierbar ist.

Bemerkung 1.8. Man kann zeigen, dass sich die üblichen Rechenregeln für holomorphe Funktionen $f\colon U \to \mathbb{C}$ auf holomorphe Funktionen $\varphi\colon U \to X$ übertragen.

Beispiel 1.9. Für eine holomorphe Funktion $f\colon U \to X$ wie in Definition 1.7 ist

$$\exp \circ f\colon U \longrightarrow X, \qquad z \longmapsto \exp(f(z))$$

holomorph auf U.

Für einen Maßraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$ sei

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu) = \Big\{ f\colon X \to \mathbb{C} \;\Big|\; f \;\mathcal{M}\text{-messbar mit} \int_X |f| d\mu < \infty \Big\}.$$

Lemma 1.10. *Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und $f\colon X \to [-\infty, \infty]$ $\mathcal{M}$-messbar. Dann ist f genau dann μ-integrierbar, wenn es ein $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ gibt mit $\tilde{f}(X) \subseteq \mathbb{R}$ und $f = \tilde{f}$ μ-fast überall.*

Einen Beweis dazu kann man in [[6], Corollary 2.3.13] finden.
Zuletzt geben wir eine Definition für harmonische Funktionen. Dabei sei $D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$.

Definition 1.11. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f\colon U \to \mathbb{C}$ stetig. Wir nennen f *harmonisch*, falls für alle $a \in U$ und $r > 0$ mit $\overline{D_r(a)} \subseteq U$ gilt

$$f(a) = \int_{\mathbb{T}} f(a + r\xi) d\lambda(\xi).$$

Bemerkung 1.12. Wie etwa in [[7], Korollar 1.10] sieht man, dass diese Definition äquivalent dazu ist, dass $f\colon U \to \mathbb{C}$ zweimal stetig partiell differenzierbar ist mit $\Delta f \equiv 0$.

2 Subharmonische Funktionen

2.1 Eigenschaften subharmonischer Funktionen

Im Folgenden seien $\mathbb{R}_{-\infty} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\mathbb{D} = D_1(0)$ und $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$. Weiter seien $m\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ das Lebesgue-Borelsche-Maß und

$$\lambda\colon \mathcal{B}(\mathbb{T}) \longrightarrow [0,1], \qquad A \longmapsto \frac{1}{2\pi} m(\{t \in [-\pi,\pi] \mid e^{it} \in A\}).$$

Definition 2.1. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$. Eine Abbildung $f\colon U \to \mathbb{R}_{-\infty}$ heißt *oberhalbstetig*, falls für alle $t \in \mathbb{R}$ die Menge

$$\{z \in U \mid f(z) < t\}$$

offen in U ist.

Bemerkung 2.2. Die Abbildung $f\colon U \to \mathbb{R}_{-\infty}$ ist genau dann oberhalbstetig, wenn

$$\limsup_{y \to x} f(y) \le f(x)$$

für alle $x \in U$ gilt.

Beweis. Ist f oberhalbstetig, so ist für $x_0 \in U$ und $\varepsilon > 0$ die Menge

$$\{x \in U \mid f(x) < f(x_0) + \varepsilon\}$$

offen, sodass es ein $\delta > 0$ gibt mit $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ für alle $x \in D_\delta(x_0)$. Umgekehrt sei $t \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in U$ mit $f(x_0) < t$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ für alle $x \in D_\delta(x_0)$. Wählt man $\varepsilon = t - f(x_0)$, so ist

$$\{x \in U \mid f(x) < t\}$$

offen. □

Beispiel 2.3. Die Abbildung

$$r\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad a \longmapsto r(a)$$

ist oberhalbstetig.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Satz 1.3. □

Satz 2.4. *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen.*

(a) Sind $u, v\colon U \to \mathbb{R}_{-\infty}$ oberhalbstetig, so auch $u+v, \max(u,v)\colon U \to \mathbb{R}_{-\infty}$.

(b) Sind $u_i\colon U \to \mathbb{R}_{-\infty}$ $(i \in I)$ oberhalbstetig, so auch $\inf_{i\in I} u_i\colon U \to \mathbb{R}_{-\infty}$.

Beweis. (a) Für $t \in \mathbb{R}$ sind die Mengen

$$\{z \in U \mid u(z) + v(z) < t\} = \bigcup_{t_1+t_2=t} \{z \in U \mid u(z) < t_1\} \cap \{z \in U \mid v(z) < t_2\}$$

und

$$\{z \in U \mid \max(u(z), v(z)) < t\} = \{z \in U \mid u(z) < t\} \cap \{z \in U \mid v(z) < t\}$$

als Schnitt bzw. Vereinigung offener Mengen offen.

(b) Für $t \in \mathbb{R}$ ist

$$\{z \in U \mid \inf_{i\in I} u_i(z) < t\} = \bigcup_{i\in I} \{z \in U \mid u_i(z) < t\}$$

als Vereinigung offener Mengen offen.

□

Satz 2.5. *Sei $u\colon K \to \mathbb{C}$ eine oberhalbstetige Funktion auf einer kompakten Menge $K \subseteq \mathbb{C}$. Dann ist u auf K nach oben beschränkt und nimmt sein Supremum auf K an.*

Beweis. Es ist $(\{z \in G \mid u(z) < n\})_{n\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $u(z) < n_0$ für alle $z \in G$, womit u nach oben beschränkt ist. Ist $M = \sup_{z\in K} u(z)$ und wäre

$$u(z) < M$$

für alle $z \in K$, so wäre $(\{z \in G \mid u(z) < M - \frac{1}{n}\})_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere offene Überdeckung von K und daher gäbe es wieder ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$u(z) < M - \frac{1}{m} < M$$

für alle $z \in K$, ein Widerspruch. □

Satz 2.6. *Seien $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und $u\colon K \to \mathbb{R}_{-\infty}$ oberhalbstetig mit $u \not\equiv -\infty$. Für $k \geq 1$ definieren*

$$u_k(x) = \sup_{z\in K}\{u(z) - k|x - z|\}$$

stetige Funktionen $u_k\colon K \to \mathbb{R}$, die punktweise monoton fallend gegen u konvergieren.

Beweis. Nach Satz 2.5 und der Voraussetzung $u \not\equiv -\infty$ ist u_k für jedes $k \geq 1$ wohldefiniert. Seien nun $k \geq 1$ und $x_1, x_2, y \in K$. Wegen

$$\begin{aligned}\big|u(y) - k|x_1 - y| - (u(y) - k|x_2 - y|)\big| &= k\big||x_1 - y| - |x_2 - y|\big| \\ &\leq k|x_1 - x_2|\end{aligned}$$

gilt

$$u_k(x_1) = \sup_{y \in K}\{u(y) - k|x_1 - y|\} \leq u_k(x_2) + k|x_1 - x_2|.$$

Analog folgt

$$u_k(x_2) \leq u_k(x_1) + k|x_1 - x_2|$$

und damit

$$\big|u_k(x_1) - u_k(x_2)\big| \leq k|x_1 - x_2|$$

für alle $x_1, x_2 \in K$.
Sei $x_0 \in K$ mit $u(x_0) > -\infty$. Offensichtlich gilt $u \leq u_{k+1} \leq u_k$ punktweise für alle $k \geq 1$ auf K und damit $u(x_0) \leq \lim_{k\to\infty} u_k(x_0)$. Andererseits gilt

$$u_k(x_0) \leq \max\Big(\sup_{|y - x_0| < R} u(y), \sup_{z \in K}\{u(z) - kR\}\Big)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $R > 0$ und damit

$$\lim_{k\to\infty} u_k(x_0) \leq \sup_{|y - x_0| < R} u(y).$$

Da u oberhalbstetig ist, folgt aus Bemerkung 2.2 $\lim\limits_{k\to\infty} u_k(x_0) \leq u(x_0)$ mit $R \to \infty$.
Sei nun $x_0 \in K$ mit $u(x_0) = -\infty$. Nach Satz 2.4 sind für alle $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen

$$g_n\colon K \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \max(u(x), -n)$$

oberhalbstetig. Mit dem bereits Gezeigten folgt, dass für alle $n, k \in \mathbb{N}$ die Funktionen

$$u_{k,n}\colon K \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad x \longmapsto \sup_{z \in K}\{g_n(z) - k|x - z|\}$$

stetig sind mit

$$\lim_{k\to\infty} u_{k,n}(x_0) = g_n(x_0) = -n \tag{2.1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $u_{k,n} < -n + 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Wegen

$$\begin{aligned}u_{k,n}(x_0) &= \max(u_k(x_0), \sup_{z \in K}\{-n - k|x_0 - z|\}) \\ &= \max(u_k(x_0), -n) \\ &\geq u_k(x_0)\end{aligned}$$

erhält man $u_k(x_0) < -n + 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und die Behauptung folgt.

□

Definition 2.7. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Abbildung $u\colon U \to \mathbb{R}_{-\infty}$ heißt *subharmonisch* auf U, falls u oberhalbstetig ist und für jede kompakte Menge $K \subseteq U$, für die $h\colon K \to \mathbb{R}$ stetig und $h\big|_{\mathrm{Int}(K)}$ harmonisch ist mit $u \leq h$ auf ∂K, bereits $u \leq h$ auf K folgt.

Lemma 2.8. *Seien $U \subseteq \mathbb{C}$ offen sowie $u\colon U \to \mathbb{R}_{-\infty}$ subharmonisch. Dann gilt für $z_0 \in U$ und $r > 0$ mit $\overline{D_r(z_0)} \subseteq U$ und $u(z_0) > -\infty$, dass*

$$\mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}_{-\infty}, \qquad \xi \longmapsto u(z_0 + r\xi)$$

λ-integrierbar ist mit

$$u(z_0) \leq \int_{\mathbb{T}} u(z_0 + r\xi) d\lambda(\xi).$$

Beweis. Nach Satz 2.6 existieren stetige Funktionen $\tilde{h}_n\colon \partial D_r(z_0) \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ so, dass $(\tilde{h}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise monoton fallend auf $\partial D_r(z_0)$ gegen u konvergiert. Laut [7, Satz 1.7] existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine stetige Fortsetzung $h_n\colon \overline{D_r(z_0)} \to \mathbb{R}$ von $\tilde{h}_n$ so, dass $h_n\big|_{D_r(z_0)}$ harmonisch ist. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$\begin{aligned} -\infty < u(z_0) &\leq h_n(z_0) \\ &= \lim_{s\uparrow r} \int_{\mathbb{T}} h_n(z_0 + s\xi) d\lambda(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{T}} h_n(z_0 + r\xi) d\lambda(\xi). \end{aligned}$$

Indem man ein $c \in \mathbb{R}$ wählt mit $c \geq h_1$ auf $\partial D_r(z_0)$ und beachtet, dass

$$\int_{\mathbb{T}} (c - h_n)(z_0 + r\xi) d\lambda(\xi) \leq c - u(z_0) < \infty,$$

erhält man mit dem Satz von der monotonen Konvergenz [6, Corollary 2.4.1]

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbb{T}} c - u(z_0 + r\xi) d\lambda(\xi) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}} c - h_n(z_0 + r\xi) d\lambda(\xi) \\ &\leq c - u(z_0) < \infty. \end{aligned}$$

Lemma 1.10 zufolge existiert ein $\tilde{u} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T}, \mathcal{B}(\mathbb{T}), \lambda)$ mit $\tilde{u}(\mathbb{T}) \subseteq \mathbb{R}$ sowie $\tilde{u}(\xi) = u(z_0 + r\xi)$ für λ-fast alle $\xi \in \mathbb{T}$. Somit gilt

$$u(z_0) \leq \int_{\mathbb{T}} \tilde{u}(\xi) d\lambda(\xi) = \int_{\mathbb{T}} u(z_0 + r\xi) d\lambda(\xi).$$

□

Bemerkung 2.9. Setzt man für $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}_{-\infty}$ mit λ-integrablem Positivteil f^+

$$\int_{\mathbb{T}} f d\lambda = \begin{cases} \int_{\mathbb{T}} f d\lambda, & \text{falls auch } f^- \ \lambda\text{-integrierbar ist} \\ -\infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

so gilt Lemma 2.8 auch ohne die Forderung $u(z_0) > -\infty$.

Satz 2.10 (Maximumprinzip)**.** *Sei* $u\colon G \to \mathbb{R}_{-\infty}$ *subharmonisch auf einem Gebiet* $G \subseteq \mathbb{C}$. *Gibt es ein* $z_0 \in G$ *mit* $u(z) \leq u(z_0)$ *für alle* $z \in G$, *so ist* u *konstant.*

Beweis. Sei ohne Einschränkung $u(z_0) > -\infty$. Wegen

$$\{z \in G \mid u(z) = u(z_0)\} = G \backslash \{z \in G \mid u(z) < u(z_0)\}$$

ist die Menge $\emptyset \neq M = \{z \in G \mid u(z) = u(z_0)\}$ abgeschlossen in G. Es genügt also zu zeigen, dass $M \subseteq G$ offen ist. Seien dazu $w \in M$ und $R > 0$ so, dass $D_R(w) \subseteq G$. Gäbe es ein $\xi_0 \in \mathbb{T}$ und $r \in (0, R)$ mit

$$u(w + r\xi_0) < u(z_0) = u(w),$$

so gäbe es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{T}$ von t_0 und ein $\varepsilon > 0$ mit

$$u(w + r\xi) < u(z_0) - \varepsilon$$

für alle $\xi \in U$. Dann erhält man durch

$$\begin{aligned} u(z_0) &\leq \int\limits_{\mathbb{T}} u(w + r\xi) d\lambda(\xi) \\ &\leq \int\limits_{U} u(z_0) - \varepsilon d\lambda(\xi) + \int\limits_{\mathbb{T}\backslash U} u(w + r\xi) d\lambda(\xi) \\ &\leq u(z_0) - \int\limits_{U} \varepsilon d\lambda(\xi) \\ &< u(z_0) \end{aligned}$$

einen Widerspruch. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 2.8. □

Korollar 2.11. *Sei* $u\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{-\infty}$ *subharmonisch mit* $u(z) \geq 0$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$ *und* $\lim_{|z|\to\infty} u(z) = 0$. *Dann ist* $u = 0$.

Beweis. Wegen $\lim_{|z|\to\infty} u(z) = 0$ existiert ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $u(z_0) \geq u(z) \geq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Laut Satz 2.10 ist $u \equiv c$ für ein $c \in \mathbb{C}$ und nach Voraussetzung muss gelten $c = 0$. □

Satz 2.12. *Seien* $U \subseteq \mathbb{C}$ *offen und* $u\colon U \to \mathbb{R}_{-\infty}$. *Dann sind äquivalent*

(i) *u ist subharmonisch,*

(ii) *u ist oberhalbstetig und für* $z_0 \in U$ *und* $r > 0$ *mit* $\overline{D_r(z_0)} \subseteq U$ *ist*

$$\mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}_{-\infty}, \qquad \xi \longmapsto u(z_0 + r\xi)$$

λ-integrierbar mit

$$u(z_0) \leq \int_{\mathbb{T}} u(z_0 + r\xi) d\lambda(\xi).$$

(iii) u ist oberhalbstetig und erfüllt die Mittelwertabschätzung, d.h. für $z_0 \in U$ existiert ein $r_0 > 0$ so, dass für alle $r \in (0, r_0)$ gilt

$$u(z_0) \leq \int_{\mathbb{T}} u(z_0 + r\xi) d\lambda(\xi).$$

Beweis. Nach Lemma 2.8 folgt (ii) aus (i) und offensichtlich auch (iii) aus (ii). Seien nun $K \subseteq U$ kompakt und $h\colon K \to \mathbb{R}$ stetig so, dass $h|_{\mathrm{Int}(K)}$ harmonisch ist und $u \leq h$ auf ∂K gilt. Da $u - h$ nach Satz 2.4 oberhalbstetig auf K ist, existiert laut Satz 2.5 ein $z_0 \in K$ so, dass $(u-h)(z) \leq (u-h)(z_0)$ für alle $z \in K$ gilt. Gäbe es ein $w \in K$ mit $(u-h)(w) > 0$, so wäre

$$\emptyset \neq M = \{z \in K \mid (u-h)(z) = (u-h)(z_0)\} \subseteq \mathrm{Int}(K)$$

kompakt. Nach Voraussetzung erfüllt $u - h$ in jedem $z \in \mathrm{Int}(K)$ lokal die Mittelwertabschätzung, wodurch genau wie im Beweis von 2.10 folgt, dass $M \subseteq \mathrm{Int}(K)$ offen ist. Als offene und kompakte Menge wäre damit $M = \mathbb{C}$ kompakt, ein Widerspruch.

□

Satz 2.13. *Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge subharmonischer Funktionen auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$. Dann ist der punktweise Limes $u = \lim_{n\to\infty} u_n$ subharmonisch auf U.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $u_{n_0} \not\equiv -\infty$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$. Wegen

$$u(z) = \lim_{n\to\infty} u_n(z) = \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n(z)$$

für alle $z \in U$ ist u nach Satz 2.4 oberhalbstetig.
Seien $z_0 \in U$ und $r > 0$ mit $\overline{D_r(z_0)} \subseteq U$ und $u(z_0) > -\infty$. Es ist $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende, punktweise auf $\partial D_r(z_0)$ gegen $-u\big|_{\partial D_r(z_0)}$ konvergente Folge integrierbarer Funktionen mit

$$\begin{aligned} -\infty &< \int_{\mathbb{T}} -u_0(z_0 + r\xi) d\lambda(\xi) \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} -u_n(z_0 + r\xi) d\lambda(\xi) \\ &\leq -u_n(z_0) \leq -u(z_0) < \infty \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz [6, Corollary 2.4.1] gilt

$$\begin{aligned} -u(z_0) &= \lim_{n\to\infty} -u_n(z_0) \\ &\geq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}} -u_n(z_0 + r\xi) d\lambda(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{T}} -u(z_0 + r\xi) d\lambda(\xi) \end{aligned}$$

und

$$\mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}_{-\infty}, \qquad \xi \longmapsto u(z_0 + r\xi)$$

ist λ-integrierbar. Die Behauptung folgt also aus Satz 2.12. □

Lemma 2.14. *Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und $u_n\colon X \to [-\infty, \infty]$ $(n \in \mathbb{N})$ messbare Funktionen. Existiert eine μ-integrierbare Funktion $g\colon X \to [-\infty, \infty]$ mit $|u_n| \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X u_n d\mu \leq \int_X \limsup_{n\to\infty} u_n d\mu.$$

Beweis. Wendet man [8, Lemma IV.5.1] auf die messbaren Funktionen $g - u_n\colon X \to [0, \infty]$ $(n \in \mathbb{N})$, so folgt die Behauptung. $\square$

Definition 2.15. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $u\colon U \to \mathbb{R}_{-\infty}$ heißt *lokal nach oben beschränkt*, falls es für alle $z_0 \in U$ ein $r > 0$ gibt so, dass u auf $D_r(z_0)$ nach oben beschränkt ist.

Satz 2.16. *Es seien $u_n\colon U \to \mathbb{R}_{-\infty}$ $(n \in \mathbb{N})$ subharmonische Funktionen auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ so, dass $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$ lokal nach oben beschränkt ist auf U. Dann erfüllt $u = \limsup_{n\to\infty} u_n$ die Mittelwertabschätzung.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $u_{n_0} \not\equiv -\infty$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$. Es sei $z_0 \in U$ und $r_0 > 0$ so, dass $\overline{D_{r_0}(z_0)} \subseteq U$. Dann gibt es ein $c > 0$ mit

$$u_n(z) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n(z) \leq c$$

für alle $z \in \overline{D_{r_0}(z_0)}$. Nach Lemma 2.14 gilt für alle $r \in (0, r_0)$

$$\begin{aligned}
-\infty < u(z_0) &= \limsup_{n\to\infty} u_n(z_0) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}} u_n(z_0 + r\xi) d\lambda(\xi) \\
&\leq \int_{\mathbb{T}} \limsup_{n\to\infty} u_n(z_0 + r\xi) d\lambda(\xi) \\
&= \int_{\mathbb{T}} u(z_0 + r\xi) d\lambda(\xi) \\
&\leq c < \infty.
\end{aligned}$$

$\square$

2.2 Der Satz von Vesentini

Definition 2.17. Seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Eine Funktion $\varphi\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, falls

$$\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y)$$

für alle $x, y \in (a, b)$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt.

Bemerkung 2.18. Sei $\varphi\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

(a) Die Funktion φ ist genau dann konvex, wenn für alle $a < s < t < u < b$ gilt

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(s)}{u - s}.$$

(b) Ist φ konvex, so ist φ stetig.

Beweis. (a) Seien $a < s < t < u < b$. Durch Umformen erhält man aus

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(s)}{u - s}$$

zunächst

$$\varphi(s)\Big(\frac{t-s}{u-s}\Big) - \varphi(s) \leq \varphi(u)\Big(\frac{t-s}{u-s}\Big) - \varphi(t)$$

und dann

$$\begin{aligned}\varphi(s) &\leq \Big(\frac{s-u}{t-u}\Big)\varphi(t) + \varphi(u)\Big(\frac{t-s}{t-u}\Big)\\ &= \Big(\frac{s-u}{t-u}\Big)\varphi(t) + \varphi(u)\Big(1 - \frac{s-u}{t-u}\Big).\end{aligned}$$

Ist φ konvex, so setze $\lambda = \frac{s-u}{t-u} \in (0,1)$ und im anderen Fall $s = \lambda(t-u) + u$.

(b) Seien $a < s < x < t < b$. Für alle $y \in (x,t)$ folgt aus Teil (a)

$$\varphi(s) + \frac{\varphi(x) - \varphi(s)}{x - s}(y - s) \leq \varphi(y) \leq \varphi(x) + \frac{y - x}{t - x}(\varphi(t) - \varphi(x))$$

und somit $\lim_{y \downarrow x} \varphi(y) = \varphi(x)$. Analog erhält man $\lim_{y \uparrow x} \varphi(y) = \varphi(x)$. □

Wie etwa in [8, 1.3 Jensensche Ungleichung] beweist man folgendes Resultat.

Satz 2.19 (Jensensche Ungleichung)**.** *Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein positiver Maßraum mit $\mu(X) = 1$ sowie $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $\varphi\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ konvex und $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ mit $f(X) \subseteq (a,b)$. Dann gilt $(\varphi \circ f)^- \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ und*

$$\varphi\Big(\int_X f d\mu\Big) \leq \int_X \varphi \circ f d\mu,$$

wobei $\int\limits_X \varphi \circ f d\mu = \infty$ sei für $(\varphi \circ f)^+ \notin \mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Korollar 2.20. *Seien $u\colon U \to \mathbb{R}_{-\infty}$ subharmonisch auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ und $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und monoton wachsend. Dann ist die Abbildung*

$$\varphi \circ u\colon U \longrightarrow \mathbb{R}_{-\infty}, \qquad z \longmapsto \begin{cases} \varphi(u(z)), & \textit{falls } u(z) \neq -\infty \\ \inf\limits_{x \in \mathbb{R}} \varphi(x), & \textit{falls } u(z) = -\infty \end{cases}$$

subharmonisch auf U.

Beweis. Seien $t \in \mathbb{R}$ und $z_0 \in U$ mit $(\varphi \circ u)(z_0) < t$. Aufgrund der Stetigkeit (beachte Bemerkung 2.18 (b)) und Monotonie von φ gibt es ein $\delta > u(z_0)$ mit $\varphi([-\infty, \delta]) \subseteq [-\infty, t)$. Da u oberhalbstetig ist, gibt es eine Umgebung $V \subseteq U$ von z_0 so, dass $u(V) \subseteq [-\infty, \delta)$ und damit gilt $(\varphi \circ u)(z) < t$ für alle $z \in V$. Also ist $\phi \circ u$ nach oben halbstetig.
Seien nun $z_0 \in U$ und $r > 0$ so, dass $\overline{D_r(z_0)} \subseteq U$. Lemma 1.10 zufolge existiert ein $\tilde{u} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T}, \mathcal{B}(\mathbb{T}), \lambda)$ mit $\tilde{u}(\mathbb{T}) \subseteq \mathbb{R}$ und $\tilde{u}(\xi) = u(z_0 + r\xi)$ für λ-fast alle $\xi \in \mathbb{T}$. Ist $u(z_0) > -\infty$, so erhält man zusammen mit der Jensenschen Ungleichung (2.19)

$$\begin{aligned}\varphi(u(z_0)) &\leq \varphi\Big(\int_{\mathbb{T}} u(z_0 + r\xi) d\lambda(\xi)\Big) \\ &= \varphi\Big(\int_{\mathbb{T}} \tilde{u}(\xi) d\lambda(\xi)\Big) \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} \varphi \circ \tilde{u}(\xi) d\lambda(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{T}} \varphi \circ u(z_0 + r\xi) d\lambda(\xi).\end{aligned}$$

Gilt nun $u(z_0) = -\infty$ und ohne Einschränkung $\varphi(-\infty) > -\infty$, so ist die Abbildung

$$\mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \xi \longmapsto \varphi \circ u(z_0 + r\xi)$$

λ-messbar, oberhalbstetig und nach Satz 2.5 beschränkt. Wieder mit der Jensenschen Ungleichung folgt

$$\varphi(u(z_0)) = \varphi(-\infty) \leq \int_{\mathbb{T}} \varphi \circ u(z_0 + r\xi) d\lambda(\xi).$$

Satz 2.12 liefert die Behauptung.

□

Lemma 2.21. *Seien $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to X$ eine holomorphe Abbildung in einen Banachraum $(X, \|\cdot\|)$. Dann ist die Funktion*

$$\log\|f\| : U \longrightarrow \mathbb{R}_{-\infty} \qquad z \longmapsto \begin{cases} \log\|f(z)\|, & \textit{falls } f(z) \neq 0 \\ -\infty, & \textit{falls } f(z) = 0 \end{cases}$$

subharmonisch auf U.

Beweis. Aus der Stetigkeit der Funktion $U \to \mathbb{R},\ z \mapsto \log|z|$ und der Holomorphie von f folgt, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ die Menge

$$\{z \in U \mid \log\|f(z)\| < t\}$$

offen in $\mathbb{C}$ ist und damit die Oberhalbstetigkeit von $\log\|f\|$ auf U.
Seien $z_0 \in U$ mit $f(z_0) \neq 0$ und $r > 0$ so, dass $\overline{D_r(z_0)} \subseteq U$ und $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D_r(z_0)$. Im Fall $X = \mathbb{C}$ existiert nach [9, Kapitel V, Satz 1.4] eine holomorphe Abbildung $g : D_r(z_0) \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = e^{g(z)}$ für alle $z \in D_r(z_0)$. Laut [10, Satz 2.17] ist $\log|f| = \mathrm{Re}(g)$ harmonisch, sodass $\log|f|$ auf $D_r(z_0)$ die Mittelwertabschätzung erfüllt

und somit laut Satz 2.12 subharmonisch ist. Ist X ein beliebiger Banachraum, so existiert nach Hahn-Banach [3, Korollar 6.5] eine stetig lineare Abbildung $\phi\colon X \to \mathbb{C}$ mit $\|\phi\| = 1$ und $\phi(f(z_0)) = \|f(z_0)\|$. Aus

$$\lim_{z\to w} \frac{\phi(f(z)) - \phi(f(w))}{z-w} = \lim_{z\to w} \phi\Big(\frac{f(z)-f(w)}{z-w}\Big) = \phi(f'(w))$$

für alle $w \in U$ folgt, dass $\phi \circ f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph ist. Nach dem bereits Gezeigten ist $\log|\phi \circ f|$ auf U subharmonisch und es gilt

$$\begin{aligned}\log\|f(z_0)\| &= \log|\phi(f(z_0))| \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} \log|\phi(f(z_0 + r\xi))| d\lambda(\xi) \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} \log\|f(z_0 + r\xi)\| d\lambda(\xi).\end{aligned}$$

Satz 2.12 liefert die Behauptung. □

Bemerkung 2.22. In dem Beweis wurde gezeigt, dass für ein holomorphes $f\colon U \to \mathbb{C}$ mit $0 \notin f(U)$ die Funktion $\log|f|\colon U \to \mathbb{R}$ harmonisch ist.

Satz 2.23 (Vesentini)**.** *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f\colon U \to \mathcal{A}$ holomorph. Dann sind $r \circ f\colon U \to \mathbb{R}_{-\infty}$ und $\log(r \circ f)\colon U \to \mathbb{R}_{-\infty}$ subharmonisch auf U.*

Beweis. Für alle $z \in U$ gilt

$$\begin{aligned}\log r(f(z)) &= \lim_{n\to\infty} \log(\|f(z)^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \log\|f(z)^{2^n}\|.\end{aligned}$$

Da $U \to \mathcal{A}$, $z \mapsto f(z)^{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ holomorph ist, folgt aus Lemma 2.21, dass $U \to \mathbb{R}_{-\infty}$, $z \mapsto \log\|f(z)^{2^n}\|$ subharmonisch ist.
Aus

$$\begin{aligned}\log\|f(z)^{2^{n+1}}\| &= \log\|f(z)^{2^n} f(z)^{2^n}\| \\ &\leq \log(\|f(z)^{2^n}\|\|f(z)^{2^n}\|) \\ &= 2\log\|f(z)^{2^n}\|\end{aligned}$$

folgt, dass die Folge $(\frac{1}{2^n}\log(f^{2^n}))_{n\in\mathbb{N}}$ subharmonischer Funktionen $U \to \mathbb{R}_{-\infty}$ punktweise monoton fallend gegen $\log(r(f(z)))$ konvergiert. Nach Satz 2.13 ist $\log(r \circ f)$ subharmonisch. Da $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und monoton wachsend ist folgt aus Korollar 2.20, dass $\exp \circ \log(r \circ f) = r \circ f$ subharmonisch ist. □

2.3 Der Satz von Liouville für subharmonische Funktionen

Im folgenden Abschnitt werden wir eine Version des Satzes von Liouville für subharmonische Funktionen herleiten. Es sei $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to [0,\infty]$ das Lebesgue-Borelsche-Maß auf $\mathbb{C}$ und wir schreiben $\mathcal{L}^1(U) = \mathcal{L}^1(U, \mathcal{B}(U), \mu|_U)$ für eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$.

Satz 2.24. *Sei $u\colon U \to \mathbb{R}_{-\infty}$ eine subharmonische Funktion auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ und seien $z_0 \in U$ und $R > 0$ mit $\overline{D_R(z_0)} \subseteq U$. Ist $u(z_0) > -\infty$, so ist $u|_{\overline{D_R(z_0)}}$ $\mu|_{\overline{D_R(z_0)}}$-integrierbar.*

Beweis. Nach Satz 2.6 existieren stetige Funktionen $h_n\colon \overline{D_R(z_0)} \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$, die auf $\overline{D_R(z_0)}$ punktweise monoton fallend gegen u konvergieren. Für alle $r \in (0, R)$ gilt nach Satz 2.12

$$-\infty < u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})dt.$$

Ausgehend davon erhält man

$$-\infty < 2\pi r u(z_0) \leq r \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})dt.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt mit dem Satz von Fubini [6, Theorem 5.2.2]

$$\begin{aligned} -\infty < 2\pi R^2 u(z_0) &\leq \int_0^R r \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})dtdr \\ &\leq \int_0^R r \int_0^{2\pi} h_n(z_0 + re^{it})dtdr \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} r h_n(z_0 + re^{it})dtdr \\ &= \int_{\overline{D_R(z_0)}} h_n(z)d\mu(z). \end{aligned}$$

Wie im Beweis von Lemma 2.8 erhält man mit dem Satz von der monotonen Konvergenz [6, Corollary 2.4.1]

$$\begin{aligned} \int_{\overline{D_R(z_0)}} u(z)d\mu(z) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\overline{D_R(z_0)}} h_n(z)d\mu(z) \\ &\leq \pi R^2 u(z_0). \end{aligned}$$

□

Satz 2.25. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $u\colon G \to \mathbb{R}_{-\infty}$ subharmonisch mit $u \not\equiv -\infty$. Dann existiert für jedes $z \in G$ ein $r > 0$ so, dass $u|_{D_r(z)}$ $\mu|_{D_r(z)}$-integrierbar ist.*

Beweis. Wegen $u \not\equiv -\infty$ ist die Menge

$$M = \{z \in G \mid \text{es gibt ein } r > 0 \text{ so, dass } u|_{D_r(z)} \in \mathcal{L}^1(D_r(z))\}$$

nach Satz 2.24 nicht leer. Offensichtlich ist M auch offen. Sei nun $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z \in G$ und $R > 0$ mit $D_R(z) \subseteq G$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|z_n - z| \leq \tfrac{R}{4}$$

und $r \in (0, \frac{R}{4})$ so, dass $u|_{D_r(z_n)} \in \mathcal{L}^1(D_r(z_n))$. Dann gibt es $\tilde{z} \in D_r(z_n)$ mit $u(\tilde{z}) > -\infty$. Weiter gilt $D_{R/2}(\tilde{z}) \subseteq D_R(z) \subseteq G$ und nach Satz 2.24 ist $u|_{D_{R/2}(\tilde{z})} \in \mathcal{L}^1(D_{R/2}(\tilde{z}))$. Wegen $z \in D_{R/2}(\tilde{z})$ gibt es ein $r_0 > 0$ mit $D_{r_0}(z) \subseteq D_{R/2}(\tilde{z})$ und damit $u|_{D_{r_0}(z)} \in \mathcal{L}^1(D_{r_0}(z))$. Also ist M wegen $z \in M$ abgeschlossen und es folgt $M = G$. □

Korollar 2.26. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $u\colon G \to \mathbb{R}_{-\infty}$ subharmonisch mit $u \not\equiv -\infty$. Für jede kompakte Menge $K \subseteq G$ ist $u|_K$ $\mu|_K$-integrierbar.*

Beweis. Satz 2.25 zufolge existiert für jedes $z \in G$ ein $r > 0$ mit $u|_{D_r(z)} \in \mathcal{L}^1(D_r(z))$. Für eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{C}$ existieren somit $z_1, ..., z_n \in G$ und $r_1, ..., r_n > 0$ mit $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n D_{r_i}(z_i)$ für die $D_{r_i}(z_i) \subseteq G$ und $u|_{D_{r_i}(z_i)} \in \mathcal{L}^1(D_{r_i}(z_i))$ für alle $1 \leq i \leq n$ gilt. Also ist $u|_K \in \mathcal{L}^1(K)$. □

Lemma 2.27. *Sei $u\colon G \to \mathbb{R}_{-\infty}$ subharmonisch auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ mit*

$$\operatorname{Int}\{z \in G \mid u(z) = -\infty\} \neq \emptyset.$$

Dann ist $u \equiv -\infty$.

Beweis. Seien $u \not\equiv -\infty$, $M = \{z \in G \mid u(z) = -\infty\}$ und $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine kompakte Ausschöpfung von G. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt Korollar 2.26 zufolge $\int_{K_n} |u| d\mu < \infty$. Wegen $\mu(M \cap K_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist auch $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(M \cap K_n)$ eine μ-Nullmenge, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Lemma 2.28. *Sei $u\colon \overline{D_r(z_0)} \to \mathbb{R}_{-\infty}$ subharmonisch mit $u \not\equiv -\infty$. Dann ist die Funktion*

$$M\colon (-\infty, \log r) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad t \longmapsto \max_{|z-z_0|=e^t} u(z)$$

konvex.

Beweis. Satz 2.5 zufolge ist M wohldefiniert. Ohne Einschränkung sei $z_0 = 0$. Weiter seien $\lambda \in [0, 1]$ und $t_1, t_2 \in (-\infty, \log r)$ mit $t_1 < t_2$. Dann ist nach Bemerkung 2.22

$$h\colon \mathbb{C}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad z \longmapsto \frac{\log|z| - t_1}{t_2 - t_1} M(t_2) + \frac{t_2 - \log|z|}{t_2 - t_1} M(t_1)$$

eine harmonische Funktion. Weiter gilt für $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $|z| = e^{\lambda t_2 + (1-\lambda)t_1}$, dass $\lambda = \frac{\log|z| - t_1}{t_2 - t_1} \in [0, 1]$. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $|z| = e^{t_2}$ erhält man

$$u(z) \leq \max_{|w|=e^{t_2}} u(w) = M(t_2) = \frac{\log|z| - t_1}{t_2 - t_1} M(t_2) + \frac{t_2 - \log|z|}{t_2 - t_1} M(t_1),$$

sodass nach Lemma 2.12

$$u(z) \leq h(z)$$

für alle $z \in \overline{D_{e^{t_2}}(0)}$ gilt. Insbesondere erhält man

$$\max_{|z|=e^{\lambda t_2 + (1-\lambda)t_1}} u(z) \leq h(z)$$

und somit die Konvexität von M. □

Bemerkung 2.29. Insbesondere ist für eine subharmonische Funktion $u\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{-\infty}$ mit $u \not\equiv -\infty$ die Funktion

$$M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad t \longmapsto \max_{|z|=e^t} u(z)$$

konvex.

Satz 2.30. *Sei $u\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{-\infty}$ subharmonisch so, dass*

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{\max\{u(z) \mid |z| = r\}}{\log r} = 0.$$

Dann ist u konstant.

Beweis. Bemerkung 2.18 und 2.29 zufolge ist

$$h\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad t \longmapsto \frac{M(t) - M(0)}{t}$$

monoton wachsend. Seien nun $\varepsilon > 0$ und $R > 0$ so, dass

$$\Big|\frac{M(0)}{\log r}\Big| < \varepsilon$$

für alle $r \geq R$. Zusammen mit der Voraussetzung erhält man

$$\liminf_{r\to\infty} \Big|\frac{M(\log r) - M(0)}{\log r}\Big| \leq \liminf_{\substack{r\to\infty \\ r\geq R}} \Big|\frac{M(\log r)}{\log r}\Big| + \varepsilon = \varepsilon$$

und somit

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{M(\log r) - M(0)}{\log r} = 0.$$

Da h monoton wächst, folgt

$$\lim_{r\to\infty} \frac{M(\log r) - M(0)}{\log r} = 0.$$

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert daher ein $t > 0$ mit

$$\Big|\frac{M(\log s) - M(0)}{\log s}\Big| < \varepsilon$$

für alle $s \geq t$ und aufgrund der Monotonie

$$\Big|\frac{M(\log s) - M(0)}{\log s}\Big| < \varepsilon$$

für alle $s > 0$. Damit erhält man $M(\log r) = M(0)$ für alle $r \geq 0$, sodass aus dem Maximumprinzip [Satz 2.10] folgt, dass u konstant ist. $\square$

Korollar 2.31 (Liouville)**.** *Jede nach oben beschränkte subharmonische Funktion $u\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{-\infty}$ ist konstant.*

3 Das Jacobson-Radikal

3.1 Das Jacobson-Radikal

Sei im Folgenden $\mathcal{A}$ eine unitale komplexe Algebra.

Definition 3.1. Ein Linksideal $L \subsetneq \mathcal{A}$ heißt *maximal*, falls es kein weiteres Linksideal $L' \subseteq \mathcal{A}$ mit $L \subsetneq L' \subsetneq \mathcal{A}$ gibt.

Lemma 3.2. *Jedes Linksideal ist in einem maximalen Linksideal enthalten.*

Beweis. Für ein Linksideal $L_0 \subseteq \mathcal{A}$ ist die Menge

$$\mathcal{F} = \{L \subseteq \mathcal{A} \mid L \text{ maximales Linksideal mit } L_0 \subseteq L\}$$

bezüglich Inklusion partiell geordnet. Ist $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ eine Kette im Sinne von [11, Section 14, S. 54], so ist $\bigcup_{J \in \mathcal{C}} J \subsetneq \mathcal{A}$ ebenfalls Linksideal. Nach dem Lemma von Zorn [11, Zorn's lemma] existiert ein maximales Linksideal $L \in \mathcal{F}$. $\square$

Definition 3.3. Es seien

$$L_{max}(\mathcal{A}) = \{L \subseteq \mathcal{A} \mid L \text{ maximales Linksideal in } \mathcal{A}\}$$

und

$$R_{max}(\mathcal{A}) = \{R \subseteq \mathcal{A} \mid R \text{ maximales Rechtsideal in } \mathcal{A}\}.$$

Wir definieren

$$\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) = \bigcap_{L \in L_{max}(\mathcal{A})} L$$

als das (Jacobson-)*Radikal* von $\mathcal{A}$. Gilt $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) = \{0\}$, so heißt $\mathcal{A}$ *halbeinfach*.

Lemma 3.4. *Für alle $x, y \in \mathcal{A}$ und $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ist $\lambda + xy \in \mathcal{A}^{-1}$ genau dann, wenn $\lambda + yx \in \mathcal{A}^{-1}$.*

Beweis. Ist $\lambda + xy \in \mathcal{A}^{-1}$, so existiert ein $u \in \mathcal{A}$ mit

$$(\lambda + xy)u = \lambda u + xyu = 1.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}(\lambda + yx)(1 - yux) &= \lambda - \lambda yux + yx - y(xyu)x \\ &= \lambda - \lambda yux + yx - y(1 - \lambda u)x \\ &= \lambda - \lambda yux + yx - yx + \lambda yux = \lambda.\end{aligned}$$

$\square$

Korollar 3.5. *Es ist*

$$\sigma(xy) \cup \{0\} = \sigma(yx) \cup \{0\}.$$

für alle $x, y \in \mathcal{A}$.

Folgender Satz liefert uns nützliche Charakterisierungen des Radikals von $\mathcal{A}$.

Satz 3.6. *Für ein* $x \in \mathcal{A}$ *sind äquivalent*

(i) $x \in \operatorname{Rad}(\mathcal{A})$,

(ii) $x \in \bigcap_{R \in R_{max}(\mathcal{A})} R$,

(iii) $x \in \{x \in \mathcal{A} \mid 1 + yx \in \mathcal{A}^{-1}$ *für alle* $y \in \mathcal{A}\}$,

(iv) $x \in \{x \in \mathcal{A} \mid 1 + xy \in \mathcal{A}^{-1}$ *für alle* $y \in \mathcal{A}\}$,

(v) $x \in \{x \in \mathcal{A} \mid \sigma(yx) = \{0\}$ *für alle* $y \in \mathcal{A}\}$,

(vi) $x \in \{x \in \mathcal{A} \mid \sigma(xy) = \{0\}$ *für alle* $y \in \mathcal{A}\}$.

Beweis. Aus Lemma 3.4 folgt die Äquivalenz von (iii) und (iv) und aus Korollar 3.5 die der Aussagen (v) und (vi). Offensichtlich sind auch (iii) und (v) äquivalent. Wir zeigen nun die Äquivalenz von (i) und (iii) und analog folgt die Äquivalenz von (ii) und (iv).
Seien $x \in L$ für alle $L \in L_{max}(\mathcal{A})$ und $y \in \mathcal{A}$ so, dass $1 + yx \notin \mathcal{A}^{-1}$. Da $\mathcal{A}(1 + yx) \subsetneq \mathcal{A}$ ein Linksideal in $\mathcal{A}$ ist, existiert nach Lemma 3.2 ein maximales Linksideal $L_0 \subsetneq \mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(1 + yx) \subseteq L_0$. Für dieses gilt $1 + yx - yx = 1 \in L_0$ und damit $L_0 = \mathcal{A}$ im Widerspruch zu $L_0 \subsetneq \mathcal{A}$.
Existiert umgekehrt ein maximales Linksideal $L_0 \in L_{max}(\mathcal{A})$ mit $x \notin L_0$ und ist $1+yx \in \mathcal{A}^{-1}$ für alle $y \in \mathcal{A}$, so folgt für das Linksideal $L_0 - \mathcal{A}x \subset \mathcal{A}$ mit $L_0 \subset L_0 - \mathcal{A}x \subset \mathcal{A}$, dass $L_0 - \mathcal{A}x = \mathcal{A}$. Also gibt es ein $z \in L_0$ und ein $y \in \mathcal{A}$ mit $1 = z - yx \in \mathcal{A}$. Wegen $1 + yx \in L_0$ gilt $(1 + yx)^{-1}(1 + yx) = 1 \in L_0$ im Widerspruch zur Maximalität von L_0. $\square$

Satz 3.7. *Die unitale Algebra* $\mathcal{A}/\operatorname{Rad}(\mathcal{A})$ *ist halbeinfach. Weiter ist* $x \in \mathcal{A}^{-1}$ *genau dann, wenn* $[x] \in (\mathcal{A}/\operatorname{Rad}(\mathcal{A}))^{-1}$.

Beweis. Sei $L' \in L_{max}(\mathcal{A}/\operatorname{Rad}(\mathcal{A}))$ und $q\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\operatorname{Rad}(\mathcal{A})$ die Quotientenabbildung. Dann ist auch $L = q^{-1}(L') \in L_{max}(\mathcal{A})$, denn für ein weiteres Linksideal $J \subsetneq \mathcal{A}$ mit $J \supsetneq L$ gilt

$$L' = q(L) \subseteq q(J).$$

Aus der Maximalität von L' folgt $q(L) = q(J)$. Für ein $x \in J$ gibt es also ein $y \in L$ mit $q(x) = q(y)$ und damit $x \in L$, das heißt $L = J$. Analog ist $q(L) \subseteq \mathcal{A}/\operatorname{Rad}(\mathcal{A})$ maximales Linksideal, falls $L \subset \mathcal{A}$ maximales Linksideal ist, sodass

$$q^{-1}(\operatorname{Rad}(\mathcal{A}/\operatorname{Rad}(\mathcal{A}))) \subseteq \operatorname{Rad}(\mathcal{A})$$

folgt. Für $[x] \in \operatorname{Rad}(\mathcal{A}/\operatorname{Rad}(\mathcal{A}))$ gilt also $x \in \operatorname{Rad}(\mathcal{A})$ und damit $[x] = [0]$. Offensichtlich ist $[x] \in (\mathcal{A}/\operatorname{Rad}(\mathcal{A}))^{-1}$, falls $x \in \mathcal{A}^{-1}$. Gilt umgekehrt $[x] \in (\mathcal{A}/\operatorname{Rad}(\mathcal{A}))^{-1}$, so gibt es $y \in \mathcal{A}$ und $u, v \in \operatorname{Rad}(\mathcal{A})$ mit $xy - u = 1$ und $yx - v = 1$. Nach Satz 3.6 gilt $1 + u, 1 + v \in \mathcal{A}^{-1}$ und damit $xy(1 + u)^{-1} = 1$ und $(1 + v)^{-1}yx = 1$. □

Bemerkung 3.8. Es gilt $\sigma(x) = \sigma(x + \operatorname{Rad}(\mathcal{A}))$ und damit $r(x) = r(x + \operatorname{Rad}(\mathcal{A}))$ für alle $x \in \mathcal{A}$.

Satz 3.9. *Ist $\mathcal{A}$ Banachalgebra mit Norm $\|\cdot\|$, so ist jedes maximale Linksideal $L \in L_{max}(\mathcal{A})$ abgeschlossen.*

Beweis. Für ein $L \in L_{max}(\mathcal{A})$ folgt wegen $L \cap \mathcal{A}^{-1} = \emptyset$ aus Lemma 1.2, dass

$$L \cap \{x \in \mathcal{A} \mid \|1 - x\| < 1\} = \emptyset.$$

Demnach gilt auch $\overline{L} \cap \{x \in \mathcal{A} \mid \|1 - x\| < 1\} = \emptyset$ und somit $\overline{L} \neq \mathcal{A}$. Da $\overline{L} \subsetneq \mathcal{A}$ selbst Linksideal mit $L \subseteq \overline{L}$ ist, folgt $L = \overline{L}$ aus der Maximalität von L. □

Aus dem Beweis geht hervor, dass in einer Banachalgebra $\mathcal{A}$ auch jedes maximale Rechtsideal $R \in R_{max}(\mathcal{A})$ abgeschlossen ist. Darüber hinaus erhält man folgendes Korollar.

Korollar 3.10. *Das Radikal einer Banachalgebra $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen.*

3.2 Irreduzible Darstellungen

Sei $\mathcal{A}$ eine unitale Banachalgebra. Im Folgenden bezeichne $\mathcal{L}(X)$ den $\mathbb{C}$-Vektorraum aller Vektorraumhomomorphismen $X \to X$ auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum X. Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so wird $\mathcal{L}(X)$, ausgestattet mit der Operatornorm, zu einem normierten Raum.

Definition 3.11. Es sei X ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

(a) Ein nichttrivialer Algebrenhomomorphismus $\pi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{L}(X)$ heißt *Darstellung von $\mathcal{A}$ auf X*.

(b) Eine Darstellung π von $\mathcal{A}$ auf X heißt *irreduzibel*, falls

$$\{M \subseteq X \text{ Teilraum} \mid \pi(x)M \subseteq M \text{ für alle } x \in \mathcal{A}\} = \{\{0\}, X\}.$$

(c) Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $\pi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{L}(X)$ eine Darstellung von $\mathcal{A}$ auf X, so nennen wir π *stetig*, falls es ein $C > 0$ gibt mit

$$\|\pi(a)\| \leq C\|a\|$$

für alle $a \in \mathcal{A}$.

Es sei $\operatorname{Rep}(\mathcal{A}) = \{\pi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{L}(X) \mid \pi \text{ stetige irreduzible Darstellung von } \mathcal{A} \text{ auf } X\}$.

Lemma 3.12. *Sei $\pi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{L}(X)$ eine irreduzible Darstellung auf einen Banachraum X. Für alle $\xi \in X\backslash\{0\}$ gilt*

$$\{\pi(x)\xi \mid x \in \mathcal{A}\} = X.$$

Beweis. Der Teilraum $M = \{\eta \in X \mid \pi(x)\eta = 0 \text{ für alle } x \in \mathcal{A}\}$ ist invariant unter π und aus $\pi \neq 0$ folgt $M = \{0\}$. Ebenso ist $F = \{\pi(x)\xi \mid x \in \mathcal{A}\}$ ein invarianter Teilraum unter π und aus $M = \{0\}$ folgt $F = X$. □

Satz 3.13. *(a) Für $L \in L_{max}(\mathcal{A})$ wird durch*

$$\pi_L(x)[a] = [xa] \qquad (a, x \in \mathcal{A})$$

eine wohldefinierte stetige irreduzible Darstellung $\pi_L\colon \mathcal{A} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}/L)$ definiert. Hierbei sei der Quotientenraum $\mathcal{A}/L$ durch die Quotientennorm normiert.

(b) Für jede irreduzible Darstellung $\pi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{L}(X)$ auf einen Banachraum X existiert ein $L \in L_{max}(\mathcal{A})$ so, dass $\ker(\pi) = \{x \in \mathcal{A} \mid x\mathcal{A} \subseteq L\}$.

Beweis. (a) Offenbar ist $\pi_L(x)$ linear für jedes $x \in \mathcal{A}$. Da die Multiplikation in Banachalgebren stetig ist, gilt

$$\|\pi_L(x)[a]\| = \|[xa]\| \leq \|[x]\| \cdot \|[a]\|$$

für alle $[a] \in \mathcal{A}/L$ und alle $x \in \mathcal{A}$. Also gilt $\pi_L(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{A}/L)$ mit $\|\pi_L(x)\| \leq \|[x]\|$ und π_L ist wohldefiniert und stetig linear. Sei $\{0\} \subsetneq M \subseteq \mathcal{A}/L$ ein unter π invarianter Teilraum mit $M = U/L$ für einen Unterraum $U \subseteq \mathcal{A}$. Wegen

$$\pi_L(x)[u] = [xu] \in U/L$$

für alle $x \in \mathcal{A}$ und $u \in U$ ist $L \subsetneq U \subseteq \mathcal{A}$ ein Linksideal, für das aufgrund der Maximalität von L folgt $U = \mathcal{A}$ und damit $M = \mathcal{A}/L$.

(b) Sei π eine irreduzible Darstellung von $\mathcal{A}$ auf X und $\xi \in X \setminus \{0\}$. Für das Linksideal

$$L = \{x \in \mathcal{A} \mid \pi(x)\xi = 0\}$$

folgt aus Lemma 3.12, dass $L \neq \mathcal{A}$. Sei nun $J \subsetneq \mathcal{A}$ ein weiteres Linksideal mit $L \subsetneq J$. Dann ist $N = \{\pi(x)\xi \mid x \in J\} \neq \{0\}$ ein invarianter Teilraum unter π, weshalb $N = X$ folgt. Also gibt es ein $e \in J$ mit $\pi(e)\xi = \xi$ und damit $xe - x \in L$ für alle $x \in \mathcal{A}$, denn $\pi(xe - x)\xi = \pi(x)\pi(e)\xi - \pi(x)\xi = 0$. Für alle $x \in \mathcal{A}$ gilt $x = (x - xe) + xe \in L + J \subseteq J$ und somit $J = \mathcal{A}$ im Widerspruch zur Voraussetzung.
Offensichtlich gilt $\ker(\pi) \subseteq \{x \in \mathcal{A} \mid x\mathcal{A} \subseteq L\}$. Für $x \in \{x \in \mathcal{A} \mid x\mathcal{A} \subseteq L\}$ erhält man

$$\pi(x)\pi(y)\xi = \pi(xy)\xi = 0$$

für alle $y \in \mathcal{A}$, sodass aus Lemma 3.12 folgt $x \in \ker(\pi)$.

□

Durch das nächste Korollar erhalten wir eine weitere Charakterisierung des Radikals von $\mathcal{A}$, die sich im folgenden Kapitel als nützlich erweisen wird.

Korollar 3.14. *Es gilt*

$$\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) = \bigcap_{\pi \in \mathrm{Rep}(\mathcal{A})} \ker(\pi).$$

Beweis. Sei zunächst $x \in \mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ und damit $x \in L$ für alle $L \in L_{max}(\mathcal{A})$. Nach Satz 3.6 gilt einerseits $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) \subseteq L$ und andererseits $x\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Rad}(\mathcal{A})$, da $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ als Schnitt von Rechtsidealen selbst Rechtsideal ist. Satz 3.13 zufolge gilt damit $x \in \ker(\pi_L)$ für alle $L \in L_{max}(\mathcal{A})$ und ebenfalls aus Satz 3.13 folgt $x \in \ker(\pi)$ für alle $\pi \in \mathrm{Rep}(\mathcal{A})$. Nun seien $\pi \in \mathrm{Rep}(\mathcal{A})$ und $x \in \ker(\pi)$. Wieder mit Satz 3.13 existiert ein $L \in L_{max}(\mathcal{A})$ so, dass $x \in \{x \in \mathcal{A} \mid x\mathcal{A} \subseteq L\}$ und damit $x \in L$. □

Lemma 3.15. *Sei $\pi \colon \mathcal{A} \to \mathcal{L}(X)$ eine irreduzible Darstellung und $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ so, dass $\pi(a)x = \alpha x$ für ein $x \in X\setminus\{0\}$ gilt. Dann ist $\alpha \in \sigma(a)$.*

Beweis. Wäre $\alpha \notin \sigma(a)$, so gäbe es ein $y \in \mathcal{A}$ mit $y\alpha - ya = 1$. Für $c = -ay \in \mathcal{A}$ wäre $a + \alpha c - ca = 0$ und zusammen mit der Voraussetzung

$$\begin{aligned} 0 &= \pi(a + \alpha c - ca)x \\ &= \pi(a)x + \alpha\pi(c)x - \pi(c)\pi(a)x \\ &= \pi(a)x + \alpha\pi(c)x - \alpha\pi(c)x \\ &= \alpha x, \end{aligned}$$

ein Widerspruch. □

Lemma 3.16. *Gilt $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}\backslash\{0\}$, so ist $\mathcal{A}$ isometrisch isomorph zu $\mathbb{C}$.*

Beweis. Seien $x \in \mathcal{A}$ und $\lambda \in \sigma(x)$. Wegen $\lambda - x \notin \mathcal{A}^{-1}$ gilt $x = \lambda$, d.h. $\sigma(x)$ enthält nur ein Element, etwa $\lambda(x) = \lambda \in \sigma(x)$. Somit ist die Abbildung

$$\lambda\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad x \longmapsto \lambda(x)$$

ein Isomorphismus mit $\|x\| = |\lambda(x)|$ für alle $x \in \mathcal{A}$. □

Im Folgenden bezeichne $\pi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{L}(X)$ eine stetige irreduzible Darstellung von $\mathcal{A}$ auf einen Banachraum X.

Satz 3.17. *Es ist*

$$C = \{T \in \mathcal{L}(X) \mid T\pi(x) = \pi(x)T \textit{ für alle } x \in \mathcal{A}\}$$

isomorph zu $\mathbb{C}$.

Beweis. Offensichtlich ist C eine abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{L}(X)$ mit $id_X \in C$. Für $0 \neq T \in C$ gilt

$$\pi(x)T(X) = T\pi(x)(X) \subseteq T(X)$$

für alle $x \in \mathcal{A}$. Also ist $T(X)$ invariant unter π, woraus $T(X) = X$ folgt. Ebenso zeigt man $\pi(x)\ker(T) \subseteq \ker(T)$, weshalb $\ker(T) = \{0\}$ gelten muss. Somit ist $T \in \mathcal{L}(X)$ bijektiv und nach dem Prinzip vom stetigen Inversen [3, Korollar 8.3] folgt, dass $T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Weiter ist $T^{-1}\pi(x) = \pi(x)T^{-1}$ für alle $x \in \mathcal{A}$, sodass $T^{-1} \in C$ gilt. Die Behauptung folgt nun mit Lemma 3.16. □

Lemma 3.18. *Sind $\xi_1, \xi_2 \in X$ linear unabhängig, so existiert ein $a \in \mathcal{A}$ mit $\pi(a)\xi_1 = 0$ und $\pi(a)\xi_2 \neq 0$.*

Beweis. Sei $x \in \mathcal{A}$ so, dass aus $\pi(x)\xi_1 = 0$ folgt $\pi(x)\xi_2 = 0$. Wie im Beweis von Satz 3.13 kann man zeigen, dass die Linksideale $L_i = \{x \in \mathcal{A} \mid \pi(x)\xi_i = 0\}$ $(i = 1, 2)$ maximal sind mit $L_1 \subseteq L_2$, weshalb $L_1 = L_2$ folgt. Die linearen Abbildungen

$$T_i\colon A/L_1 \to X, \qquad [a] \mapsto \pi(a)\xi_i \qquad (i = 1, 2)$$

sind aufgrund der Stetigkeit von π beschränkt und nach Lemma 3.12 auch bijektiv. Wieder mit dem Prinzip vom stetigen Inversen [3, Korollar 8.3] erhält man $D = T_2T_1^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Für $\xi \in X$ sei $b \in \mathcal{A}$ mit $\xi = \pi(b)\xi_1$. Dann gilt

$$\pi(a)D\xi = \pi(a)T_2T_1^{-1}(\xi) = \pi(a)T_2([b]) = \pi(a)\pi(b)\xi_2 = \pi(ab)\xi_2$$

und

$$D\pi(a)\xi = T_2T_1^{-1}\pi(ab)\xi_1 = T_2([ab]) = \pi(ab)\xi_2$$

und damit $D\pi(a) = \pi(a)D$ für alle $a \in \mathcal{A}$. Lemma 3.17 zufolge existiert ein $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $D = \lambda id_X$ und somit $T_2 = \lambda T_1$. Mit $a = 1$ erhält man durch $\xi_2 = \lambda\xi_1$ einen Widerspruch. □

Satz 3.19. *Sind $\xi_1, ..., \xi_n \in X$ linear unabhängig, dann existiert ein $a \in \mathcal{A}$ so, dass $\pi(a)\xi_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq n-1$ und $\pi(a)\xi_n \neq 0$.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach n. Für $n = 2$ gilt die Behauptung nach Lemma 3.18. Sei also nun $n > 2$ und die Behauptung wahr für $n-1$ linear unabhängige $\xi_1, ..., \xi_{n-1} \in X$. Demnach gibt es ein $a_1 \in \mathcal{A}$ so, dass

$$\begin{aligned} &\pi(a_1)\xi_i = 0 \qquad (1 \leq i \leq n-2) \\ &\pi(a_1)\xi_n \neq 0. \end{aligned}$$

Gilt bereits $\pi(a_1)\xi_{n-1} = 0$, so ist die Aussage gezeigt. Sei nun also $\pi(a_1)\xi_{n-1} \neq 0$. Sind $\pi(a_1)\xi_{n-1}$ und $\pi(a_1)\xi_n$ linear unabhängig, so existiert nach Lemma 3.18 ein $a_2 \in \mathcal{A}$ mit

$$\begin{aligned} &\pi(a_2)\pi(a_1)\xi_{n-1} = 0 \\ &\pi(a_2)\pi(a_1)\xi_n \neq 0. \end{aligned}$$

Wählt man $a = a_2 a_1 \in \mathcal{A}$, so folgt die Behauptung.
Andernfalls sei $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ so, dass $\lambda\pi(a_1)\xi_{n-1} = \pi(a_1)\xi_n$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es für die linear unabhängigen $\xi_1, ..., \xi_{n-2}, \lambda\xi_{n-1} - \xi_n \in X$ ein $a_3 \in \mathcal{A}$ mit

$$\begin{aligned} &\pi(a_3)\xi_i = 0 \qquad (1 \leq i \leq n-2) \\ &\pi(a_3)(\lambda\xi_{n-1} - \xi_n) \neq 0. \end{aligned}$$

Gilt bereits $\pi(a_3)\xi_{n-1} = 0$, so ist die Aussage gezeigt. Andernfalls seien zunächst $\pi(a_3)\xi_{n-1}, \pi(a_3)\xi_n \in X\backslash\{0\}$ linear unabhängig. Wieder nach Lemma 3.18 existiert ein $a_4 \in \mathcal{A}$ so, dass

$$\begin{aligned} &\pi(a_4)\pi(a_3)\xi_{n-1} = 0 \\ &\pi(a_4)\pi(a_3)\xi_n \neq 0. \end{aligned}$$

Wählt man $a = a_4 a_3 \in \mathcal{A}$, so folgt die Behauptung.
Sei nun $\mu\pi(a_3)\xi_{n-1} = \pi(a_3)\xi_n$ mit $\mu \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Aus $\pi(a_3)(\lambda\xi_{n-1} - \xi_n) \neq 0$ folgt $\mu\pi(a_3)\xi_{n-1} \neq \lambda\pi(a_3)\xi_{n-1}$ und damit $\mu \neq \lambda$. Mit $\pi(a_3)\xi_{n-1} \neq 0$ folgt aus Lemma 3.12, dass es ein $a_5 \in \mathcal{A}$ gibt mit $\pi(a_5)\pi(a_3)\xi_{n-1} = \pi(a_1)\xi_{n-1}$. Wählt man nun $a = a_1 - a_5 a_3 \in \mathcal{A}$, so gilt $\pi(a)\xi_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq n-1$ und

$$\begin{aligned} \pi(a)\xi_n &= \pi(a_1)\xi_n - \pi(a_5)\pi(a_3)\xi_n \\ &= \lambda\pi(a_1)\xi_{n-1} - \mu\pi(a_5 a_3)\xi_{n-1} \\ &= (\lambda - \mu)\pi(a_1)\xi_{n-1} \neq 0. \end{aligned}$$

□

Satz 3.20. *(Dichtheitssatz von Jacobson) Sind $\xi_1, ..., \xi_n \in X$ linear unabhängig und $\eta_1, ..., \eta_n \in X$, dann gibt es ein $a \in \mathcal{A}$ so, dass $\pi(a)\xi_i = \eta_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.*

Beweis. Nach Satz 3.19 gibt es für alle $1 \leq k \leq n$ ein $b_k \in \mathcal{A}$ so, dass $\pi(b_k)\xi_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$ mit $i \neq k$ und $\pi(b_k)\xi_k \neq 0$ gilt. Darüber hinaus existiert nach Lemma 3.12 für jedes $1 \leq k \leq n$ ein $c_k \in \mathcal{A}$ mit $\pi(c_k)\pi(b_k)\xi_k = \eta_k$. Wählt man $a = \sum_{i=1}^n c_i b_i \in \mathcal{A}$, so folgt die Behauptung. □

4 Anwendungen subharmonischer Funktionen auf Banachalgebren

4.1 Der Satz von Zemánek

Satz 4.1. *Seien $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra und π eine stetige irreduzible Darstellung auf einen Banachraum X. Weiter sei $a \in \mathcal{A}$ so, dass es ein $C > 0$ gibt mit $r(a-b) \leq C$ für alle $b \in \mathcal{A}$ mit $r(b) = r(a)$. Dann existiert ein $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\pi(a)x = \alpha x$ für alle $x \in X$.*

Beweis. Angenommen, es gäbe ein $x \in X$ so, dass $\pi(a)x \neq \alpha x$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann wären $x, \pi(a)x \in X$ linear unabhängig, sodass es nach Satz 3.20 ein $b \in \mathcal{A}$ gäbe mit

$$\begin{aligned} \pi(b)x &= 0 \\ \pi(b)\pi(a)x &= -x. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Weiter wäre

$$F\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{A}, \qquad z \longmapsto \exp(-zb)a\exp(zb)$$

holomorph auf $\mathbb{C}$ mit $F(0) = a$ und wegen $F'(0) = ab - ba$ wäre

$$G\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{A}, \qquad z \longmapsto \begin{cases} \frac{F(z)-a}{z}, & z \neq 0 \\ ab - ba, & z = 0 \end{cases}$$

ebenfalls eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}$. Nach Satz 2.23 ist dann $r \circ G$ subharmonisch auf $\mathbb{C}$.
Es sei nun $z \in \mathbb{C}$. Korollar 3.5 zufolge gilt dann

$$\sigma(\exp(-zb)a\exp(zb)) \cup \{0\} = \sigma(a) \cup \{0\}.$$

Da weiterhin $a \in \mathcal{A}^{-1}$ genau dann gilt, wenn $x^{-1}ax \in \mathcal{A}^{-1}$ für alle $x \in \mathcal{A}^{-1}$, folgt $\sigma(F(z)) = \sigma(a)$. Nach Voraussetzung existiert also ein $C > 0$ mit $r(F(z) - a) \leq C$. Damit gilt auch

$$0 \leq (r \circ G)(z) \leq \tfrac{C}{|z|}$$

für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und somit laut Korollar 2.11 $r \circ G = 0$.
Wegen $r(d) = (r \circ G)(0) = 0$ für $d = ab - ba$ existiert ein $e \in \mathcal{A}$ mit $e - ed = 1$ und somit $d + ded - de = 0$. Mit 4.1 erhält man

$$\pi(d)x = \pi(a)\pi(b)x - \pi(b)\pi(a)x = x,$$

wodurch

$$\begin{aligned} 0 &= \pi(d + ded - de)x \\ &= x + \pi(d)\pi(e)x - \pi(d)\pi(e)x = x \end{aligned}$$

einen Widerspruch liefert.

□

Satz 4.2 (Zemánek)**.** *Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Norm $\|\cdot\|$. Für ein $a \in \mathcal{A}$ sind äquivalent*

(i) $a \in \mathrm{Rad}(\mathcal{A})$,

(ii) $r(x) = r(x + a)$ *für alle* $x \in \mathcal{A}$,

(iii) $r(x + a) = 0$ *für alle quasinilpotenten* $x \in \mathcal{A}$,

(iv) *es existiert ein* $\delta > 0$ *so, dass* $r(x + a) = 0$ *für alle quasinilpotenten* $x \in \mathcal{A}$ *mit* $\|x\| < \delta$,

(v) *es existieren* $C > 0$ *und* $\delta > 0$ *so, dass* $r(x) \leq C\|x-a\|$ *für alle* $x \in \mathcal{A}$ *mit* $\|x-a\| < \delta$.

Beweis. Nach Bemerkung 3.8 folgt (*ii*) aus (*i*). Aus (*ii*) wiederum folgt unmittelbar Aussage (*iii*). Für $a \in \mathcal{A}$ gelte nun (*iii*) und wir zeigen $a \in \mathrm{Rad}(\mathcal{A})$. Sei dazu π eine stetige irreduzible Darstellung von $\mathcal{A}$ auf einen Banachraum X und $u \in \mathcal{A}$ mit $\sigma(u) = \{0\}$. Dann gilt $\sigma(a) = \{0\}$ und $r(a - u) = 0$, sodass laut Satz 4.1 ein $\alpha \in \mathbb{C}$ existiert mit $\pi(a)x = \alpha x$ für alle $x \in X$. Aus Lemma 3.15 folgt $\alpha = 0$ und somit $a \in \ker(\pi)$. Mit Korollar 3.14 erhält man $a \in \mathrm{Rad}(\mathcal{A})$.
Offensichtlich folgt aus (*iii*) direkt (*iv*). Für $a \in \mathcal{A}$ gelte nun (*iv*) für ein $\delta > 0$ und wir zeigen (*iii*). Sei ohne Einschränkung $q \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ quasinilpotent. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| \cdot \|q\| < \delta$ gilt also $r(\lambda q + a) = 0$. Nach Satz 2.23 ist die Abbildung

$$h \colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_{-\infty}, \qquad \lambda \longmapsto \log r(\lambda q + a)$$

subharmonisch. Da für alle $\lambda \in D_{\delta/\|q\|}(0)$ gilt

$$h(\lambda) = -\infty,$$

folgt aus Satz 2.27, dass $h \equiv -\infty$. Insbesondere gilt also $r(q + a) = 0$.
Aus (*ii*) folgt mit $C = 1$ Aussage (*v*) für alle $\delta > 0$. Es gelte nun (*v*) und wir zeigen (*iii*). Sei also $C > 0$ und $\delta > 0$ so, dass $r(x) \leq C\|x - a\|$ für alle $x \in \mathcal{A}$ mit $\|x - a\| < \delta$ gilt. Für ein quasinilpotentes $q \in \mathcal{A}$ ist die Abbildung

$$h \colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \lambda \longmapsto r(q + \lambda a)$$

nach Satz 2.23 subharmonisch. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > \|q\|/\delta$ gilt

$$r(q + \lambda a) = |\lambda| r(q/\lambda + a) \leq C\|q\|.$$

Da h nach Satz 2.5 auch auf $\overline{D_{\|q\|/\delta}(0)}$ beschränkt ist, folgt mit Korollar 2.31, dass h konstant ist mit $r(q + a) = r(q) = 0$.

□

4.2 Der Satz von B. E. Johnson

Satz 4.3 (B. E. Johnson). *Sei $\mathcal{A}$ eine unitale Banachalgebra, $\mathcal{B}$ eine halbeinfache Banachalgebra und $T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ eine surjektive, lineare Abbildung mit $r(Tx) \leq r(x)$ für alle $x \in \mathcal{A}$. Dann ist T stetig.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathcal{A}$ und $y \in \mathcal{B}$ so, dass $\lim_{n\to\infty} Tx_n = y$. Wegen der Surjektivität von T gibt es ein $a \in \mathcal{A}$ mit $Ta = y$. Nach dem Graphensatz [3, Satz 8.11] genügt es zu zeigen, dass $Ta = 0$.
Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und $x \in \mathcal{A}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \lambda x_n + x = x$ und nach Voraussetzung damit

$$r(\mathrm{T}(\lambda x_n + x)) \leq r(\lambda x_n + x).$$

Da r nach Bemerkung 2.3 oberhalbstetig ist, folgt

$$\limsup_{n\to\infty} r(\mathrm{T}(\lambda x_n + x)) \leq \limsup_{n\to\infty} r(\lambda x_n + x) \leq r(x). \tag{4.2}$$

Es sei $x \in \mathcal{A}$. Nach Satz 2.23 definiert

$$\phi_{n,x}\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \lambda \longmapsto r(\lambda Tx_n + Tx) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

eine Folge $(\phi_{n,x})_{n\in\mathbb{N}}$ subharmonischer Funktionen und wegen 4.2 ist $\sup_{n\in\mathbb{N}} \phi_{n,x}$ lokal nach oben beschränkt. Somit ist die Abbildung

$$\phi_x\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \lambda \longmapsto \limsup_{n\to\infty} \phi_{n,x}(\lambda)$$

wohldefiniert für jedes $x \in \mathcal{A}$ mit $\phi_x(\lambda) \leq r(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und nach Satz 2.16 genügt ϕ_x der Mittelwertabschätzung.
Wieder wegen 4.2 ist die Abbildung

$$\psi_x\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \lambda \longmapsto \limsup_{\mu\to\lambda} \phi_x(\mu),$$

wohldefiniert, oberhalbstetig und erfüllt $\psi_x(\lambda) \leq r(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}\psi_x(\lambda) = \limsup_{\mu\to\lambda} \phi_x(\mu) &\leq \limsup_{\mu\to\lambda} \int_{\mathbb{T}} \phi_x(\mu + r\xi) d\lambda(\xi) \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} \limsup_{\mu\to\lambda+r\xi} \phi_x(\mu) d\lambda(\xi)\end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ nach Lemma 2.14. Also ist ψ_x nach Satz 2.12 subharmonisch, nach oben beschränkt und somit nach Satz 2.31 konstant.
Da $x \in \mathcal{A}$ beliebig vorgegeben war, folgt insgesamt

$$r(Tx) = \phi_x(0) \leq \psi_x(0) = \psi_x(\lambda)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und für alle $x \in \mathcal{A}$. Aus der Oberhalbstetigkeit von r folgt

$$\phi_x(\lambda) \leq r(\lambda Ta + Tx)$$

und damit

$$\begin{aligned}\psi_x(\lambda) &= \limsup_{\mu\to\lambda} \phi_x(\mu)\\ &\le \limsup_{\mu\to\lambda} r(\mu Ta + Tx)\\ &\le r(\lambda Ta + Tx)\end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und $x \in \mathcal{A}$. Insgesamt gilt also

$$r(Tx) \le \psi_x(1) \le r(Ta + Tx)$$

für alle $x \in \mathcal{A}$ und damit insbesondere

$$r(T(x-a)) \le r(Tx).$$

Für ein quasinilpotentes $u \in \mathcal{B}$ gibt es ein $b \in \mathcal{A}$ mit $Tb = u$ und

$$r(Ta + Tb) \le r(Tb) = 0$$

und damit $r(Ta + u) = 0$ für alle quasinilpotenten $u \in \mathcal{B}$. Nach Satz 4.2 gilt $Ta \in \mathrm{Rad}(\mathcal{B})$ und da $\mathcal{B}$ halbeinfach ist folgt $Ta = 0$. □

Korollar 4.4. *Alle Normen auf einer halbeinfachen Banachalgebra $\mathcal{A}$ sind äquivalent.*

Beweis. Sei $\mathcal{A}$ halbeinfache Banachalgebra bezüglich der Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$. Aus Satz 4.3 folgt, dass $id_{\mathcal{A}} \colon (\mathcal{A}, \|\cdot\|_1) \to (\mathcal{A}, \|\cdot\|_2)$ stetig ist. Aus dem Prinzip des stetigen Inversen [3, Korollar 8.3] folgt, dass $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent sind und damit dieselbe Normtopologie erzeugen. □

Korollar 4.5. *Jeder Epimorphismus $T \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ von einer Banachalgebra in eine halbeinfache Banachalgebra ist stetig.*

Beweis. Jeder Epimorphismus $T \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ist unital, denn für $y \in \mathcal{B}$ existiert ein $x \in \mathcal{A}$ mit $Tx = y$ und somit

$$T(1)y = T(1)Tx = T(1x) = Tx = y.$$

Seien nun $\lambda \in \mathbb{C}$ und $x \in \mathcal{A}$ mit $\lambda - x \in \mathcal{A}^{-1}$. Aus

$$\begin{aligned}(\lambda - Tx)T((\lambda - x)^{-1}) &= (\lambda T1 - Tx)T((\lambda - x)^{-1})\\ &= T((\lambda - x)(\lambda - x)^{-1})\\ &= T1 = 1\end{aligned}$$

folgt $\sigma(Tx) \subseteq \sigma(x)$ und somit $r(Tx) \le r(x)$. Die Stetigkeit folgt nun aus Satz 4.3. □

Korollar 4.6. *Jede Involution auf einer halbeinfachen Banachalgebra ist stetig.*

4.3 Subadditivität des Spektralradius in kommutativen Banachalgebren

Im nachfolgenden Lemma werden wir zeigen, dass der Spektralradius r in einer kommutativen Banachalgebra $\mathcal{A}$ subadditiv ist, d.h. dass ein $M > 0$ existiert so, dass

$$r(x+y) \leq M(r(x)+r(y))$$

für alle $x, y \in \mathcal{A}$ gilt.

Lemma 4.7. *Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative Banachalgebra mit Norm $\|\cdot\|$. Dann gilt*

$$r(x+y) \leq r(x)+r(y)$$

für alle $x, y \in \mathcal{A}$.

Beweis. Seien $x, y \in \mathcal{A}$ sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > r(x)$ und $\beta > r(y)$. Für $a = \frac{x}{\alpha}$ und $b = \frac{y}{\beta}$ gilt dann

$$r(a) = \tfrac{1}{\alpha} r(x) < 1$$

und analog $r(b) < 1$. Nach Lemma 1.5 existiert also ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N$ gilt

$$\max(\|a^{2^n}\|, \|b^{2^n}\|) < 1.$$

Für

$$\gamma_n = \max_{0 \leq k \leq 2^n} (\|a^k\| \cdot \|b^{2^n-k}\|)$$

gilt

$$\begin{aligned}
\left\|(x+y)^{2^n}\right\|^{1/2^n} &= \left\| \sum_{k=0}^{2^n} \binom{2^n}{k} x^k y^{2^n-k} \right\|^{1/2^n} \\
&\leq \left[\sum_{k=0}^{2^n} \binom{2^n}{k} \alpha^k \beta^{2^n-k} \|a^k\| \cdot \|b^{2^n-k}\| \right]^{1/2^n} \\
&\leq (\alpha+\beta)\gamma_n^{1/2^n}.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\gamma_{n+1} &= \max_{0 \leq k \leq 2^{n+1}} \left(\|a^k\| \cdot \|b^{2^{n+1}-k}\|\right) \\
&= \max\left(\max_{0 \leq k \leq 2^n} \left(\|a^k\| \cdot \|b^{2^{n+1}-k}\|\right), \max_{0 \leq k \leq 2^n} \left(\|a^{2^n+k}\| \cdot \|b^{2^{n+1}-(2^n+k)}\|\right) \right) \\
&\leq \max\left(\max_{0 \leq k \leq 2^n} \left(\|a^k\| \cdot \|b^{2^n-k}\| \cdot \|b^{2^n}\|\right), \max_{0 \leq k \leq 2^n} \left(\|a^{2^n}\| \cdot \|a^k\| \cdot \|b^{2^n-k}\|\right) \right) \\
&= \max\left(\|a^{2^n}\|, \|b^{2^n}\|\right) \max_{0 \leq k \leq 2^n} \left(\|a^k\| \cdot \|b^{2^n-k}\|\right) \\
&\leq \gamma_n
\end{aligned}$$

für alle $n \geq N$ gilt

$$\begin{aligned} r(x+y) &= \lim_{n\to\infty} \left\|(x+y)^{2^n}\right\|^{1/2^n} \\ &= \limsup_{n\to\infty} \left\|(x+y)^{2^n}\right\|^{1/2^n} \\ &\leq (\alpha+\beta) \limsup_{n\to\infty} \gamma_n^{1/2^n} \\ &\leq (\alpha+\beta) \limsup_{n\to\infty} \gamma_N^{1/2^n} \\ &= \alpha+\beta \end{aligned}$$

für beliebiges $\alpha > r(x)$ und $\beta > r(y)$ und damit die Behauptung. □

Ist $\mathcal{A}/\operatorname{Rad}(\mathcal{A})$ kommutativ, so zeigt Lemma 4.7, dass

$$r([x]+[y]) \leq r([x]) + r([y])$$

für alle $[x],[y] \in \mathcal{A}/\operatorname{Rad}(\mathcal{A})$ gilt. Bemerkung 3.8 zufolge gilt damit schon

$$r(x+y) \leq r(x) + r(y)$$

für alle $x, y \in \mathcal{A}$. Somit genügt in Lemma 4.7 bereits die Kommutativität von $\mathcal{A}/\operatorname{Rad}(\mathcal{A})$, um die Subadditivität von $r\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ zu folgern. Der nächste Satz wird zeigen, dass in diesem Fall auch die Umkehrung gilt.

Satz 4.8. *Für eine Banachalgebra $\mathcal{A}$ sind äquivalent*

(i) $\mathcal{A}/\operatorname{Rad}(\mathcal{A})$ *ist kommutativ,*

(ii) der Spektralradius $r\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ *ist subadditiv,*

(iii) der Spektralradius $r\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ *ist gleichmäßig stetig.*

Beweis. Wie in den Vorüberlegungen folgt aus (i) zunächst

$$r(a) \leq r(a-b) + r(b)$$

sowie

$$r(b) \leq r(a-b) + r(a)$$

und damit

$$|r(a) - r(b)| \leq r(a-b) \leq \|a-b\|$$

für alle $a, b \in \mathcal{A}$. Also impliziert (i) sowohl (ii) also auch (iii).
Sei nun r gleichmäßig stetig und $\delta > 0$ so, dass $|r(c) - r(d)| < 1$ für alle $c, d \in \mathcal{A}$ mit $\|c-d\| < \delta$. Sind $a, b \in \mathcal{A}$ beliebig, so gilt für $c, d \in \mathcal{A}$ mit $c = \frac{\delta(a-b)}{\|a\|+1}$ und $d = \frac{-\delta b}{\|a\|+1}$, dass

$$r(c) \leq r(d) + 1$$

und damit

$$r(a-b) \leq \frac{\|a\|+1}{\delta} + r(b).$$

Gilt nun Aussage (ii), so ist

$$r(a-b) \leq M(r(a)+r(b)).$$

für ein $M > 0$. In beiden Fällen existiert also ein $C > 0$ so, dass $r(a-b) \leq C$ für alle $b \in \mathcal{A}$ mit $r(a) = r(b)$. Für eine stetige irreduzible Darstellung π von $\mathcal{A}$ auf einen Banachraum X existiert nach Satz 4.1 ein $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\pi(a)x = \alpha x$ für alle $x \in X$. Analog gibt es ein $\beta \in \mathbb{C}$ mit $\pi(b)x = \beta x$ für alle $x \in X$. Insbesondere gilt damit

$$\pi(ab-ba)x = \pi(a)\pi(b)x - \pi(b)(a)x = \alpha\beta - \beta\alpha = 0$$

für alle $x \in X$ und Satz 3.14 zeigt dann $ab - ba \in \mathrm{Rad}(\mathcal{A})$. Also folgt (i) sowohl aus (ii) als auch aus (iii). $\square$

Literaturverzeichnis

[1] D. Langwitz. *Über vollständige Normtopologien in linearen Räumen.* Arch. Math. (Basel) 6, (1955). 128-131.

[2] B. Aupetit. *The Uniqueness of the Complete Norm Topology in Banach Algebras and Banach Jordan Algebras.* J. Funct. Anal. 47 (1982), no. 1, 1-6, 1982.

[3] J. Eschmeier. *Funktionalanalysis I.* Vorlesungsskript, Universität des Saarlandes, 2015.

[4] B. E. Johnson. *The uniqueness of the (complete) norm topology.* Bull. Amer. Math. Soc. 73 1967 537-539, 1967.

[5] B. Aupetit. *A Primer on Spectral Theory.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 1991.

[6] D. L. Cohn. *Measure Theory.* Birkhäuser, Boston, 1980.

[7] J. Eschmeier. *Funktionentheorie II.* Vorlesungsskript, Universität des Saarlandes, 2016.

[8] J. Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie.* Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[9] W. Fischer; I. Lieb. *Funktionentheorie.* Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1994.

[10] J. Eschmeier. *Funktionentheorie I.* Vorlesungsskript, Universität des Saarlandes, 2015.

[11] P. L. Halmos. *Naive Set Theory.* Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1960.

[12] H. G. Dales. *Banach Algebras and Automatic Continuity.* Oxford University Press Inc., New York, 2000.

[13] T. Ransford. *Potential Theory in the Complex Plane.* Cambridge University Press, New York, 1995.