UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2004

Blatt 11 Abgabetermin: Dienstag, 06.07.2004, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 48 **(4 Punkte)**

Sei E ein bornologischer oder tonnelierter lokalkonvexer topologischer Vektorraum und $M \subset E'$ eine Menge stetiger Linearformen auf E mit der folgenden Eigenschaft:

Ist $B \subset E$ beschränkt, so ist auch $\{f(x) : f \in M, x \in B\} \subset k$ beschränkt.

Zeigen Sie: Die Menge M ist gleichstetig.

Aufgabe 49 **(4 Punkte)**

Seien E, F lokalkonvexe Hausdorffräume. Wir schreiben $L_s(E,F)$ für den Raum $L(E,F)$, versehen mit der durch das Halbnormensystem

$$\|T\|_{x,p} = p(Tx), \quad x \in E, p \text{ stetige Halbnorm auf } F$$

erzeugten Topologie, und $L_b(E,F)$ für $L(E,F)$, versehen mit der durch das Halbnormensystem

$$\|T\|_{B,p} = \sup_{x \in B} p(Tx), \quad B \subset E \text{ beschränkt}, p \text{ stetige Halbnorm auf } F$$

erzeugten Topologie. Sei F vollständig. Zeigen Sie:

(a) E tonneliert $\Rightarrow L_s(E,F)$ folgenvollständig.

(b) E bornologisch $\Rightarrow L_b(E,F)$ vollständig.

Aufgabe 50 **(4 Punkte)**

Sei E ein Banachraum mit $\dim E = \infty$. Zeigen Sie:

$(E, \sigma(E,E'))$ ist nicht bornologisch und nicht tonneliert.

(Hinweis: Die Menge $B_{E'}$ ist nicht $\sigma(E,E')$-gleichstetig. Warum?)

Aufgabe 51 **(4 Punkte)**

Seien E, F lokalkonvexe Räume, E tonneliert und $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetig, linearer Operatoren $T_n : E \to F$. Für alle $x \in E$ existiere $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x \in F$. Zeigen Sie, dass der Operator

$$T : E \to F \ ; \ x \mapsto \lim_{n\to\infty} T_n x$$

stetig, linear ist.

Aufgabe 52* **(8* Punkte)**

Seien E, F, G lokalkonvexe topologische Vektorräume und $B : E \times F \to G$ eine bilineare Abbildung. Zeigen Sie:

(a) B ist stetig genau dann, wenn für jede stetige Halbnorm q auf G stetige Halbnormen p_E auf E und p_F auf F existieren derart, dass $q(B(x,y)) \leq p_E(x)p_F(y)$ für alle $x \in E$, $y \in F$.

(b) Sind E, F Frécheträume und sind alle Abbildungen $B(x,\cdot)$, $B(\cdot,y)$ $(x \in E,\ y \in F)$ stetig, so ist B stetig.

(Hinweis zu (b): Es genügt die Folgenstetigkeit von B im Punkt $(0,0)$ zu zeigen.)