UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2004

Blatt 12 Abgabetermin: Dienstag, 13.07.2004, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 53 **(4 Punkte)**
Sei $\langle E, F\rangle$ ein Dualsystem. Eine lineare Abbildung $T : E \to E$ heißt *konjugierbar*, falls eine lineare Abbildung $T' : F \to F$ existiert mit

$$\langle Tx, y\rangle \;=\; \langle x, T'y\rangle \quad (x \in E,\; y \in F).$$

Zeigen Sie: Eine lineare Abbildung $T : E \to E$ ist genau dann konjugierbar, wenn sie schwach stetig ist, das heißt $T : (E, \sigma(E, F)) \to (E, \sigma(E, F))$ stetig ist.

Aufgabe 54 **(4 Punkte)**
Sei $\langle E, F\rangle$ ein Dualsystem und $F_0 \subsetneq F$ ein echter linearer Teilraum von F, der punktetrennend für E ist, d.h. zu jedem $x \in E$, $x \neq 0$, existiert ein $u \in F_0$ mit $\langle x, u\rangle \neq 0$. Zeigen Sie, dass $\sigma(E, F_0)$ echt gröber ist als $\sigma(E, F)$.

Aufgabe 55 **(4 Punkte)**
Seien E, F lokalkonvexe Hausdorffräume und $T : E \to F$ eine stetige lineare Abbildung. Zeigen Sie:

(a) $T : (E, \sigma(E, E')) \to (F, \sigma(F, F'))$ ist stetig.

(b) Die Abbildung $T' : F' \to E'$, $T'(u) = u \circ T$, ist stetig und linear, wenn man F' und E' jeweils beide mit der schwachen Topologie (Mackey-Topologie, starken Topologie) in den Dualsystemen $\langle F, F'\rangle$ und $\langle E, E'\rangle$ versieht.

Aufgabe 56 **(4 Punkte)**
Sei E ein tonnelierter lokalkonvexer topologischer Vektorraum, $\gamma \subset \mathcal{P}(E)$ ein gesättigtes System von Teilmengen von E und τ_γ die zugehörige γ-Topologie für das Dualsystem $\langle E, E'\rangle$ auf E'. Zeigen Sie, dass (E', τ_γ) folgenvollständig ist.
(Hinweis: Aufgabe 51)

Aufgabe 57* **(4* Punkte)**
Sei $(E_i)_{i\in I}$ eine Familie lokalkonvexer topologischer Vektorräume und $E = \prod_{i\in I} E_i$ versehen mit der Produktopologie.
Zeigen Sie: Die schwache Topologie auf E bezüglich $\langle E, E'\rangle$ ist die Produkttopologie der schwachen Topologien auf den E_i bezüglich $\langle E_i, E_i'\rangle$ $(i \in I)$.