UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2004

Blatt 13 Abgabetermin: Dienstag, 20.07.2004, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 58 **(4 Punkte)**
Sei $\langle E, F\rangle$ ein Dualsystem und seien τ_1, τ_2 zulässige Topologien auf E bzgl. $\langle E, F\rangle$ mit $\tau_1 \subset \tau_2$. Zeigen Sie:
Ist (E, τ_1) (folgen-,quasi-)vollständig, so ist (E, τ_2) vollständig im selben Sinne.

Aufgabe 59 **(4 Punkte)**
Seien E und F lokalkonvexe Hausdorffräume. Auf $L(E, F)$ betrachte man die γ-Topologien τ_w und τ_c, definiert durch $\gamma_w = \{S \subset E;\ S \text{ endlich}\}$ und $\gamma_c = \{S \subset E;\ S \text{ kompakt}\}$. Zeigen Sie:
Ein gleichstetiges Netz $(A_i)_{i\in I}$ in $L(E, F)$ konvergiert genau dann bezüglich τ_w, wenn es bezüglich τ_c konvergiert.

Aufgabe 60 **(6+2* Punkte)**
Für einen k-Vektorraum X bezeichne $X^* = \{u;\ u : X \to k \text{ linear}\}$ den algebraischen Dualraum. Zeigen Sie:

(a) X^* ist $\sigma(X^*, X)$-vollständig.

(b) Für einen lokalkonvexen Hausdorffraum E ist die kanonische Abbildung

$$j : (E, \sigma(E, E')) \to ((E')^*, \sigma((E')^*, E'))\ ;\ j(x)(x') = \langle x, x'\rangle,$$

ein topologischer Monomorphismus mit dichtem Bild.

(c) Ein lokalkonvexer Hausdorffraum E ist genau dann $\sigma(E, E')$-vollständig, wenn die Abbildung j aus Teil (b) surjektiv ist.

(d) * Ein normierter Raum $(E, \|\cdot\|)$ ist genau dann $\sigma(E, E')$-vollständig, wenn $\dim E < \infty$.

Aufgabe 61 **(4 Punkte)**
Sei $T : E \to F$ eine stetig lineare Abbildung zwischen lokalkonvexen Hausdorffräumen und $T' : F' \to E'$, $T'v := v \circ T$, die adjungierte Abbildung. Zeigen Sie, dass gilt:

$$(\ker T)^\perp = \overline{(\operatorname{im} T')}^{\sigma(E',E)}, \qquad {}^\perp(\ker T') = \overline{(\operatorname{im} T)}^{\sigma(F,F')}.$$

Aufgabe 62* **(4* Punkte)**

Sei (E, τ) ein Semi-Montelraum, das heißt ein lokalkonvexer Hausdorffraum, in dem jede beschränkte Menge relativ kompakt ist. Zeigen Sie für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E:

$$(x_n) \to x \text{ bzgl. } \sigma(E, E') \Leftrightarrow (x_n) \to x \text{ bzgl. } \tau.$$

(Hinweis: Auf abgeschlossenen beschränkten Mengen $B \subset E$ stimmen $\sigma(E, E')$ und τ überein. Um dies zu zeigen, benutzen Sie, dass jede stetige, bijektive Abbildung $f : X \to Y$ zwischen kompakten Hausdorffräumen X, Y offen ist.)