UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2004

Blatt 1 Abgabetermin: Montag, 26.04.2004, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (3+1 Punkte)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Unter einer *kompakten Ausschöpfung* von U versteht man eine Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakter Teilmengen in U, so dass $K_n \subset \operatorname{int}(K_{n+1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $U = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ gilt. Zeigen Sie:

(a) Für alle $U \subset \mathbb{R}^n$ offen existiert eine kompakte Ausschöpfung.

(b) Ist $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine kompakte Ausschöpfung von U, so existiert zu jeder kompakten Menge $K \subset U$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $K \subset K_n$.

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Dann heißt eine Abbildung $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ isometrisch*, wenn $d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$ für alle $x, y \in X$ gilt.*

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien (X, d), (Y_1, d_1) und (Y_2, d_2) metrische Räume und seien

$$j_1 : (X, d) \to (Y_1, d_1), \qquad j_2 : (X, d) \to (Y_2, d_2)$$

isometrische Abbildungen mit dichtem Bild. Weiter seien (Y_1, d_1) und (Y_2, d_2) vollständig. Zeigen Sie: Es gibt eine eindeutige isometrische Bijektion $\varrho : (Y_1, d_1) \to (Y_2, d_2)$ mit $j_2 = \varrho \circ j_1$.

Aufgabe 3 (1+2+2=5 Punkte)

Sei $(X_n, d_n)_{n\geq 0}$ eine Folge metrischer Räume und sei

$$X = \prod_{n=0}^{\infty} X_n = \{(x_n)_{n\geq 0}\ ;\ x_n \in X_n \text{ für alle } n \geq 0\}.$$

Bestimmen Sie eine Metrik d auf X, für die gilt:

(a) Eine Folge in X konvergiert genau dann bezüglich d, wenn sie komponentenweise konvergiert.

(b) Der Raum (X, d) ist genau dann vollständig, wenn jeder der Räume (X_n, d_n) vollständig ist.

(Hinweis: Betrachten Sie das Beispiel $\mathcal{O}(U)$ aus der Vorlesung.)

Sei E ein k-Vektorraum ($k = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Eine Menge $M \subset E$ heißt

- konvex*, falls $tx + (1-t)y \in M$ für alle $x, y \in M,\ t \in [0,1]$,*
- absolut konvex*, falls $\alpha x + \beta y \in M$, für alle $x, y \in M,\ \alpha, \beta \in k$ mit $|\alpha|, |\beta| \leq 1$,*
- kreisförmig*, falls $\alpha x \in M$ für alle $x \in M,\ \alpha \in k$ mit $|\alpha| \leq 1$.*

Aufgabe 4 **(2+2+1 Punkte)**

Sei E ein k-Vektorraum und $M \subset E$. Zeigen Sie:

(a) $C(M) := \{\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\ ;\ n \geq 1,\ x_1, \ldots, x_n \in M,\ t_1, \ldots t_n \in [0,1]$ mit $\sum_{i=1}^{n} t_i \leq 1\}$ ist die kleinste konvexe Menge in E, die M enthält.

(b) $\Gamma(M) := \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\ ;\ n \geq 1,\ x_1, \ldots, x_n \in M,\ \alpha_1, \ldots \alpha_n \in k$ mit $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \leq 1\}$ ist die kleinste absolut konvexe Menge in E, die M enthält.

(c) M ist absolut konvex $\Leftrightarrow$ M ist konvex und kreisförmig.