UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis II

Sommersemester 2004

Blatt 2 Abgabetermin: Dienstag, 04.05.2004, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 5 (1+1+2 Punkte)

Sei (X, t) ein topologischer Raum und $A \subset X$. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{Int}(A)$ ist die größte offene Menge in X, die in A enthalten ist.

(b) $\overline{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge in X, in der A enthalten ist.

(c) Ist (X, t) metrisierbar, so gilt

$$\overline{A} \;=\; \{\; x \in X \;;\; \text{es existiert eine Folge } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ in } X \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = x \;\} \;.$$

Aufgabe 6 (1+1+2 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $\emptyset \neq A \subset X$ sei die Abstandsfunktion $d_A : X \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$d_A(x) \;=\; \inf_{y\in A} d(x, y) \quad (x \in X) \;.$$

Zeigen Sie:

(a) d_A ist stetig auf X für alle $\emptyset \neq A \subset X$.

(b) Für $x \in X$ und $\emptyset \neq A \subset X$ gilt: $d_A(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \overline{A}$.

(c) Sind $F, G \subset X$ abgeschlossene Mengen in X, so gibt es eine stetige Funktion $f : X \to [0, \infty)$ mit $f(x) = 0$ für alle $x \in F$ und $f(y) = 1$ für alle $y \in G$.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\emptyset \neq M \subset X$. Zeigen Sie: Ist X separabel, so ist auch M mit der Relativtopologie separabel.

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Seien (X_n, d_n) $(n \in \mathbb{N}_0)$, metrische Räume und sei $X = \prod_{n=0}^{\infty} X_n$ versehen mit der Metrik

$$d\left((x_n)_{n=0}^{\infty}, (y_n)_{n=0}^{\infty}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)} \qquad \text{(vergleiche Aufgabe 3).}$$

Zeigen Sie:

$$(X, d) \text{ ist separabel} \quad\Leftrightarrow\quad \text{alle } (X_n, d_n) \text{ sind separabel.}$$

Zwei Metriken d_1, d_2 auf einer Menge X heißen äquivalent*, wenn Konstanten $\alpha, \beta > 0$ existieren mit*

$$\alpha d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta d_1(x,y) \qquad \textit{für alle } x, y \in X.$$

Sie heißen topologisch äquivalent*, wenn sie dieselbe Topologie auf X induzieren.*

Aufgabe 9 (2+2 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass äquivalente Metriken stets auch topologisch äquivalent sind.

(b) Gibt es topologisch äquivalente Metriken, die nicht äquivalent sind?
(Hinweis: $X = \mathbb{R}$, $d_1(x,y) = |x-y|$, $d_2(x,y) = \min(1, |x-y|)$.)